ریاضی۳ وحسابان به سبک روحانی

فصل

مشتق

مولف : محمد صادق روحانی

مشتق

مشتق تابع در یک نقطه: فرض کنید تابع $f(x)$ در یک همسایگی نقطه‌ی a تعریف شده باشد. اگر حد $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ موجود باشد، یعنی عدد شود اصطلاحاً می‌گوییم تابع $f(x)$ در $x=a$ مشتق پذیر است و مقدار آن را با نماد $f'(a)$ نمایش می‌دهیم.

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

تعریف دیگری که با تعریف فوق هم‌ارز است به صورت زیر است:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

تذکر: اگر این حد عدد یکتایی نشود و یا وجود نداشته باشد، تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x=a$ مشتق ناپذیر است.

برای محاسبه مشتق تابع در یک نقطه از یکی از روش‌های زیر استفاده می‌شود.

$$1)\ f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad 2)\ f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

➢ در روش اول به شکل زیر عمل می‌کنیم:

۱. محاسبه $f(a)$ ۲. تعیین $f(x)-f(a)$ ۳. تشکیل و ساده کردن $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ۴. محاسبه حد $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ که دارای ابهام $\frac{0}{0}$ است و روش‌های رفع ابهام آن را در حد دیدیم.

➢ در روش دوم به شکل زیر عمل می‌کنیم:

۱. محاسبه $f(a)$ ۲. تعیین $f(a+h)$ ۳. محاسبه $f(a+h)-f(a)$ ۴. محاسبه حد $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ که دارای ابهام $\frac{0}{0}$ است.

۱) با استفاده از تعریف مشتق، مشتق‌پذیری تابع $f(x)=x|x-2|$ را در نقطه $x=2$ مورد بررسی قرار دهید. (شهریور ۹۴)

☑پاسخ:

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x|x-2|-0}{x-2}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x(x-2)}{x-2}=2=f'(2^+)\\ \lim\limits_{x\to 2^-}\frac{-x(x-2)}{x-2}=-2=f'(2^-)\end{cases}$$

تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست. زیرا مشتق چپ و راست آن با هم برابر نیست.

۲) با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x}-1$ را در نقطه‌ی $x=1$ بیابید.

☑پاسخ:

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)-(0)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{2}$$

۳ با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=x^2+1$ را در نقطه‌ی $x=a$ محاسبه کنید. (خرداد ۹۴)

☑پاسخ:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2+1-a^2-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^2+2ah+h^2+1-a^2-1}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2ah+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}2a+h=2a$$

۴ مشتق پذیری تابع $f(x)=\left|x^2-1\right|$ را در نقاط $x=1$ بررسی کنید.

☑پاسخ:

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{\left|x^2-1\right|-0}{x-1}=\begin{cases}\lim_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=2=f'_+(1)\\[2mm] \lim_{x\to 1^-}\dfrac{-(x-1)(x+1)}{x-1}=-2=f'_-(1)\end{cases}$$

تابع در این نقطه مشتق‌ناپذیر است.

۵ با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را در نقطه $x=1$ بررسی کنید.

☑پاسخ:

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1-x}{x}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{x(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{x}=-1$$

۶ مشتق تابع $f(x)=x^3+3x$ را در نقطه‌ی $x=1$ با استفاده از تعریف مشتق بیابید.

☑پاسخ:

راه اول)

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3+3x-4}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+4)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}x^2+x+4=6$$

راه دوم)

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^3+3(1+h)-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h^3+3h^2+3h)+(3+3h)-4}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^3+6h+3h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(h^2+3h+6)}{h}=\lim_{h\to 0}(h^2+3h+6)=6$$

۷ با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=\sqrt{4-x}$ را به دست آورید. (هماهنگ کشوری ۸۸)

☑پاسخ:

گویا کردن

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4-(x+h)}-\sqrt{4-x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4-(x+h)}-\sqrt{4-x}}{h}\times\frac{\sqrt{4-(x+h)}+\sqrt{4-x}}{\sqrt{4-(x+h)}+\sqrt{4-x}}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4-(x+h)-4+x}{h\left(\sqrt{4-(x+h)}+\sqrt{4-x}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h\left(\sqrt{4-(x+h)}+\sqrt{4-x}\right)}=\frac{-1}{2\sqrt{4-x}}$$

مشتق چپ، مشتق راست و رابطه‌ی پیوستگی و مشتق پذیری

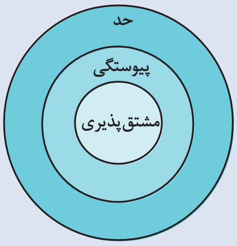
مشتق راست: در تابع $y=f(x)$ اگر $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ موجود باشد (عدد شود) این حد را مشتق راست تابع $f(x)$ در $x=a$ نامیده و با نماد $f'_+(a)$ نشان می‌دهند.

مشتق چپ: در تابع $y=f(x)$ اگر $\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ موجود باشد (عدد شود) این حد را مشتق چپ تابع $f(x)$ در $x=a$ نامیده و با نماد $f'_-(a)$ نشان می‌دهند.

هر تابع مشتق پذیر، پیوسته است ولی هر تابع پیوسته‌ای مشتق پذیر نیست.

عملاً پیوستگی شرط لازم مشتق پذیری است ولی کافی نیست.

یعنی توابعی وجود دارند که پیوسته‌اند ولی مشتق پذیر نیستند.



نکته

اگر تابعی در $x=a$ فقط پیوستگی راست داشته باشد در آن نقطه مشتق چپ ندارد و مشتق راست نیز باید بررسی شود و هم‌چنین اگر تابعی فقط پیوستگی چپ داشته باشد در آن نقطه مشتق راست ندارد و مشتق چپ آن باید بررسی شود.

روش حل مسئله

برای حل مسائل مربوط به مشتق پذیری در یک نقطه به روش زیر عمل کنید:

۱) پیوستگی تابع در $x=a$ را بررسی کنید. یعنی باید $\lim\limits_{x\to a^\pm} f(x)=f(a)$ اگر یکی از پیوستگی‌ها برقرار نبود مشتق آن نیز وجود ندارد. (عدم وجود مشتق را بیان کنید. به‌خصوص در توابع قدرمطلقی، چند ضابطه‌ای و براکتی)

۲) مشتق چپ و راست را از راه تعریف بررسی می‌کنیم. اگر داشته باشیم:

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\text{عدد شود}$$

می‌گوییم تابع در $x=a$ مشتق پذیر است.

۸ با استفاده از تعریف مشتق، مشتق‌های چپ و راست تابع $f(x)=|x-۲|$ را در $x=۲$ در صورت وجود بیابید. (خرداد ۹۲)

پاسخ: تابع در $x=۲$ مشتق‌پذیر نیست.

$$\lim_{x\to ۲}|x-۲|=۰=f(۲) \Rightarrow f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{|x-۲|-۰}{x-۲}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{x-۲}{x-۲}=۱=f'_+(۲)\\[2mm] \lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{-(x-۲)}{x-۲}=-۱=f'_-(۲)\end{cases}$$

بررسی پیوستگی

۹ از طریق تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=(x^{۲}-۱)[x]$ را در $x=۱$ بررسی کنید.

☑پاسخ:

تابع در این نقطه پیوسته است.

$$\lim_{x\to ۱^{\pm}}(x^{۲}-۱)[x]=(۰)[۱^{\pm}]=۰=f(۱)$$

تابع در این نقطه مشتق ناپذیر است.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{(x^{۲}-۱)[x]}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x+۱)[x]}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}(x+۱)[x]=\begin{cases}۲[۱^{+}]=۲=f'_{+}(۱)\\ ۲[۱^{-}]=۰=f'_{-}(۱)\end{cases}$$

۱۰ مشتق پذیری تابع $f(x)=\begin{cases}۳x^{۲} & x\le ۱\\ -۲x^{۲}+۵ & x>۱\end{cases}$ را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه‌ی $x=۱$ بررسی کنید.

☑پاسخ:

تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x=۱$ پیوسته است.

$$\lim_{x\to ۱^{-}}f(x)=۳(۱)^{۲}=۳=f(۱)=\lim_{x\to ۱^{+}}f(x)=-۲(۱)^{۲}+۵=۳$$

حال بررسی مشتق چپ و راست:

$$f'_{+}(۱)=\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{-۲x^{۲}+۵-۳}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{-۲(x^{۲}-۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{-۲\cancel{(x-۱)}(x+۱)}{\cancel{x-۱}}=-۴$$

$$f'_{-}(۱)=\lim_{x\to ۱^{-}}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^{-}}\frac{۳x^{۲}-۳}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^{-}}\frac{۳(x-۱)(x+۱)}{x-۱}=۳(۲)=۶$$

تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x=۱$ مشتق پذیر نیست.

۱۱ تابع $f(x)=\begin{cases}۸x & x\le ۲\\ ۲x^{۲}+۱ & x>۲\end{cases}$ مفروض است.

الف) $f'_{-}(۲),f'_{+}(۲)$ را به دست آورید.

ب) آیا تابع f در $x=۲$ مشتق پذیر است؟ چرا؟

☑پاسخ:

در توابع چند ضابطه‌ای اول پیوستگی در نقطه‌ی مرزی را بررسی می‌کنیم، درصورت پیوسته بودن مشتق چپ و راست را از ضابطه مربوطه محاسبه و باهم مقایسه می‌کنیم. در صورت برابری مشتق پذیر است.

$$\lim_{x\to ۲^{-}}۸x=۱۶=f(۲)\neq\lim_{x\to ۲^{+}}۲x^{۲}+۱=۹$$

تابع در $x=۲$ فقط پیوستگی چپ دارد و پیوستگی راست ندارد. بنابراین مشتق راست ندارد و داریم:

$$f'_{-}(۲)=\lim_{x\to ۲^{-}}\frac{۸x-۱۶}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^{-}}\frac{۸(x-۲)}{x-۲}=۸$$

۱۲ مشتق پذیری تابع $f(x)=\begin{cases}x^{۲}-۲ & x\le ۲\\ \frac{۱}{۲}x+۱ & x>۲\end{cases}$ را در $x=۲$ بررسی کنید. (نهایی خرداد ۹۰ خارج کشور)

☑پاسخ:

تابع در این نقطه پیوسته است.

$$\lim_{x\to ۲^{-}}x^{۲}-۲=۲=f(۲)=\lim_{x\to ۲^{+}}\frac{۱}{۲}\times ۲+۱=۲$$

ولی مشتق ناپذیر است. چون مشتق چپ و راست‌ها باهم برابر نیستند.

$$f'(x)=\begin{cases}۲x & x\le ۲\\ \frac{۱}{۲} & x>۲\end{cases}\Rightarrow f'_{-}(۲)=۴\neq f'_{+}(۲)=\frac{۱}{۲}$$

البته از راه تعریف مشتق هم می‌توان بررسی نمود.

۱۳ مشتق تابع $f(x)=x[x]$ را در نقطه‌ی $x=۱$ بررسی کنید.

پاسخ:

$$\lim_{x\to ۱^+} x[x]=۱[۱^+]=۱=f(۱)\neq \lim_{x\to ۱^-} x[x]=۱[۱^-]=۰$$

تابع در $x=۱$ پیوستگی چپ ندارد بنابراین مشتق چپ ندارد ولی برای مشتق راست آن داریم:

$$f'_+(۱)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x[x]-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x[۱^+]-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x-۱}{x-۱}=۱$$

۱۴ آیا تابع $f(x)=x[x]$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ (دلیل خود را توضیح دهید) (خرداد ۹۱)

پاسخ:

$$\lim_{x\to ۰} x[x]=f(۰)=۰ \quad , \quad f'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{x[x]-۰}{x-۰}=\begin{cases}\lim_{x\to ۰^+}[x]=[۰^+]=۰\\ \lim_{x\to ۰^-}[x]=[۰^-]=-۱\end{cases}$$

بررسی پیوستگی

تابع در $x=۰$ مشتق ناپزیر است.

