حسابان ۲

پایه ی دوازدهم « رشته ی ریاضی و فیزیک »

فصل ۴ : مشتق

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه

استان خوزستان

مهر ۱۳۹۹

درس اوّل : آشنایی با مفهوم مشتق

مشتق یکی از مفاهیم اساسی ریاضی است که دارای کاربردهای وسیع در ریاضیات و در علوم دیگر است. ایده ی اوّلیه، در مورد مفهوم مشتق، به شیب یک خط مربوط می شود. در این درس به کمک این ایده به تـدریج به صورت دقیق تری با مفهوم مشتق آشنا می شویم.

مشتق تابع در یک نقطه

اگر $y = f(x)$ یک تابع پیوسته در نقطه‌ی $x = a$ باشد. در این صورت مشتق تابع $y = f(x)$ در نقطه- ی $x = a$ را به صورت زیر تعریف می کنند و آنرا با $f'(a)$ یا $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a}$ نمایش می دهند.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

مثال: مشتق تابع $f(x) = ۳x - ۷$ را در نقطه‌ی $x = ۲$ بدست آورید.

حل :

$$f(x) = ۳x - ۷$$

$$f(۲) = ۳(۲) - ۷ = -۱$$

$$f'(۲) = \lim_{x \to ۲} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲}$$

$$= \lim_{x \to ۲} \frac{(۳x - ۷) - (-۱)}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲} \frac{۳x - ۶}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲} \frac{۳(x - ۲)}{x - ۲} = ۳$$

مثال: مشتق تابع $f(x) = x^۲ + ۳x - ۱$ را در نقطه‌ی $x = ۴$ بدست آورید.

حل :

$$f(x) = x^۲ + ۳x - ۱$$

$$f(۴) = (۴)^۲ + ۳(۴) - ۱ = ۱۶ + ۱۲ - ۱ = ۲۷$$

$$f'(۴) = \lim_{x \to ۴} \frac{f(x) - f(۴)}{x - ۴}$$

$$= \lim_{x \to ۴} \frac{(x^۲ + ۳x - ۱) - (۲۷)}{x - ۴} = \lim_{x \to ۴} \frac{x^۲ + ۳x - ۲۸}{x - ۴} = \lim_{x \to ۴} \frac{(x + ۷)(x - ۴)}{x - ۴}$$

$$= \lim_{x \to ۴} (x + ۷) = ۴ + ۷ = ۱۱$$

تمرین ۱ : مشتق هر یک از توابع زیر را به کمک تعریف مشتق، در نقطه‌ی داده شده ، بدست آورید.

الف) $f(x) = -۵x + ۱ \quad ; \quad x = ۲$

ب) $f(x) = -x^۲ + ۳x \quad ; \quad x = ۱$

ج) $f(x) = x^۳ + ۲x - ۱ \quad ; \quad x = ۱$

تمرین برای حل :

۲ : مشتق تابع $f(x) = x^۲ + ۵x - ۱$ را در نقطه‌ی $x = ۲$ به دست آورید.

۳ : مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در نقطه‌ی $x = ۴$ به دست آورید.

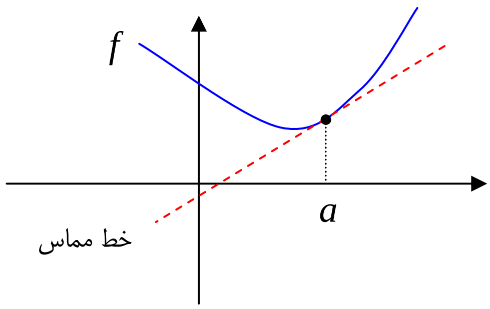
۴ : مشتق تابع $f(x) = \sin x$ را در نقطه‌ی $x = ۰$ به دست آورید.

***

تعبیر هندسی مشتق

مشتق تابع $y = f(x)$ در نقطه‌ی $x = a$، با شیب خط مماس بر نمودار تابع در این نقطه برابر است.

$$m = f'(a)$$



مثال: شیب خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = x^۲ + ۱$ را در نقطه‌ی $x = ۳$ بدست آورید.

حل :

$f(x) = x^۲ + ۱$

$$f(۳)=(۳)^{۲}+۱=۱۰$$

$$f'(۳)=\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}$$

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{(x^{۲}+۱)-(۱۰)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{x^{۲}-۹}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{(x-۳)(x+۳)}{x-۳}$$

$$=\lim_{x\to ۳}(x+۳)=۳+۳=۶$$

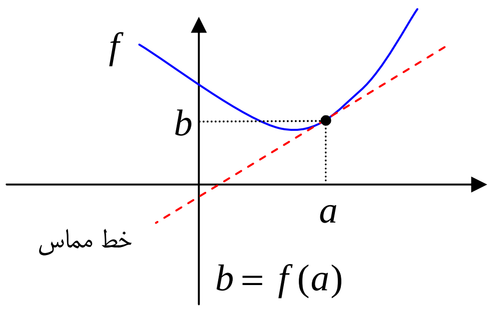
شیب خط مماس $m=f'(۳)=۶$

***

معادله‌ی خط مماس

معادله ی خط مماس بر نمودار تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ی $x=a$ از رابطه‌ی زیر به دست می آید.

$$y=m(x-a)+b$$



مثال : با توجه به مثال قبل ، معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع، در نقطه‌ی $x=۳$ را به دست آورید.

حل :

$$f(۳)=(۳)^{۲}+۱=۱۰$$

$$y=m(x-a)+b\to y=۶(x-۳)+۱۰\to y=۶x-۸$$ معادله‌ی خط مماس

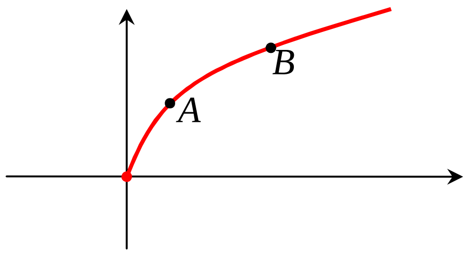
تمرین ۵ : شیب خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ را در نقطه‌ی $x=۲$ بدست آورید. سپس معادله- ی خط مماس بر منحنی نمودار تابع را در این نقطه بنویسید.

تمرین برای حل :

۶ : شیب خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x+۱}$ را در نقطه‌ی $x=۳$ بدست آورید. سپس معادله‌ی خط مماس بر منحنی نمودار تابع را در این نقطه بنویسید.

۷ : معادله‌ی خط مماس بر منحنی نمودار تابع $f(x)=x^{۲}-۲x$ را در نقطه‌ی $x=۳$ بدست آورید.

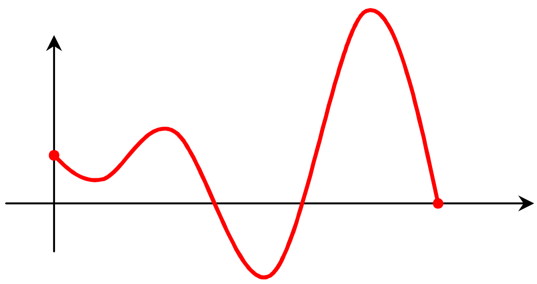
۸ : معادله‌ی خط مماس بر منحنی نمودار تابع $f(x)=۳x^{۲}-۲x+۱$ را در نقطه‌ی $x=۲$ بدست آورید.



۹ : نمودار مقابل را در نظر بگیرید. سپس تعیین کنید که شیب خط مماس در کدام نقطه بیشتر است؟

۱۰ : اگر نمودار تمرین قبل، نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ باشد. شیب خط مماس بر نمودار این تابع را در دو نقطه‌ی $x_A=۱$ و $x_B=۴$ محاسبه و سپس مقایسه کنید.

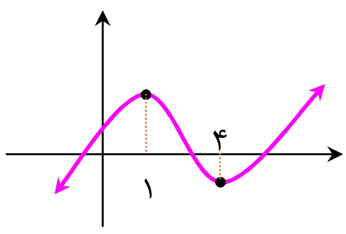
۱۱ : با توجه به نمودار زیر به سئوالات داده شده پاسخ دهید.



الف : نقطه ای را روی نمودار تعیین کنید که شیب خط مماس بر نمودار تابع مثبت باشد.

ب : نقطه ای را روی نمودار تعیین کنید که شیب خط مماس بر نمودار تابع منفی باشد.

ج : نقطه ای را روی نمودار تعیین کنید که شیب خط مماس بر نمودار تابع صفر باشد.



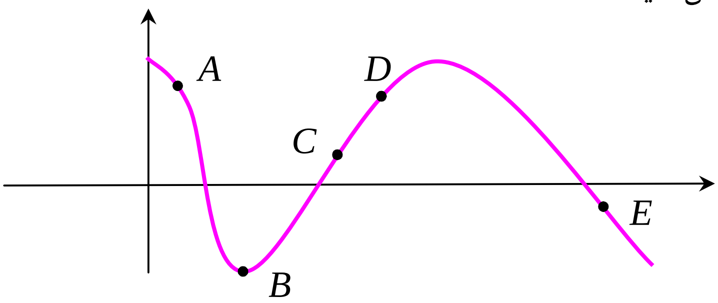
۱۲ : در نمودار شکل مقابل :

الف : در چه نقاطی مشتق صفر است؟

ب : در چه فاصله هایی مشتق مثبت است؟

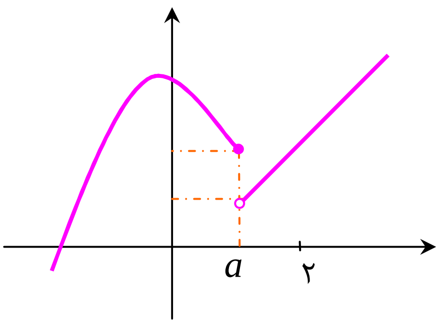
ج : در چه فاصله ای مشتق منفی است؟

۱۳ : در جدول زیر شیب خط مماس بر منحنی در نقاط متفاوتی داده شده است. با توجه به نمودار، جدول را با نقاط روی منحنی کامل کنید.



شیب خط مماس	-۲	-۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱
نقطه‌ی روی منحنی					

۱۴ : نمودار مقابل را در نظر بگیرید. سپس به سئوالات زیر پاسخ دهید.

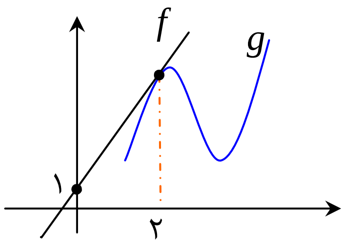


الف : آیا تابع در نقطه‌ی $x = a$ پیوسته است.

ب : مثبت یا منفی بودن، شیب خط مماس بر منحنی در نقاط واقع در بازه‌ی $(۰,a)$ را بررسی کنید.

ج : مثبت یا منفی بودن، شیب خط مماس بر منحنی در نقاط واقع در بازه‌ی $(a,۲)$ را بررسی کنید.

د : نقطه ای روی منحنی مشخص کنید که شیب خط مماس بر منحنی در آن نقطه برابر صفر است.



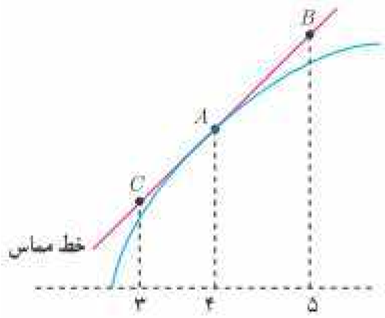
۱۵ : در شکل مقابل تابع خطی f در نقطه‌ی $x = ۲$ بر نمودار تابع g مماس شده است.

اگر $\lim\limits_{x \to ۲} \frac{g(x) - g(۲)}{x - ۲} = ۴$ باشد.

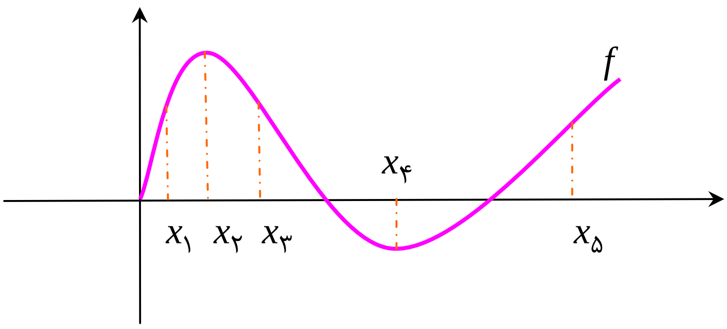
مقدار $f(۱) + g(۲) + g'(۲)$ را محاسبه کنید.

۱۶ : معادله‌ی تابعی را بنویسید که شیب آن در نقطه‌ی $x = ۲$ برابر۳ شود.

۱۷ : برای تابع f در شکل زیر داریم: $f'(۴)=۱/۵$ و $f(۴)=۲۵$ با توجه به شکل مختصات نقاط A و B و C را بیابید.



۱۸ : در شکل زیر نمودار تابع f داده شده است. با توجه به این نمودار، در هر مورد علامت $<$ یا $=$ یا $>$ قرار دهید.



الف) $f'(x_۱)$ ◯ $f'(x_۲)$

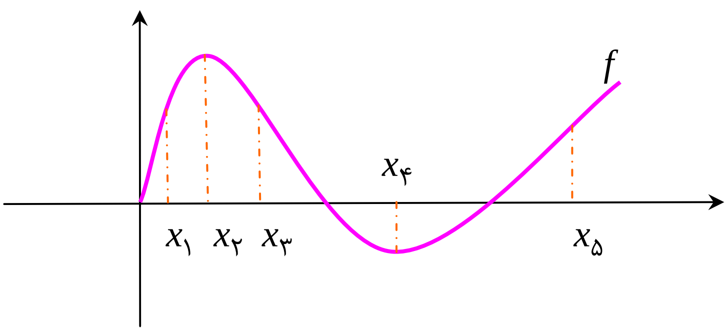
ب) $f'(x_۳)$ ◯ $f'(x_۲)$

پ) $f'(x_۳)$ ◯ $f'(x_۱)$

ت) $f'(x_۲)$ ◯ $f'(x_۴)$

ث) $f'(x_۱)$ ◯ $f'(x_۵)$

۱۹ : در شکل زیر نمودار تابع f داده شده است. با توجه به این نمودار، در هر مورد علامت $<$ یا $=$ یا $>$ قرار دهید.



