



[t.me/safazelianmath](https://t.me/safazelianmath)

Link

Mathematics education from high school to university

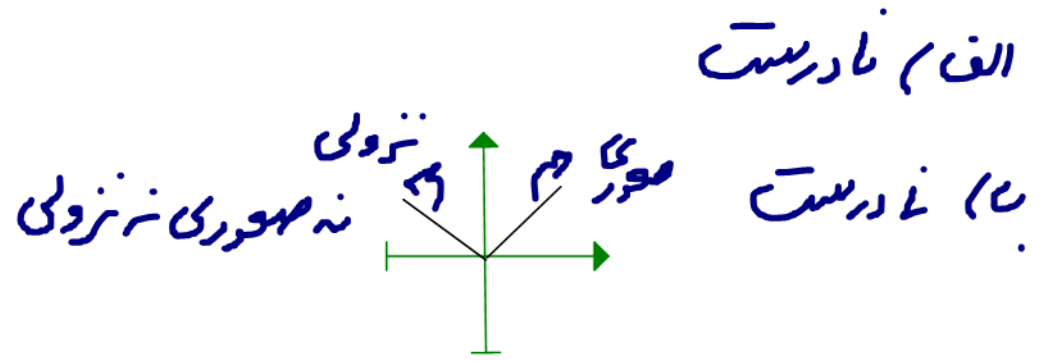
ID: @safazelian

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضی ۳	رشته ی : تجربی	ساعت شروع : ۱۰ صبح به افق تهران	مدت امتحان : 120 دقیقه
پایه : دوازدهم	تاریخ امتحان : ۲۴ / 3 / 1399		
دانش آموزان روزانه ، راه دور و داوطلبان آزاد	خارج از کشور در ماه خرداد سال 1399		
مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی			
ردیف	سؤالات		نمره

۱/۵	<p>درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) اگر <math>f(x) = \sqrt{x}</math> و <math>g(x) = \sin x</math> باشند، آنگاه <math>(g \circ f)(x) = \sqrt{\sin x}</math> خواهد بود.</p> <p>ب) تابع <math>f(x) =  x </math> در تمام دامنه اش صعودی است.</p> <p>پ) مقدار می نیمم تابع <math>y = 3 \sin(2x) - 2</math> برابر ۵- است.</p> <p>ت) تابع <math>f(x) = \sqrt[3]{x}</math> در نقطه <math>x = 0</math> مماس قائم دارد.</p> <p>ث) اگر تابع <math>f</math> پیوسته باشد لزوما مشتق پذیر است.</p> <p>ج) دو پیشامد <math>A</math> و <math>B</math> را ناسازگار می گوئیم هرگاه <math>A</math> و <math>B</math> با هم رخ ندهند.</p>
-----	--

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sin \sqrt{x}$$



پ) درست  $y_{\min} = -|a| + c = -3 - 5 = -8$

- ت) درست (ص. ۱۰۰ آیه ۱۴)
- ث) نادرست (برعکس درست است)
- ج) درست (۲ درصد نخبه‌پسندی)

۱/۲۵	<p>۲ در جای خالی عبارات مناسب قرار دهید.</p> <p>الف) اگر برد تابع <math>f</math> برابر <math>[-۱, ۴]</math> باشد آنگاه برد تابع <math>y = ۲f(x)</math> برابر با ..... است.</p> <p>ب) اگر <math>f(۷) = ۵</math> و <math>g(۴) = ۷</math> باشد، آنگاه <math>(f \circ g)(۴) = \dots\dots\dots</math></p> <p>پ) دوره تناوب اصلی <math>y = \tan \alpha</math> برابر ..... می باشد.</p> <p>ت) باقی مانده تقسیم <math>f(x) = ۲x^۲ - ۵x + ۱</math> بر <math>x - ۳</math> برابر با ..... است.</p> <p>ث) شکل حاصل از دوران یک نیم دایره حول شعاع عمود بر قطر آن یک ..... است.</p>
------	--

الف)  $[-۲, ۸]$

ب)  $f(g(۴)) = f(۷) = ۵$

پ)  $\pi$

ت) باقی مانده  $x - ۳ = ۰ \rightarrow x = ۳ \rightarrow f(۳) = ۲(۳^۲) - ۵ \times ۳ + ۱ = ۱۸ - ۱۵ + ۱ = ۴$

ث) نیم کره (۲۰ درصد ضعیفی)

۰/۷۵	اگر $f(x) = x^2 - 5$ و $g(x) = \sqrt{x+6}$ باشد، دامنه $f \circ g$ را به دست آورید.	۳
------	---	---

$D_f = \mathbb{R}$  و  $D_g: x+6 \geq 0 \rightarrow x \geq -6 \rightarrow D_g = [-6, +\infty)$

$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \geq -6 \mid \sqrt{x+6} \in \mathbb{R}\} = [-6, +\infty)$

۱/۲۵	الف) وارون تابع $y = \sqrt{x+2}$ را به دست آورید. ب) با محدود کردن دامنه تابع $f(x) = x^2 - 4x + 5$ یک تابع یک به یک به دست آورید.	۴
------	---	---

