

نام و نام خانوادگی: .....

مقطع و رشته: .....

نام پدر: .....

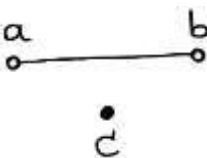
شماره داوطلب: .....

تعداد صفحه سؤال: ۲ صفحه

جمهوری اسلامی ایران  
اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران  
اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۶ تهران  
دبیرستان غیردولتی دخترانه سرای دانش واحد فلسطین  
آزمون پایان ترم نوبت اول سال تمصیلی ۹۸-۱۳۹۷

نام درس: ریاضیات گسسته  
نام دبیر: آقای دارابی  
تاریخ امتحان: ۱۷ / ۱۰ / ۱۳۹۷  
ساعت امتحان: ۰۰ : ۰۸ : صبح / عصر  
مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

محل مهر و امضاء مدیر	نمره به عدد:	نمره به حروف:	نمره به عدد:	نمره به حروف:
	نام دبیر:	تاریخ و امضاء:	نام دبیر:	تاریخ و امضاء:
شماره:	سوالات			
۱	ثابت کنید اگر $K$ حاصلضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد آنگاه $4k + 1$ مربع کامل است.			
۱	به روش بازگشتی ثابت کنید که $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$ برقرار است. ( $x$ و $y$ و $z$ اعداد حقیقی هستند).			
۱	برای گزاره ی زیر یک مثال نقض بیاورید: "اگر برای هر سه مجموعه $A$ و $B$ و $C$ داشته باشیم: $A \cup B = A \cup C$ آنگاه $B = C$ "			
۱	اگر $a, b, c$ اعداد طبیعی باشند به طوری که $abc \mid ac + bc$ ، آنگاه نشان دهید که $a=b$ .			
۱/۵	چند نقطه با مختصات صحیح روی منحنی $3yx - x^2 - y = 1$ وجود دارد؟			
۱	در یک تقسیم مقسوم علیه برابر ۲۲ و باقیمانده برابر با ۱۳ است. اگر ۱۵ واحد به مقسوم اضافه کنیم، خارج قسمت و باقیمانده هر کدام چند واحد تغییر می کنند؟			
۱	اگر $b$ فرد و $c$ زوج باشد به طوری که $a \mid b + c$ آنگاه باقیمانده تقسیم $a^2 + b^2 + 3$ بر ۸ چقدر است؟			
۱	حاصل $([4a, 24a^2], (3a, 9ab))$ را بدست آورید.			
۱/۵	چند عدد دو رقمی $n$ وجود دارد به طوری که $7^n + 42 \equiv 0 \pmod{43}$ ؟			
۲	چند عدد به صورت $1aabb$ وجود دارد که مضرب ۳۶ باشد؟			

۱/۵	بزرگترین عدد دو رقمی $x$ را بیابید به طوری که: $13x \equiv 1 \pmod{5}$ و $7x \equiv 2 \pmod{12}$	۱۱
۱/۵	معادله سیاله $8x + 13y = 300$ چند جواب طبیعی دارد؟	۱۲
۱	یک گراف ساده از مرتبه ۱۲ و اندازه ۲۲ حداکثر چند رأس تنها دارد؟	۱۳
۱	روی مجموعه رأس های $V = \{a, b, c, d, e\}$ چند گراف ساده با اندازه ۳ ساخته می شود به طوری که دو رأس $a$ و $b$ مجاور باشند؟	۱۴
۱	گراف مقابل چند زیرگراف دارد؟ 	۱۵
۲	همه گراف های ساده مرتبه ۴ را رسم کنید. (توجه داشته باشید که رأس ها نامگذاری نشده اند.)	۱۶
صفحه ی ۲ از ۲		

جمع بارم : ۲۰ نمره



اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران  
اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۶ تهران  
دبیرستان غیر دولتی دخترانه سرای دانش واحد فلسطین  
کلید سؤالات پایان ترم نوبت اول سال تمصیلی ۹۸-۹۷

نام درس: گسسته  
نام دبیر: آقای دارابی  
تاریخ امتحان: ۱۷ / ۱۰ / ۱۳۹۷  
ساعت امتحان: ۸ صبح / عصر  
مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