۱۵ مشتق پذیری تابع $f(x)=\begin{cases}x^۲[x] & x\neq ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases}$ را در $x=۰$ بررسی کنید.

پاسخ:

$$\lim_{x\to ۰} x^۲[x]=f(۰)=۰ \quad , \quad f'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰} \Rightarrow \lim_{x\to ۰}\frac{x^۲[x]-۰}{x}=\lim_{x\to ۰} x[x]=۰ \Rightarrow f'(۰)=۰$$

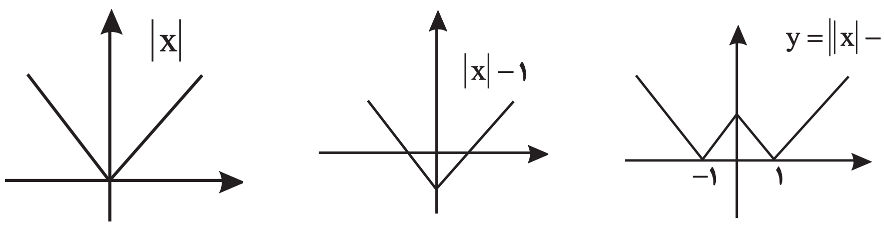
بررسی پیوستگی

یعنی تابع در $x=۰$ مشتق پزیر است.

۱۶ با رسم نمودار تابع $f(x)=\left||x|-۱\right|$ تعیین کنید تابع در چه نقاطی مشتق پذیر نیست؟ (خرداد ۸۶)

پاسخ:

تابع در سه نقطه‌ی $x=۱$, $x=۰$, $x=-۱$ زاویه‌دار است بنابراین مشتق ناپزیر است.



نکته

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(x_۰+mh)-f(x_۰)}{h}=mf'(x_۰)$$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(x_۰+mh)-f(x_۰+nh)}{rh}=\left(\frac{m-n}{r}\right)f'(x_۰)$$

۱۷ اگر $f(x)=\begin{cases}x^2+3x & x\geq 1\\ x^2-3x+6 & x<1\end{cases}$ حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1)-f(1-h^2)}{h^2}$ چقدر است ؟ (آزاد ۷۸)

۱) ۵ ۲) -1 ۳) ۴ ۴) -2

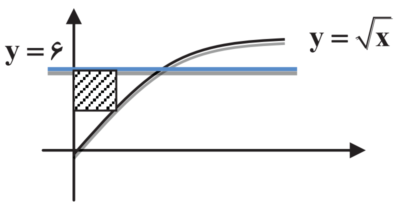
همون m است

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1)-f(1-h^2)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{-\left(f(1-h^2)-f(1)\right)}{h^2}=-(-1)f'(1^-)=\left(x^2-3x+6\right)'_1=(2x-3)_1=-1$$

$$1-h^2=1-(0^\pm)^2=1-0^+=1^-$$

۱۸ در شکل مقابل ، $A(x)$ مساحت مستطیل سایه زده می باشد . حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{A(4+h)-A(4)}{h}$ کدام است ؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴



طول مستطیل

$$A(x)=x\left(6-\sqrt{x}\right)=6x-x\sqrt{x}$$

عرض مستطیل

$$\lim_{h\to 0}\frac{A(4+h)-A(4)}{h}=A'(4)=\left(6x-x\sqrt{x}\right)'_4=\left(6-\left(\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}}\right)\right)_4=3$$

۱۹ اگر تابع f در x_0 مشتق پذیر باشد و $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'_+(x_0)$ آنگاه $\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}$ کدام است ؟

۱) $f'_+(x_0)$ ۲) $2f'_+(x_0)$

۳) $\frac{1}{2}f'_+(x_0)$ ۴) $4f'_+(x_0)$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}=2f'_-(x_0)=2f'_+(x_0)$$

چون گفته مشتق پذیره پس مشتق چپ وراست برابرند

قضایای مشتق

اگر f, g هر دو در نقطه $x=a$ مشتق پذیر با شند ، آنگاه توابع $f \pm g$, kf, $f \times g$ نیز در $x=a$ مشتق پذیرند و آن گاه :

$$۱)\ (f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$$

$$۲)\ (kf)'(a) = kf'(a)$$

$$۳)\ (f \times g)'(a) = f'(a)g(a) + g'(a)f(a)$$

اگر f و g در $x=a$ مشتق پذیر و g در یک همسایگی a مخا لف صفر با شد آنگاه :

$$۱)\ \left(\frac{۱}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{g^{۲}(a)}$$

$$۲)\ \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{g^{۲}(a)}$$

۲۰ فرض کنید $f(x)$ تابعی مشتق‌پذیر و a عددی حقیقی باشد با محاسبه و حدگیری نشان دهید تابع $g(x) = f(ax)$ نیز مشتق پذیر و $g'(x) = af'(ax)$ می‌باشد. (خرداد ۹۳)

☑پاسخ:

$$g'(x) = \lim_{h \to ۰} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to ۰} \frac{f(ax+ah) - f(ax)}{h} = (a)\lim_{h \to ۰} \frac{f(ax+ah) - f(ax)}{ah} = af'(ax)$$

۲۱ اگر $f(x)$ تابعی مشتق پذیر و داشته باشیم : $\lim_{x \to ۰} \frac{f(x-۲) - f(-۲)}{x} = ۵$ و $g(x) = x^{۲} + f(x)$ آنگاه $g'(-۲)$ کدام است ؟

۱) -۳ ۲) ۵ ۳) ۱ ۴) ۹

$$\lim_{x \to ۰} \frac{f(x-۲) - f(-۲)}{x} = \lim_{x \to ۰} \frac{f(-۲+x) - f(-۲)}{x} = f'(-۲) = ۵$$

$$g(x) = x^{۲} + f(x) \quad \Rightarrow \quad g'(-۲) = \left(۲x + f'(x)\right)_{-۲} = -۴ + ۵ = ۱$$

۲۲ اگر f,g در نقطه‌ی $x=a$ مشتق پذیر باشند، نشان دهید. $(f\times g)'=f'(a)g(a)+g'(a)f(a)$

پاسخ:

$$(f\times g)'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f\times g(x)-f\times g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}=$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\big(f(x)-f(a)\big)g(x)+\big(g(x)-g(a)\big)f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x)+\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}f(a)=$$

$$f'(a)g(a)+g'(a)f(a)$$

۲۳ تابع f در $x=a$ مشتق پذیر و $f(a)\neq 0$ ثابت کنید:

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)'(a)=-\frac{f'(a)}{f^2(a)}$$

پاسخ:

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)'(a)=\lim_{x\to a}\frac{\left(\frac{1}{f(x)}\right)-\left(\frac{1}{f(a)}\right)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(a)-f(x)}{f(x)f(a)}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{-\big(f(x)-f(a)\big)}{(x-a)f(x)f(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\frac{-1}{f(a)f(a)}$$

$$=f'(a)\times\frac{-1}{f(a)f(a)}=\frac{-f'(a)}{f^2(a)}$$

۲۴ مشتق تابع $f(x)=\sin x$ را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos(x+\frac{h}{2})}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\times\lim_{h\to 0}\cos(x+\frac{h}{2})=1\times\cos x=\cos x$$

۲۵ مشتق تابع $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ را در $x=0$ بررسی کنید.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}-0}{x-0}\times\frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}$$

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}\ \xleftrightarrow{\text{مزدوج}}\ \sqrt{a-\sqrt{b}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-1+x^2}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{2x}=\begin{cases}\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}=f'_+(0)\\ \lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{2x}=\frac{-1}{2}=f'_-(0)\end{cases}$$

تابع در این نقطه مشتق‌ناپذیر است.

روش‌های محاسبه‌ی مشتق توابع:

$$f(x)=c \quad\Rightarrow\quad f'(x)=0$$

$$f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=(1)'=0$$

$$f(x)=ax^n \quad\Rightarrow\quad f'(x)=nax^{n-1}$$

$$f(x)=au^n \quad\Rightarrow\quad f'(x)=anu^{n-1}u'$$

$$f(x)=2x^7 \quad\Rightarrow\quad f'(x)=14x^6$$

$$h(x)=f(x)\pm g(x) \quad\Rightarrow\quad h'(x)=f'(x)\pm g'(x)$$

$$h(x)=f(x)\times g(x) \quad\Rightarrow\quad h'(x)=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$$

$$f(x)=\left(2x^2+3x-1\right)\left(4x^3+2x^2+3\right)\Rightarrow \quad f'(x)=(4x+3)\left(4x^3+2x^2+3\right)+\left(12x^2+4x\right)\left(2x^2+3x-1\right)$$

$$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \quad\Rightarrow\quad h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

$$h(x)=\frac{x^2+1}{x-1} \quad\Rightarrow\quad h'(x)=\frac{2x(x-1)-(1)\left(x^2+1\right)}{(x-1)^2}$$

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

$$f(x)=\frac{au+b}{cu+d} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{ad-bc}{(cu+d)^2}u'$$

$$f(x)=\sqrt[n]{u^m} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$$

$$f(x)=\sin kx \quad\Rightarrow\quad f'(x)=k\cos kx$$

$$f(x)=\cos kx \quad\Rightarrow\quad f'(x)=-k\sin kx$$

$$f(x)=\tan kx \quad\Rightarrow\quad f'(x)=k\left(1+\tan^2 kx\right)$$

$$f(x)=\cot kx \quad\Rightarrow\quad f'(x)=-k\left(1+\cot^2 kx\right)$$

$$f(x)=\sin^n u \quad\Rightarrow\quad f'(x)=n(u')\sin^{n-1}u\cos u$$

$$f(x)=\cos^n u \quad\Rightarrow\quad f'(x)=n(u')\cos^{n-1}u(-\sin u)$$

$$f(x)=\tan^n u \quad\Rightarrow\quad f'(x)=n(u')\tan^{n-1}u\left(1+\tan^2 u\right)$$

$$f(x)=\cot^n u \quad\Rightarrow\quad f'(x)=n(u')\cot^{n-1}u\left(-\left(1+\cot^2 u\right)\right)$$

تابع مشتق و دامنه‌ی آن

اگر $f(x)$ تابعی مشتق پذیر باشد آن‌گاه تابع مشتق $f(x)$ را با $f'(x)$ نمایش داده و مقدارش به ازای هر x متعلق به دامنه‌ی تابع از حد رو به رو به دست می‌آید. $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ و دامنه‌ی تابع مشتق برابر است با:

$D_{f'}=D_f-\{x \mid \text{وجود ندارد } f'(x)\}$

۲۶ دامنه‌ی تابع مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x+1}$ را تعیین کنید.

☑پاسخ:

$$D_f=[-1,+\infty) \quad , \quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \quad \Rightarrow \quad D_{f'}=[-1,+\infty)-\{-1\}=(-1,+\infty)$$

ریشه‌ی مخرج کسر مشتق

۲۷ تابع مشتق تابع با ضابطه‌ی $f(x)=|2x-1|$ را تعیین نموده و دامنه‌ی آن را بنویسید.