الف) $f'(x_۱)$ ◯ ۰

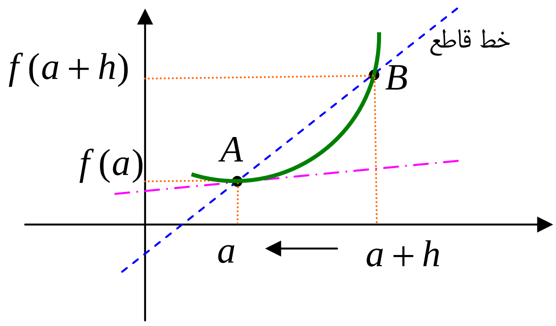
ب) $f'(x_۲)$ ◯ ۰

پ) $f'(x_۳)$ ◯ ۰

***

مسئله‌ی خط مماس

مسئله‌ی یافتن خط مماس در نقطه‌ی A به مسئله‌ی یافتن شیب خط مماس در این نقطه منجر می شود.



برای یافتن خط مماس بر منحنی تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ی A باید نقطه ای مانند B را روی منحنی در نزدیکی A در نظر بگیریم و با رسم خط قاطع AB، نقطه‌ی B را به نقطه‌ی A نزدیک کنیم و ببینیم که آیا این خط ها به خط خاصی نزدیک می شوند، یا نه؟ واضح است که این خط همان خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی A است. این عمل دقیقاً یک عمل حدگیری است و شیب این خط با یک عمل حدگیری به دست می آید.

$$A=\begin{bmatrix} a \\ f(a) \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix} a+h \\ f(a+h) \end{bmatrix} \Rightarrow m_{AB}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$m=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$ شیب خط مماس در صورت وجود

توجه : اگر در شکل فوق مختصات نقطه‌ی B را $(x, f(x))$ فرض کنیم، خواهیم داشت.

$$A=\begin{bmatrix} a \\ f(a) \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix} x \\ f(x) \end{bmatrix} \Rightarrow m_{AB}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$m=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$ شیب خط مماس در صورت وجود

تعریف خط مماس

اگر تابع f بر بازه‌ی بازی شامل a تعریف شده باشد و حد زیر موجود باشد، آنگاه خطی که از نقطه‌ی $A=\begin{bmatrix} a \\ f(a) \end{bmatrix}$ گذشته و به شیب m می باشد، خط مماس بر نمودار f در نقطه‌ی A نامیده می شود.

$$m=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

تمرین ۱۸ : شیب خط مماس بر نمودار $f(x)=x^{۲}$ را در نقطه‌ی $A(۱,۱)$ را تعیین کنید.

حل : شیب خط مماس را می توان به یکی از شیوه های زیر به دست آورد.

روش اوّل :

$$m=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱}=۱+۱=۲$$

روش دوّم

$$m=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(۱+h)^{۲}-۱}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۱+۲h+h^{۲}-۱}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{۲h+h^{۲}}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{h(۲+h)}{h}=\lim_{h\to ۰}(۲+h)=۲+۰=۲$$

تمرین۱۹: مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در نقطه‌ی $x=۹$ به دست آورید.

حل :

$$f'(۹)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۹+h)-f(۹)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\sqrt{۹+h}-۳}{h}$$

$$\overset{\frac{۰}{۰}}{=}\lim_{h\to ۰}\frac{\sqrt{۹+h}-۳}{h}\times\frac{\sqrt{۹+h}+۳}{\sqrt{۹+h}+۳}=\lim_{h\to ۰}\frac{h}{h}\times\frac{۱}{\sqrt{۹+h}+۳}=\frac{۱}{\sqrt{۹}+۳}=\frac{۱}{۶}$$

***

مشتق های یک طرفه

اگر تابع f در نقطه‌ی a و یک همسایگی راست a تعریف شده باشد، حد یک طرفه‌ی $\lim_{x\to a^{+}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ را در صورت وجود، **مشتق راست** تابع f در نقطه‌ی a می نامند و آن را با نماد $f'_{+}(a)$ نمایش می دهند.

$$f'_{+}(a)=\lim_{x\to a^{+}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$ مشتق راست

اگر تابع f در نقطه‌ی a و یک همسایگی چپ a تعریف شده باشد، حد یک طرفه‌ی $\lim\limits_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ را در صورت وجود، **مشتق چپ** تابع f در نقطه‌ی a می نامند و آن را با نماد $f'_-(a)$ نمایش می دهند.

$$f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$ مشتق چپ

تمرین ۲۰ : مشتق راست و مشتق چپ تابع زیر را در نقطه‌ی $x=۲$ تعیین کنید.

$$f(x)=\begin{cases}۲x & x\leq ۲\\ -۳x+۱۰ & x>۲\end{cases}$$

تمرین برای حل :

۲۱ : مشتق راست و مشتق چپ تابع زیر را در نقطه‌ی $x=۰$ بدست آورید.

$$f(x)=\begin{cases}x^۲+۱ & x\geq ۰\\ ۱+x\sin x & x<۰\end{cases}$$

۲۲ : مشتق راست و مشتق چپ تابع $f(x)=۲|x+۱|-۳$ را در نقطه‌ی $x=-۱$ بدست آورید.

۲۳ : مشتق راست و مشتق چپ تابع زیر را در صورت وجود در نقطه‌ی $x=۲$ بدست آورید.

$$f(x)=\begin{cases}x^۲ & x\neq ۲\\ ۱ & x=۲\end{cases}$$

۲۴ : نمودار تابع $f(x)=|x|$ را رسم کنید. سپس در مورد شیب خط مماس بر نمودار تابع در همسایگی راست و چپ نقطه‌ی $x=۰$ بحث کنید.

***

مشتق پذیری یک تابع در یک نقطه

تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ی $x=a$ مشتق پذیر گویند، هرگاه:

الف) در این نقطه پیوسته باشد. ($\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$)

ب) مشتق راست و مشتق چپ آن در این نقطه موجود و برابر باشند. ($f'_+(a)=f'_-(a)$)

در غیر این صورت تابع در نقطه‌ی $x=a$ مشتق پذیر نیست.

تمرین۲۵ : مشتق پذیری تابع زیر را در نقطه‌ی $x=۰$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^۲+۱ & x\geq ۰ \\ ۱+x\sin x & x<۰ \end{cases}$$

حل : ابتدا پیوستگی تابع را در نقطه ی داده شده بررسی می کنیم.

مقدار $f(۰)=(۰)^۲+۱=۱$

حد راست $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=(۰)^۲+۱=۱$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=۱+(۰)\sin(۰)=۱$

تابع در نقطه‌ی $x=۰$ پیوسته است.

حال مشتقات یک طرفه را در این نقطه را بررسی می کنیم.

$$f'_+(۰)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{(x^۲+۱)-۱}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x^۲}{x}=\lim_{x\to ۰^+} x=۰$$

$$f'_-(۰)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{(۱+x\sin x)-۱}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x\sin x}{x}$$

$$=\lim_{x\to ۰^-}\sin x=۰$$

$$\Rightarrow f'_+(۰)=f'_-(۰)$$

تابع در نقطه‌ی $x=۰$ مشتق پذیر است.

تمرین۲۶ : مشتق پذیری تابع $f(x)=|x-1|$ را در نقطه‌ی $x=1$ بررسی کنید.

حل: ابتدا تابع را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & x\geq 1 \\ -(x-1) & x<1 \end{cases}$$

حال پیوستگی تابع را در نقطه‌ی داده شده بررسی می کنیم.

مقدار $f(1)=1-1=0$

حد راست $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1-1=0$

حد چپ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-(1-1)=0$

تابع در نقطه‌ی $x=1$ پیوسته است.

حال مشتقات یک طرفه را در این نقطه را بررسی می کنیم.

مشتق راست $f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)-0}{x-1}=1$

مشتق چپ $f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-(x-1)-0}{x-1}=-1$

$\Rightarrow f'_+(1)\neq f'_-(1)$

تابع در نقطه‌ی $x=1$ مشتق پذیر نیست.

تمرین۲۷ : مشتق پذیری تابع $f(x)=|x^2-1|$ را در نقاط $x=1$ و $x=-1$ بررسی کنید.

حل: ابتدا تابع را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x\geq 1 \\ -(x^2-1) & -1<x<1 \\ x^2-1 & x\leq -1 \end{cases}$$

حال پیوستگی تابع را در نقاط داده شده بررسی می کنیم.

بررسی پیوستگی در نقطه‌ی $x=1$

مقدار $f(1)=1^2-1=0$

حد راست $\lim_{x\to 1^+} f(x)=1^2-1=0$

حد چپ $\lim_{x\to 1^-} f(x)=-(1^2-1)=0$

تابع در نقطه‌ی $x=1$ پیوسته است.

حال مشتقات یکطرفه را در این نقطه را بررسی می کنیم.

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x^2-1)-0}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x^2-1)-0}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)(x+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}-(x+1)=-2$$

تابع در نقطه‌ی $x=1$ مشتق پذیر نیست.

بررسی پیوستگی در نقطه‌ی $x=-1$

مقدار $f(-1)=(-1)^2-1=0$

حد راست $\lim_{x\to -1^+} f(x)=-[(-1)^2-1]=0$

حد چپ $\lim_{x\to -1^-} f(x)=(-1)^2-1=0$

تابع در نقطه‌ی $x=-1$ پیوسته است.

حال مشتقات یکطرفه را در این نقطه را بررسی می کنیم.

$$f'_+(-1)=\lim_{x\to (-1)^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\frac{-(x^2-1)-0}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1^+}\frac{-(x-1)(x+1)}{x+1}=2$$

$$f'_{-}(-1)=\lim_{x\to(-1)^{-}}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^{-}}\frac{(x^{2}-1)-0}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1^{-}}\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}=-2$$

تابع در نقطه‌ی $x=-1$ مشتق پذیر نیست.

تمرین برای حل :

۲۸ : مشتق پذیری تابع زیر را در نقطه‌ی $x=1$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases}x^{2}+x & x<1\\ x-3 & x\geq 1\end{cases}$$

۲۹ : مشتق پذیری توابع زیر را در نقطه‌ی داده شده بررسی کنید.

الف) $f(x)=x|x| \quad : \quad x=0$

ب) $f(x)=x.\operatorname{sgn}x \quad : \quad x=0$

ج) $f(x)=1+x.\sin x \quad : \quad x=0$

د) $f(x)=(x-1)[x] \quad : \quad x=1$

***

قضیه : اگر تابعی در نقطه ای مشتق پذیر باشد، آنگاه در آن نقطه نیز پیوسته خواهد بود.

اثبات :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)\to\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=\lim_{x\to a}(x-a)f'(a)$$

$$\to\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=\underbrace{\lim_{x\to a}(x-a)f'(a)}_{0}\to\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=0$$

$$\to\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}f(a)=0\to\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

و این به معنی آن است که تابع در نقطه‌ی $x=a$ پیوسته است.

توجه :

۱ : عکس قضیه‌ی فوق الزاماً برقرار نیست. یعنی ممکن است یک تابع در یک نقطه پیوسته باشد ولی در ان نقطه مشتق پذیر نیست. مانند تابع $f(x)=|x|$ که در نقطه‌ی $x=0$ پیوسته است ولی در این نقطه مشتق پذیر نیست.

۲ : اگر تابعی در یک نقطه پیوسته نباشد، در آن نقطه مشتق پذیر نیست.

تمرین ۳۰ : تابع زیر در نقطه‌ی $x=1$ مشتق پذیر است، مقدار b و a را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases} ax^2 & x<1 \\ bx^3+2x & x\geq 1 \end{cases}$$

حل: چون تابع در نقطه‌ی $x=1$ مشتق پذیر است، پس در این نقطه پیوسته می باشد. لذا پیوستگی و سپس مشتقات یکطرف را بررسی می کنیم.

مقدار $f(1)=b+2$

حد راست $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(bx^3+2x)=b+2$

حدچپ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} ax^2=a$

$\Rightarrow b+2=a$

مشتق راست

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(bx^3+2x)-(b+2)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{bx^3-b+2x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{b(x^3-1)+2(x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)[b(x^2+x+1)+2]}{x-1}=3b+2$$

مشتق چپ

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{ax^2-(\overbrace{b+2}^{a})}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^-}\frac{ax^2-a}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{a(x^2-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{a(x-1)(x+1)}{x-1} = a(1+1) = 2a$$

$$\Rightarrow 2a = 3b + 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b+2=a \\ 2a=3b+2 \end{cases} \rightarrow a=4 \ , \ b=2$$

تمرین برای حل :

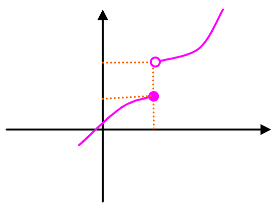
۳۱ : تابع زیر در نقطه‌ی $x=2$ مشتق پذیر است، مقدار b و a را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases} ax^2 & x\geq 2 \\ 6x+b & x<2 \end{cases}$$

***

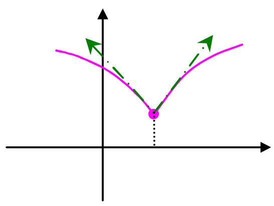
نتیجه : در هر یک از موارد زیر ، یک تابع در یک نقطه مانند $x=a$ مشتق پذیر نیست.

۱ : تابع در این نقطه پیوسته نباشد.



در این مورد نقطه‌ی داده شده را **نقطه‌ی ناپیوستگی** می گویند.

مانند: تابع $f(x)=[x]$ که در نقطه‌ی $x=0$ پیوسته نیست.



