

نام و نام خانوادگی:
 مقطع و رشته: دوازدهم ریاضی
 نام پدر:
 شماره داوطلب:
 تعداد صفحه سؤال: ۱ صفحه

جمهوری اسلامی ایران
 اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران
 اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۱۲ تهران
 دبیرستان غیردولتی پسرانه سرای دانش واحد حافظ
 آزمون پایان ترم نوبت اول سال تحصیلی ۹۹-۱۳۹۸

نام درس: گسسته
 نام دبیر: شهروز رحیمی
 ساعت امتحان: ۰۸:۰۰ صبح / عصر
 مدت امتحان: ۹۰ دقیقه

محل مهر و امضاء مدیر	نمره به عدد:	نمره به حروف:	نمره به عدد:	نمره به حروف:
	نام دبیر:	تاریخ و امضاء:	نام دبیر:	تاریخ و امضاء:
سؤال	نمره	سؤال	نمره	سؤال
۱/۵	۱	در اثبات درستی رابطه $a + b \geq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}$ به کمک اثبات بازگشتی به کدام رابطه بدیهی می‌رسیم؟ (a و b دو عدد حقیقی مثبت هستند.)	۱/۵	۲
۱/۵	۲	به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی n ، دو عدد به صورت های $5n - 2$ و $7n + 3$ ، نسبت به هم غیر اول اند؟	۱/۵	۳
۱/۵	۳	فرض کنید a و b اعدادی طبیعی باشند. $ab = 462$ آنگاه (a, b) برابر کدام است؟	۱/۵	۴
۱/۵	۴	باقی مانده ی تقسیم عدد زوج a بر ۲۳ برابر ۹ است. باقی مانده ی تقسیم $\frac{a}{۲}$ بر ۲۳ کدام است؟	۱/۵	۵
۱/۵	۵	عدد $563b29$ بر ۹۹ بخش پذیر است. a کدام است؟	۱/۵	۶
۱/۵	۶	اگر عدد $7^{200} + a$ مضرب ۱۹ باشد. کوچکترین عدد طبیعی a کدام است؟	۱/۵	۷
۱/۵	۷	اگر $a^p = 10k + 7$ آنگاه رقم یکان عدد a^{p+4} کدام است؟	۱/۵	۸
۱/۵	۸	کمترین تعداد تمبرهای لازم برای ارسال بسته‌ای که نیاز به ۹۵۰۰ ریال تمبر دارد، با استفاده از تمبرهای ۹۰ و ۵۰ ریالی کدام است؟	۱/۵	۹
۱/۵	۹	در گراف ساده زیر حاصل $\frac{\Delta^3 - \delta^3}{\delta} + 208 - 5p^2 - 5q^2$ چقدر است؟ 	۱/۵	۱۰
۱/۵	۱۰	در گرافی با $p = 10$ و $q = 25$ حداکثر چند رأس با درجه ۹ وجود دارد؟	۱/۵	۱۱
۱/۵	۱۱	اگر مجموعه رأس‌های گراف را $V = \{a, b, c, d, e\}$ در نظر بگیریم، چند گراف ساده می‌توان ساخت که هیچ کدام یال ab را نداشته باشند؟	۱/۵	۱۲
۱/۵	۱۲	در گراف K_5 با رئوس نامگذاری شده چند مسیر مختلف وجود دارد؟	۱/۵	۱۳
۱/۵	۱۳	در گراف کامل با رئوس $\{a, b, c, d, e, f\}$ چند دور به طول ۵ شامل یال cd وجود دارد؟		

جمع بارم: ۲۰ نمره



اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران
اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۱۲ تهران
دبیرستان غیر دولتی پسرانه سرای دانش واحد حافظ