☑پاسخ:

تابع در تمام مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است. خب میریم سراغ مشتق پذیری

$$f(x)=|2x-1|=\begin{cases}2x-1 & x\ge \frac{1}{2}\\ -2x+1 & x<\frac{1}{2}\end{cases} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\begin{cases}2 & x>\frac{1}{2}\\ -2 & x<\frac{1}{2}\end{cases}$$

$f'_+(\frac{1}{2})=2\neq f'_-(\frac{1}{2})=-2 \Rightarrow$ در این نقطه مشتق پذیر نیست.

$$D_{f'}=R-\left\{\frac{1}{2}\right\}$$

۲۸ مشتق توابع زیر را حساب کنید. در کدام نقطه از دامنه تابع، مشتق وجود ندارد.

۱) $f(x)=\cos\sqrt[3]{x}$ ۲) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2}{1+x^2}}$ ۳) $f(x)=\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$

☑پاسخ:

$$1)\ f'(x)=\frac{-1}{3\sqrt[3]{x^2}}\sin\sqrt[3]{x} \quad\Rightarrow\quad D_{f'}=R-\{0\}$$

$$2)\ f'(x)=\frac{\frac{2x}{(x^2+1)^2}}{2\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}}=\frac{x}{(x^2+1)^2\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}} \quad\Rightarrow\quad D_f=D_{f'}=R$$

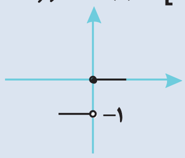
$$3)\ f'(x)=\frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}=\frac{x}{2\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}} \quad\Rightarrow\quad D_{f'}=D_f=R$$

در حالات زیر می‌گوییم مشتق وجود ندارد:

۱) تابع در $x=a$ پیوسته نباشد مانند: $f(x)=[x]$ که در نقطه‌ی $x=0$ پیوستگی چپ ندارد، بنابراین مشتق چپ نخواهد داشت.

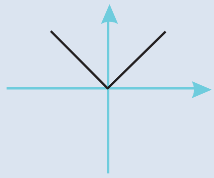
در نتیجه مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{[x]-0}{x}=\frac{0\ \text{مطلق}}{0\ \text{حدی}}=0$$



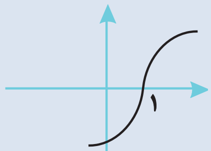
۲) مشتق چپ و راست با هم برابر نباشند، مانند: $f(x)=|x|$ در نقطه‌ی $x=0$. تابع در این نقطه پیوسته است ولی مشتق‌پذیر نیست.

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{|x|-0}{x-0}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x}{x}=1=f'_+(0)\\ \lim\limits_{x\to0^-}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{-x}{x}=-1=f'_-(0)\end{cases}$$



۳) مشتق چپ یا راست بی‌نهایت شود. مانند: $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ در نقطه‌ی $x=1$.

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x-1}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$



۴) مشتق تابع قابل تعیین نباشد. مانند: $f(x)=\begin{cases}x\cos\frac{1}{x} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=0$

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{x\cos\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to0}\cos\frac{1}{x}=\cos\infty$$ قابل تعیین نیست

۲۹ پاسخ هر عبارت ستون A را از بین گزینه‌های ستون B انتخاب کنید.

ستون A
۱) دامنه‌ی مشتق پذیری تابع $y=\sqrt{1-2x}$ کدام است؟
۲) مشتق چپ تابع $y=[2x]$ در نقطه‌ی $x=1$ کدام است؟
۳) در تابع $y=\lvert 2-x\rvert$ حاصل $f'_+(2)+f'_-(2)$ کدام است؟

ستون B	
الف) ۱	د) صفر
ب) $(\frac{1}{2},+\infty)$	هـ) ۴
ج) وجود ندارد	و) $(-\infty,\frac{1}{2})$

☑ پاسخ:

۱) گزینه‌ی «و» صحیح است.
$$1-2x\ge0 \Rightarrow D_f=\left(-\infty,\frac{1}{2}\right] \Rightarrow f'(x)=\frac{-2}{2\sqrt{1-2x}} \Rightarrow D_{f'}=\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$$

۲) گزینه‌ی «ج» صحیح است. تابع در $x=1$ پیوستگی چپ ندارد، بنابراین مشتق چپ آن وجود ندارد. $\lim\limits_{x\to1^-}[2x]=[2^-]=1\neq f(1)=2$

۳) گزینه‌ی «د» صحیح است.
$$f'(2)=\lim_{x\to2}\frac{|2-x|-0}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{|x-2|}{x-2}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to2^+}\frac{|x-2|}{x-2}=1\\ \lim\limits_{x\to2^-}\frac{|x-2|}{x-2}=-1\end{cases} \Rightarrow f'_+(2)+f'_-(2)=0$$

برای محاسبه برخی مشتق ها ، حتما باید ابتدا عبارت را ساده نمود و سپس مشتق گرفت زیرا اگر سریعاً مشتق بگیریم عبارت پیچیده تر و کار دشوار تر خواهد شد .

۳۰ مشتق تابع $f(x)=\frac{۱}{x-\sqrt{۱+x^۲}}$ را به دست آورید

اگر عبارت را گویا نکنیم و مشتق بگیریم داریم $f'(x)=\frac{۱-\frac{۲x}{۲\sqrt{۱+x^۲}}}{\left(x-\sqrt{۱+x^۲}\right)^۲}$ که امکان ساده کردن آن نیست از طرفی

$$f(x)=\frac{۱}{x-\sqrt{۱+x^۲}}\times\frac{x+\sqrt{۱+x^۲}}{x+\sqrt{۱+x^۲}}=x+\sqrt{۱+x^۲}$$

$$f'(x)=۱+\frac{۲x}{۲\sqrt{۱+x^۲}}$$

۳۱ مشتق توابع $۲)\ f(x)=\frac{x+\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}$, $۱)\ f(x)=(x+۱)^۲\left(x^۲+۲x+۱\right)^۳$ را محاسبه کنید .

$$f(x)=(x+۱)^۲\left(x^۲+۲x+۱\right)^۳=(x+۱)^۸ \qquad \Rightarrow \qquad f'(x)=۸(x+۱)^۷$$

$$f(x)=\frac{x+\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+۱\right)}{۱+\sqrt{x}}=\sqrt{x} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

مشتق توابع شامل عامل صفر کننده:

هرگاه تابع $f(x)$ به ازای نقطه $x=a$ صفر باشد برای محاسبه مشتق تابع f در $x=a$ بهترین کار استفاده از تعریف مشتق است زیرا در این حالت می توان نوشت $f(x)=(x-a)g(x)$ و داریم : $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)g(x)-۰}{x-a}=g(a)$

همان‌طور که می‌دانیم مشتق حاصل‌ضرب به شکل روبه‌رو محاسبه می‌شود. $(uv)'_a=u'_a v_a+v'_a u_a$

حال در توابعی به فرم $f(x)=u_{(x)}v_{(x)}$ که در آن $u_{(a)}=۰$ و $v_{(x)}$ در $x=a$ پیوسته باشد، داریم:

$$f'(a)=u'_{(a)}v_{(a)}$$

$f'(a)=($ مشتق عامل صفر کننده $)($ مابقی عوامل $)$

۳۲ اگر $f(x)=\frac{x+\sqrt{۲x}}{x-۱}\cot\frac{\pi}{x}$ حاصل $\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$ کدام است ؟ (خارج کشور ۸۶)

۱) $-\pi$ ۲) $-\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) π

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=f'(۲)=\underbrace{\left(\frac{\pi}{x^۲}\right)\left(۱+\cot^۲\frac{\pi}{x}\right)_{x=۲}}_{\text{مشتق عامل صفر}}\times\underbrace{\left(\frac{۲+\sqrt{۴}}{۲-۱}\right)}_{\text{مابقی عوامل}}=\pi$$

روش حل مسئله

در توابعی که به صورت ضرب چند عامل در هم می‌باشند، اگر مشتق را در نقطه‌ای بخواهند که یکی از عامل‌ها در آن صفر می‌شود، کافی است فقط از عامل صفرکننده مشتق گرفته و در بقیه عبارت‌ها ضرب کنیم، و سپس طول نقطه را در آن قرار دهیم.

۳۳ مشتق تابع $f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ مفروض است. مشتق آن را در نقطه $x=-4$ به دست آورید.

☑ پاسخ: عامل صفر $(x+4)$ است. بنابراین از این عبارت مشتق گرفته در الباقی فقط مقدارگذاری می‌کنیم.

$$f'(-4)=\underbrace{(1)}_{\text{مشتق عامل صفر}}\underbrace{(-4+1)(-4+2)(-4+3)}_{\text{الباقی}}=-6$$

۳۴ مقدار مشتق تابع با ضابطه‌ی $y=(x-1)\sqrt[3]{\dfrac{x+2}{2x-1}}$ را در نقطه‌ی $x=1$ به دست آورید.

☑ پاسخ:

$$y'(1)=\underbrace{(1)}_{\text{مشتق عامل صفر}}\overbrace{\left(\sqrt[3]{\frac{x+2}{2x-1}}\right)}^{\text{الباقی}}\Bigg|_{x=1}=(1)\sqrt[3]{\frac{3}{1}}=\sqrt[3]{3}$$

۳۵ مشتق تابع $f(x)=\sin x\sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{x}{3}\sin\dfrac{x}{4}$ در $x=\pi$ را به دست آورید.

☑ پاسخ:

در $x=\pi$، $\sin x$ صفره بنابراین:

$$f'(\pi)=\underbrace{(\cos x)}_{\text{مشتق عامل صفر}}\underbrace{(\sin\frac{\pi}{2}\times\cos\frac{\pi}{3}\times\sin\frac{\pi}{4})}_{\text{الباقی مقدارگذاری شده}}=(-1)(1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{-\sqrt{6}}{4}$$

۳۶ اگر $f(x)=(x^2-x-2)\sqrt[3]{x^2-7x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$ کدام است؟ (سراسری ۹۲)

۱) -6 ۲) -3 ۳) $\dfrac{-3}{2}$ ۴) $\dfrac{-3}{4}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=f'(-1)=\left(\underbrace{(2x-1)}_{\text{مشتق عامل صفر}}\times\underbrace{\sqrt[3]{x^2-7x}}_{\text{الباقی مقدارگذاری شده}}\right)\Bigg|_{x=-1}=-6$$

مشتق عبارات جبری

نکته

$$y=\left(\text{عبارت های جبری}\right)^n \rightarrow y'=n\times\left(\text{مشتق عبارت جبری}\right)\times\left(\text{عبارت های جبری}\right)^{n-1}$$

۳۷ مشتق بگیرید .

$$1)\ f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x)=\frac{1}{2}(1)x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$2)\ f(x)=\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)^4 \qquad \Rightarrow \qquad f'(x)=\overbrace{(4)}^{\text{توان}}\overbrace{\left(\frac{2(x-2)-(1)(2x+1)}{(x-2)^2}\right)}^{\text{مشتق عبارت کسری}}\overbrace{\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)^3}^{\text{عبارت کسری با یک توان کمتر}}$$

$$3)\ f(x)=\frac{(3x^2-1)^3}{x+1} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x)=\frac{3(6x)(3x^2-1)^2(x+1)-(3x^2-1)^3(1)}{(x+1)^2}$$

$$4)\ y=\sqrt{x}(2x-1)^5 \qquad \Rightarrow \qquad y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}(2x-1)^5+5(2)(2x-1)^4\sqrt{x}$$

مشتق عبارات مثلثاتی

نکته

$$y=\left(\text{نسبت‌های مثلثاتی}\right)^n \rightarrow y'=n\times\left(\text{مشتق کمان}\right)\times\left(\text{مشتق نسبت مثلثاتی}\right)\times\left(\text{نسبت‌های مثلثاتی}\right)^{n-1}$$

۳۸ مقدار مشتق تابع $y=\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+\frac{x}{4}\right)$ به ازای $x=\frac{\pi}{3}$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۰)

۱) $\frac{-1}{4}$ ۲) $\frac{-1}{8}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ:

(یادت باشه: $2\sin u\cos u=\sin 2u$)

$$y'=\overbrace{2}^{\text{توان}}\underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)}_{\text{مشتق کمان}}\overbrace{\left(-\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{x}{4}\right)\right)}^{\text{مشتق نسبت مثلثاتی}}\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{x}{4}\right)}_{\text{نسبت مثلثاتی با یک توان کمتر}}\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}=\frac{-1}{4}\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{x}{2}\right)=\frac{-1}{4}\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{-1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{-1}{8}$$

۳۹ مشتق توابع زیر را به دست آورید.