ردیف	راهنمای تصحیح	محل مهر یا امضاء مدیر
۱	ثابت کنید اگر $K$ حاصلضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد آنگاه $4k + 1$ مربع کامل است. $K = n(n + 1) \rightarrow 4k + 1 = 4n(n + 1) + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n + 1)^2$	
۲	به روش بازگشتی ثابت کنید که $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$ برقرار است. ( $x$ و $y$ و $z$ اعداد حقیقی هستند). $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2xz$ $\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy + x^2 + z^2 - 2xz + y^2 + z^2 - 2yz \geq 0$ $(x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 \geq 0$ رابطه ی آخر یک رابطه بدیهی است.	
۳	برای گزاره ی زیر یک مثال نقض بیاورید: "اگر برای هر سه مجموعه $A$ و $B$ و $C$ داشته باشیم: $A \cup B = A \cup C$ آنگاه $B = C$ " $\left. \begin{matrix} A = \{1, 2, 3\} \\ B = \{1, 2\} \\ C = \{2, 3\} \end{matrix} \right\} \rightarrow \begin{cases} A \cup B = \{1, 2, 3\} \\ A \cup C = \{1, 2, 3\} \end{cases} \rightarrow A \cup B = A \cup C$ در حالیکه $B \neq C$	
۴	اگر $a, b, c$ اعداد طبیعی باشند به طوریکه $abc \mid ac + bc$ آنگاه نشان دهید که $a = b$ $abc \mid ac + bc \Rightarrow ab \mid a + b \Rightarrow \begin{cases} a \mid a + b \Rightarrow a \mid b \\ b \mid a + b \Rightarrow b \mid a \end{cases}$ بنابراین $a \mid b$ و $b \mid a \Rightarrow  a  =  b  \Rightarrow a = b$ البته می توان مقادیر $a$ و $b$ را پیدا کرد، اما هدف مسئله مقادیر $a$ و $b$ نیست.	
۵	چند نقطه با مختصات صحیح روی منحنی $3yx - x^2 - y = 1$ وجود دارد؟ $3yx - x^2 - y = 4 \Rightarrow y(3x - 1) = x^2 + 4 \Rightarrow y = \frac{x^2 + 4}{3x - 1} \stackrel{y \in \mathbb{Z}}{\Rightarrow} \begin{cases} 3x - 1 \mid x^2 + 4 \Rightarrow 3x - 1 \mid 3x^2 + 12 \\ 3x - 1 \mid 3x - 1 \Rightarrow 3x - 1 \mid 3x^2 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 1 \mid 12 + x \Rightarrow 3x - 1 \mid 36 + 3x \\ 3x - 1 \mid 3x - 1 \end{cases}$ $\Rightarrow 3x - 1 \mid 37 \Rightarrow 3x - 1 = \pm 1, \pm 37$ $3x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0 \in \mathbb{Z}, \quad 3x - 1 = 1 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$ $3x - 1 = -37 \Rightarrow x = -12 \in \mathbb{Z}, \quad 3x - 1 = 37 \Rightarrow x = \frac{38}{3} \notin \mathbb{Z}$ پس دو نقطه با مختصات صحیح وجود دارد.	