نام درس: گسسته

نام دبیر: شهروز رمیمی

ساعت امتحان: ۸:۳۰ صبح / عصر

مدت امتحان: ۹۰ دقیقه

کلید سؤالات پایان ترم نوبت اول سال تحصیلی ۹۹-۹۸

ردیف	راهنمای تصحیح	محل مهر یا امضاء مدیر
۱	$\frac{a^r}{b} + \frac{b^r}{a} \geq a + b \Leftrightarrow \frac{a^r + b^r}{ab} \geq a + b \xrightarrow[(ab) > 0]{\times ab} a^r + b^r \geq ab(a + b)$ $\rightarrow (a + b)(a^r - ab + b^r) \geq ab(a + b) \xrightarrow{\div (a+b)}$ <p>همواره صحیح $\leftarrow a^r - ab + b^r \geq ab \Leftrightarrow a^r - 2ab + b^r \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$</p>	
۲	$(\Delta n - 2, \gamma n + 3) = (\Delta n - 2, \gamma n + 3 - (\Delta n - 2))$ $= (\Delta n - 2, 2n + 5) = (2n + 5, (\Delta n - 2) - (2n + 10))$ $= (2n + 5, n - 12) = (n - 12, (2n + 5) - (2n - 24))$ $= (n - 12, 29) = 1 \text{ یا } 29$ $n - 12 = 29k \Rightarrow n = 29k + 12$ <p>چهار حالت مختلف $10 \leq 29k + 12 \leq 100 \Rightarrow \frac{-2}{29} \leq k \leq \frac{88}{29} \Rightarrow k = 0, 1, 2, 3$</p>	
۳	$\left. \begin{matrix} d a \\ d b \end{matrix} \right\} \rightarrow d^2 ab \rightarrow d^2 462$ $462 = 2 \times 3 \times 7 \times 11$ $d = 1$	
۴	$a = 23(2q + 1) + 9 = 46q + 32 \Rightarrow \frac{a}{2} = 23q + 16$	
۵	$a63b29 \equiv 9 \pmod{11} \Rightarrow \begin{cases} a63b29 \equiv 9 \pmod{11} & (1) \\ a63b29 \equiv 11 \pmod{11} & (2) \end{cases}$ $(1) \Rightarrow 9 + 2 + b + 3 + 6 + a \equiv 9 \pmod{11} \Rightarrow a + b \equiv -2$ <p>غ ق ق ۲۳ یا ۱۶ یا ۷ یا -۲</p> $(2) \Rightarrow 9 - 2 + b - 3 + 6 - a \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow b - a + 10 \equiv 0$ $\Rightarrow b - a \equiv 1 \Rightarrow b - a = -10 \text{ یا } 1 \text{ یا } 12$ $\begin{cases} a + b = 7 \\ b - a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = 3 \end{cases}, \begin{cases} a + b = 16 \\ b - a = 1 \end{cases} \Rightarrow b = \frac{17}{2}$ <p>غ ق ق ۲</p>	
۶	<p>قضیه فرما: اگر p اول باشد و $(a, p) = 1$ آنگاه $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$</p> $7^{18} \equiv 1 \pmod{19} \xrightarrow{\text{توان } 11} 7^{198} \equiv 1 \pmod{19} \Rightarrow 7^{200} \equiv 49 \pmod{19}$ $\Rightarrow 7^{200} + a \equiv 49 + a \equiv 0 \pmod{19} \Rightarrow \min(a) = 8$	
۷	$a^{p+4} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow a^p \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow k + 4 \equiv 0 \pmod{p}$	

$50x + 90y = 9500$ $(50, 90) = 10 \Rightarrow 5x + 9y = 950 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 10 \\ y_0 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 + 9k \\ y = 100 - 5k \end{cases}$ $k = -1 \min(x + y) = 110 + 4(-1) = 106$	۸
$p = 6, q = 10, \delta = 2, \Delta = 4$	۹
$q(K_{10}) = \frac{10 \times 9}{2} = 45 \Rightarrow 45 - 25 = 20$ <p>حداقل رئوس را برای حذف ۲۰ یال در نظر بگیریم</p> $20 < \binom{7}{2}$ <p>بنابراین حداکثر رئوس با درجه ۹ مساوی $3 = 10 - 7$ می شود.</p>	۱۰
<p>تعداد 2^9 گراف می توان ساخت.</p>	۱۱
$K_5 \text{ در } K_5 = \underbrace{\binom{5}{2}}_{\text{انتخاب ۲ راس}} \times \underbrace{[(5-2)! \times 2,7]}_{\text{تعداد مسیرهای بین دو راس}} + \underbrace{5}_{\text{تعداد مسیرها به طول صفر}} = 165$	۱۲
<p>یال cd را یک بسته فرض می کنیم.</p> $\binom{4}{3} \times \frac{\overset{\text{بسته ی } cd}{(1+3-1)!}}{2} \times \underset{\text{جابه جایی } d,c}{2!} = 24$	۱۳
<p>نام و نام خانوادگی مصحح : شهرز رحیمی</p>	<p>جمع بارم : ۲۰ نمره</p>