۲ : تابع در این نقطه پیوسته است ولی مشتق راست و چپ تابع در این نقطه موجود (متناهی) ولی برابر نباشند.

در این مورد نقطه‌ی داده شده را **نقطه‌ی گوشه ای** (نقطه‌ی زاویه دار) می گویند و خطوط مماس را **نیم مماس چپ** و **نیم مماس راست** می نامند.

مانند: تابع $f(x)=|x|$ که در نقطه‌ی $x=0$ پیوسته است ولی مشتق چپ آن در این نقطه ۱- و مشتق راست آن ۱ است.

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

مقدار $f(\cdot)=\cdot$

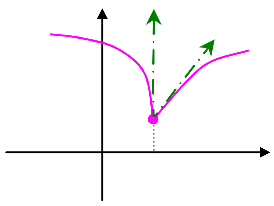
حد راست $\lim\limits_{x\to \cdot^+} f(x)=\lim\limits_{x\to \cdot^+} x=\cdot$

حد چپ $\lim\limits_{x\to \cdot^-} f(x)=\lim\limits_{x\to \cdot^-} (-x)=\cdot$

مشتق راست $f'_+(\cdot)=\lim\limits_{x\to \cdot^+}\dfrac{f(x)-f(\cdot)}{x-\cdot}=\lim\limits_{x\to \cdot^+}\dfrac{x}{x}=۱$

مشتق چپ $f'_-(\cdot)=\lim\limits_{x\to \cdot^-}\dfrac{f(x)-f(\cdot)}{x-\cdot}=\lim\limits_{x\to \cdot^-}\dfrac{-x}{x}=-۱$

۳ : تابع در این نقطه پیوسته است ولی مشتق راست یا چپ تابع در این نقطه یکی عدد (متناهی) و دیگری بی نهایت(نامتناهی) شود.



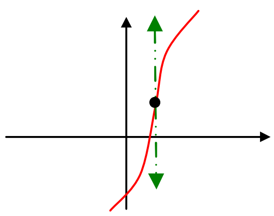
در این مورد نیز نقطه‌ی داده شده را **نقطه‌ی گوشه ای** (نقطه‌ی زاویه دار) می گویند و خطوط مماس را **نیم مماس چپ** و **نیم مماس راست** می نامند.

مانند: تابع $f(x)=\begin{cases}(x-۱)^۲ & x\le ۱\\ \sqrt{x-۱} & x>۱\end{cases}$ که در نقطه‌ی $x=۱$ پیوسته است ولی

$$f'_+(۱)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{\sqrt{x-۱}}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x-۱}{(x-۱)\sqrt{x-۱}}=+\infty$$

$$f'_-(۱)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{(x-۱)^۲}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}(x-۱)=\cdot$$

۴ : تابع در این نقطه پیوسته است ولی مشتق راست یا چپ تابع یکی $\infty+$ و دیگری $\infty-$ شود.

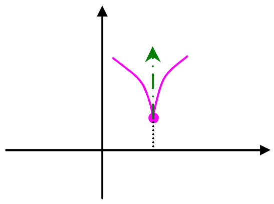


مانند: تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ در نقطه‌ی $x=0$ پیوسته ولی مشتق پذیر نیست. زیرا

$$f'_{+}(0)=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=+\infty$$

$$f'_{-}(0)=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=-\infty$$

۵: تابع در این نقطه پیوسته است ولی مشتق راست یا چپ تابع هر دو $+\infty$ یا هر دو $-\infty$ شوند.



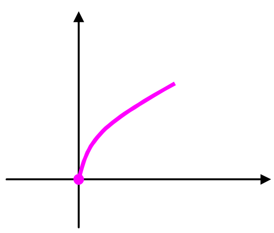
مانند: نمودار تابع $f(x)=\sqrt[5]{x^3}$ که در نقطه‌ی $x=0$ پیوسته است ولی

$$f'_{+}(0)=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{\sqrt[5]{x^3}}{x}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}=+\infty$$

$$f'_{-}(0)=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{\sqrt[5]{x^3}}{x}=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}=+\infty$$

توجه :

۱: اگر تابعی در همسایگی (راست یا چپ) این نقطه تعریف نشده باشد. تابع در آن نقطه پیوسته نیست و لذا مشتق پذیر نمی باشد.

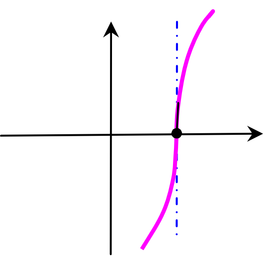


مانند: تابع $f(x)=\sqrt{x}$ در نقطه‌ی $x=0$ پیوستگی راست دارد ولی حد چپ آن در این نقطه تعریف نمی شود. این نقطه یک نقطه‌ی مرزی است.

۲: تابع f در a پیوسته بوده و

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty \ \vee \ -\infty$$

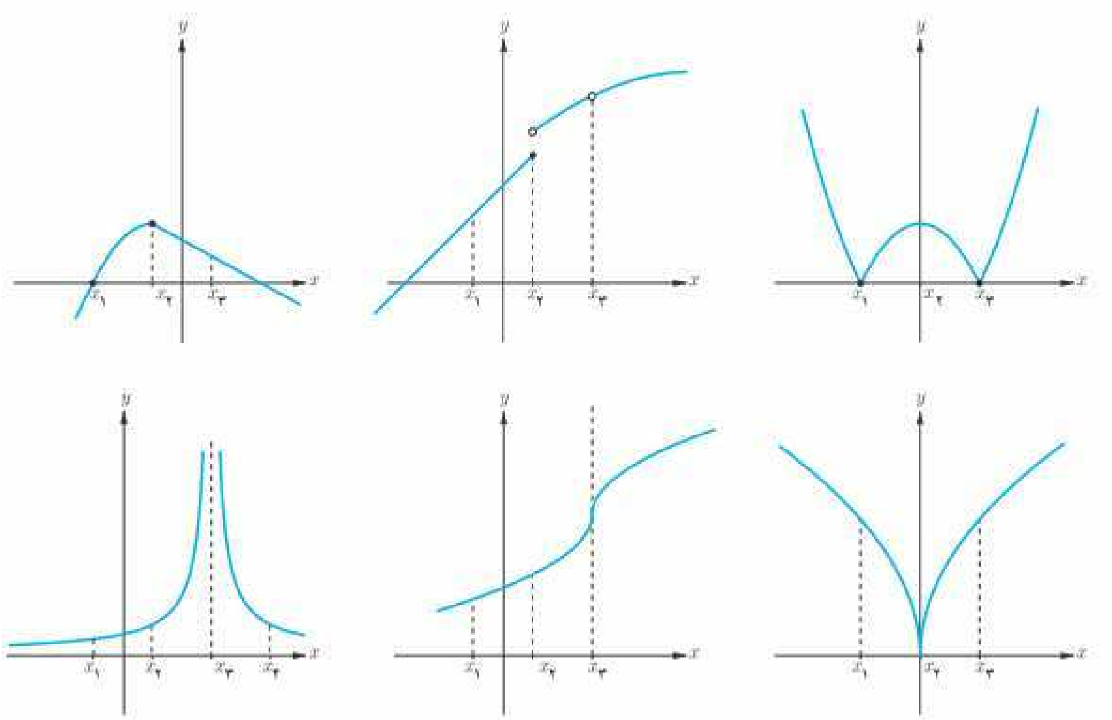
باشد، آنگاه خط $x=a$ که از نقطه‌ی $A(a,f(a))$ می گذرد و **خط مماس قائم** بر نمودار f گفته می شود.



خط مماس قائم

تمرین برای حل :

۳۲ : در شکل های زیر تعیین کنید که هر تابع در کدام نقطه یا نقاط مشخص شده مشتق پذیر نیست.



۳۳ : نشان دهید که تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x}$ در نقطه‌ی $x=۰$ مماس قائم دارد.

۳۴ : دو تابع مانند f و g مثال بزنید که هر دو در $x=۲$ پیوسته باشند ولی در این نقطه مشتق پذیر نباشند.

۳۵ : در هر مورد نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن :

الف : در یک نقطه برابر صفر شود.

ب : در $x=۲$ برابر ۳ شود.

پ : در تمام نقاط مثبت باشد.

ت : در تمام نقاط یکسان باشد.

ث : در تمام نقاط منفی باشد.

۳۶ : مشتق پذیری تابع زیر را در نقطه‌ی $x=۱$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۳ & x\geq ۱ \\ ۲x & x<۱ \end{cases}$$

۳۷ : سه تابع مثال بزنید که مشتق هر یک از آنها در $x=۲$ برابر ۵ شود.

۳۸ : مشتق پذیری تابع $f(x)=|x^{۲}-۴|$ را در نقاط $x=۲$ و $x=-۲$ بررسی کنید.

۳۹ : با توجه به تابع زیر نشان دهید که $f'_{+}(۰)$ و $f'_{-}(۰)$ موجودند ولی $f'(۰)$ موجود نیست.

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x\leq ۰ \\ x & x>۰ \end{cases}$$

۴۰ : نشان دهید که تابع $f(x)=|x-۲|$ در نقطه‌ی $x=۲$ دارای گوشه است. اندازه‌ی زاویه‌ی این گوشه را تعیین کنید؟

۴۱ : نشان دهید که تابع زیر در نقطه‌ی $x=۰$ دارای گوشه است. اندازه‌ی زاویه‌ی این گوشه را تعیین کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x\geq ۰ \\ x & x\leq ۰ \end{cases}$$

***

قضایای مشتق تابع در یک نقطه

استفاده از تعریف مشتق برای محاسبه‌ی مشتق توابع در اکثر مواقع وقت گیر و مشکل است، لـذا جهـت رفـع این مشکل قضایای مشتق که همگی به کمک تعریف قابل اثبات هستند، به صورت زیر مطرح می شوند.

قضیه : اگر $f(x)=k$ یک تابع ثابت باشد. ثابت کنید که $f'(a)=۰$

اثبات :

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{k-k}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{۰}{x-a}=۰$$

قضیه : اگر $f(x)=x$ یک تابع همانی باشد. ثابت کنید که $f'(a)=۱$

اثبات :

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{x-a}=۱$$

قضیه : اگر توابع g و f در نقطه‌ی a مشتق پذیر باشند. در این صورت:

(۱) تابع kf نیز در a مشتق پذیر است و $(kf)'(a)=kf'(a)$

(۲) تابع $f+g$ نیز در a مشتق پذیر است و $(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$

(۳) تابع $f-g$ نیز در a مشتق پذیر است و $(f-g)'(a)=f'(a)-g'(a)$

(۴) تابع fg نیز در a مشتق پذیر است و $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$

(۵) تابع $\frac{۱}{f}$ نیز (به شرط $f(a)\neq ۰$) در a مشتق پذیر است و $(\frac{۱}{f})'(a)=-\frac{f'(a)}{f^{۲}(a)}$

(۶) تابع $\frac{f}{g}$ نیز (به شرط $g(a)\neq ۰$) در a مشتق پذیر است و

$$(\frac{f}{g})'(a)=\frac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{g^{۲}(a)}$$

اثبات:

(۱

$$(kf)'(a)=\lim_{x\to a}\frac{kf(x)-kf(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{k(f(x)-f(a))}{x-a}$$

$$=k\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=kf'(a)$$

(۲

$$(f+g)'(a)=\lim_{x\to a}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)+g(x)-f(a)-g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\frac{g(x)-g(a)}{x-a})$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=f'(a)+g'(a)$$

(۳

$$(f-g)'(a)=\lim_{x\to a}\frac{(f-g)(x)-(f-g)(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)-f(a)+g(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\frac{g(x)-g(a)}{x-a})=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

$$=f'(a)-g'(a)$$

۴)

$$(f.g)'(a)=\lim_{x\to a}\frac{(f.g)(x)-(f.g)(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x).g(x)-f(a).g(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x).g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a).g(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(f(x)-f(a))g(x)+f(a)(g(x)-g(a))}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.g(x)+f(a).\frac{g(x)-g(a)}{x-a})$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.\lim_{x\to a}g(x)+\lim_{x\to a}f(a).\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

$$=f'(a).g(a)+f(a).g'(a)$$

۵)

$$(\frac{۱}{f})'(a)=\lim_{x\to a}\frac{(\frac{۱}{f})(x)-(\frac{۱}{f})(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{۱}{f(x)}-\frac{۱}{f(a)}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(a)-f(x)}{f(x)f(a)}}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}(\frac{۱}{f(x)f(a)}\times\frac{f(a)-f(x)}{x-a})=\lim_{x\to a}\frac{۱}{f(x)f(a)}\times\lim_{x\to a}\frac{f(a)-f(x)}{x-a}$$

$$=-\frac{۱}{f(a)f(a)}\times\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\frac{۱}{f^{۲}(a)}\times f'(a)=-\frac{f'(a)}{f^{۲}(a)}$$

۶)

$$(\frac{f}{g})'(a)=[f(a)\times(\frac{۱}{g})(a)]'$$

$$=f'(a)\times(\frac{۱}{g})(a)+f(a)\times(\frac{۱}{g})'(a)=f'(a)\times\frac{۱}{g(a)}+f(a)\times\frac{-g'(a)}{g^{۲}(a)}$$

$$=\frac{f'(a)}{g(a)}-\frac{g'(a)f(a)}{g^{۲}(a)}=\frac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{g^{۲}(a)}$$

تمرین ۴۰ : اگر دو تابع g و f در زیر در نقطه‌ی $x=a$ مشتق پذیر باشند.

$$f(x)=(\sqrt{۴+x^{۲}}-x)^{۱۰} \quad و \quad g(x)=(\sqrt{۴+x^{۲}}+x)^{۱۰}$$

حاصل $f'(a).g(a)+g'(a).f(a)$ را بیابید.