۶	<p>در یک تقسیم مقسوم علیه برابر ۲۲ و باقیمانده برابر با ۱۳ است. اگر ۱۵ واحد به مقسوم اضافه کنیم، خارج قسمت و باقیمانده هر کدام چند واحد تغییر می کند؟</p> $a = 22q + 13 \Rightarrow a + 15 = 22q + 28 \Rightarrow a + 15 = 22q + 22 + 6 \Rightarrow a + 15 = 22(q + 1) + 6$ <p>باقیمانده جدید ۶ و خارج قسمت جدید <math>q+1</math> است. پس از باقیمانده ۷ واحد کم شده و به خارج قسمت یک واحد اضافه شده است.</p>	
۷	<p>اگر <math>b</math> فرد و <math>c</math> زوج باشد به طوریکه <math>a   b + c</math> آنگاه باقیمانده تقسیم <math>a^2 + b^2 + 3</math> بر ۸ چقدر است؟</p> <p><math>a</math> فرد است <math>\Rightarrow b + c</math> فرد است <math>\Rightarrow c</math> زوج است <math>b</math> فرد است</p> $\left. \begin{array}{l} a \text{ فرد است} \Rightarrow a^2 = 8k + 1 \\ b \text{ فرد است} \Rightarrow b^2 = 8k' + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow a^2 + b^2 = 8k + 8k' + 2$ $a^2 + b^2 = 8q + 2 \Rightarrow a^2 + b^2 + 3 = 8q + 5$ <p>بنابراین باقیمانده <math>a^2 + b^2 + 3</math> بر ۸ برابر است با ۵.</p>	
۸	<p>حاصل <math>((3a, 9ab), [4a, 24a^2])</math> را بدست آورید.</p> $3a   9ab \Rightarrow (3a, 9ab) = 3 a $ $4a   20a^2 \Rightarrow [4a, 24a^2] = 24a^2$ <p>بنابراین:</p> $(3 a , 24a^2) = 3 a $ <p>زیرا:</p> $3 a    24a^2$	
۹	<p>چند عدد دو رقمی <math>n</math> وجود دارد به طوریکه <math>7^n + 42 \equiv 0 \pmod{43}</math></p> $7^n + 42 \equiv 0 \pmod{43} \Rightarrow 7^n \equiv -42 \equiv 1 \pmod{43}$ <p>حال باید کوچکترین مقدار <math>n</math> را پیدا کنیم به طوریکه <math>7^n \equiv 1 \pmod{43}</math></p> $7^2 \equiv 6 \pmod{43} \xrightarrow{\times 7} 7^3 \equiv 42 \pmod{43} - 1 \Rightarrow 7^6 \equiv 1 \pmod{43} \Rightarrow 7^{6k} \equiv 1 \pmod{43}$ <p>بنابراین: <math>n=6k</math> از طرفی <math>10 \leq n \leq 99</math> و</p> $10 \leq 6k \leq 99 \Rightarrow 2 \leq k \leq 16$ <p><math>\Rightarrow</math> تعداد جواب ها = <math>16 - 2 + 1 = 15</math></p>	

<p>چند عدد به صورت <math>\overline{1aabb}</math> وجود دارد که مضرب ۳۶ باشد .</p> $\overline{1aabb} \equiv 0 \Rightarrow \begin{cases} \overline{1aabb} \equiv 0 \\ \overline{1aabb} \equiv 0 \end{cases}$ $\overline{1aabb} \equiv 0 \Rightarrow \overline{bb} \equiv 0 \Rightarrow 10b + b \equiv 0 \Rightarrow 11b \equiv 0 \Rightarrow b \equiv 0 \Rightarrow b = 0, 4, 8$ $\overline{1aabb} \equiv 0 \Rightarrow 1 + a + a + b + b \equiv 0 \Rightarrow 1 + 2a + 2b \equiv 0 \Rightarrow 2(a + b) \equiv -1 \equiv 8 \Rightarrow a + b \equiv 4$ $b = 0 \Rightarrow a \equiv 4 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow \overline{1aabb} = 14400$ $b = 4 \Rightarrow a \equiv 0 \Rightarrow a = 0 \text{ یا } a = 9 \Rightarrow \overline{1aabb} = 10044, 19944$ $b = 8 \Rightarrow a \equiv -4 \equiv 5 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow \overline{1aabb} = 15588$	<p>۱۰</p>
<p>بزرگترین عدد دو رقمی <math>x</math> را بیابید به طوری که:</p> $13x \equiv 1, 7x \equiv 2$ $\left. \begin{aligned} 7x \equiv 2 &\Rightarrow -5x \equiv -10 \Rightarrow x \equiv 2 \\ 13x \equiv 1 &\Rightarrow 3x \equiv 6 \Rightarrow x \equiv 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x \equiv 2 \Rightarrow x = 60k + 2$ <p>بزرگترین عدد دو رقمی <math>x</math> زمانی است که: <math>k=1</math> باشد.</p> $x = 60 \times 1 + 2 = 62$	<p>۱۱</p>
<p>معادله سیاله <math>8x + 13y = 300</math> چند جواب طبیعی دارد؟</p> $13y \equiv 300 \Rightarrow 5y \equiv 300 \Rightarrow y \equiv 4 \Rightarrow y = 8k + 4$ $8x + 13y = 300 \Rightarrow 8x + 13(8k + 4) = 300 \Rightarrow 8x = 248 - 13 \times 8k \Rightarrow x = 31 - 13k$ <p>اما جواب ها باید طبیعی باشند، بنابراین:</p> $1 \leq x \Rightarrow 1 \leq 31 - 13k \Rightarrow 13k \leq 30 \Rightarrow k \leq 2$ $1 \leq y \Rightarrow 1 \leq 8k + 4 \Rightarrow 0 \leq k$ <p>بنابراین:</p> $0 \leq k \leq 2$ <p>تعداد جواب ها <math>= 2 - 0 + 1 = 3</math></p>	<p>۱۲</p>
<p>یک گراف ساده از مرتبه ۱۲ و اندازه ۲۲ حداکثر چند رأس تنها دارد؟</p> <p>باید ۲۲ را در حداقل تعداد ممکن رأس ها جای دهیم تا بیشترین تعداد رأس های تنها باقی بماند. اما برای ۲۲ یال حداقل ۸ رأس لازم است زیرا:</p> $2^8 = 28 \text{ و } 2^7 = 21$ <p>بنابراین حداکثر تعداد رأس ها تنها برابر است با:</p> $12 - 8 = 4$	<p>۱۳</p>