$۱)\ y=\left(۴x^۵+۲\right)\cos x$ $\qquad ۲)\ y=\sqrt[۳]{x^۲+\sin x-۱}$ $\qquad ۳)\ y=۱+۳\cos^۲ x$

☑پاسخ:

$۱)\ y'=(۲۰x^۴)\cos x-\sin x(۴x^۵+۲)$

$$۲)y'=\frac{۲x+\cos x}{۳\sqrt[۳]{\left(x^۲+\sin x-۱\right)^۲}}$$

$$۳)y'=۳\left(۲(-\sin x)\cos x\right)$$

۴۰ مشتق توابع زیر را بیابید. (ساده کردن مشتق الزامی است) (خرداد ۹۳)

$۱)\ y=\dfrac{۳x^۳-۱}{۲x+۱}$ $\qquad ۲)\ y=\left(x^۲+۱\right)^۳$ $\qquad ۳)\ y=۲\dfrac{۱}{\tan x}$

☑پاسخ:

$$۱)y'=\frac{۹x^۲(۲x+۱)-۲(۳x^۳-۱)}{(۲x+۱)^۲}$$

$$۲)y'=۳(۲x)(x^۲+۱)^۲$$

$$۳)y'=۲\frac{-(۱+\tan^۲ x)}{\tan^۲ x}$$

۴۱ مشتق توابع زیر را محاسبه کنید. (ساده کردن مشتق الزامی است) (خرداد ۹۴- خارج کشور)

$۱)\ y=\sin^۲(x^۲-۱)$ $\qquad ۲)\ y=\left(۱+\sin x\right)\sqrt{x^۲+۱}$

☑پاسخ:

$$۱)\ y'=۲\left(۲x\right)\cos\left(x^۲-۱\right)\sin\ \left(x^۲-۱\right)$$

$$۲)\ y'=(\cos x)\sqrt{x^۲+۱}+(۱+\sin x)\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲+۱}}$$

۴۲ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

$۱)f(x)=\left(\dfrac{۲x+۱}{x}\right)^۴$ $\qquad ۲)\ g(x)=(\sqrt{۵-۷x})(۴-\dfrac{x}{۳})$ $\qquad ۳)\ h(x)=\tan x-۲\cos^۳(۲x)$

☑پاسخ:

$$۱)\ y'=۴(\frac{۲(x)-(۱)(۲x+۱)}{x^۲})(\frac{۲x+۱}{x})^۳$$

$$۲)\ y'=\frac{-۷}{۲\sqrt{۵-۷x}}(۴-\frac{x}{۳})-\frac{۱}{۳}(\sqrt{۵-۷x})$$

$$۳)\ y'=۱+\tan^۲ x-۲(۳)(۲)(\cos ۲x)^۲(-\sin ۲x)$$

۴۳ مشتق توابع زیر را محاسبه کنید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست) همه‌ی سوالات از امتحانات نهایی است.

☑پاسخ:

$$۱)\ \ y=\sqrt{x}\left(۲x-۱\right)^۵ \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\left(۲x-۱\right)^۵+۵\left(۲\right)\left(۲x-۱\right)^۴\sqrt{x}$$

۲) $y=\frac{x^{2}-1}{(3x+5)^{2}} \Rightarrow y'=\frac{2x(3x+5)^{2}+2(3)(3x+5)(x^{2}-1)}{(3x+5)^{4}}$

۳) $y=\sin^{3}x+\sqrt[5]{\cos x} \Rightarrow y'=3\cos x(\sin^{2}x)+\frac{-\sin x}{5\sqrt[5]{\cos^{4}x}}$

۴) $y=\sqrt[3]{x^{2}-5x}\times\sin 3x \Rightarrow y'=\frac{2x-5}{3\sqrt[3]{(x^{2}-5x)^{2}}}\sin 3x+3\cos 3x\times\sqrt[3]{x^{2}-5x}$

۵) $y=\sqrt{\frac{x^{2}}{1+x^{2}}} \Rightarrow y'=\frac{\frac{2x(1+x^{2})-2x(x^{2})}{(1+x^{2})^{2}}}{2\sqrt{\frac{x^{2}}{1+x^{2}}}}$

۴۴ اگر $f(x)=\frac{1}{x^{2}+x+1}$, $g(x)=x^{3}-1$ باشد، حاصل $f'g+g'f$ را به دست آورید.

☑ پاسخ:

$f'g+g'f=(f\times g)' \Rightarrow f\times g=\frac{x^{3}-1}{x^{2}+x+1}=\frac{(x-1)(x^{2}+x+1)}{(x^{2}+x+1)}=(x-1)\Rightarrow f'g+g'f=(x-1)'=1$

۴۵ مشتق بگیرید. (ساده کردن الزامی نیست.) (دی ماه ۸۹)

الف) $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x+1}}$

ب) $f(x)=(1+\sin x)\tan^{2}3x$

☑ پاسخ:

الف) $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x+1}}=\sqrt{x+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

ب) $f(x)=(1+\sin x)\tan^{2}3x \Rightarrow f'(x)=(\cos x)\tan^{2}3x+\left(2(3)(1+\tan^{2}3x)\tan 3x\right)(1+\sin x)$

۴۶ مشتق بگیرید. (خرداد ۹۰)

الف) $f(x)=\frac{(3x^{2}-1)^{3}}{x+1}$

ب) $g(x)=\sqrt{1-2\cos 3x}$

ج) $k(x)=2\tan x+3\sin^{2}x+\frac{4}{x}$

☑ پاسخ:

الف) $f'(x)=\frac{3(6x)(3x^{2}-1)^{2}(x+1)-(3x^{2}-1)^{3}}{(x+1)^{2}}$

ب) $g'(x)=\frac{6\sin 3x}{2\sqrt{1-2\cos 3x}}$

ج) $k'(x)=2(1+\tan^{2}x)+3(2)\cos x\sin x++\frac{-4}{x^{2}}$

۴۷ مشتق بگیرید. (ساده کردن الزامی نیست) (خرداد ۹۱)

۱) $y=\left(x^{۳}+\frac{۱}{x}\right)$ ۲) $y=۳\left(۲x-۵\right)^{۴}+\sqrt[۳]{x}$ ۳) $y=\frac{\sin\sqrt{x}}{۱+x^{۲}}$

☑پاسخ:

$$y'=۳x^{۲}+\frac{-۱}{x^{۲}}$$

$$y'=۳\times۴(۲)(۲x-۵)^{۳}+\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}$$

$$y'=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}\left(۱+x^{۲}\right)-(۲x)\sin\sqrt{x}}{\left(۱+x^{۲}\right)^{۲}}$$

۴۸ مشتق بگیرید. (ساده کردن الزامی نیست) (خرداد ۹۲)

$y=x\left(x^{۵}+۱\right)$ $y=\sin^{۳}x$ $y=\sqrt[۳]{x}+\cos^{۳}x$

☑پاسخ:

$$y'=۱\times\left(x^{۵}+۱\right)+x\left(۵x^{۴}\right)$$

$$y'=۳\sin^{۲}x\cos x$$

$$y'=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}+۳(-\sin x)(\cos^{۲}x)$$

۴۹ مشتق تابع $y=\sin^{۳}\sqrt{x}$ در $x=\frac{\pi^{۲}}{۴}$ کدام است؟ (گزینه ۲ – بهمن ۹۴)

۱) $\frac{۳}{۲\pi}$ ۲) $\frac{-۳}{۲\pi}$ ۳) صفر ۴) $\frac{-۳}{۴\pi}$

$$y=\sin^{۳}\sqrt{x}\Rightarrow y'=۳\times\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\times\sin^{۲}\sqrt{x}\times\cos\sqrt{x}\Rightarrow y'(\frac{\pi^{۲}}{۴})=\frac{۳}{\pi}\sin^{۲}(\frac{\pi}{۲})\cos(\frac{\pi}{۲})=۰$$

۵۰ مقدار مشتق تابع $f(x)=\frac{\sqrt{\tan\pi x}}{x}$ در $x=\frac{۱}{۴}$ کدام است؟ (گزینه۲–اسفند۹۴)

۱) $\frac{\pi}{۴}-۴$ ۲) $\frac{\pi}{۴}-۱$ ۳) $۴\pi-۱۶$ ۴) $۴\pi-۱$

$$f'(x)=\frac{\frac{\pi(۱+\tan^{۲}\pi x)}{۲\sqrt{\tan\pi x}}(x)-(۱)\sqrt{\tan\pi x}}{x^{۲}}\Rightarrow f'(\frac{۱}{۴})=\frac{\frac{\pi(۱+\tan^{۲}\frac{\pi}{۴})}{۲\sqrt{\tan\frac{\pi}{۴}}}(\frac{۱}{۴})-\sqrt{\tan\frac{\pi}{۴}}}{(\frac{۱}{۴})^{۲}}=\frac{\frac{\pi}{۴}-۱}{\frac{۱}{۱۶}}=۴\pi-۱۶$$

مشتق تابع قدر مطلقی :

$$y=|u| \Rightarrow y'=\frac{uu'}{|u|}$$

در مسائل تستی از روش زیر استفاده کنید .

$۱)\ \text{if}\ \ u(a)>۰ \Rightarrow y'(a)=u'(a)$

$۲)\ \text{if}\ \ u(a)<۰ \Rightarrow y'(a)=-u'(a)$

$۳)\ \text{if}\ \ u(a)=۰ \Rightarrow$ از راه تعریف مشتق اقدام کنید

۵۱ اگر $f(x)=|x^{۲}-۲x|+|x^{۳}+۴x|$ باشد،حاصل $f'(-۱)$ کدام است ؟

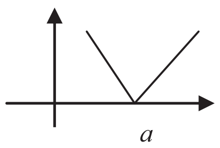
۱) ۱۱ ۲) ۱۱- ۳) ۳ ۴) وجود ندارد

گزینه ۲

$$f'(-۱)=(x^{۲}-۲x)'+(-x^{۳}-۴x)'=(۲x-۲-۳x^{۲}-۴)_{x=-۱}=-۱۱$$

$$f(x)=|x-a| \Rightarrow f'_{+}(a)=۱\ ,\ f'_{-}(a)=-۱$$

تابع در $x=a$ مشتق ناپذیر ا ست . (نقطه زاویه دار)



ولی :

$$f(x)=|(x-a)^{m}| \xrightarrow[m\in N]{m>۱} f'(a)=۰$$

به طور کلی توابع قدر مطلقی به ازای ریشه ی مرتبه ی اول داخل قدر مطلق ، مشتق ناپذیر است . و در سایر ریشه ها مشتق پذیر و مشتق آن نیز صفر ا ست . تابع $f(x)=|(x-x_{۱})(x-x_{۲})^{۲}\times ....\times(x-x_{n})^{n}|$ فقط در $x=x_{۱}$ مشتق ناپذیر ا ست و داریم :

$$f'(x_{۲})=f'(x_{۳})=....................=f'(x_{n})=۰$$

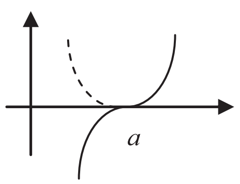
۵۲ تابع $f(x)=\sqrt{۱+|x|}$ در نقطه ی $x=\alpha$ مشتق ندارد. مقدار $f'_{+}(\alpha)-f'_{-}(\alpha)$ کدام ا ست ؟ (سراسری خارج کشور ۸۵)

نقطه مشتق ناپذیری تابع $x=۰$ ریشه داخل قدر مطلق ا ست پس داریم :

$$f'_{\pm}(۰)=\frac{\pm۱}{۲\sqrt{۱+|x|}}=\pm\frac{۱}{۲}\Rightarrow f'_{+}(۰)-f'_{-}(۰)=۱$$

از آن جایی که هر تابع شامل قدر مطلق یک تابع چند ضابطه ای ا ست برای مشتق گیری از این توابع ابتدا آن را به صورت چند ضابطه ای نوشته و سپس از هر ضابطه مشتق می گیریم ، اما در نقاطی که ضابطه ها تغییر می کنند (نقاط مرزی) از مشتق های چپ و راست استفاده می کنیم .