حل: ابتدا حاصل ضرب دو تابع را تعیین می کنیم.

$$(f.g)(x) = f(x).g(x) = (\sqrt{۴+x^{۲}} - x)^{۱۰} \times (\sqrt{۴+x^{۲}} + x)^{۱۰}$$

$$= [(\sqrt{۴+x^{۲}} - x)(\sqrt{۴+x^{۲}} + x)]^{۱۰} = (۴ + x^{۲} - x^{۲})^{۱۰} = ۴^{۱۰}$$

$$\rightarrow f'(a).g(a) + g'(a).f(a) = (f.g)'(a) = ۰$$

***

قضیه : فرض کنید تابع g در نقطه‌ی a و تابع f در $g(a)$ مشتق پذیر باشند، در این صورت تابع fog در a مشتق پذیر است و $(fog)'(a) = g'(a)f'(g(a))$

اثبات : قرار می دهیم $u = g(x)$ و $b = g(a)$ آنگاه[1]

$$\lim_{x\to a} u = \lim_{x\to a} g(x) = g(a) = b$$

از طرفی $x \to a$ نتیجه می دهد $u \to b$. بنابراین :

$$(fog)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{(fog)(x) - (fog)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{(f(g(x)) - (f(g(a))}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(u) - f(b)}{x-a} = \lim_{u\to b} \frac{f(u) - f(b)}{u-b} \times \lim_{x\to a} \frac{u-b}{x-a}$$

$$= \lim_{u\to b} \frac{f(u) - f(b)}{u-b} \times \lim_{x\to a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a} = f'(b)g'(a) = f'(g(a))g'(a)$$

تمرین ۴۱ : اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = ۵ + x$ ، مشتق تابع $(fog)(x)$ را در $x = ۴$ بدست آورید.

حل :

$$g(۴) = ۵ + ۴ = ۹$$

$$g'(۴) = \lim_{x\to ۴} \frac{g(x) - g(۴)}{x-۴} = \lim_{x\to ۴} \frac{(۵+x) - ۹}{x-۴} = \lim_{x\to ۴} \frac{x-۴}{x-۴} = ۱$$

$$f(۹) = \sqrt{۹} = ۳$$

[1] . این اثبات با فرض غیر ثابت بودن تابع $g(x)$ می باشد. در حالت ثابت بودن $g(x)$ حاصل مشتق $f(g(x))$ برابر صفر می شود که با نتیجه‌ی بدست آمده نیز مطابقت دارد.

$$f'(۹)=\lim_{x\to ۹}\frac{f(x)-f(۹)}{x-۹}=\lim_{x\to ۹}\frac{\sqrt{x}-۳}{x-۹}=\lim_{x\to ۹}\frac{\sqrt{x}-۳}{x-۹}\times\frac{\sqrt{x}+۳}{\sqrt{x}+۳}$$

$$=\lim_{x\to ۹}\frac{x-۹}{x-۹}\times\frac{۱}{\sqrt{x}+۳}=\frac{۱}{\sqrt{۹}+۳}=\frac{۱}{۶}$$

$$(fog)'(۴)=f'(g(۴))\times g'(۴)=f'(۹)\times(۱)=\frac{۱}{۶}\times۱=\frac{۱}{۶}$$

***

تمرین برای حل :

۴۲ : با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در نقطه‌ی $x=a>۰$ به دست آورید.

۴۳ : اگر تابع f در نقطه‌ی a مشتق پذیر و c عدد دلخواهی باشد. با محاسبه نشان دهید تابع cf نیز در نقطه‌ی a مشتق پذیر است و $(cf)'(a)=cf'(a)$.

۴۴ : اگر $f(x)$ تابعی مشتق پذیر در نقطه‌ای مانند a باشد. نشان دهید، $g(x)=f(x)+b$ نیز در نقطه‌ی a مشتق پذیر بوده و $g'(a)=f'(a)$

۴۵ : اگر $f(x)$ تابعی مشتق پذیر در نقطه‌ای مانند a باشد. نشان دهید، $g(x)=cf(x)+b$ نیز در نقطه‌ی a مشتق پذیر بوده و $g'(a)=cf'(a)$

۴۶ : اگر $f(۱)=۲$ و $f'(۱)=۳$ و $g(۱)=-۴$ و $g'(۱)=۵$ و $f'(-۴)=۶$ مطلوب است محاسبه‌ی

الف) $(f+g)'(۱)$ ب) $(۳f+۲g)'(۱)$ ج) $(f.g)'(۱)$ د) $(fog)'(۱)$

***

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه

استان خوزستان

درس دوّم : تابع مشتق

در این درس می خواهیم به کمک یک تابع ، تابعی دیگر را تعریف کنیم که مشتق هر نقطه از نمودار تـابع را بتوان به کمک آن به دست آورد. این تابع را تابع مشتق می نامند.

تابع مشتق

اگر x عضو از دامنه‌ی تابع $y=f(x)$ باشد و تابع f در x را مشتق پذیر باشد. در این صورت متناظر آن تابع دیگری تحت عنوان تابع مشتق (مشتق اوّل) به صورت زیر تعریف می شود.

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

تابع مشتق را به اختصار **مشتق** تابع می نامیم و آن را به صورت $f'(x)$ یا y' یا $\frac{df}{dx}$ نمایش می دهیم.

دامنه‌ی تابع مشتق زیر مجموعه ای از دامنه‌ی تابع f است که در آن تابع مشتق پذیر باشد. یعنی

$$D_{f'}=D_f-\{\text{نقاط مشتق ناپذیر تابع } f\}$$

مثال: مشتق تابع $f(x)=۳x+۱$ را به دست آورید.

حل :

$$f(x+h)=۳(x+h)+۱=۳x+۳h+۱$$

$$f(x+h)-f(x)=(۳x+۳h+۱)-(۳x+۱)=۳h$$

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۳h}{h}=۳$$

مثال: مشتق تابع $f(x)=x^۲-۴x+۱$ را به دست آورید.

حل :

$$f(x+h)=(x+h)^۲-۴(x+h)+۱=x^۲+۲xh+h^۲-۴x-۴h+۱$$

$$f(x+h)-f(x)=(x^۲+۲xh+h^۲-۴x-۴h+۱)-(x^۲-۴x+۱)$$

$$=2xh+h^2-4h=h(2x+h-4)$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h-4)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(2x+h-4)=2x+0-4=2x-4$$

مثال : مشتق پذیری تابع زیر در مجموعه‌ی اعداد حقیقی را بررسی کنید. سپس تابع مشتق و دامنـه‌ی آن را مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

حل: واضح است که تابع f در نقطه‌ی $x=0$ مشتق پذیر نیست. ($f'_+(0)\neq f'_-(0)$) لذا:

$$D_f=R\to D_{f'}=R-\{0\}$$

حال اگر مشتق هر ضابطه را جدا گانه به کمک تعریف حساب شود. داریم:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

تمرین برای حل :

۱ : به کمک تعریف تابع مشتق، مشتق توابع زیر را به دست آورید.

۱) $f(x)=-5x+7$

۲) $f(x)=x^2-3x$

۳) $f(x)=3x^2+4x-1$

۴) $f(x)=x^3-3x^2+1$

در ادامه، مشتق چند تابع مهم را بیان و اثبات می کنیم.

تمرین۲ : ثابت کنید که مشتق تابع ثابت $f(x)=c$ برابر $f'(x)=0$ می باشد.

اثبات:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

تمرین۳ : ثابت کنید که مشتق تابع $f(x)=x$ برابر $f'(x)=1$ می باشد.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$$

تمرین۴ : ثابت کنید که مشتق تابع $f(x)=ax$ برابر $f'(x)=a$ می باشد.

اثبات:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a(x+h)-ax}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{ah}{h}=a$$

تمرین۵ : ثابت کنید که مشتق تابع $f(x)=ax+b$ برابر $f'(x)=a$ می باشد.

اثبات:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(a(x+h)+b)-(ax+b)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{ah}{h}=a$$

تمرین۶ : ثابت کنید که مشتق تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ برابر $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ می باشد.

اثبات:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h\,x(x+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)}=\frac{-1}{x(x+0)}=\frac{-1}{x^2}$$

تمرین۷ : ثابت کنید که مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x}$ برابر $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ می باشد.

اثبات:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\times\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-(x)}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+0}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

تمرین۸ : ثابت کنید که مشتق تابع $f(x)=\sin x$ برابر $f'(x)=\cos x$ می باشد.

اثبات:

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(\sin x\cos h-\sin x)+\cos x\sin h}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{\sin x\cos h-\sin x}{h}+\lim_{h\to ۰}\frac{\cos x\sin h}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{\sin x(\cos h-۱)}{h}+\lim_{h\to ۰}\cos x\times\frac{\sin h}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{\sin x(\cos h-۱)}{h}\times\frac{\cos h+۱}{\cos h+۱}+\lim_{h\to ۰}\cos x\times(۱)$$

$$=\lim_{h\to ۰}\sin x\times\frac{\cos^۲ h-۱}{h^۲}\times\frac{h}{\cos h+۱}+\lim_{h\to ۰}\cos x$$

$$=\lim_{h\to ۰}\sin x\frac{-\sin^۲ h}{h^۲}\times\frac{h}{\cos h+۱}+\lim_{h\to ۰}\cos x$$

$$=\lim_{h\to ۰}(\sin x)(-۱)\times(۰)+\lim_{h\to ۰}\cos x=۰+\cos x=\cos x$$

تمرین۹ : ثابت کنید که مشتق تابع $f(x)=\cos x$ برابر $f'(x)=-\sin x$ می باشد.

اثبات:

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(\cos x\cos h-\cos x)-\sin x\sin h}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{\cos x(\cos h-۱)}{h}-\lim_{h\to ۰}\frac{\sin x\sin h}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{\cos x(\cos h-۱)}{h}\times\frac{\cos h+۱}{\cos h+۱}-\lim_{h\to ۰}\sin x\times\frac{\sin h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \cos x \times \frac{\cos^2 h - 1}{h} \times \frac{1}{\cos h + 1} - \lim_{h\to 0} \sin x \times (1)$$

$$= \lim_{h\to 0} \cos x \times \frac{\cos^2 h - 1}{h^2} \times \frac{h}{\cos h + 1} - \lim_{h\to 0} \sin x$$

$$= \lim_{h\to 0} \cos x \times \frac{\sin^2 h}{h^2} \times \frac{h}{\cos h + 1} - \lim_{h\to 0} \sin x$$

$$= \lim_{h\to 0} \cos x \times (1)(0) - \lim_{h\to 0} \sin x = -\sin x$$

توجه :

۱ : مشتق تابع $f(x) = \tan x$ برابر $f'(x) = 1 + \tan^2 x$ می باشد.

۲ : مشتق تابع $f(x) = \cot x$ برابر $f'(x) = -(1 + \cot^2 x)$ می باشد.

اثبات این موضوع را در ادامه خواهید دید.

تمرین ۱۰ : ثابت کنید که ضریب تابع در عمل مشتق گیری شرکت نمی کند. یعنی اگر $y = af(x)$ آنگاه $y' = af'(x)$ که در آن a یک عدد حقیقی می باشد.

اثبات :

$$(af)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{af(x+h) - af(x)}{h} = \lim_{h\to 0} a \times \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a'f(x)$$

نتیجه : مشتق تعدادی از توابع خاص به شکل زیر است. اثبات برخی موارد در تمرین های قبل انجام شد.

۱) $f(x) = ax \to f'(x) = a$

۲) $f(x) = b \to f'(x) = 0$

۳) $f(x) = \frac{1}{x} \to f'(x) = \frac{-1}{x^2}$

۴) $f(x) = \sqrt{x} \to f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

۵) $f(x) = \sin x \to f'(x) = \cos x$

۶) $f(x) = \cos x \to f'(x) = -\sin x$

۷) $f(x) = \tan x \to f'(x) = 1 + \tan^2 x$

۸) $f(x) = \cot x \to f'(x) = -(1 + \cot^2 x)$

تمرین ۱۱ : مشتق تابع $f(x)=x^n$ را به کمک تعریف مشتق به دست آورید.

حل :

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h-x)((x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\dots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1})}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h((x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\dots.+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}((x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\dots.+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1})$$

$$=x^{n-1}+(x)^{n-2}x+(x)^{n-3}x^2+\dots.+(x)x^{n-2}+x^{n-1}$$

$$=x^{n-1}+x^{n-1}+x^{n-1}+\dots.+x^{n-1}+x^{n-1}$$

$$=nx^{n-1}$$

نتیجه : مشتق تابع $f(x)=ax^n$ به شکل زیر است.

$$f'(x)=anx^{n-1}$$

تمرین ۱۲ : به کمک فرمول های فوق مشتق هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

۱) $y=5$ ۲) $y=-3x$ ۳) $y=x^5$ ۴) $y=2x^4$

توجه : به کمک تابع مشتق نیز می توان، مشتق تابع در یک نقطه را محاسبه نمود. برای این کار کافی است. نقطه‌ی داده شده را در تابع مشتق جایگزین کنیم.

تمرین ۱۳ : تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را در نظر بگیرید.

الف) مشتق تابع را بدست آورید. ب) مشتق تابع را در نقطه‌ی $x=1$ بدست آورید.

تمرین ۱۴ : تابع $f(x)=\sin x$ را در نظر بگیرید.

الف) مشتق تابع را بدست آورید. ب) مشتق تابع را در نقطه‌ی $x=\pi$ بدست آورید.

***

قضایای تابع مشتق

اگر u و v و w توابعی مشتق پذیر برحسب x باشند، در این صورت می توان قضایای زیر را برای مشتق بیان و اثات کرد.

قضیه‌ی ۱ : ضریب تابع در مشتق گیری شرکت نمی کند. یعنی مشتق تابع $y=au$ می شود $y'=au'$.

