

## فصل ۳: الگوهای غیرخطی

## درس ۱: دنباله هندسی

یک دنباله را هندسی می‌گوییم هرگاه هر جمله آن از حاصل ضرب جمله قبل از آن با یک عدد حقیقی ثابت مخالف صفر به دست آید.

مثال: ... , ۲۴ , ۱۲ , ۶ , ۳ یا ... , ۱ , ۳ , ۹ , ۲۷ یا ... , ۸ , ۸ , ۸ , ۸

به عبارت دیگر، یک دنباله هندسی به صورت ... ,  $a_1 r^3$  ,  $a_1 r^2$  ,  $a_1 r$  ,  $a_1$  می‌باشد که در آن به  $a_1$  جمله اول و به  $r$  نسبت مشترک دنباله می‌گوییم. (دقت می‌کنیم که  $a_1 \neq 0$  و  $r \neq 0$ )

اگر  $r > 1$  باشد، آن‌گاه دنباله را افزایشی می‌گوییم.

اگر  $0 < r < 1$  باشد، آن‌گاه دنباله را کاهشی می‌گوییم.

اگر  $r = 1$  باشد، دنباله را ثابت می‌گوییم.

(برای به دست آوردن نسبت مشترک، کافی است هر جمله را به جمله قبلی تقسیم کنیم)

مثال ۱. کدام یک از دنباله‌های زیر هندسی است؟ در صورت هندسی بودن، جمله اول و نسبت مشترک را مشخص کنید.

۱) ۳ , ۶ , ۱۲ , ۲۴ , ...

پاسخ:

$$\frac{6}{3} = 2 \quad \frac{12}{6} = 2 \quad \frac{24}{12} = 2$$

دنباله هندسی است. چون نسبت هر دو عدد متوالی باهم برابر است.  $r = 2$  ,  $a_1 = 3$

۲) ۵ , -۱۰ , ۲۰ , -۴۰ , ...

پاسخ:

$$\frac{-10}{5} = -2 \quad \frac{20}{-10} = -2 \quad \frac{-40}{20} = -2$$

دنباله هندسی است. چون نسبت هر دو عدد متوالی باهم برابر است.  $r = -2$  ,  $a_1 = 5$

۳) ۴ , ۲ , ۱ ,  $\frac{1}{2}$  , ...

پاسخ:

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

دنباله هندسی است. چون نسبت هر دو عدد متوالی باهم برابر است.  $r = \frac{1}{2}$  ,  $a_1 = 4$

۴) ۲ , ۴ , ۶ , ۱۰ ,

پاسخ:

$$\frac{4}{2} = 2 \quad \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

دنباله هندسی نیست. چون نسبت هر دو عدد متوالی باهم برابر نیستند.

۵) ۴, ۴, ۴, ...

پاسخ:

$$\frac{4}{4} = 1 \qquad \frac{4}{4} = 1 \qquad \frac{4}{4} = 1$$

دنباله هندسی است. چون نسبت هر دو عدد متوالی باهم برابر است.  $a_1 = 4$  ,  $r = 1$

جمله عمومی دنباله هندسی به صورت مقابل به دست می‌آید. **جمله عمومی دنباله هندسی**  
 بنابر این برای نوشتن جمله عمومی دنباله هندسی، ابتدا باید جمله اول و نسبت مشترک را مشخص کنیم.

مثال ۲. جمله عمومی دنباله‌های هندسی زیر را بنویسید.

۱) ۴, ۱۲, ۳۶, ...

پاسخ:

$$a_1 = 4 \qquad r = \frac{12}{4} = 3$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_n = 4(3)^{n-1}$$

۲) ۳, -۶, ۱۲, ...

پاسخ:

$$a_1 = 3 \qquad r = \frac{-6}{3} = -2$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_n = 3(-2)^{n-1}$$

۳) ۲۷, ۹, ۳, ...

پاسخ:

$$a_1 = 27 \qquad r = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_n = 27\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

۴) ۱,  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{1}{25}$ ,  $\frac{1}{125}$ , ...