تابع $y=(x-a)|x-a|$ در $x=a$ مشتق پذیر ولی مشتق دوم تابع در این نقطه وجود ندارد .



عامل صفر کننده پشت قدر مطلق یادت نره !

مشتق توابع براکتی

در تابع $y=[f(x)]$ اگر $f(x)$ در $x=a$ پیوسته باشد داریم :

$$۱)\ \text{if}\ \ f(a)=k\notin Z \Rightarrow y'(a)=0$$

$$۲)\ f(a)=k\in Z \Rightarrow$$

چهار حالت متصور ا ست

ا لف) f در $x=a$ صعودی باشد

$$f'(a)>0 \Rightarrow \begin{vmatrix} y'_+(a)=0 \\ y'_-(a) \end{vmatrix}$$ وجود ندارد چون ناپیوسته است

ب) f در $x=a$ نزولی باشد

$$f'(a)<0 \Rightarrow \begin{vmatrix} y'_+(a) \\ y'_-(a)=0 \end{vmatrix}$$ وجود ندارد چون پیوستگی راست ندارد

ج) f در $x=a$ ماکسیمم داشته باشد

$$f'(a)=0, f''(a)<0 \Rightarrow y'_\pm(a)$$ وجود ندارد

چون در این حالت تابع نه پیوستگی چپ دارد نه پیوستگی راست

د) f در $x=a$ مینیمم داشته باشد

$$f'(a)=0\ ,\ f''(a)>0 \Rightarrow y'_\pm(a)=0$$

تابع $y=(x-a)^n[x]$ در $x=a\in Z$ داریم :

ا لف) اگر $n=۱$ تابع پیوسته ولی مشتق نا پذیر ا ست

ب) اگر $n\geq ۲$ تابع پیوست و مشتق پذیر است

در توابع شامل براکت به شکل زیر عمل کنید

ابتدا پیوستگی تابع را در نقطه ی $x=a$ بررسی نموده و در همسایگی این نقطه مقدار براکت را تعیین کنید ، سپس با توجه به نوع پیوستگی مشتق چپ و راست را در صورت وجود به دست آورید .

۵۳) اگر $f(x)=x[۲x+۱]$ مقدار $f'_+(۱)-f'_-(۱)$ کدام ا ست ؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) قابل تعیین نیست

گزینه ۴

به ازای $x=۱$ داخل براکت صحیح می شود و تابع داخل براکت صعودی ا ست پس تابع در $x=۱$ فقط پیوستگی راست دارد و پیوستگی چپ ندارد . بنابراین مشتق راست دار د ولی مشتق چپ ندارد

$$f'_+(x)_{x=۱}=(۳x)'=۳$$

$f'_-(x)_{x=۱}=$ چون پیوستگی چپ ندارد مشتق چپ ندارد

۵۴) نمودار تابع با ضابطه ی $f(x)=\left[x+\frac{1}{3}\right]+[x]$ روی بازه ی $(0,3)$ در چند نقطه مشتق پذیر نیست ؟ (خارج کشور ۸۶)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

گزینه ۴

$$x=k\in Z \Rightarrow x=1,2 \quad , \quad x+\frac{1}{3}=k\in Z \Rightarrow x=\frac{2}{3},\frac{5}{3},\frac{8}{3}$$

تابع $[x]$ در نقاط $x=1,2$ مشتق ناپذیر و تابع $\left[x+\frac{1}{3}\right]$ در نقاط $x=\frac{2}{3},\frac{5}{3},\frac{8}{3}$ مشتق ناپذیرند ، زیرا در این نقاط داخل براکت صحیح می شود و تابع ناپیوسته است ، بنا براین مشتق ناپذیر ا ست .

در تابع با ضابطه $f(x)=|x|[x]$ مقدار $f'_-(0)-f'_+(0)$ کدام است ؟ (سراسری تجربی ۸۷)

۱) -1 ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ :

$$\lim_{x\to 0}|x|[x]=|0|\left[0^\pm\right]=0$$ این یعنی پیوسته است

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{|x|[x]-0}{x-0}=\begin{cases}\lim_{x\to 0^+}\frac{-\cancel{x}\left[0^+\right]-0}{\cancel{x}-0}=0\\ \lim_{x\to 0^-}\frac{-\cancel{x}\left[0^-\right]-0}{\cancel{x}-0}=1\end{cases}$$ ولی مشتق چپ وراستش متفاوته

حل کنید : تابع $f(x)=(x-2)[x]$ در $x=2$ ....

۱) مشتق چپ دارد ولی مشتق راست ندارد ۲) مشتق راست دارد ولی مشتق چپ ندارد

۳) مشتق پذیر نیست ۴) نه مشتق راست دارد ونه مشتق چپ

حل کنید : در تابع $f(x)=|x^3-9|[x]$ حاصل $f'_+(2)$ کدام ا ست ؟

۱) -24 ۲) ۱۲ ۳) -12 ۴) ۲۴

مشتق توابع چند ضابطه ای

در توابع $y=\begin{cases} f(x) & x\geq a \\ g(x) & x<a \end{cases}$ محور اصلی سوالات برای نقاط مرزی دامنه تابع ا ست $(x=a)$ در این نقاط اول پیوستگی تابع را چک می کنیم ، سپس با توجه به نوع پیوستگی مشتق می گیریم .

۵۵ تابع با ضابطه ی $f(x)=\begin{cases} ax^{۲}+bx & x\geq ۱ \\ x^{۳} & x<۱ \end{cases}$ مفروض ا ست ، با فرض $D_f=D_{f'}$ مقدار عددی $a-b$ کدام ا ست ؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۴

گزینه ۱

دامنه تابع مشتق با دامنه تابع برابر است یعنی تابع باید در تمام دامنه تابع مشتق پذیر باشد ، به خصوص نقطه ی مرزی دامنه $x=۱$

اول بررسی پیوستگی $ax^{۲}+bx_{|x=۱}=x^{۳}{}_{|x=۱}\Rightarrow a+b=۱$

$$f'_-(۱)=۲a(۱)+b=f'_+(۱)=۳(۱)^{۲}\Rightarrow ۲a+b=۳$$

$$a=۲\ ,\ b=-۱\Rightarrow a-b=۳$$

۵۶ تا بع $f(x)=\begin{cases} \sqrt[۳]{(x-۱)(x-۲)^{۳}} & x\geq ۰ \\ \left|(x+۱)(x+۲)^{۲}\right| & x<۰ \end{cases}$ در چند نقطه مشتق پذیر نیست ؟ (آزاد ۸۲)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ : گزینه ۲

تابع در $x=۰$ پیوسته نیست بنابراین مشتق ناپذیر است : $\lim_{x\to ۰^+}\sqrt[۳]{(x-۱)(x-۲)^{۳}}=۲\neq \lim_{x\to ۰^-}\left|(x+۱)(x+۲)^{۲}\right|=۴$

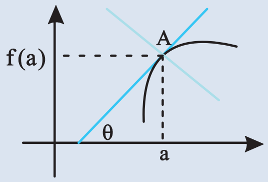
تابع در $x=۱$ مشتق ناپذیر است چون ریشه زیر رادیکال است و مشتقش بی نهایتی می شود ولی $x=۲$ از زیر رادیکال خارج می شود .

تابع در $x=-۱$ مشتق ناپذیر است چون ریشه مرتبه اول داخل قدر مطلق است ولی در $x=-۲$ مشتق پذیر و مشتق آن صفر است .

حل کنید : تابع با ضابطه ی $f(x)=\begin{cases} ax^{۳}+bx & x<۱ \\ ۲\sqrt{۴x-۳} & x\geq ۱ \end{cases}$ بر روی مجموعه ی اعداد حقیقی مشتق پذیر ا ست . b کدام ا ست ؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

شیب خط مماس بر منحنی



اگر خط L در نقطه‌ای به طول a واقع بر منحنی نمایش تابع $y=f(x)$ مماس باشد، شیب خط مماس از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

شیب خط مماس در نقطه‌ی A
$$m=\tan\theta=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

از طرفی شیب خط قائم بر تابع در این نقطه برابر است با:
$$m'=\frac{-1}{m}=\frac{-1}{f'(a)}$$

معادله‌ی خط مماس و قائم در نقطه‌ای روی منحنی:

اگر مختصات یک نقطه مانند $A\left|\begin{matrix}a\\f(a)\end{matrix}\right.$ روی منحنی و مشتق تابع در این نقطه را برهند، $(f'(a)=m)$ معادلات خطوط مماس و قائم بر تابع در این نقطه به صورت زیر است.

معادله‌ی خط مماس $L:\ y-f(a)=f'(a)(x-a)$

معادله‌ی خط قائم $L':\ y-f(a)=\frac{-1}{f'(a)}(x-a)$

روش حل مسئله

۱) اول مختصات نقطه‌ای که می‌خواهیم مماس یا قائم در آن رابنویسیم معلوم کنید. $A\left|\begin{matrix}a\\f(a)\end{matrix}\right.$

۲) از تابع $f(x)$ مشتق بگیرید و $f'(a)$ را تعیین کنید این همان شیب خط مماس است. $m=f'(a)$ و $m'=\frac{-1}{f'(a)}$ شیب خط قائم است. (بعضی وقتا این مشتق رو از راه تعریف می‌خوان)

۳) معادله‌ی خط مماس و معادله‌ی خط قائم به شکل زیر نوشته می‌شوند:

$$L:\quad y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

$$L':\quad y-f(a)=\frac{-1}{f'(a)}(x-a)$$

۵۷) با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x)=x^3$ را در نقطه دلخواه a حساب کنید. سپس معادله خط قائم بر نمودار تابع را در نقطه $A(1,1)$ به دست آورید.
(خرداد ۹۳- تمرین کتاب درسی)

☑پاسخ:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{x-a}=3a^2$$

$$f(x)=x^3\ \Rightarrow\ f'(x)=3x^2\ \Rightarrow\ f'(1)=3(1)^2=3=m\ \Rightarrow\ m'=\frac{-1}{3}\ \Rightarrow\ L:\ y-1=\frac{-1}{3}(x-1)$$ خط قائم

۵۸ با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $y = x^{2} - 1$ را در نقطه‌ای به طول ۱ محاسبه نماید. سپس به کمک آن معادله‌ی خط مماس بر منحنی این تابع را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر منحنی تابع بنویسید. (شهریور ۹۴ خارج کشور)

پاسخ:

$$f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^{2}-1-(1-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$$

$$A\left|\begin{matrix}2\\(2)^{2}-1=3\end{matrix}\right. \Rightarrow \quad L: \quad y-3 = 2(x-2)$$

۵۹ معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع $y = \frac{x}{x-2}$ را در نقطه‌ی $A(3,3)$ به دست آورید. (خرداد ۹۲)

پاسخ:

$$y' = \frac{-2}{(x-2)^{2}} \quad\Rightarrow\quad m = y'_{(3)} = -2 \quad\Rightarrow\quad y-3 = -2(x-3)$$

۶۰ مماس بر منحنی $f(x) = 2\sin x - 1$ را در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{6}$ واقع بر منحنی، به‌دست آورید.