اثبات :

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{au(x+h)-au(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a(u(x+h)-u(x))}{h}$$

$$=a\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}=au'$$

مثال :

$$y=3\sin x\to y'=3\cos x$$

$$y=5x^3\to y'=5(3x^2)=15x^2$$

قضیه‌ی۲ : مشتق مجموع (یا تفاضل) دو یا چند تابع

$$y=u+v+w+...\to y'=u'+v'+w'+....$$

اثبات : اثبات برای مجموع دو تابع یعنی: $f(x)=u(x)+v(x)$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(u+v)(x+h)-(u+v)(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)+v(x+h)-u(x)-v(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}$$

$$=u'(x)+v'(x)$$

مثال:

$$y=-x^3+5x+4\to y'=-3x^2+5$$

$$y=\sin x-2\cos x\to y'=\cos x+2\sin x$$

قضیه‌ی۳ : مشتق حاصل ضرب دو یا چند تابع

$$y=u.v \rightarrow y'=u'.v+v'.u$$

$$y=u.v.w \rightarrow y'=u'.v.w+v'.u.w+w'.u.v$$

اثبات :

$$f(x)=u(x).v(x)$$

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(u.v)(x+h)-(u.v)(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{u(x+h).v(x+h)-u(x).v(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{u(x+h).v(x+h)-u(x).v(x)+v(x).u(x+h)-v(x).u(x+h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{v(x).u(x+h)-u(x).v(x)+u(x+h).v(x+h)-v(x).u(x+h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{[u(x+h)-u(x)]v(x)+[v(x+h)-v(x)]u(x+h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}.v(x)+\lim_{h\to ۰}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}.u(x+h)$$

$$=u'(x).v(x)+v'(x).u(x)$$

مثال:

$$y=(-x^{۳}+۵x+۱).(۴+۲x^{۳})$$

$$\rightarrow y'=(-۳x^{۲}+۵).(۴+۲x^{۳})+(۶x^{۲}).(-x^{۳}+۵x+۱)$$

مثال:

$$y=\sqrt{x}.\sin x.\cos x$$

$$\rightarrow y'=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\sin x.\cos x+\cos x.\sqrt{x}.\cos x+(-\sin x)\sqrt{x}.\sin x$$

$$=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\sin x.\cos x+\sqrt{x}.\cos^{۲}x-\sqrt{x}.\sin^{۲}x$$

تمرین۱۵ : اگر $f(x)=\sqrt{x}g(x)$ و $g(۴)=۸$ و $g'(۴)=۷$ ، مقدار $f'(۴)$ را به دست آورید.

حل :

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}g(x)+\sqrt{x}g'(x)\rightarrow f'(۴)=\frac{۱}{۲\sqrt{۴}}g(۴)+\sqrt{۴}g'(۴)=\frac{۱}{۴}(۸)+۲(۷)=۱۶$$

توجه : اگر u تابعی بر حسب x باشد. در این صورت مشتق تابع $y=a.u^n$ را می توان به شکل زیر نوشت:

$$y'=a.n.u'.u^{n-۱}$$

اثبات :

$$y=a.u^n\rightarrow y=a\times\underbrace{u\times u\times\ldots\times u}_{\text{بار } n}$$

$$\rightarrow y'=\underbrace{(a\times u'\times\underbrace{u\times\ldots\times u}_{\text{بار } n-۱})+(a\times u\times u'\times u\times\ldots\times u)+\ldots+(a\times u\times\ldots\times u')}_{\text{بار } n}$$

$$\rightarrow a.n.u'.u^{n-۱}$$

مثال:

$$y=۵(\sin x-\cos x)^{۳}\rightarrow y'=۵(۳)(\cos x+\sin x)(\sin x-\cos x)^{۲}$$

قضیه‌ی۴ : مشتق تابع کسری

$$y=\frac{۱}{v}\rightarrow y'=-\frac{v'}{v^{۲}}$$

اثبات :

$$f(x)=\frac{۱}{v(x)}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{۱}{v(x+h)}-\frac{۱}{v(x)}}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{v(x)-v(x+h)}{v(x+h)v(x)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{-\frac{v(x+h)-v(x)}{h}}{v(x+h)v(x)}=\lim_{h\to ۰}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\times\lim_{h\to ۰}\frac{-۱}{v(x+h)v(x)}$$

$$=-v'(x)\times\frac{1}{v^2(x)}=-\frac{v'(x)}{v^2(x)}$$

مثال :

$$y=\frac{1}{x^2+3x}\rightarrow y'=\frac{-(2x+3)}{(x^2+3x)^2}$$

$$y=\frac{1}{\sin x}\rightarrow y'=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}=$$

قضیه‌ی۵ : مشتق خارج قسمت دو تابع

$$y=\frac{u}{v}\rightarrow y'=\frac{u'.v-v'.u}{v^2}$$

اثبات :

$$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$$

$$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}=u(x)\times\frac{1}{v(x)}\rightarrow f'(x)=u'(x)\times\frac{1}{v(x)}+u(x)\times\frac{-v'(x)}{v^2(x)}$$

$$=\frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v^2(x)}$$

مثال:

$$y=\frac{3x^2-5x}{1-2x^3}\rightarrow y'=\frac{(6x-5)(1-2x^3)-(-6x^2)(3x^2-5x)}{(1-2x^3)^2}$$

اکنون می توان مشتق توابع تانژانت و کتانژانت را از طریق تبدیل آنها به تابع کسری نیز به سادگی اثبات کرد.

$$y=\tan x\rightarrow y=\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\rightarrow y'=\frac{(\cos x)(\cos x)-(-\sin x)(\sin x)}{(\cos x)^2}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$$

$$y=\cot x\rightarrow y=\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\rightarrow y'=\frac{(-\sin x)(\sin x)-(\cos x)(\cos x)}{(\sin x)^2}=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$=-\frac{\sin^{۲} x+\cos^{۲} x}{\sin^{۲} x}=-\frac{۱}{\sin^{۲} x}=-(۱+\cot^{۲} x)$$

قضیه‌ی ۶ : مشتق تابع رادیکالی با فرجه‌ی۲

$$y=\sqrt{u} \to y'=\frac{u'}{۲\sqrt{u}}$$

اثبات :

$$f(x)=\sqrt{u(x)}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\sqrt{u(x+h)}-\sqrt{u(x)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\left(\frac{\sqrt{u(x+h)}-\sqrt{u(x)}}{h}\times\frac{\sqrt{u(x+h)}+\sqrt{u(x)}}{\sqrt{u(x+h)}+\sqrt{u(x)}}\right)$$

$$=\lim_{h\to ۰}\left(\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\times\frac{۱}{\sqrt{u(x+h)}+\sqrt{u(x)}}\right)$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\times\lim_{h\to ۰}\frac{۱}{\sqrt{u(x+h)}+\sqrt{u(x)}}=u'(x)\times\frac{۱}{۲\sqrt{u(x)}}$$

مثال:

$$y=\sqrt{۳x^{۲}-۵x} \to y'=\frac{۶x-۵}{۲\sqrt{۳x^{۲}-۵x}}$$

$$y=\sqrt{\sin x} \to y'=\frac{\cos x}{۲\sqrt{\sin x}}$$

قضیه‌ی ۷ : مشتق تابع رادیکالی با فرجه‌ی بالاتر از ۲

$$y=\sqrt[m]{u^{n}} \quad , \quad m>n \to y'=\frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$$

مثال:

$$y=\sqrt[۵]{(۲x^{۳}-x)^{۳}} \to y'=\frac{۳(۶x^{۲}-۱)}{۵\sqrt[۵]{(۲x^{۳}-x)^{۲}}}$$

$$y=\sqrt[۷]{\cos x} \to y'=\frac{۱(-\sin x)}{۷\sqrt[۷]{\cos^{۶} x}}$$

قضیه‌ی ۸ : مشتق تابع تابع (تابع مرکب)

$$y=f(u)\rightarrow y'=u'f'(u)$$

اثبات : قرار می دهیم $u=g(x)$

$$(fog)'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(fog)(x+h)-(fog)(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(f(g(x+h))-(f(g(x))}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(f(g(x+h))-(f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\times\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(g(x))\times g'(x)$$
$$=f'(u)\times u'$$

مثال :

۱) $y=f(x^2-\sin x)\rightarrow y'=(2x-\cos x)f'(x^2-\sin x)$

۲) $y=f(g(x))\rightarrow y'=g'(x).f'(g(x))$

تمرین برای حل :

۱۶ : اگر $f(x)=x^2+5x$ باشد. مشتق $y=f(\cos x)$ را حساب کنید.

نتیجه‌ی ۱ : اگر u تابعی مشتق پذیر بر حسب x باشد. در این صورت

$$y=a.u^n\rightarrow y'=a.n.u'.u^{n-1}$$

اثبات: قرار می دهیم $f(x)=a.x^n$ و $g(x)=u$ در این صورت $f'(x)=a.n.x^{n-1}$ از طرفی :

$$y=f(u)\rightarrow y'=u'.f'(u)=u'.(a.n.u^{n-1})=a.n.u'.u^{n-1}$$

مثال:

$$y=3(x^2-4x+5)^7\rightarrow y'=21(2x-4)(x^2-4x+5)^6$$

نتیجه‌ی۲ (قاعده‌ی زنجیری) : اگر y تابعی از u و u تابعی از x باشد، آنگاه مشتق y نسبت به x برابر است با حاصل ضرب مشتق y نسبت به u در مشتق u نسبت به x یعنی

$$y=f(u)\rightarrow y'=u'f'(u)$$

یا به نمادی دیگر

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial u}\times\frac{\partial u}{\partial x}$$

مثال : اگر $y=\sin u$ و $u=x+\sqrt{x}$ باشد. مشتق y نسبت به x را به دست آورید.

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial u}\times\frac{\partial u}{\partial x}=(\cos u)(۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x}})$$

$$\rightarrow\frac{\partial y}{\partial x}=(\cos(x+\sqrt{x}))(۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x}})$$

تمرین برای حل :

۱۷ : اگر $y=u\sqrt[۳]{u}$ و $u=\sqrt{x}-۱$ باشد. مشتق y نسبت به x را در نقطه‌ی $x=۴$ به دست آورید.

۱۸ : به کمک قاعده‌ی زنجیری مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x^۴+۱}$ را به دست آورید.

توجه : قاعده‌ی زنجیری برای چند تابع نیز قابل تعمیم است.

اگر y تابعی از u و u تابعی از v و v تابعی بر حسب x باشد، آنگاه مشتق y نسبت بـه x بـه شـکل زیـر است.

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial u}\times\frac{\partial u}{\partial v}\times\frac{\partial v}{\partial x}$$

تمرین برای حل :

۱۹ : اگر مشتق تابع y نسبت به x را به دست آورید.

$$\begin{cases} y=۲u^۲-u \\ u=\sin v \\ v=\sqrt{x} \end{cases}$$

قضیه‌ی ۹ : مشتق توابع مثلثاتی

$$y=\sin u\rightarrow y'=u'.\cos u$$

$$y=\cos u\rightarrow y'=-u'.\sin u$$

$$y=\tan u\rightarrow y'=u'.(۱+\tan^۲ u)$$

$$y=\cot u\rightarrow y'=-u'.(۱+\cot^۲ u)$$

در این قسمت فقط به اثبات یک مورد اکتفا می شود.

$$y' = \lim_{h\to ۰} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to ۰} \frac{\sin u(x+h) - \sin u(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to ۰} \frac{۲\sin\frac{u(x+h)-u(x)}{۲}\cos\frac{u(x+h)+u(x)}{۲}}{h}$$

$$= \lim_{h\to ۰} \frac{\sin\frac{u(x+h)-u(x)}{۲}}{\frac{u(x+h)-u(x)}{۲}} \times \lim_{h\to ۰} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} \times \lim_{h\to ۰} \cos\frac{u(x+h)+u(x)}{۲}$$

$$= ۱\times u'(x)\times\cos\frac{u(x+۰)+u(x)}{۲} = u'(x)\times\cos u(x)$$

مثال :

$$۱)\ \ y=\sin(\sqrt{۲x-۳}) \to y' = \frac{۲}{۲\sqrt{۲x-۳}}\cos(\sqrt{۲x-۳})$$

$$۲)\ \ y=\tan\sqrt{x} \to y' = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۱+\tan^{۲}\sqrt{x})$$

$$۳)\ \ y=۳\cos^{۵}(۲x) \to y' = -۳(۵)(۲)\sin(۲x)\cos^{۴}(۲x)$$

تمرین برای حل :

۲۰ : مشتق تابع $y=\tan(\sin ۲x)$ را در نقطه‌ی $x=۰$ بدست آورید.

۲۱ : به کمک قاعده ی زنجیری مشتق تابع $y=a.\sin^{n} x$ را به دست آورید.

❋❋❋

فرمول های مشتق گیری از توابع

استفاده از تعریف تابع مشتق ، برای تعیین مشتق یک تابع ، قدری طولانی و گاهی مشکل است. لذا در ادامه برخی از فرمول های مشتق گیری از توابع را برای سهولت کار مشتق گیری مجدداً بیان می کنیم.

الف) فرمول های مقدماتی مشتق

مشتق تابع ثابت

۱) $f(x)=c \to f'(x)=0$

یعنی مشتق هر تابع ثابت (عدد ثابت) برابر صفر است.

مثال :

$$f(x)=\frac{2}{3} \to f'(x)=0$$

مشتق تابع یک جمله ای درجه‌ی اوّل

۲) $f(x)=ax \to f'(x)=a$

یعنی مشتق هر تابع یک جمله ای درجه‌ی اوّل برابر ضریب x است.

مثال :

$$f(x)=3x \to f'(x)=3$$

$$f(x)=x \to f'(x)=1$$

مشتق تابع یک جمله ای

۳) $f(x)=ax^n \to f'(x)=anx^{n-1}$

مثال :

$$f(x)=3x^5 \to f'(x)=3\times 5x^4=15x^4$$

مشتق تابع کسری

۴) $f(x)=\frac{1}{x} \to f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

مشتق تابع رادیکالی

$$۵)\ f(x)=\sqrt{x} \to f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

$$۶)\ f(x)=\sqrt[n]{x^m} \to f'(x)=\frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$$

مثال :

$$f(x)=\sqrt[۵]{x^۲} \to f'(x)=\frac{۲}{۵\sqrt[۵]{x^۳}}$$

مشتق توابع مثلثاتی

$$۷)\ f(x)=\sin x \to f'(x)=\cos x$$

$$۸)\ f(x)=\cos x \to f'(x)=-\sin x$$

$$۹)\ f(x)=\tan x \to f'(x)=۱+\tan^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x}$$

$$۱۰)\ f(x)=\cot x \to f'(x)=-(۱+\cot^۲ x)=-\frac{۱}{\sin^۲ x}$$

***

ب) فرمول های تکمیلی مشتق (روش های مشتقگیری)

اگر u و v و w توابعی مشتق پذیر برحسب x باشند، در این صورت می توان فرمول های زیر را برای مشتق بیان کرد.