پاسخ:

$$a_1 = 1 \qquad r = \frac{\frac{1}{5}}{1} = \frac{1}{5}$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_n = 1\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

۵)  $4, -2, 1, \dots$

پاسخ:

$$a_1 = 4 \quad r = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_n = 4 \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

۶)  $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}, \dots$

پاسخ:

$$a_1 = \frac{1}{3} \quad r = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

مثال ۳. اگر در یک دنباله هندسی، جمله اول برابر با ۴ و نسبت مشترک برابر با  $\frac{1}{2}$  باشد، حاصل  $a_3 + a_5$  را به دست آورید.

پاسخ:

$$a_1 = 4, \quad r = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = a_1 r^2 = 4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 \left(\frac{1}{4}\right) = 1$$

$$a_5 = a_1 r^4 = 4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 4 \left(\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{4}$$

$$a_3 + a_5 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$3, 6, 12, 24, \dots$

مثال ۴. جمله هفتم دنباله مقابل را دست آورید.

پاسخ:

$$a_1 = 3 \quad r = \frac{6}{3} = 2$$

$$a_7 = a_1 r^6 = 3(2)^6 = 3(64) = 192$$

مثال ۵. یک شهاب سنگ، ۱۵ هزار کیلو گرم وزن دارد. پس از ورود آن به جو زمین، در هر دقیقه ۱۵٪ از وزنش به سبب تماس

با جو، از بین می‌رود. پس از گذشت ۵ دقیقه از ورود این شهاب سنگ به جو زمین، چقدر از وزن آن باقی می‌ماند؟

پاسخ: چون در هر دقیقه، ۱۵٪ از وزن آن از بین می‌رود پس در هر دقیقه به اندازه ۸۵٪ از وزن آن باقی می‌ماند. بنابر این وزن

باقی‌مانده شهاب سنگ، یک دنباله هندسی تشکیل می‌دهد که جمله اول آن ۱۵۰۰۰ و نسبت مشترک آن ۸۵٪ است. چون

وزن شهاب سنگ پس از گذشت ۵ دقیقه خواسته شده است، پس کافی است جمله پنجم دنباله را حساب کنیم.

$$a_1 = 15000$$

$$r = \frac{15}{100}$$

$$a_5 = a_1 r^4 = 15000 \cdot \left(\frac{15}{100}\right)^4 = 15000 \cdot \left(\frac{17}{20}\right)^4 = 15000 \cdot \left(\frac{81521}{160000}\right) \approx 7830$$

پس وزن باقی مانده، تقریباً ۷۸۳۰ کیلوگرم خواهد بود.

۵, ۱۰, ۲۰, ...

مثال ۶. چندمین جمله از دنباله هندسی مقابل برابر با ۳۲۰ است؟

پاسخ:

$$a_1 = 5$$

$$r = \frac{10}{5} = 2$$

$$a_n = 320$$

$$n = ?$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$320 = 5(2)^{n-1}$$

$$64 = 2^{n-1}$$

$$2^6 = 2^{n-1}$$

$$n - 1 = 6$$

$$n = 6 + 1 = 7$$

۳,  $\frac{3}{2}$ ,  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{3}{8}$ , ...

مثال ۷. جمله چندم دنباله مقابل برابر با  $\frac{3}{256}$  است؟

پاسخ:

$$a_1 = 3$$

$$r = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{3}{256}$$

$$n = ?$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$\frac{3}{256} = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\frac{1}{256} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\frac{1}{2^8} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$n - 1 = 8$$

$$n = 8 + 1 = 9$$

**نکته:** اگر دو جمله از یک دنباله هندسی معلوم باشند، برای تعیین نسبت مشترک، آنها را بر یکدیگر تقسیم می‌کنیم.

مثال ۸. در یک دنباله هندسی، جمله چهارم برابر ۵ و جمله هفتم برابر ۱۳۵ است. نسبت مشترک این دنباله را بیابید.