پاسخ:

مختصات نقطه‌ی مفروض $A\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{6}\\2\left(\frac{1}{2}\right)-1=0\end{matrix}\right.$ و شیب خط مماس برابر است با: $m = f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\frac{\pi}{6} = 2(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \sqrt{3}$ و داریم:

$$L: \quad y-0 = \sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \quad\Rightarrow\quad y = \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}\pi}{6}$$

۶۱ منحنی تابع $y = x^{2}+x-1$ محور عرض‌ها را در نقطه‌ی A قطع می‌کند. معادله‌ی خط قائم بر منحنی تابع را در نقطه‌ی A بنویسید.

پاسخ:

$$A\left|\begin{matrix}x=0\\y=-1\end{matrix}\right. \quad\Rightarrow\quad f'(x) = 2x+1 \quad\Rightarrow\quad f'(0) = 1 = m \quad\Rightarrow\quad m' = \frac{-1}{m} = -1$$

$$L: \quad y-(-1) = -1(x-0) \quad\Rightarrow\quad y = -x-1$$

۶۲ با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x) = x^{3}$ را در نقطه دلخواه a حساب کنید. سپس معادله خط قائم بر نمودار تابع را در نقطه $A(1,1)$ به دست آورید.

پاسخ:

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{x^{3}-a^{3}}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{(x-a)\left(x^{2}+ax+a^{2}\right)}{x-a} = 3a^{2}$$

$$f(x) = x^{3} \Rightarrow f'(x) = 3x^{2} \Rightarrow f'(1) = 3(1)^{2} = 3 = m \Rightarrow m' = \frac{-1}{3} \Rightarrow L: y-1 = \frac{-1}{3}(x-1)$$ خط قائم

۶۳ معادله‌ی خط قائم بر منحنی $y = \left(\frac{x}{2}\right)^{3} - 1$ را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر منحنی بنویسید. (خرداد ۸۸)

پاسخ:

$$A\left|\begin{matrix}2\\f(2)=0\end{matrix}\right. \qquad y' = \frac{3}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2} \quad\Rightarrow\quad m = f'(2) = \frac{3}{2} \quad\Rightarrow\quad m' = \frac{-2}{3}$$

$$\Rightarrow\quad y-0 = \frac{-2}{3}(x-2) \quad\Rightarrow\quad y = \frac{-2}{3}(x-2)$$

۶۴ معادله‌ی خط قائم بر نمودار تابع $f(x)=2x^3-x$ را در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر منحنی به دست آورید. (خرداد ۹۱)

☑ پاسخ:

$$f(1)=1 \quad \Rightarrow \quad f'(1)=\left(6x^2-1\right)_{x=1}=5 \quad \Rightarrow \quad m'=\frac{-1}{m}=\frac{-1}{5} \quad \Rightarrow \quad y-1=\frac{-1}{5}(x-1)$$

نکته

در هر نقطه از دامنه‌ی تابع $f(x)$ مانند $x=a$ اگر مشتق تابع صفر شود. یعنی در این نقطه خط مماس افقی و موازی محور x هاست. پس معادله‌ی آن همان عرض نقطه است.

$L: \quad y=f(a)$

۶۵ در چه نقاطی از بازه‌ی $[0,2\pi]$، خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\sin x$ موازی محور x ها است. (خرداد ۹۳)

☑ پاسخ:

$$f(x)=\sin x \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\cos x \quad \Rightarrow \quad \cos x=0=\cos(k\pi+\frac{\pi}{2}) \quad \Rightarrow \quad x_1=\frac{\pi}{2} \qquad x_2=\frac{3\pi}{2}$$

۶۶ نقاطی از نمودار تابع $f(x)=x^3-3x^2+1$ را تعیین کنید که مماس بر منحنی در آن نقاط افق باشد.

☑ پاسخ:

$$f(x)=x^3-3x^2+1 \quad \Rightarrow \quad f'(x)=3x^2-6x=0 \quad \Rightarrow \quad 3x(x-2)=0 \quad \Rightarrow \quad x=0 \qquad x=2$$

نکته

اگر $f'_{\pm}(a)=+\infty$ یا $f'_{\pm}(a)=-\infty$ شود باز تابع در $x=a$ مماس پذیر است ولی مشتق پذیر نیست و معادله‌ی خط مماس بر منحنی در این نقطه خطی موازی محور y هاست که در این نقطه از منحنی عبور می کند و معادله‌ی ان همان طول نقطه است.

$L: \quad x=a$

۶۷ معادله‌ی خط مماس بر تابع $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ در نقطه‌ی $x=1$ را بنویسید.

☑ پاسخ:

$$f(x)=\sqrt[3]{x-1} \quad \Rightarrow \quad f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-1}-0}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

بنابراین خط مماس بر تابع در $x=1$ خطی موازی محور y هاست و معادله‌ی آن همان طول نقطه است.

$L: \quad x=1$

نکته

اگه تو سوال گفت خط مماس بر تابع در کدام نقطه یا در چند نقطه موازی خط $y=mx+n$ است باید از تابع مشتق بگیری و این معادله رو حل کنی. $f'(x)=m$

اگه گفت در کدام نقطه خط مماس بر منحنی بر خط $y=mx+n$ عمود است معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$f'(x)=\frac{-۱}{m}$$

۶۸ نقاطی از منحنی تابع $f(x)=x^۳-۳x$ را تعیین کنید که خط مماس بر منحنی در آن نقاط موازی خط $y-۳x-۱=۰$ باشد.

پاسخ:

$$y=۳x+۱ \Rightarrow m=۳ \Rightarrow f'(x)=۳x^۲-۳=۳ \Rightarrow ۳x^۲=۶ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۲}$$

۶۹ نقاطی از نمودار تابع $y=x^۳-۲x-۱$ را تعیین کنید که خط مماس بر منحنی دراین نقاط موازی نیمساز ربع اول و سوم باشد.
(شهریور ۹۰)

پاسخ:

یعنی نقاطی را باید بیابیم که مشتق تابع در این نقاط ۱ شود زیرا شیب نیمساز ربع اول و سوم ($y=x$) ۱ است. بنابراین داریم:

$$y'=۳x^۲-۲=۱ \Rightarrow x^۲=۱ \Rightarrow x=\pm۱$$

۷۰ شیب خط مماس بر نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را در نقطه‌ای به طول یک واقع بر آن به دست آورید. (دی ماه ۸۹)

پاسخ:

$$m=f'(۱)=\left(\frac{۱}{x}\right)'=\left(\frac{-۱}{x^۲}\right)_{x=۱}=-۱$$

۷۱ در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید:

الف) دامنه‌ی مشتق پذیری تابع $f(x)=\sqrt{x}$ برابر است با ....

ب) شیب خط مماس بر نمودار تابع $g(x)=\frac{۱}{x}$ در $x=۱$ برابر است با ....

ج) شیب خط قائم بر نمودار تابع $y=\cos\frac{\pi}{x}$ در نقطه‌ی $x=۲$ برابر است با ....

پاسخ:

الف) $f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow D_f=[۰,+\infty)$ $\quad f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}} \Rightarrow D_{f'}=(۰,+\infty)$ جواب نهایی

ب) $g'(x)=\frac{-۱}{x^۲} \Rightarrow m=g'(۱)=-۱$ جواب نهایی

ج) $y'=\frac{-\pi}{x^۲}\left(-\sin\frac{\pi}{x}\right) \Rightarrow y'(۲)=\frac{-\pi}{۴}(-۱) \Rightarrow m'=\frac{-۱}{m}=\frac{-۴}{\pi}$ جواب نهایی

۷۲ خط $y=۲x+۱$ در نقطه ی $x=۱$ بر منحنی پیوسته $g(x)$ مماس است آنگاه حاصل $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{g^۲(x)+۳g(x)-۱۸}{x-۱}$ کدام است ؟

۱) ۱۸ ۲) ۹ ۳) ۹- ۴) ۱۸-

پاسخ

چون خط $y=۲x+۱$ در نقطه ی $x=۱$ بر منحنی پیوسته $g(x)$ مماس است پس :

$g(۱)=۲(۱)+۱=۳$

تابع و خط در نقطه تماس هم عرضند

$g'(۱)=۲$

شیب خط مماس

$$\lim_{x\to ۱}\frac{g^۲(x)+۳g(x)-۱۸}{x-۱}=\frac{۰}{۰}\ HOP\lim_{x\to ۱}\frac{۲g(۱)g'(۱)+۳g'(۱)}{۱}=\frac{۲(۳)(۲)+۳(۲)}{۱}=۱۸$$

مشتق توابع مرکب

فرض کنیم تابع $g(x)$ در نقطه‌ی $x=a$ مشتق پذیر و تابع $f(x)$ در $g(a)$ مشتق پذیر باشد. آن‌گاه تابع $h(x)=f(g(x))$ در $x=a$ مشتق پذیر است و داریم:

$$h(x)=f(g(x)) \quad \Rightarrow \quad h'(a)=g'(a)f'(g(a))$$

$$(f(u))'=u'f'(u) \quad , \quad ((u)^m)'=m(u')(u)^{m-1}$$

۷۳ مشتق تابع $f(x)=\sin(\pi\sqrt{x^3})$ در نقطه‌ی $x=4$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$f(x)=\sin(\pi\sqrt{x^3}) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=(\pi\sqrt{x^3})'\cos(\pi\sqrt{x^3})=\frac{\pi 3x^2}{2\sqrt{x^3}}\cos(\pi\sqrt{x^3})$$

$$\Rightarrow \quad f'(4)=\frac{\pi 3(4)^2}{2\sqrt[2]{4^3}}\cos(\pi\sqrt{4^3})=3\pi\cos 8\pi=3\pi$$

۷۴ مشتقات زیر را به دست آورید.

پاسخ:

$$1)\ \left((\sin x+\cos x)^2\right)'=2(\cos x-\sin x)(\sin x+\cos x)$$

$$2)\ \left(\sin(x^2)\right)'=(x^2)'\left(\cos(x^2)\right)=(2x)\left(\cos(x^2)\right)$$

$$3)\ \left(\tan(\cos x)\right)'=(-\sin x)\left(1+\tan^2(\cos x)\right)$$

$$4)\ \left((x^3-4x^2+x-5)^3\right)'=3(3x^2-8x+1)(x^3-4x^2+x-5)^2$$

$$5)\ \left(\cos(\frac{1}{\sin x})\right)'=\frac{-\cos x}{\sin^2 x}\left(-\sin(\frac{1}{\sin x})\right)$$

۷۵ مقدار مشتق تابع $y=\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\frac{x}{4}\right)$ در $x=\frac{\pi}{3}$ به دست آورید.