مشتق حاصل ضرب یک عدد در یک تابع

$$۱)\ y=au \to y'=au'$$

یعنی مشتق حاصل ضرب یک عدد در یک تابع با حاصل ضرب آن عدد در مشتق تابع برابر است.

مثال :

$$y=۵\sqrt{x} \to y'=۵\times\frac{۱}{۲\sqrt{x}}=\frac{۵}{۲\sqrt{x}}$$

$$y=-۳\sin x \rightarrow y'=-۳\cos x$$

مشتق مجموع دو یا چند تابع

۲) $y=u+v \rightarrow y'=u'+v'$

۳) $y=u+v+w+\ldots \rightarrow y'=u'+v'+w'+\ldots$

مشتق مجموع دو یا چند تابع با مجموع مشتق های هر یک از آنها برابر است.

مثال :

$$y=۵x+\sin x \rightarrow y'=۵+\cos x$$

$$y=x^{۲}+۳\cos x+\sqrt{x}+۵ \rightarrow y'=۲x-۳\sin x+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

مشتق حاصل ضرب دو یا چند تابع

۴) $y=u.v \rightarrow y'=u'.v+v'.u$

۵) $y=u.v.w \rightarrow y'=u'.v.w+v'.u.w+w'.u.v$

مثال :

$$y=(۳x^{۲}+۵x)(\cos x) \rightarrow y'=(۶x+۵)(\cos x)+(۳x^{۲}+۵x)(-\sin x)$$

$$y=(۳x^{۲}+۱)(۵\sqrt{x})(\sin x)$$

$$\rightarrow y'=(۶x)(۵\sqrt{x})(\sin x)+(\frac{۵}{۲\sqrt{x}})(۳x^{۲}+۱)(\sin x)+(\cos x)(۳x^{۲}+۵x)(۵\sqrt{\ })$$

مشتق تابع تواندار

۶) $y=a.u^{n} \rightarrow y'=a.n.u'.u^{n-۱}$

مثال :

$$y=۵(۳x^{۲}+\cos x)^{۳} \rightarrow y'=۵(۳)(۶x-\sin x)(۳x^{۲}+\cos x)^{۲}$$

$$y=۳\sin^{۴} x \rightarrow y'=۱۲(\cos x)(\sin^{۳} x)$$

مشتق خارج قسمت دو تابع

۷) $y=\frac{u}{v} \to y'=\frac{u'.v-v'.u}{v^{۲}}$

مثال :

$$y=\frac{۳x^{۲}-۵x}{۴x+۱} \to y'=\frac{(۶x-۵)(۴x+۱)-(۴)(۳x^{۲}-۵x)}{(۴x+۱)^{۲}}$$

۸) $y=\frac{۱}{v} \to y'=-\frac{v'}{v^{۲}}$

مثال :

$$y=\frac{۱}{۳x+\tan x} \to y'=-\frac{۳+۱+\tan^{۲}x}{(۳x+\tan x)^{۲}}=-\frac{۴+\tan^{۲}x}{(۳x+\tan x)^{۲}}$$

مشتق توابع رادیکالی

۹) $y=\sqrt{u} \to y'=\frac{u'}{۲\sqrt{u}}$

مثال :

$$y=\sqrt{t^{۲}+\sin t} \to y'=\frac{۲t+\cos t}{۲\sqrt{t^{۲}+\sin t}}$$

۱۰) $y=\sqrt[m]{u^{n}} \to y'=\frac{n.u'}{۲\sqrt[m]{u^{n-m}}}$

مثال :

$$y=\sqrt[۵]{(۶x+x^{۲}-۱)^{۲}} \to y'=\frac{۲(۶+۲x)}{۵\sqrt[۵]{(۶x+x^{۲}-۱)^{۳}}}$$

$$y=\sqrt[۴]{\sin x+\cos x} \to y=\sqrt[۴]{(\sin x+\cos x)^{۱}} \to y'=\frac{\cos x-\sin x}{۴\sqrt[۴]{(\sin x+\cos x)^{۳}}}$$

مشتق توابع مثلثاتی

۱۵) $y=\sin u \to y'=u'.\cos u$

۱۶) $y=\cos u \to y'=-u'.\sin u$

$$۱۷)\ y=\tan u \to y'=u'(۱+\tan^{۲} u)=\frac{u'}{\cos^{۲} u}$$

$$۱۸)\ f(x)=\cot u \to y'=-u'(۱+\cot^{۲} u)=\frac{-u'}{\sin^{۲} u}$$

مثال :

$$y=\cos\sqrt{x} \to y'=-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(\sin^{۲}\sqrt{x})$$

با توجه به آنچه که در مورد مشتق توابع تواندار، گفته شد، می توان مشتق توابع مثلثاتی تواندار را به شکل زیر بدست آورد.

$y'=$ (کم کردن یک واحد از توان)(مشتق نسبت مثلثاتی)(مشتق زاویه)(توان)(ضریب تابع)

مثال:

$$y=۵\sin^{۷}\sqrt{x} \to y'=۵(۷)(\frac{۱}{۲\sqrt{x}})(\cos\sqrt{x})(\sin^{۶}\sqrt{x})$$

***

تمرین برای حل :

۲۲ : مشتق توابع زیر را به دست آورید.

$۱)\ y=۳\sin x+\sqrt{x}-۲$

$۲)\ y=\sin x\tan x$

$۳)\ y=x^{۲}\sin x$

$۴)\ y=\dfrac{۲x+\sin x}{\cos x}$

$۵)\ y=\dfrac{۵\cos x}{۱-\sin x}$

$۶)\ y=(x^{۲}+۳x)^{۵}$

$۷)\ y=\sin(\cos x)$

$۸)\ y=\cos^{۲}\sqrt{x}$

$۹)\ y=\cos^{۵}(\dfrac{۱}{x})$

$۱۰)\ y=۵\tan^{۳}(۲x^{۴})$

$۱۱)\ y=۳\cot^{۷} x$

$۱۲)\ y=۳\tan^{۵}\sqrt{x}$

۲۳ : مشتق توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y=\sin(۳x^{۲}+۵)$

ب) $y=(x^{۲}+۱)^{۳}(۴x+۱)^{۵}$

ج) $y=(x^{۲}+۳)(x^{۳}+۴)(x^{۴}-۱)$

د) $y=\cos^{۳}x$

۲۴ : مشتق هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

۱) $f(x)=(۳x^{۲}-۴)(۲x-۵)^{۳}$

۲) $f(x)=\dfrac{x^{۲}-۳x+۱}{-۳x+۲}$

۳) $f(x)=(\sqrt{۳x+۲})(x^{۳}+۱)$

۴) $f(x)=\dfrac{۹x-۲}{\sqrt{x}}$

۵) $f(x)=\sin^{۳}x+\cos^{۲}x$

۶) $f(x)=\dfrac{۱-\sin x}{۱+\sin x}$

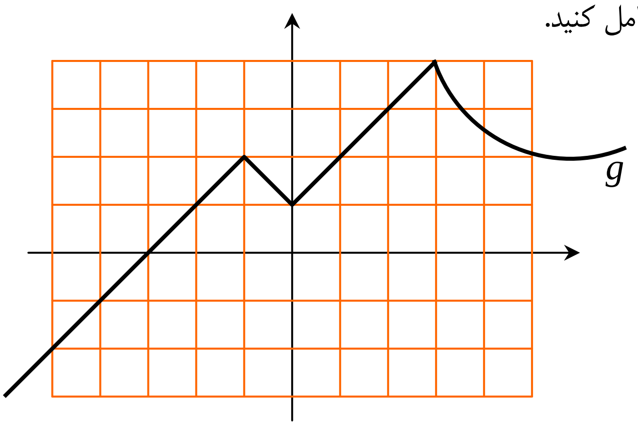
۷) $f(x)=\tan^{۲}x-۲\cos x$

۸) $f(x)=\sin x\cos ۲x$

۲۵ : اگر $f(۱)=۲f'(۱)=۶$ و $g(x)=x^{۲}f(x)$ آنگاه $g'(۱)$ را حساب کنید.

۲۶ : اگر g و f دو تابع مشتق پذیر در $x=۲$ باشند. با توجه به معادله‌ی f و نمودار g تساوی های زیر را کامل کنید.

$f(x)=x^{۳}-۲x$



الف) $g'_{+}(-۱)$ ب) $g'_{+}(۳)$ ج) $(f+g)'(۲)$ د) $(f\times g)'(۲)$ ه) $(f^{۵})'(۲)$

۲۷ : سه تابع مختلف مثال بزنید که مشتق آنها با هم برابر باشند.

۲۸ : تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f(x)=\begin{cases} ۵x-۴ & x<۰ \\ x^{۲} & ۰\leq x\leq ۳ \\ x+۶ & x>۳ \end{cases}$$

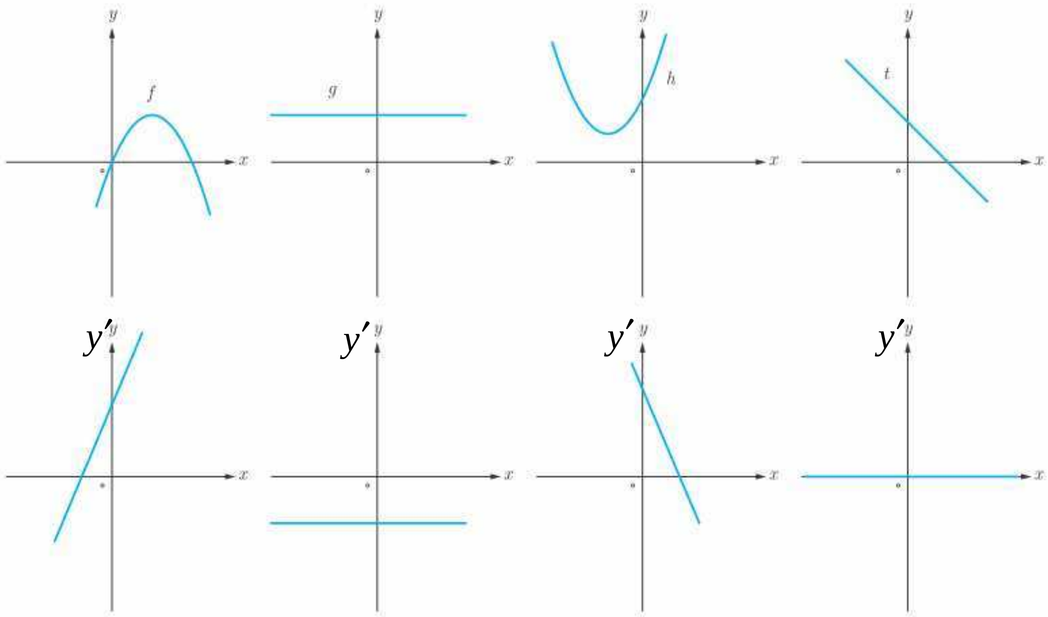
الف : نمودار تابع f را رسم کنید.

ب : نشان دهید که $f'(۰)$ و $f'(۳)$ وجود ندارند.

پ : ضابطه‌ی تابع مشتق را بنویسید.

ت : نمودار تابع f' را رسم کنید.

۲۹ : در هر مورد نمودار تابع را به نمودار مشتق آن نظیر کنید.



***

مشتق پذیری در یک بازه

برای بررسی مشتق پذیری تابه در یک بازه می توان از تعاریف زیر استفاده نمود.

تابع f را روی بازه‌ی (a,b) مشتق پذیر گویند، هرگاه در هر نقطه از این بازه مشتق پذیر باشد.

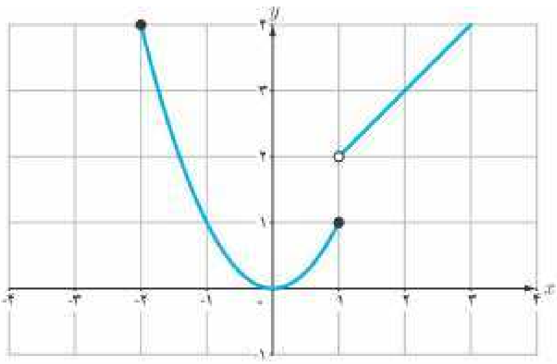
تابع f را روی بازه‌ی $[a,b]$ مشتق پذیر گویند، هرگاه در بازه‌ی (a,b) مشتق پذیر بوده و در نقطه‌ی آن a مشتق راست و در نقطه‌ی b مشتق چپ داشته باشد.

تابع f را روی بازه‌ی $[a,b)$ مشتق پذیر گویند، هرگاه در بازه‌ی (a,b) مشتق پذیر بوده و در نقطه‌ی آن a مشتق راست داشته باشد.

تابع f را روی بازه‌ی $(a,b]$ مشتق پذیر گویند، هرگاه در بازه‌ی (a,b) مشتق پذیر بـوده و در نقطـه‌ی b مشتق چپ داشته باشد.

مثال : نمودار تابع زیر را در نظر بگیرید.