روی مجموعه رأس های  $V = \{a, b, c, d, e\}$  چند گراف ساده با اندازه ۳ ساخته می شود به طوری که دو رأس  $a$  و  $b$  مجاور باشند؟

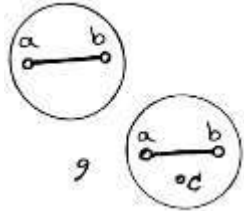
$$\binom{\binom{5}{2}}{3-1} = \binom{9}{2} = 36$$

گراف مقابل چند زیرگراف دارد؟



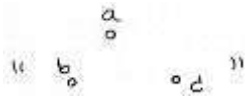
زیرگراف ها یا شامل یال  $ab$  هستند و یا شامل آن نیستند.

(۱) زیرگراف های شامل یال  $ab$ :



(۲) زیرگراف های فاقد یال  $ab$ : کافی است زیرگراف های گراف تهی را بشماریم.

زیرگراف ها :  $2^3 - 1 = 7$

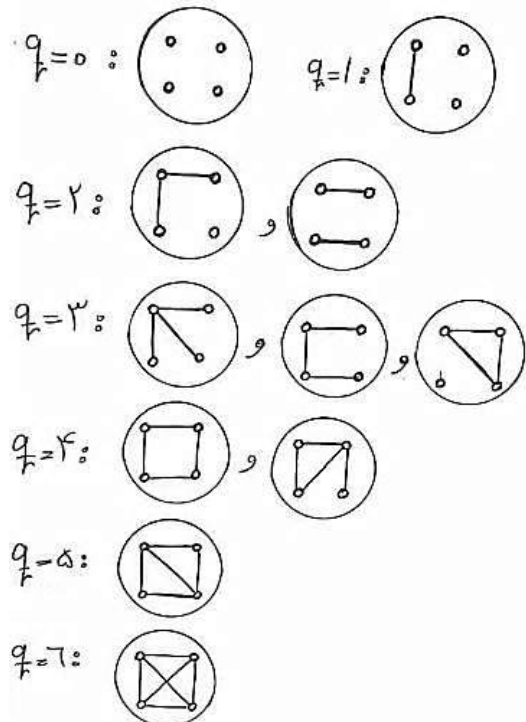


بنابراین:

تعداد کل زیرگراف ها :  $7 + 2 = 9$

همه گراف های ساده مرتبه ۴ را رسم کنید. (توجه داشته باشید که رأس ها نامگذاری شده اند.) (۲ نمره)

$$0 \leq q \leq \binom{4}{2} \implies 0 \leq q \leq 6$$



امضاء:

نام و نام خانوادگی مصحح :

جمع بارم : ۲۰ نمره