پاسخ:

یادت باشه: $2\sin u\cos u=\sin 2u$

$$y'=\left(\frac{1}{4}\right)2\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{x}{4}\right)\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{x}{4}\right)=\frac{1}{4}\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{x}{2}\right)\Big|_{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{4}\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

۷۶ اگر $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{h}=\frac{-2}{3}$ باشد، مشتق تابع $f\left(\sqrt{x-1}\right)$ در $x=5$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{h}=-\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}=-f'(2)=\frac{-2}{3} \quad \Rightarrow \quad f'(2)=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \left(f\left(\sqrt{x-1}\right)\right)'=\left(\frac{1}{2\sqrt{x-1}}f'\left(\sqrt{x-1}\right)\right)_{x=5}=\frac{1}{4}f'(2)=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{6}$$

۷۷ مشتق توابع زیر را محاسبه کنید.

پاسخ:

۱) $f(x)=\sqrt[3]{1+\cos x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{-\sin x}{3\sqrt[3]{(1+\cos x)^2}}$

۲) $g(x)=\cot\left(x^3-2x+1\right) \Rightarrow g'(x)=-\left(3x^2-2\right)\left(1+\cot^2\left(x^3-2x+1\right)\right)$

۷۸ اگر $f'(x)=\dfrac{1}{2x^2+3}$ باشد، آن‌گاه مشتق تابع $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ را در $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ به دست آورید.

پاسخ:

$$\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)'=\frac{-1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)_{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\left(\frac{-1}{x^2}\right)\times\left(\frac{1}{2\left(\frac{1}{x}\right)^2+3}\right)_{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-2\times\frac{1}{2\times(2)+3}=\frac{-2}{7}$$

۷۹ اگر $y=2u^2-u$, $u=2\sin x$ مشتق y بر حسب x در نقطه‌ی $x=\dfrac{\pi}{3}$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$y'=4u'u-u' \Rightarrow y'=\left(\left(4(2\cos x)(2\sin x)\right)-2\cos x\right)_{\frac{\pi}{3}}=\left(4\times2\left(\frac{1}{2}\right)\left(2\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-2\left(\frac{1}{2}\right)\right)=4\sqrt{3}-1$$

۸۰ اگر $f'(x)=\sqrt{x^2+1}$ باشد، مشتق تابع $y=f\left(5x^2-x\right)$ را نسبت به x تعیین کنید. (هماهنگ کشوری ۸۵)

پاسخ:

$$y=f\left(5x^2-x\right) \Rightarrow y'=(5x^2-x)'f'(5x^2-x)=y'=(10x-1)f'\left(5x^2-x\right)=(10x-1)\sqrt{\left(5x^2-x\right)^2+1}$$

۸۱ مشتق $f\left(\sqrt[3]{6x+2}\right)$ در نقطه‌ی $x=1$ برابر -2 است. شیب خط قائم بر نمودار f در نقطه‌ای به طول ۲ کدام است؟

پاسخ:

$$\left(f\left(\sqrt[3]{6x+2}\right)\right)'=\left(\frac{6}{3\sqrt[3]{(6x+2)^2}}f'\left(\sqrt[3]{6x+2}\right)\right)_{x=1}=\frac{6}{12}f'(2)=-2 \Rightarrow f'(2)=-4=m \Rightarrow m'=\frac{1}{4}$$

۸۲ اگر $y=\sin^2 2u$, $u=\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{x}{2}$ مقدار $\dfrac{dy}{dx}$ به ازای $x=\dfrac{\pi}{4}$ را به دست آورید.

پاسخ:

$y'(x)=(2)(2)(u')\cos 2u\sin 2u \qquad u'=(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2})'=-\frac{1}{2}$

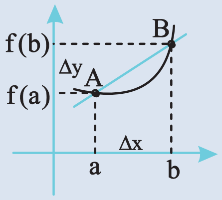
$$\Rightarrow y'(x)=2u'\sin 4u \Rightarrow y'(\frac{\pi}{4})=2(-\frac{1}{2})\sin(4)(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}) \Rightarrow y'(\frac{\pi}{4})=-\sin(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2})=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$$

آهنگ تغییرات متوسط و تغییرات آنی یا لحظه‌ای تابع:

فرض کنید تابع $y=f(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ تعریف شده باشد آن‌گاه نسبت $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ را آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ می‌گویند.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

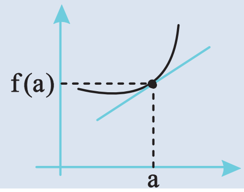
شیب خطی که دو نقطه از منحنی را به هم وصل می‌کند $=m_{AB}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Δx نمو یا تغییرات متغیر و Δy نمو یا تغییرات تابع است.

تغییرات آنی یا لحظه‌ای: حد آهنگ متوسط تابع هنگامی که Δx به سمت صفر میل می‌کند، را آهنگ لحظه‌ای یا آنی تابع می‌گویند.

آهنگ آنی $=f'(a)$



$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}=f'(x)$$

نکته

شیب خط مماس بر تابع، تغییر آهنگ یا تغییر آنی، تغییرات لحظه‌ای، همگی یعنی مشتق تابع در نقطه‌ی داده شده

تغییر آهنگ = شیب خط مماس در نقطه‌ی $A(a,f(a))$ $=m=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

۸۳ تابع $f(x)$ با ضابطه‌ی $f(x)=x^2+5x+4$ داده شده است.

الف) دستور کلی آهنگ متوسط تغییر این تابع را نسبت به متغیر x تعیین کنید.

ب) آهنگ متوسط تغییر این تابع را وقتی $x=3$, $\Delta x=0/4$ را به دست آورید.

ج) آهنگ آنی را در $x=3$ به دست آورید.

☑ پاسخ:

الف) $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^2+5(x+\Delta x)+4-(x^2+5x+4)}{\Delta x}$$

ب) $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(3+0/4)^2+5(3+0/4)+4-((3)^2+5(3)+4)}{0/4}=\frac{1/2+0/16+2}{0/4}=\frac{3/36}{0/4}$$

ج) $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)\quad\Rightarrow\quad f'(3)=(x^2+5x+4)'_3=(2x+5)_3=11$$

۸۴ متحرکی با معادله حرکت $f(t)=7t^2+10t+2$ شروع به حرکت می‌کند.

الف) سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی $[0,10]$ چقدر است؟

ب) در کدام لحظه سرعت متوسط متحرک با سرعت لحظه‌ای آن در این بازه‌ی زمانی برابر می‌شود؟

☑ پاسخ:

الف) $\text{سرعت متوسط}=\frac{f(10)-f(0)}{10-0}=\frac{(7(10)^2+10(10)+2)-(2)}{10}=\frac{800}{10}=80\ \frac{m}{s}$

ب) $\text{سرعت لحظه‌ای}=f'(t)=14t+10 \Rightarrow f'(t)=14t+10=80 \Rightarrow 14t=70 \Rightarrow t=5$

۸۵ هرگاه شعاع یک بادکنک کروی با آهنگ ثابت ۲ سانتی‌متر بر ثانیه افزایش یابد، آهنگ تغییر حجم کره وقتی شعاع آن ۱۰ سانتی متر است را به دست آورید.

☑ پاسخ:

چون گفته شعاع بادکنک با آهنگ ۲ سانتی‌متر بر ثانیه افزایش می‌یابد بنابراین: $R'_t=2$ از طرفی

$V=\frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow V'_t=R'_t\times V'_R=2\times 4\pi R^2=8\pi(100)=800\pi$

۸۶ در تابع $f(x)=\sqrt{x}$ آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی x از ۴ به ۲۵ تغییر کند برابر با آهنگ لحظه‌ای در نقطه $x=a$ می‌شود کدام a است؟

☑ پاسخ:

$\text{آهنگ متوسط}=\frac{f(25)-f(4)}{25-4}=\frac{\sqrt{25}-\sqrt{4}}{21}=\frac{5-2}{21}=\frac{1}{7}$

$\text{آهنگ لحظه‌ای}=f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{7} \Rightarrow x=\frac{49}{4}$

۸۷ آهنگ تغییرات مساحت یک مربع را نسبت به محیط آن برای مربعی که محیط آن ۸ واحد است به دست آورید. (خرداد ۹۴ – خارج کشور)

☑ پاسخ: $S=a^2 \qquad P=4a \Rightarrow S=\left(\frac{p}{4}\right)^2 \Rightarrow S'(p)=\frac{2}{16}p \Rightarrow S'(p=8)=\frac{2}{16}(8)=1$

۸۸ آهنگ تغییرات مساحت دایره به شعاع $r=4$ را به دست آورید. (خرداد ۹۴)

☑ پاسخ:

$S_{(R)}=\pi R^2 \Rightarrow S'_{(R)}=2\pi R \Rightarrow S'_{(4)}=8\pi$

۸۹ تابع حرکت متحرکی روی محور x ها به صورت $x_{(t)}=-3t^2+12t-9$ است.

الف) با رسم نمودار این تابع، شیوه‌ی حرکت متحرک را توصیف کنید.

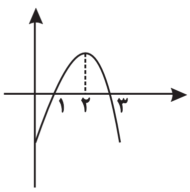
ب) سرعت متحرک را در هر لحظه بیابید.

ج) متحرک در جهت مثبت حداکثر چه قدر از مبدأ فاصله می‌گیرد؟

د) سرعت متحرک در نقطه‌ای که حداکثر فاصله از مبدأ را دارد، چقدر است؟

☑ پاسخ:

الف) $x_{(t)}=-3(t^2-4t+3)=-3(t-1)(t-3)$

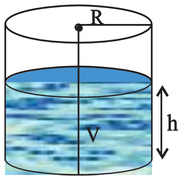


ب) $x'_{(t)}=-6t+12$

ج) $x_{(t=2)}=-3(2)^2+12(2)-9=3$

د) $x'_{(t=2)}=-6(2)+12=0$

۹۰ از یک مخزن استوانه‌ای شکل به شعاع قاعده‌ی ۳ متر، آب با آهنگ ۳ لیتر بر ثانیه خارج می‌شود. سطح آب در این مخزن با چه سرعتی پایین می‌رود؟



☑پاسخ:

مطابق فرض مسئله آب با آهنگ ۳ لیتر بر ثانیه از استوانه خارج می‌شود، یعنی حجم آب داخل منبع تابعی از زمان به شکل $V=-۳t$ است. از طرفی $V=\pi R^۲ h$ بنابراین داریم:

$$\begin{cases} V=\pi R^۲ h \\ V=-۳t \end{cases} \Rightarrow \quad \pi R^۲ h=-۳t \Rightarrow \quad h=\frac{-۳t}{\pi R^۲} \Rightarrow \quad h'_t=\frac{-۳}{\pi R^۲} \quad \Rightarrow \quad h'=\frac{-۳}{\pi (۳)^۲}=-\frac{۱}{۳\pi}$$

۹۰ مساحت یک کره به شعاع r از رابطه‌ی $S=۴\pi r^۲$ به دست می‌آید، اگر شعاع کره با آهنگ ۳ سانتی‌متر در ثانیه کاهش یابد آهنگ تغییرات مساحت کره را در لحظه‌ای که شعاع کره ۵ سانتی متر است، بیابید. (هماهنگ کشوری ۸۷)

☑پاسخ:

چون شعاع کره با آهنگ ۳ متر بر ثانیه کاهش می‌یابد داریم: $R=R_۰-۳t$ که در آن $R_۰$ یعنی شعاع اولیه‌ی کره می‌باشد.

$$S=۴\pi R^۲ \Rightarrow \quad S=۴\pi\left(R_۰-۳t\right)^۲=۴\pi\left(۹t^۲-۶R_۰t+R_۰^۲\right)$$

$$\Rightarrow \quad S'_t=۴\pi\left(۱۸t-۶R_۰\right)=-۲۴\pi\left(R_۰-۳t\right)=-۲۴\pi\times ۵=-۱۲۰\pi$$

در لحظه‌ای که شعاع کره ۵ است به جای $(R_۰-۳t)$، ۵ گذاشتیم.