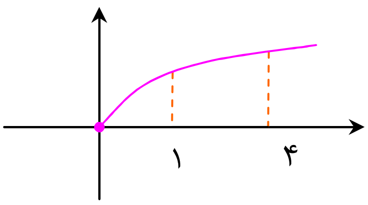
$$f(x)=\begin{cases} x^{۲} & -۲\leq x\leq ۱ \\ x+۱ & x>۱ \end{cases}$$



مشاهده می شود که تابع روی بازه های $[-۲,۱]$ و $(۱,+\infty)$ مشتق پذیر است مشتق پذیر است. ولی روی بازه‌ی $[۰,۲]$ مشتق پذیر نیست. (چرا؟) . همچنین روی بازه‌ی $[۱,۲]$ مشتق پذیر نیست. (چرا؟) .

مثال : تابع $f(x)=\sqrt{x}$ در بازه‌ی $[۱,۴]$ مشتق پذیر است.

نتیجه : تابع چند جمله ای در تمام نقاط دامنه اش مشتق پذیر است.



تمرین برای حل :

۳۰ : مشتق پذیری تابع زیر را روی بازه های $[-۱,۱]$ و $(۲,۵)$ و $[-۲,۰]$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} ۲x+۴ & x<-۱ \\ x^{۲}-۱ & -۱\le x<۲ \\ -x+۵ & ۲<x<۵ \end{cases}$$

***

مشتق مراتب بالاتر

تابع مشتق هر تابعی را مشتق مرتبه‌ی اوّل می نامند. حال اگر از مشتق تابعی، مشتق دیگری گرفته شود، مشتق مرتبه‌ی دوّم بدست می آید و اگر از مشتق مرتبه‌ی دوّم ، مشتق دیگری بگیریم، مشتق مرتبه‌ی سوّم حاصل می شود. به همین ترتیب می توان مشتق مراتب بالاتر را تعیین کرد. به جدول زیر توجه کنید.

تابع	$y=f(x)$
مشتق مرتبه‌ی اوّل	$y'=f'(x)$
مشتق مرتبه‌ی دوّم	$y''=f''(x)$
مشتق مرتبه‌ی سوّم	$y'''=f'''(x)$
مشتق مرتبه‌ی چهارم	$y^{(۴)}=f^{(۴)}(x)$
مشتق مرتبه‌ی پنجم	$y^{(۵)}=f^{(۵)}(x)$
....	....

مثال : مشتق مرتبه‌ی سوّم تابع $f(x)=x^{۳}+\sin x$ را بدست آورید.

حل :

تابع	$f(x)=x^{۳}+\sin x$
مشتق مرتبه‌ی اوّل	$f'(x)=۳x^{۲}+\cos x$
مشتق مرتبه‌ی دوّم	$f''(x)=۶x-\sin x$
مشتق مرتبه‌ی سوّم	$f'''(x)=۶-\cos x$

مثال : مشتق مرتبه‌ی پنجم تابع $f(x)=۱+۳\cos x$ را بدست آورید.

حل :

تابع	$f(x)=۱+۳\cos x$
مشتق مرتبه‌ی اوّل	$f'(x)=-۳\sin x$
مشتق مرتبه‌ی دوّم	$f''(x)=-۳\cos x$
مشتق مرتبه‌ی سوّم	$f'''(x)=۳\sin x$
مشتق مرتبه‌ی چهارم	$f^{(۴)}(x)=۴\cos x$
مشتق مرتبه‌ی پنجم	$f^{(۵)}(x)=-۴\sin x$

تمرین برای حل :

۳۱ : مشتق مرتبه‌ی دوّم تابع $f(x)=۳x^{۲}-۴x^{۳}$ را در نقطه‌ی $x=۰$ بدست آورید.

۳۲ : مشتق سوم تابع زیر را به دست آورید.

$$y=۱+\cos^{۲} x$$

۳۳ : ضابطه‌ی تابع درجه‌ی دوّم f را چنان بیابید که $f(۲)=۷$ و $f'(۲)=۸$ و $f''(۲)=۶$ باشد.

۳۴ : هرگاه $y=\sin^{۲} x$ ثابت کنید که $y''=۲\cos ۲x$

۳۵ : هرگاه $y=\sqrt{x^{۲}+۲x}$ ثابت کنید که $y'^{۲}+yy''=۱$

۳۶ : نشان دهید که تابع $y=\sin x$ جواب معادله‌ی $y'''+y''+y'+y=۰$ است.

***

ضمیمه

الف : فرمول های مقدماتی

ردیف	تابع	مشتق
۱	$y=a$	$y'=0$
۲	$y=ax$	$y'=a$
۳	$y=ax^n$	$y'=anx^{n-1}$
۴	$y=\frac{1}{x}$	$y'=\frac{-1}{x^2}$
۵	$y=\sqrt{x}$	$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
۶	$y=\sqrt[n]{x^m}$	$y'=\frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$
۷	$y=\sin x$	$y'=\cos x$
۸	$y=\cos x$	$y'=-\sin x$
۹	$y=\tan x$	$y'=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$
۱۰	$y=\cot x$	$y'=-(1+\cot^2 x)=-\frac{1}{\sin^2 x}$

ب : فرمول های تکمیلی (روش های مشتق گیری)

فرض کنید که u و v و ... توابعی بر حسب متغیر x باشند. در این صورت می توان فرمول هـای زیـر را نیـز بیان کرد.

ردیف	تابع	مشتق
۱	$y=au$	$y'=au'$
۲	$y=u+v+\dots$	$y'=u'+v'+\dots$
۳	$y=u.v$	$y'=u'v+v'u$
۴	$y=u.v.w$	$y'=u'.v.w+v'.u.w+w'.u.v$
۵	$y=u^n$	$y'=nu'u^{n-1}$
۶	$y=\frac{1}{v}$	$y'=\frac{-v'}{v^2}$
۷	$y=\frac{u}{v}$	$y'=\frac{u'.v-v'.u}{v^2}$
۸	$y=\sqrt{u}$	$y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

۹	$y=\sqrt[n]{u^m}$	$y'=\dfrac{m.u'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$
۱۰	$y=f(u)$	$y'=u'.f'(u)$
۱۱	$y=\sin u$	$y'=u'.\cos u$
۱۲	$y=\cos u$	$y'=-u'.\sin u$
۱۳	$y=\tan u$	$y'=u'(۱+\tan^{۲} u)=\dfrac{u'}{\cos^{۲} u}$
۱۴	$y=\cot u$	$y'=-u'(۱+\cot^{۲} u)=-\dfrac{u'}{\sin^{۲} u}$

***

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه

استان خوزستان

درس سوّم : آهنگ تغییر

در درس فیزیک، با مفهوم سرعت متوسط و سرعت لحظه ای آشنا شده اید. فرض کنید برای سفر به بیرون شهر آماده می‌شوید. ابتدا در شهر و در ترافیک مدتی گرفتار می‌شوید، بعد به بزرگراه می‌رسید. سرعت‌سنج اتومبیل که ابتدا سرعت‌های بین۵۰ و ۳۰ کیلومتر بر ساعت را نشان می‌داد، حالا سرعت ۹۰ کیلومتر بر ساعت را نشان می‌دهد.

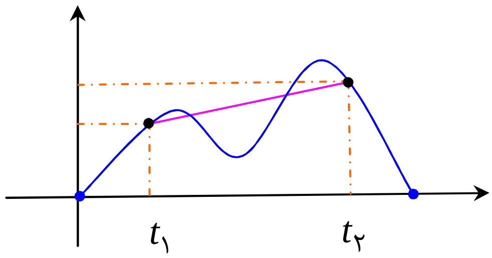
در جاده در محلی توقف می‌کنید و نهار می‌خورید و بعد دوباره حرکت می‌کنید و در جاده با سرعت ۶۰ کیلومتر بر ساعت مسیر را می‌پیمایید. ولی مسافرت در این مسیر۳۰۰ کیلومتری حدود۶ ساعت زمان برد. یعنی به طور متوسط۵۰ کیلومتر در ساعت سرعت داشته اید و اگر بدون هیچ ترافیک و یا توقفی حرکت می کردید مسیر۳۰۰ کیلومتری را در ۶ ساعت طی می کردید. در فیزیک این سرعت را سرعت متوسط می نامند و آن را خارج قسمت مسافت طی شده بر مدت زمان تعریف می کنند. به عبارتی دیگر سرعت متوسط، سرعتی است که اتومبیل می‌توانست مسیر۳۰۰ کیلومتری را با سرعت ثابت در مدت زمان معین۶ ساعت بپیماید.

توجه داشته باشید که سرعت اتومبیل در این مثال در هر لحظه متفاوت است. سرعت متحرک در هر لحظه از زمان را سرعت لحظه‌ای می گویند. برای مثال سرعت اتومبیل، در جایی ۵ و درجایی۳۰ و در جای دیگری۹۰ کیلومتر بر ساعت است، اگر سرعت اتومبیل در ساعت سوّم برابر ۳۰ کیلومتر در ساعت باشد، گویند سرعت لحظه ای اتومبیل در این ساعت ۳۰ کیلومتر در ساعت می باشد. سرعت لحظه‌ای نشان می‌دهد سرعت اتومبیل در هر لحظه از حرکت چقدر بوده است.

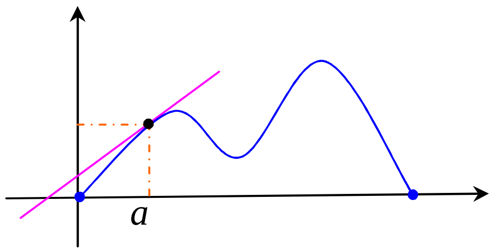
اگر d مسافت طی شده در زمان t باشد. سرعت متوسط روی یک بازه‌ی زمانی$[t_۱,t_۲]$ را به صورت زیر تعریف می کنند.

$$v=\frac{d_۲-d_۱}{t_۲-t_۱}$$

یعنی اگر نمودار مکان – زمان در مورد حرکت اتومبیل را داشته باشیم، سرعت متوسط بین هر دو لحظه‌ی دلخواه برابر شیب خطی است که نمودار مکان زمان را در آن دو لحظه قطع می کند.



سرعت لحظه‌ای متحرک در حرکت یک بعدی در هر لحظه برابر با شیب نمودار مکان– زمان و یا به صورت مشتق معادله نسبت به زمان می‌سنجیم. برای مثال سرعت لحظه ای اتومبیل در لحظه‌ی $t = a$ به صورت زیر تعریف می شود.



$$v = \lim_{t \to a} \frac{d(t) - d(a)}{t - a} = d'(a)$$

مطابق آنچه که در درس فیزیک آموخته اید، سرعت متوسط روی یک بازه‌ی زمانی خیلی کوچک، به سرعت لحظه ای نزدیک است. یعنی :

$$v = \lim_{h \to 0} \frac{d(t+h) - d(t)}{h} = d'(t)$$

مثال : خودرویی در امتداد خط راست طبق معادله‌ی $d(t) = -5t^2 + 20t$ حرکت می کند. اگر $0 \le t \le 5$

الف : سرعت متوسط اتومبیل را در فاصله‌ی زمانی $1 \le t \le 2$ محاسبه کنید.

ب : سرعت لحظه ای اتومبیل را در لحظه‌ی $t = 3$ بدست آورید.

ج : سرعت لحظه ای اتومبیل را در لحظه‌ی $t = 2$ بدست آورید.

حل :

الف:

$$t=۱ \xrightarrow{d(t)=-۵t^۲+۲۰t} d(۱)=-۵(۱)^۲+۲۰(۱)=-۵+۲۰=۱۵$$

$$t=۲ \xrightarrow{d(t)=-۵t^۲+۲۰t} d(۲)=-۵(۲)^۲+۲۰(۲)=-۲۰+۴۰=۲۰$$

$$\text{متوسط } v=\frac{d_۲-d_۱}{t_۲-t_۱}=\frac{۲۰-۱۵}{۲-۱}=۵$$

ب:

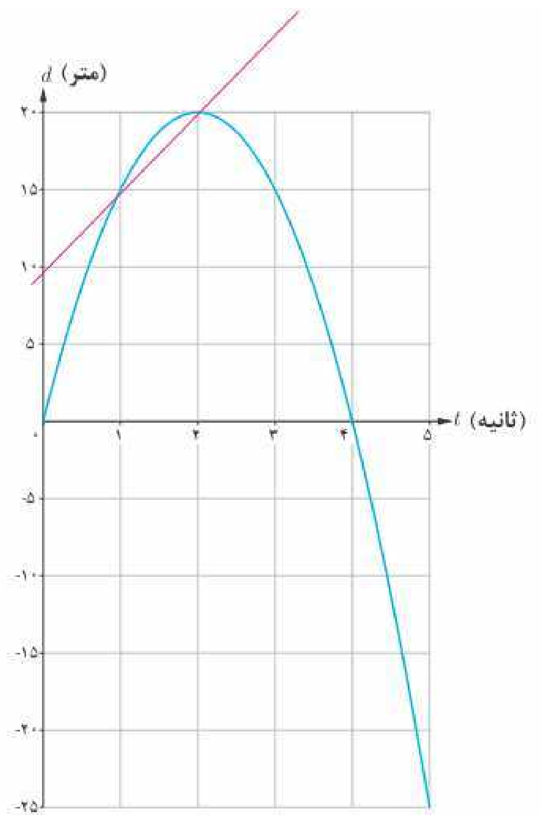
$$d(t)=-۵t^۲+۲۰t \rightarrow d'(t)=-۱۰t+۲۰$$

$$t=۳ \xrightarrow{v=d'(t)=-۱۰t+۲۰} v=d'(۳)=-۱۰(۳)+۲۰=-۱۰$$

ج:

$$t=۲ \xrightarrow{v=d'(t)=-۱۰t+۲۰} v=d'(۲)=-۱۰(۲)+۲۰=۰$$

توجه : نمودار تابع فوق به شکل مقابل است.



و مفهوم اعداد بدست آمده در مثال قبل را می توان به صورت زیر تفسیر کرد.

سرعت اتومبیل در لحظه‌ی $t=۲$ ، صفر است و مماس بر منحنی در این نقطه موازی محور طول ها است و خودرو ساکن است. مقدار سرعت در لحظه های $t=۱$ و $t=۳$ برابر است. و علامت منفی در مورد $d'(۳)$ نشان می دهد که جهت حرکت در $t=۳$ بر خلاف جهت حرکت در $t=۱$ است.