پاسخ:

$$\left. \begin{array}{l} a_4 = 5 \rightarrow a_1 r^3 = 5 \\ a_7 = 135 \rightarrow a_1 r^6 = 135 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{a_1 r^6}{a_1 r^3} = \frac{135}{5} \rightarrow r^3 = 27 \rightarrow r = 3$$

مثال ۹. اگر جمله اول یک دنباله هندسی برابر با ۲ و جمله چهارم آن برابر با ۵۴ باشد، جمله عمومی دنباله را بنویسید.

پاسخ:

$$a_1 = 2$$

$$a_4 = 54 \rightarrow a_1 r^3 = 54 \rightarrow 2r^3 = 54 \rightarrow r^3 = 27 \rightarrow r = 3$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_n = 2(3)^{n-1}$$

مثال ۱۰. در یک دنباله افزایشی، جمله سوم یک دنباله هندسی ۲۷ و جمله پنجم آن برابر با ۲۴۳ است. جمله هفتم این دنباله هندسی را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا جمله اول و نسبت مشترک دنباله را بدست آورده و سپس جمله هفتم را حساب می‌کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} a_3 = 27 \rightarrow a_1 r^2 = 27 \\ a_5 = 243 \rightarrow a_1 r^4 = 243 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{a_1 r^4}{a_1 r^2} = \frac{243}{27} \rightarrow r^2 = 9 \rightarrow r = 3$$

$$a_3 r^2 = 27 \rightarrow a_1 (3)^2 = 27 \rightarrow a_1 (9) = 27 \rightarrow a_1 = 3$$

$$a_7 = a_1 r^6 = 3(3)^6 = 3^7$$

مثال ۱۱. نخستین جمله یک دنباله هندسی ۱۵۳۶ و نسبت مشترک این دنباله هندسی برابر با  $\frac{1}{2}$  است. کدام جمله دنباله برابر

۶ است؟

پاسخ:

$$a_1 = 1536 \quad r = \frac{1}{2} \quad a_n = 6 \quad n = ?$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$6 = 1536 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \rightarrow \frac{6}{1536} = \frac{1}{2^{n-1}} \rightarrow \frac{1}{256} = \frac{1}{2^{n-1}} \rightarrow \frac{1}{2^8} = \frac{1}{2^{n-1}} \rightarrow n-1 = 8 \rightarrow n = 9$$

نکته: رابطه بازگشتی جملات دنباله هندسی به صورت مقابل است.

$$a_{n+1} = r a_n, \quad a_1 = \dots$$

مثال ۱۲. رابطه بازگشتی دنباله‌های هندسی زیر را بنویسید.

$$1) 15, 5, \frac{5}{3}, \dots$$

پاسخ:

$$a_1 = 15 \quad r = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$$a_{n+1} = r a_n$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n, \quad a_1 = 15$$

$$۲) \frac{1}{4}, \frac{3}{16}, \frac{9}{64}, \dots$$

پاسخ:

$$a_1 = \frac{1}{4} \quad r = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

$$a_{n+1} = r a_n$$

$$a_{n+1} = \frac{3}{4} a_n, \quad a_1 = \frac{1}{4}$$

$$a_{n+1} = \frac{4}{3} a_n, \quad a_1 = 2$$

مثال ۱۳. جمله عمومی دنباله هندسی مقابل را بنویسید.

پاسخ: طبق نکته بالا، ضریب  $a_n$  همان نسبت مشترک است پس  $r = \frac{4}{3}$ . در نتیجه:

$$a_1 = 2 \quad r = \frac{4}{3}$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_n = 2 \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

مثال ۱۴. با نوشتن جملات رابطه‌های بازگشتی زیر، مشخص کنید کدام یک از آن‌ها یک دنباله هندسی تشکیل می‌دهد.

$$۱) a_{n+1} = 2a_n, \quad a_1 = 1$$

پاسخ:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2(1) = 2$$

$$a_3 = 2(2) = 4$$

$$a_4 = 2(4) = 8$$

دنباله هندسی است. چون تمام جملات در عدد ثابت (۲) ضرب می‌شوند.