۹۱ آهنگ تغییر مساحت دایره، نسبت به محیط آن را به‌دست آورید.

☑پاسخ:

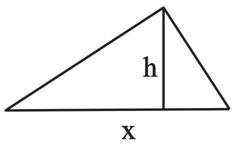
$$P=۲\pi R \quad \Rightarrow \quad R=\frac{P}{۲\pi}$$

$$S=\pi R^۲=\pi\left(\frac{P}{۲\pi}\right)^۲=\frac{P^۲}{۴\pi} \quad \Rightarrow \quad S'=\frac{P}{۲\pi} \quad \Rightarrow \quad S'=\frac{۲\pi R}{۲\pi}=R$$

۹۲ مثلثی با مساحت ثابت ۲۷ و قاعده ۹ داریم. اگر اندازه‌ی قاعده‌ی این مثلث با سرعت $۳ \, m/s$ کاهش بیابد، ارتفاع آن با چه سرعتی تغییر می‌کند؟

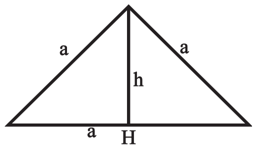
☑پاسخ:

$$S=\frac{xh}{۲} \quad \Rightarrow \quad ۲۷=\frac{۱}{۲}xh \quad \Rightarrow \quad h=\frac{۵۴}{x} \quad \Rightarrow \quad h'_t=\frac{-۵۴}{x^۲}x'_t=\frac{(-۵۴)(-۳)}{۸۱}=\frac{۱۶۲}{۸۱}=۲$$



۹۳ آهنگ آنی تغییر مساحت یک مثلث متساوی الاضلاع نسبت به محیط آن را محاسبه کنید.

پاسخ:

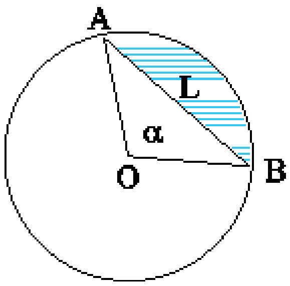


مساحت $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ ارتفاع $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ محیط $2p = 3a$

$$S = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \quad , \quad 2p = 3a \quad \Rightarrow \quad \frac{dS}{d(2p)} = \frac{\frac{dS}{da}}{\frac{d(2p)}{da}} = \frac{\frac{2a\sqrt{3}}{4}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

۹۴ در شکل مقابل شعاع دایره واحد، و نقطه‌ی o مرکز آن است. اگر طول وتر برابر L باشد، آهنگ تغییرات S (مساحت ناحیه‌ی سایه زده) را نسبت به L حساب کنید.

پاسخ:



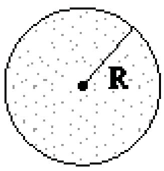
قطاع $S_{OAB} = \frac{\alpha}{2\pi} \times \pi r^2 \xrightarrow{r=1} S_{OAB} = \frac{1}{2}\alpha$

مثلث $S_{\triangle(OAB)} = \frac{1}{2}OA \times OB \sin\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)(1)(1)\sin\alpha = \frac{1}{2}\sin\alpha$

هاشور زده $S = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad S'_{(\alpha)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\alpha$

۹۵ اگر شعاع دایره‌ای با آهنگ آنی ۵ سانتی‌متر بر ثانیه بزرگ شود، در لحظه‌ای که مساحت دایره برابر 4π باشد، آهنگ آنی تغییر مساحت چه‌قدر است؟

پاسخ:



$$R'_{(t)} = 5 \quad \Rightarrow \quad , \quad \pi R^2 = 4\pi \quad \Rightarrow \quad R = 2$$

$$S = \pi R^2 \quad \Rightarrow \quad S'_{(t)} = 2\pi R R'_t \quad \Rightarrow \quad S'_{(t)} = 2\pi(2)(5) = 20\pi$$

۹۶ گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظه $t = 0$ سوراخی در ظرف ایجاد میشود اگر حجم مایع باقی مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه ی $V_{(t)} = 40\left(1 - \frac{t}{100}\right)^2$ به دست می آید در چه زمانی آهنگ تغییر لحظه ای برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0,100]$ می شود ؟

$$\frac{V(100) - V(0)}{100 - 0} = \frac{0 - 40}{100} = \frac{-4}{10} \quad , \quad V'(t) = 80\left(\frac{-1}{100}\right)\left(1 - \frac{t}{100}\right) = \frac{-80}{100}\left(1 - \frac{t}{100}\right) = \frac{-4}{100}$$

$$2 - \frac{t}{50} = 1 \quad \Rightarrow \quad t = 50$$

حالا آهنگ تغییر رو مساوی تغییرات متوسط قرار می دیم

۹۷ در تابع با ضابطه‌ی، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر x، در نقطه‌ی $x=1$ با نمو ۰/۴۴، از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چه‌قدر کم‌تر است؟(خارج-۹۴)

۱) $\frac{1}{30}$ ۲) $\frac{1}{24}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{1}{6}$

پاسخ گزینه‌ی ۴ صحیح است.

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(1/44)-f(1)}{1/44-1} = \frac{\frac{0/44}{1/2}-0}{0/44} = \frac{5}{6}$$

$$\text{آهنگ لحظه ای} = f'(x) = \frac{\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)}{x} \Rightarrow f'(1)=1$$

اختلاف این دو مقدار برابر است با:

$$1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$$

۹۸ اگر $f(x)=x^3-[2x^2]x$ باشد، مقدار $f'_+(\sqrt{2})-f'_-(\sqrt{2})$، کدام است؟(خارج-۹۴)

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ گزینه‌ی (۲) صحیح است.

اگر x از سمت راست به $\sqrt{2}$ نزدیک شود، x^2 نیز از راست به ۲ نزدیک می‌شود؛ بنابراین $[2x^2]=[4^+]$. پس در این همسایگی، تابع به‌صورت: $f(x)=x^3-4x$ است. و اگر فرض کنیم x از سمت چپ به $\sqrt{2}$ نزدیک شود نتیجه: می‌شود، x^2 از چپ به $\sqrt{2}$ نزدیک می‌شود و

بنابراین: $[2x^2]=[4^-]=3$ پس: $f(x)=x^3-3x$:

$$\lim_{x\to\sqrt{2}^+} f(x)=x^3-4x=-2\sqrt{2}=f(\sqrt{2})=-2\sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to\sqrt{2}^-} x^3-3x=-\sqrt{2} \neq f(\sqrt{2})=-2\sqrt{2}$$

در نتیجه $f'(x)=3x^2-4 \Rightarrow f'_+(\sqrt{2})=3(\sqrt{2})^2-4=2$ ولی چون پیوستگی چپ ندارد پس مشتق چپ ندارد و در گزینه ها گزینه درست نیست .

۹۹ در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}$، حاصل $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$، کدام است؟ (کنکور خارج از کشور ۹۵)

۱) $\frac{7}{48}$ ۲) $\frac{5}{24}$ ۳) $\frac{7}{24}$ ۴) $\frac{7}{16}$

پاسخ گزینه‌ی (۱) صحیح است.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+h)-f(h)}{h}=f'(1)$$

مشتق تابع هموگرافیک:

$$y=\frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow y'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

$$f(x)=\left(\frac{4x+5}{x+3}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{4x+5}{x+3}\right)'\times\left(\frac{4x+5}{x+3}\right)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}\times\frac{4(3)-5(1)}{(x+3)^2}\times\left(\frac{4x+5}{x+3}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(1)=\frac{1}{2}\times\frac{7}{(4)^2}\times\left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{7}{32}\times\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{7}{32}\times\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{7}{32}\times\frac{2}{3}=\frac{7}{48}$$

این سوالارو با توضیحات داده شده میتونی حل کنی.

- نمودار تابع $f(x)=|x+2|-|x-1|$ را رسم کنید و نقاط مشتق ناپذیری آن را تعیین کنید.
- مشتق تابع $f(x)=3x^2-4x$ را به کمک تعریف مشتق محاسبه کنید.
- آهنگ تغییرات مساحت مربع نسبت به قطر آن، برای مربعی به قطر ۵ را به دست آورید.
- اگر $f(x)=\tan^2 3x$ باشد ، مقدار $\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)'$ را تعیین کنید.
- معادله‌ی خط مماس بر تابع $f(x)=\sin x+\cos 2x$ را در نقطه‌ای به طول $x=\pi$ بنویسید.

- مشتق‌های زیر را تعیین کنید. (ساده کردن الزامی نیست).

۱) $y=\sin\sqrt{x}\cos 2x$ ۲) $y=\dfrac{1}{\sin x+\cos x}$ ۳) $y=\sqrt{x+\cos x}$ ۴) $y=\left(\dfrac{x-3}{1-x}\right)^2$

۵) $y=\dfrac{-x^2+x}{2+\frac{x}{2}}$ ۶) $y=x^2\cot x$ ۷) $y=x^2\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$ ۸) $y=\sin^2(\cos\pi x)$

۹) $y=\sin^2\dfrac{x+1}{x-1}$ ۱۰) $y=\cos^3 6x+\sqrt[3]{x^2}$ ۱۱) $y=(1-3x^2)\sqrt{1+2x+x^2}$

- آهنگ تغییرات متوسط مساحت یک دایره را هنگامی که شعاع آن از ۳ واحد به ۵ واحد افزایش می‌یابد، به دست آورید.
- با استفاده از تعریف مشتق، مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases}3x+1 & x\le 1\\ x^2+3 & x>1\end{cases}$ را در $x=1$ بررسی کنید. (دی ماه ۹۲)
- معادله‌ی خط قائم بر نمودار تابع $f(x)=\dfrac{1}{x}$ در نقطه‌ی $M\begin{vmatrix}2\\ \frac{1}{2}\end{vmatrix}$ را بنویسید.
- آهنگ تغییرات متوسط مساحت یک دایره را هنگامی که شعاع آن از ۳ به ۵ افزایش می‌یابد به دست آورید.

فرمول‌های ضروری مشتق:

$$y=u^n \Rightarrow y'=nu^{n-1}u'$$

$$y=\sqrt[n]{u^m}=u^{\frac{m}{n}} \Rightarrow y'=\frac{m}{n}u'u^{\frac{m}{n}-1}=\frac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$$

$$y=uv \Rightarrow y'=u'v+v'u$$

$$y=\frac{u}{v} \Rightarrow y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

$$y=\frac{1}{u} \Rightarrow y=\frac{-u'}{u^2}$$

$$y=\log_a^u \Rightarrow y'=\frac{u'}{uLna}$$

$$y=Lnu \Rightarrow y'=\frac{u'}{u}$$

$$y=a^u \Rightarrow y'=u'a^uLna$$

$$y=e^u \Rightarrow y'=u'e^u$$

$$y=\frac{au+b}{cu+d} \Rightarrow y'=\left(\frac{ad-bc}{(cu+d)^2}\right)u'$$

$$y=\sin^n u \Rightarrow y'=nu'\cos u\sin^{n-1}u$$

$$y=\cos^n u \Rightarrow y'=-nu'\sin u\cos^{n-1}u$$

$$y=\tan^n u \Rightarrow y'=nu'\left(1+\tan^2 u\right)\tan^{n-1}u$$

$$y=\cot^n u \Rightarrow y'=-nu'\left(1+\cot^2 u\right)\cot^{n-1}u$$

$$y=\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'} \Rightarrow y'=\frac{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}x^2+2\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}x+\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}}{\left(a'x^2+b'x+c'\right)^2}$$

$$f(x)=g(x)\times h(x)\times k(x)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{f'}{f}=\frac{g'}{g}+\frac{h'}{h}+\frac{k'}{k}$$