***

در این درس می خواهیم به کمک تعریف شیب خط و همچنین شیب خط مماس، مفهوم مشتق را در پدیده های فیزیکی بررسی کنیم. امّا به ابتدا به تعاریف زیر توجه کنید.

الف : آهنگ متوسط تغییرات

آهنگ متوسط تغییرات تابع f نسبت به تغییرات x. وقتی x از $x=a$ تا $x=b$ تغییر کند. برابر است با :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

تذکر : اگر قرار دهیم $\Delta x=h=b-a$ در این صورت $b=a+h$ یعنی اگر مقدار کمیت a را به اندازه ی h واحد تغییر دهیم. خواهیم داشت:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

ب : آهنگ تغییرات آنی (لحظه ای)

حد آهنگ تغییرات متوسط تابع f نسبت به تغییرات x وقتی تغییر x خیلی ناچیز ($h\to ۰$) باشد، را آهنگ لحظه ای یا به اختصار آهنگ تغییر کمیت $y=f(x)$ به کمیت x در a می گویند.

$$\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

تذکر: با توجه به تعریف مشتق تابع در یک نقطه واضح است که

$$\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(a)$$

مثال : آهنگ تغییرات متوسط حجم مکعبی به ضلع x سانتی متر را نسبت به تغییرات x وقتی x از ۲ به ۵ تغییر می کند، بیابید.

حل :

$$v(x)=x^{۳}$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta x}=\frac{v(۵)-v(۲)}{۵-۲}=\frac{۱۲۵-۸}{۳}=۳۹$$

مثال : آهنگ تغییر مساحت یک دایره را نسبت به تغییرات شعاع آن وقتی که $r=۵$ سانتی متر باشد، را حساب کنید.

حل :

$$s(r)=\pi r^{۲} \rightarrow s'(r)=۲\pi r$$

$$s'(۵)=۲\pi(۵)=۱۰\pi$$

مثال : اگر $f(t)=۳۰+۱۰t^{۲}$ نمایش جمعیت یک نوع باکتری باشد. (t بر حسب ساعت)آهنگ تغییرات متوسط افزایش جمعیت را در ۵ ساعت اوّل ، پس از زمان $t_۱=۲$ را حساب کنید.

حل :

$$f(t)=۳۰+۱۰t^{۲}$$

$$f(۲)=۳۰+۱۰(۲)^{۲}=۷۰$$

$$f(۷)=۳۰+۱۰(۷)^{۲}=۵۲۰$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta t}=\frac{f(۷)-f(۲)}{۷-۲}=\frac{۵۲۰-۷۰}{۵}=۹۰$$

مثال : مساحت هر دایره تابعی از محیط آن است. آهنگ تغییرات مساحت دایـره را نـسبت بـه محـیط آن را برای دایره ای به محیط ۵π حساب کنید.

حل :

$$s(r)=\pi r^{۲} \xrightarrow{p=۲\pi r \rightarrow r=\frac{p}{۲\pi}} s(p)=\pi(\frac{p}{۲\pi})^{۲}=\frac{p^{۲}}{۴\pi}$$

$$s(p)=\frac{p^{۲}}{۴\pi} \rightarrow s'(p)=\frac{۲p}{۴\pi}=\frac{p}{۲\pi}$$

$$s(۵\pi)=\frac{۵\pi}{۲\pi}=۲/۵$$

مثال : طول دو ضلع مثلثی ۱ و ۲ و طول ضلع سوم برابر متغیر l است. فرض کنید که زاویه‌ی مقابل به این ضلع α باشد.

الف : l را بر حسب α بنویسید.

ب : مشتق l را بر حسب α به دست آورید.

ج : آهنگ تغییرات l وقتی که $\alpha=\frac{\pi}{۴}$ را به دست آورید.

حل :

$$l^{۲}=(۱)^{۲}+(۲)^{۲}-۲(۱)(۲)\cos\alpha \to l(\alpha)=\sqrt{۵-۴\cos\alpha}$$

$$l'(\alpha)=\frac{۴\sin\alpha}{۲\sqrt{۵-۴\cos\alpha}}=\frac{۲\sin\alpha}{\sqrt{۵-۴\cos\alpha}}$$

$$l'(\frac{\pi}{۴})=\frac{۲\sin(\frac{\pi}{۴})}{\sqrt{۵-۴\cos(\frac{\pi}{۴})}}=\frac{۲(\frac{\sqrt{۲}}{۲})}{\sqrt{۵-۴(\frac{\sqrt{۲}}{۲})}}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۵-۲\sqrt{۲}}}$$

مثال : معادله‌ی حرکت متحرکی به صورت $x(t)=t^{۲}-۵t+۶$ است. مطلوب است.

الف : سرعت متوسط این متحرک بین لحظات $t_{۱}=۳$ تا $t_{۲}=۵$ ثانیه

ب : سرعت لحظه ای متحرک در لحظه‌ی $t=۲$

حل:

الف :

$$x(t)=t^{۲}-۵t+۶$$

$$x(۳)=(۳)^{۲}-۵(۳)+۶=۹-۱۵+۶=۰$$

$$x(۵)=(۵)^{۲}-۵(۵)+۶=۲۵-۲۵+۶=۶$$

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_{۲}-x_{۱}}{t_{۲}-t_{۱}}=\frac{۶-۰}{۵-۳}=۳\ \frac{m}{s}$$

ب :

$$x'(t)=۲t-۵ \to x'(۲)=۲(۲)-۵=-۱\ \frac{m}{s}$$

مثال : توپی را در راستای قائم از زمین به بالا پرتاب می کنیم. اگر جهت مثبت بـه طـرف بـالا و معادلـه‌ی حرکت توپ به صورت $y(t)=-۵t^{۲}+۲۰t$ باشد. (t بر حسب ثانیه و y بر حسب متر)

۱ : نمودار $y(t)$ را رسم کنید.

۲ : دامنه‌ی $y(t)$ را تعیین کنید.

۳ : سرعت متوسط توپ را از لحظه‌ی پرتاب $(t=۰)$ تا پایان ثانیه‌ی دوّم $(t=۲)$ حساب کنید.

۴ : سرعت لحظه ای توپ را در یک ثانیه پس از پرتاب $(t=۱)$ را حساب کنید.

۵ : سرعت لحظه ای توپ را در یک ثانیه پس از پرتاب $(t=۳)$ را حساب کنید.

۶ : سرعت لحظه ای توپ هنگام برخورد با زمین چقدر است؟

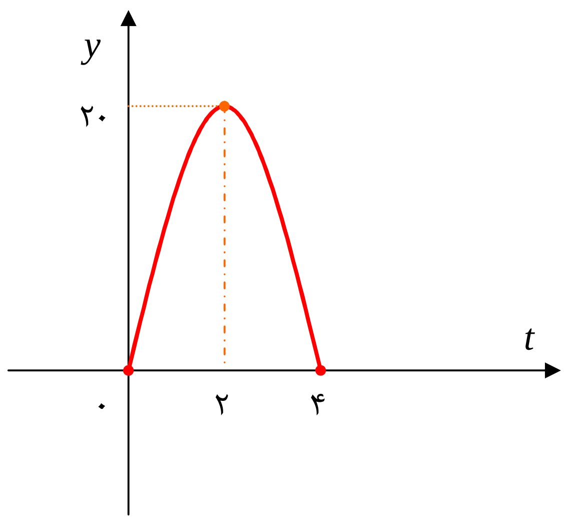
۷ : در چه زمانی توپ به بالاترین ارتفاع خود می رسد. در این لحظه سرعت تـوپ چقـدر اسـت و معنـای آن چیست؟

حل :

۱ : معادله‌ی داده شده یک سهمی و چون در آن $a=-۵$. پس نمودار سهمی رو بـه پـایین بـوده و دارای نقطه‌ی Max است.

$$t_{\circ}=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۲}{۲(-۵)}=۲$$

t	۰	۲	۴
y	۰	۲۰	۰



۲ : چون بعد از ۴ ثانیه توپ مجدداً به زمین بر می گردد. لذا دامنه‌ی تابع می شود. $D=[۰,۴]$

۳ :

$$y(t)=-۵t^{۲}+۲۰t$$

$$y(۰)=-۵(۰)^{۲}+۲۰(۰)=۰$$

$$y(۲)=-۵(۲)^{۲}+۲۰(۲)=-۲۰+۴۰=۲۰$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{y(۲)-y(۰)}{۲-۰}=\frac{۲۰-۰}{۲}=۱۰$$

۴ :

$$y(t) = -۵t^{۲} + ۲۰t \to y'(t) = -۱۰t + ۲۰$$

$$y'(۱) = -۱۰(۱) + ۲۰ = ۱۰ \ \frac{m}{s}$$

۵ :

$$y'(۳) = -۱۰(۳) + ۲۰ = -۱۰ \ \frac{m}{s}$$

۶ :

$$y'(۴) = -۱۰(۴) + ۲۰ = -۲۰ \ \frac{m}{s}$$

۷ : بالاترین ارتفاع توپ زمانی است که $t = ۲$ باشد. لذا

$$y'(۲) = -۱۰(۲) + ۲۰ = ۰ \ \frac{m}{s}$$

یعنی سرعت لحظه ای توپ در این لحظه برابر صفر است. (ایست لحظه ای)

مثال : مخزنی با گنجایش۴۰ لیتر، لبریز از آب بود. در لحظه‌ی $t = ۰$ ، شیر این مخزن باز می شود. اگر حجم آب باقی مانده در مخزن پس از t دقیقه از رابطه‌ی $v = ۴۰(۱ - \frac{t}{۱۰۰})^{۲}$ به دست آید.

الف : تعیین کنید که این مخزن در چند دقیقه می تواند کاملاً تخلیه شود.

ب : آهنگ متوسط تغییرات تخلیه‌ی آب پس از یک دقیقه چقدر است؟

ج :آهنگ تغییرات تخلیه‌ی آب در $t = ۲۵$ دقیقه چقدر است؟

حل :

الف : زمانی می گویند که مخزن کاملاً تخلیه شده است که حجم آب باقی مانده در مخزن صفر شود. یعنی:

$$v = ۴۰(۱ - \frac{t}{۱۰۰})^{۲} = ۰$$

$$\to (۱ - \frac{t}{۱۰۰})^{۲} = ۰ \to ۱ - \frac{t}{۱۰۰} = ۰ \to t = ۱۰۰ \ \text{min}$$

ب : واضح است که حجم آب تخلیه شده برابر تفاضل آب باقی مانده از حجم کل آب است. یعنی:

$$v(t)=40-40(1-\frac{t}{100})^2=40-40(1-\frac{2t}{100}+\frac{t^2}{10000}))$$

$$=40(\frac{2t}{100}-\frac{t^2}{10000})=40\times\frac{200t-t^2}{10000}=\frac{1}{250}(200t-t^2)$$

$$\to v(t)=\frac{1}{250}(200t-t^2)$$ تابع آب تخلیه شده

$$v(0)=\frac{1}{250}(200(0)-(0)^2)=0$$

$$v(1)=\frac{1}{250}(200(1)-(1)^2)=\frac{199}{250}=0/79$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v(1)-v(0)}{1-0}=\frac{0/79-0}{1-0}=0/79$$ آهنگ متوسط تغییرات تخلیه‌ی آب

ج :

$$v(t)=\frac{1}{250}(200t-t^2)\to v'(t)=\frac{1}{250}(200-2t)=\frac{2}{250}(100-t)$$

$$v'(100)=\frac{2}{250}(100-25)=\frac{2}{250}\times 75=\frac{3}{5}=0/6$$ آهنگ تغییرات تخلیه‌ی آب

***

تمرین برای حل :

۱ : معادله‌ی حرکت متحرکی به صورت $f(t)=t^2-t+10$ بر حسب متر در بازه‌ی زمانی $0\le t\le 5$ (t بر حسب ثانیه) داده شده است. تعیین کنید که در کدام لحظه سرعت لحظه ای با سرعت متوسط در این بازه‌ی زمانی برابر است.

۲ : یک توده‌ی باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+2t^3$ گرم است.

الف : جرم این توده باکتری در بازه‌ی زمانی $1\le t\le 5$ چند گرم افزایش می یابد.

ب : آهنگ رشد جرم توده‌ی باکتری در لحظه‌ی $t=4$ جقدر است؟

۳ : درستی یا نادرستی عبارت های زیر را تعیین کنید.

الف : آهنگ متوسط تغییر تابعی مانند f در بازه‌ی $[0,1]$ همیشه کمتر از شیب آن منحنی در نقطه است.

ب : اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ متوسط تغییر آن، همواره مثبت است.

ج : تابعی وجود ندارد که برای آن هم $f(a)=۰$ و هم $f'(a)=۰$

د : آهنگ متوسط تغییر یک تابع در یک بازه‌ی خیلی کوچک، به آهنگ لحظه ای نزدیک می شود.

۴ : توپی از یک پل به ارتفاع ۱۱ متر به هوا پرتاب می شود. اگر $f(t)$ نشان دهنده‌ی فاصله‌ی توپ از سطح زمین در زمان t باشد. برخی از مقادیر $f(t)$ در جدول زیر نمایش داده شده است؟

ثانیه (s)	۰/۶	۰/۵	۰/۴	۰/۳	۰/۲	۰/۱	۰	t
متر (m)	۱۸/۴	۱۷/۴	۱۶/۳	۱۵/۱	۱۳/۸	۱۲/۴	۱۱	$f(t)$

بر اساس جدول،کدام یک از مقادیر زیر می تواند، سرعت توپ را هنگامی که ارتفاع نظیر زمان ۰/۴ ثانیه است، نشان دهد؟

الف) $۱/۲۳\ m/s$ ب) $۱۴/۹۱\ m/s$ ج) $۱۱/۵\ m/s$ د) $۱۶/۰۳\ m/s$

***

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه

استان خوزستان