$$۲) a_{n+1} = \frac{2}{3} a_n, \quad a_1 = \frac{1}{2}$$

پاسخ:

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$$

$$a_3 = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}$$

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

دنباله هندسی است. چون نسب هر دو عدد متوالی باهم برابر است.

$$۳) a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}, \quad a_1 = 1$$

پاسخ:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{1}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$$

دنباله هندسی نیست. چون نسبت اعداد متوالی برابر نیستند.

$$۴) a_{n+1} = (a_n)^2, \quad a_1 = \frac{1}{2}$$

پاسخ:

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$a_3 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

$$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

دنباله هندسی نیست. چون نسبت اعداد متوالی برابر نیستند.

**واسطه هندسی:** اگر  $a, b, c$  سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آن گاه  $b^2 = a \times c$ . به عدد  $b$  واسطه هندسی دو عدد  $a$  و  $c$  می‌گوییم.

**اثبات:** فرض کنیم  $a, b, c$  سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند. در این صورت:

$$\left. \begin{array}{l} b = ar \\ br = c \end{array} \right\} \rightarrow b^2 r = acr \rightarrow b^2 = ac$$

مثال ۱۵. بین دو عدد ۵ و ۲۰، یک واسطه هندسی بنویسید.

**پاسخ:**

$$\Delta, b, 20 \rightarrow b^2 = 5 \times 20 \rightarrow b^2 = 100 \rightarrow b = \pm 10$$

مثال ۱۶. اگر  $x + 4, x, x - 2$  سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقدار  $x$  را به دست آورید.

**پاسخ:** جمله وسط به توان دو، برابر است با حاصل ضرب جمله‌های اول و سوم. بنابر این:

$$x^2 = (x - 2)(x + 4)$$

$$x^2 = x^2 + 2x - 8$$

$$-2x = -8$$

$$x = 4$$

مثال ۱۷. اگر  $x + 3, x + 2, x$  سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقدار  $x$  را به دست آورید.

**پاسخ:** جمله وسط به توان دو، برابر است با حاصل ضرب جمله‌های اول و سوم. بنابر این:

$$(x + 2)^2 = x(x + 3)$$

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 3x$$

$$4x - 3x = -4$$

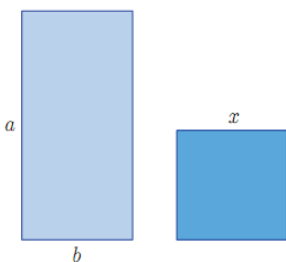
$$x = -4$$

مثال ۱۸. مستطیل با اضلاع  $a$  و  $b$  مطابق شکل مقابل مفروض است. اگر مربعی به ضلع  $x$  هم مساحت با آن باشد، کدام یک از دنباله‌های زیر، تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند؟

پ)  $b, a, x$

ب)  $a, x, b$

الف)  $a, b, x$



**پاسخ:** مساحت مربع  $(x^2)$  برابر است با مساحت مستطیل  $(ab)$ . یعنی  $x^2 = ab$ . در نتیجه  $x$  واسطه هندسی بین دو عدد  $a$  و  $b$  است. گزینه ب صحیح است.



**درج  $n$  واسطه هندسی:** اگر بین دو عدد  $a$  و  $b$ ، به تعداد  $n$  عدد چنان قرار دهیم که جملات از  $a$  تا  $b$  یک دنباله

هندسی تشکیل دهند، آن گاه نسبت مشترک جملات دنباله از رابطه مقابل به دست می‌آید.

$$r^{n+1} = \frac{b}{a}$$

مثال ۱۹. بین دو عدد ۴ و ۲۵۶ پنج واسطه هندسی درج کنید.

**پاسخ:**

$$a = 4 \quad b = 256 \quad n = 5$$

$$r^{n+1} = \frac{b}{a} \rightarrow r^{5+1} = \frac{256}{4} \rightarrow r^6 = 64 \rightarrow r = 2$$

$$4, 8, 16, 32, 64, 128, 256$$

مثال ۲۰. بین دو عدد ۲ و  $\frac{16}{27}$  دو عدد چنان بنویسید که اعداد حاصل، تشکیل دنباله هندسی بدهند.