رابطه  $y = \sqrt{x+2} \xrightarrow{\text{بتراب کردن}} y^2 = |x+2| \xrightarrow{x \geq -2} y^2 = x+2 \rightarrow y^2 - 2 = x \rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 2$   
( $x \rightarrow f^{-1}$  و  $y \rightarrow x$ )

ب)  $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2} = 2$   $D_f = (-\infty, 2] \cup [2, +\infty)$  تابع یک به یک می شود

۱	$۲ \sin ۳x - \sqrt{۲} = ۰$	معادله مثلثاتی مقابل را حل کنید.	۵
---	----------------------------	----------------------------------	---

$$۲ \sin ۳x = \sqrt{۲} \rightarrow \sin ۳x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \rightarrow \sin ۳x = \sin \frac{\pi}{۴}$$

$$\begin{cases} ۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴} \rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۱۲} \\ ۳x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۴} \rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۴} \end{cases}$$

۰/۵	اگر $\cos \alpha = \frac{۵}{۱۳}$ و $\alpha$ زاویه حاده باشد؛ $\cos ۲\alpha$ را به دست آورید.	۶
-----	--	---

$$\begin{aligned} \cos ۲\alpha &= ۲ \cos^۲ \alpha - ۱ = ۲ \times \left(\frac{۵}{۱۳}\right)^۲ - ۱ = ۲ \times \frac{۲۵}{۱۶۹} - ۱ = \frac{۵۰}{۱۶۹} - ۱ = \frac{۵۰ - ۱۶۹}{۱۶۹} \\ &= -\frac{۱۱۹}{۱۶۹} \end{aligned}$$

۱	اگر در یک تابع مثلثاتی دوره تناوب $4\pi$ و مقدار ماکزیمم ۱- و مقدار می نیمم ۷- باشد؛ تابع سینوسی آن را بنویسید.	۷
---	---	---

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow \cancel{4\pi} = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow |b| = 2 \rightarrow |b| = \frac{1}{2} \rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

$$|a| = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} = \frac{-1 - (-7)}{2} = \frac{-1 + 7}{2} = 3 \rightarrow a = \pm 3$$

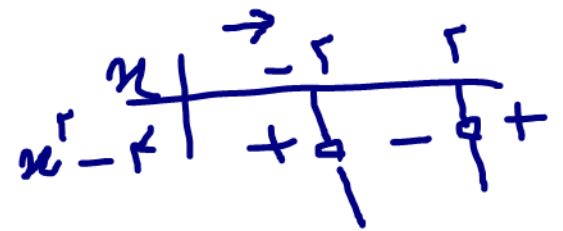
$$c = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2} = \frac{-1 - 7}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

پس از نتایج:

$$y = 3 \sin \frac{1}{2}x - 4 \quad \vee \quad y = -3 \sin \frac{1}{2}x - 4$$

$$\vee \quad y = 3 \sin \left(-\frac{1}{2}x\right) - 4 \quad \vee \quad y = -3 \sin \left(-\frac{1}{2}x\right) - 4$$

۱/۷۵	<p>حد های زیر را محاسبه کنید.</p> <p>الف) <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x-3} = \frac{1}{-\infty} = 0</math></p> <p>ب) <math>\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{-3x}{x^2-4} = \frac{6}{0^+} = +\infty</math></p> <p>پ) <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{3x-1} = \frac{2}{3}</math></p> <p>ت) <math>\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{2-\sqrt{x+1}} \times \frac{2+\sqrt{x+1}}{2+\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(2+\sqrt{x+1})}{2+\sqrt{x+1}}</math></p>	۸
------	--	---



$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(2+\sqrt{x+1})}{2+\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{2-(x+1)}$$

$t - (x+1) \rightarrow t - x - 1 = -x + 3$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{-(x-3)} = \frac{7(2+2)}{-1} = -28$$

۲/۲۵	<p>مشتق توابع زیر را بدست آورید. ( ساده کردن الزامی نیست )</p> <p>الف) <math>f(x) = \frac{x^2-3x+1}{-3x+1} \rightarrow f'(x) = \frac{(2x-3)/(-3x+1) - (-3)(x^2-3x+1)}{(-3x+1)^2}</math></p> <p>ب) <math>f(x) = (x^2+1)^3(\Delta x - 1)</math></p>	۹
------	---	---

ب)  $f'(x) = 3(x^2+1)^2(2x) \underbrace{(\Delta x - 1)}_{\text{خود ادوی}} + \underbrace{\Delta x}_{\text{تقواری}} \underbrace{(x^2+1)^3}_{\text{خود ادوی}}$

۱/۵	معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ بر حسب متر در بازه زمانی $[0, 5]$ بر حسب ثانیه داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 5]$ برابر است؟	۱۰
-----	---	----

$$\frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{(25 - 5 + 10) - (0 - 0 + 10)}{5} = \frac{20 - 10}{5} = 2 \quad \text{سرعت متوسط}$$

$$f'(t) = 2t - 1 \quad \rightarrow \quad f'(c) = 2c - 1 = 2 \quad \rightarrow \quad 2c = 3$$

$$c = \frac{3}{2} = 1.5$$

۰/۷۵	$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ اگر نشان دهید $f'(0)$ موجود نیست.	۱۱
------	--	----