**پاسخ:**

$$a = 2 \quad b = \frac{16}{27} \quad n = 2$$

$$r^{n+1} = \frac{b}{a} \rightarrow r^{2+1} = \frac{\frac{16}{27}}{2} \rightarrow r^3 = \frac{16}{54} \rightarrow r^3 = \frac{8}{27} \rightarrow r = \frac{2}{3}$$

$$2, \frac{4}{3}, \frac{8}{9}, \frac{16}{27}$$

**مجموع جملات دنباله هندسی:** مجموع  $n$  جمله اول دنباله هندسی از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

مثال ۲۱. مجموع ۵ جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول  $a_1 = 2$  و نسبت مشترک  $r = 3$  را به دست آورید.

**پاسخ:**

$$a_1 = 2 \quad r = 3 \quad n = 5$$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \rightarrow S_5 = \frac{2(1-3^5)}{1-3} = \frac{2(1-243)}{-2} = -(-242) = 242$$

مثال ۲۲. مجموع ۵ جمله اول دنباله هندسی زیر را بیابید.

$$\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \dots$$

پاسخ:

$$a_1 = \frac{2}{5} \quad r = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \rightarrow S_5 = \frac{\frac{2}{5}(1-(\frac{1}{2})^5)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{2}{5}(1-\frac{1}{32})}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{2}{5}(\frac{31}{32})}{\frac{1}{2}} = \frac{31}{40}$$

**نکته:** در مسایل مربوط به مجموع جملات دنباله هندسی، اگر جمله اول و آخر معلوم باشند، ابتدا باید تعداد جمله‌ها را پیدا کنیم؛ یعنی مشخص کنیم جمله آخر دنباله، چندمین جمله دنباله است.

مثال: ۲۳. مجموع‌های زیر را به دست آورید.

$$۱) ۱ + ۴ + ۱۶ + \dots + ۴۰۹۶$$

پاسخ: ابتدا باید تعداد جملات، یعنی  $n$  را بیابیم.

$$a_1 = 1 \quad r = \frac{4}{1} = 4 \quad a_n = 4096 \quad n = ?$$

$$a_n = a_1 r^{n-1} \rightarrow 4096 = 1 \times 4^{n-1} \rightarrow 4^6 = 4^{n-1} \rightarrow n-1 = 6 \rightarrow n = 6+1 = 7$$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \rightarrow S_7 = \frac{1(1-4^7)}{1-4} = \frac{1-16384}{-3} = \frac{-16383}{-3} = 5461$$

$$۲) \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{640}$$

پاسخ: ابتدا باید تعداد جملات، یعنی  $n$  را بیابیم.

$$a_1 = \frac{1}{5} \quad r = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \quad a_n = \frac{1}{640} \quad n = ?$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$\frac{1}{640} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \rightarrow \frac{1}{128} = \frac{1}{2^{n-1}} \rightarrow 128 = 2^{n-1} \rightarrow 2^7 = 2^{n-1} \rightarrow n-1 = 7 \rightarrow n = 8$$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \rightarrow S_8 = \frac{\frac{1}{5}(1-(\frac{1}{2})^8)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{5}(1-\frac{1}{256})}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{5}(1-\frac{1}{256})}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{5}(\frac{255}{256})}{\frac{1}{2}} = \frac{51}{128}$$

$$۳) ۱۵۳۶ + ۷۶۸ + ۳۸۴ + \dots + ۶$$

پاسخ: ابتدا باید تعداد جملات، یعنی  $n$  را بیابیم.