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad f'_+(0) = 1 \quad \text{و} \quad f'_-(0) = 2 \times 0 = 0$$

$$f'_+(0) \neq f'_-(0)$$



۱/۷۵	الف) نقطه بحرانی را تعریف کنید. ب) اگر نقطه $(2, 1)$ نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ باشد؛ مقادیر $b$ و $d$ را به دست آورید.	۱۲
------	--	----

تعریف: نقطه به طول  $c$  از دامنه تابع  $f$  را یک نقطه بحرانی برای این تابع می نامیم هرگاه  $f'(c)$  برابر صفر باشد یا  $f'(c)$  موجود نباشد.

الف)

$$f'(x_{ext}) = 0$$

$$① f'(x) = 3x^2 + 2bx \rightarrow f'(2) = 0 \rightarrow 3(2)^2 + 2b(2) = 0 \rightarrow 12 + 4b = 0 \quad (b)$$

نقطه بحرانی در تابع مرتبه اول

$$② f(2) = 1 \rightarrow 2^3 + b(2)^2 + d = 1 \rightarrow 8 + 4b + d = 1 \rightarrow 8 - 12 + d = 1$$

$$\underline{\underline{d = 5}}$$

۱/۲۵	نشان دهید در بین تمام مستطیل های با محیط ثابت ۱۴ سانتی متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن هم اندازه باشد.	۱۳
------	---	----

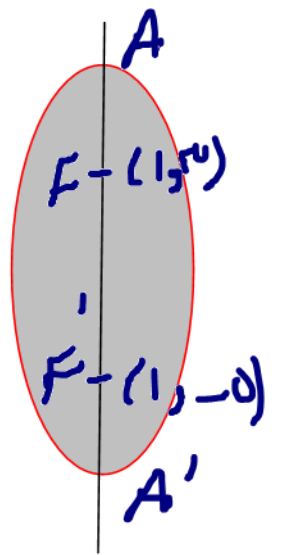
$$P = 2x + 2y = 14 \Rightarrow x + y = 7 \rightarrow y = 7 - x$$

$$S = f(x) = xy = x(7 - x) = -x^2 + 7x$$

$$f'(x) = -2x + 7 = 0 \rightarrow -2x = -7 \rightarrow x = 3.5 \rightarrow y = 7 - 3.5 = 3.5$$

$$x = y = 3.5$$

۱۴	کانون های یک بیضی نقاط $(1, 3)$ و $(1, -5)$ است و اندازه قطر بزرگ ۱۲ می باشد. فاصله کانونی و مختصات مرکز بیضی و خروج از مرکز بیضی را محاسبه کنید.
----	---



دانه در هر اختیاری

$$AA' = 2a = 12 \rightarrow a = 6$$

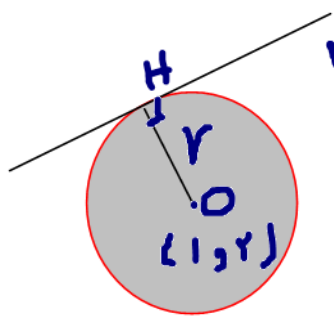
$$① FF' = 3 - (-5) = 8 \leftarrow \text{فاصله کانونی} \rightarrow 2c = 8 \rightarrow c = 4$$

$$② O(\alpha, \beta) = \left( \frac{1+1}{2}, \frac{3-5}{2} \right) = (1, -1)$$

دپ FF'

$$③ e = \frac{c}{a} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

۱۵	معادله دایره ای را بنویسید که بر خط $3x + 4y - 1 = 0$ مماس بوده و مرکز آن $(1, 2)$ باشد.
----	--



$$3x + 4y - 1 = 0$$

$$r = OH = \frac{|1 \times 3 + 4 \times 2 - 1|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|3 + 8 - 1|}{5} = 2$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$$

دانه در هر اختیاری

۱/۲۵	دو جعبه داریم. درون یکی از آن ها ۱۲ لامپ قرار دارد که ۶ تا از آنها معیوب است و درون جعبه دیگر ۹۶ لامپ قرار دارد که ۴ تا از آنها معیوب هستند. به تصادف جعبه ای انتخاب کرده، یک لامپ از آن بیرون می آوریم. چقدر احتمال دارد لامپ مورد نظر معیوب باشد؟	۱۶
۲۰	موفق باشید	جمع نمرات

راز ۲ در صورت اختیاری

$$\begin{array}{l}
 \text{جعبه اول} \\
 \text{جعبه دوم}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \frac{1}{2} \rightarrow \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \\
 \frac{1}{2} \rightarrow \frac{4}{96} = \frac{1}{24}
 \end{array}
 \rightarrow P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{24}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{48} = \frac{12+1}{48} = \frac{13}{48}$$