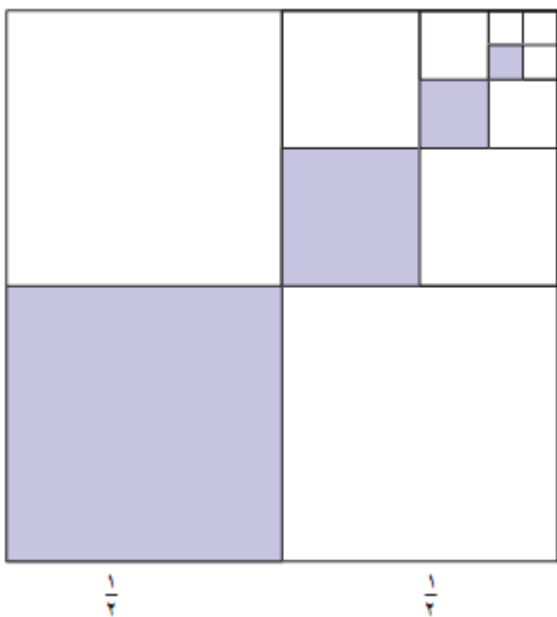
$$a_1 = ۱۵۳۶ \quad r = \frac{۷۶۸}{۱۵۳۶} = \frac{۱}{۲} \quad a_n = ۶ \quad n = ?$$

$$a_n = a_1 r^{n-1} \rightarrow ۶ = ۱۵۳۶ \left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-1} \rightarrow \frac{۶}{۱۵۳۶} = \frac{۱}{۲^{n-1}} \rightarrow \frac{۱}{۲۵۶} = \frac{۱}{۲^{n-1}}$$

$$\frac{۱}{۲^۸} = \frac{۱}{۲^{n-1}} \rightarrow ۲^۸ = ۲^{n-1} \rightarrow n-1 = ۸ \rightarrow n = ۹$$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \rightarrow S_9 = \frac{۱۵۳۶(1-(\frac{1}{2})^9)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{۱۵۳۶(1-\frac{1}{۵۱۲})}{\frac{1}{2}} = \frac{۱۵۳۶(\frac{۵۱۱}{۵۱۲})}{\frac{1}{2}} = ۳۰۶۶$$

مثال ۲۴. پس از تقسیم مربعی به ضلع یک متر به چهار مربع برابر، یکی از آن‌ها را رنگ می‌کنیم. از مربع‌های باقی‌مانده، مربعی را که با مربع رنگ‌آمیزی شده ضلع مشترک ندارد، انتخاب می‌کنیم و با تقسیم آن به چهار مربع برابر، مربعی را که با مربع رنگ شده، در یک راس مشترک است، رنگ‌آمیزی می‌کنیم و همین روند را مطابق شکل ادامه می‌دهیم.



الف) چرا دنباله مساحت‌های مربع‌های رنگی، یک دنباله هندسی تشکیل می‌دهد؟

پاسخ: دنباله مساحت‌های مربع‌های رنگی را تشکیل می‌دهیم. (می‌دانیم در هر مرحله، ضول ضلع مربع، نصف می‌شود.)

$$a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$a_2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \quad \frac{1}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$a_3 = \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64} \quad \frac{1}{64} = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$$

مشاهده می‌کنیم دنباله بالا، دنباله هندسی با نسبت مشترک  $\frac{1}{4}$  است.

ب) اگر روند رنگ‌آمیزی گفته شده را  $n$  مرحله انجام دهیم، مجموع مساحت‌های مربع‌های رنگی از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟

پاسخ: مجموع جملات دنباله هندسی را به دست می‌آوریم.

$$a_1 = \frac{1}{4} \quad r = \frac{1}{4}$$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{\frac{1}{4}(1-(\frac{1}{4})^n)}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}(1-(\frac{1}{4})^n)}{\frac{3}{4}} = \frac{1-(\frac{1}{4})^n}{3}$$

پ) پس از شش مرحله رنگ آمیزی مربع به روش بالا، چه مساحتی از مربع رنگ می شود؟

$$S_6 = \frac{1-(\frac{1}{4})^6}{3}$$

**پاسخ:** کافی است در فرمول قسمت (ب) به جای  $n$  عدد ۶ را جایگذاری کنیم.