

نام و نام خانوادگی:
 مقطع و رشته: دوازدهم ریاضی
 نام پدر:
 شماره داوطلب:
 تعداد صفحه سؤال: ۱ صفحه

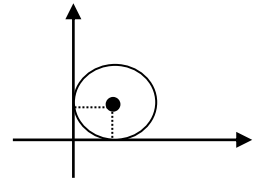
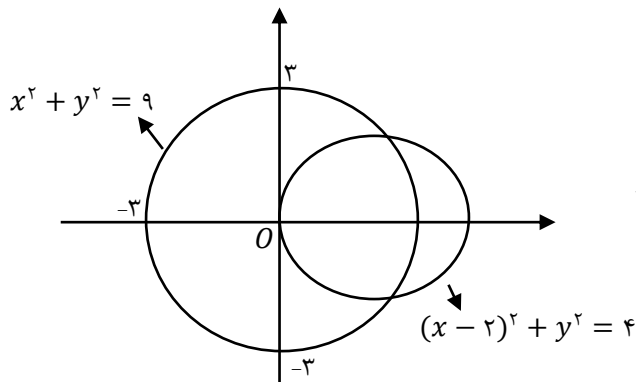
جمهوری اسلامی ایران
 اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران
 اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۱۲ تهران
 دبیرستان غیردولتی پسرانه سرای دانش (واحد حافظ)
 آزمون پایان ترم نوبت اول سال تحصیلی ۹۸-۱۳۹۷

نام درس: هندسه ۳
 نام دبیر: شهرزاد رحیمی
 تاریخ امتحان: ۱۰ / ۱۰ / ۱۳۹۷
 ساعت امتحان: ۰۸:۳۰ صبح / عصر
 مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

محل مهر و امضاء مدیر	نمره به عدد:	نمره به حروف:	نمره به عدد:	نمره به حروف:	
	نام دبیر:	تاریخ و امضاء:	نام دبیر:	تاریخ و امضاء:	
ردیف	سؤالات				نمره
۳	مطالب زیر را توضیح دهید: الف) شرط معکوس پذیری یک ماتریس چیست؟ ب) ماتریس معکوس چطور ماتریسی است؟ ج) ماتریس همانی چیست؟ د) دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ را بنویسید؟				۱
۱/۲۵	اگر داشته باشیم $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & -\sqrt{3} \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ، آنگاه مجموع درایه های ماتریس $A^{2n} - A^{2n+1}$ کدام است؟ $(n \in N)$				۲
۱/۲۵	اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه های A^5 کدام است؟ Type equation here.				۳
۱/۵	معادله $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x^2 & x \\ 1 & . & . \end{vmatrix} = 0$ چند ریشه دارد؟				۴
۱/۵	اگر a و b دو عدد حقیقی و i و j شماره سطر و ستون هر درایه باشند دترمینان ماتریس $A = [ai + bj]_{3 \times 3}$ کدام است؟				۵
۱	اگر نقطه (a, b) روی خط به معادله $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$ قرار داشته باشد ، حاصل $b - 2a$ کدام است؟				۶
۱/۵	اگر $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ، آنگاه مجموع درایه های ماتریس $(A^2 + A^2 - A + I)^{-1}$ کدام است؟				۷
۱/۵	مساحت دایره ای که از نقطه $A(1,2)$ میگذرد و مرکز آن نسبت به دایره های دیگر به مبدا مختصات نزدیک تر است و به محور های مختصات مماس میشوند کدام است؟				۸
۲	نقاط $(1,2), (4,-1), (2,3)$ روی دایره هستند . معادله دایره را بنویسید.				۹
۱	دو دایره $x^2 + y^2 = 9$ و $x^2 + y^2 - 4x = 0$ رسم کنید و طول یکی از مماس های مشترک خارجی آنها بدست آورید.				۱۰
۱/۵	مقطع مخروطی $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ را در نظر بگیرید، معادله خط مماس بر آن را در بیشترین مقدار x بدست آورید.				۱۱
۱/۵	معادله دایره ای را بنویسید که در ناحیه اول مختصات و شعاع آن برابر ۳ و بر دو خط $2x = y$ و $2y = x$ مماس باشد.				۱۲
۱/۵	در دستگاه $\begin{cases} ax - by = m \\ cx - dy = 1 - m \end{cases}$ معکوس ماتریس ضرایب بصورت $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ است. اگر جواب دستگاه ، نقطه $(4 - m, n - 1)$ باشد ، مقدار n کدام است؟				۱۳



ردیف	راهنمای تصحیح	محل مهر یا امضاء مدیر
۱	الف) ۱- ماتریس مربعی باشد. ۲- دترمینان ماتریس صفر نشود. ب) ماتریسی است که در ماتریس اولیه ضرب شود، برابر ماتریس همانی (I) شود. ج) ماتریس مربعی است که تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن برابر ۱ و بقیه درایه‌ها صفر باشد. د) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$	
۲	$A^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ $A^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} I = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ با توجه به نتایج بالا می‌فهمیم که در حالتی که توان زوج است، ماتریس $A^{2n} = I$ می‌شود و در حالی که توان فرد است، خودش می‌شود. $A^{2n+1} = A$	
۳	$A^T = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ $A^T = A \cdot A^T = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -9 & -9 \\ -9 & -9 & -9 \\ -9 & -9 & -9 \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = [3^{n-1}(-1)^n]_{3 \times 3}$ $\Rightarrow A^5 = [-81]_{3 \times 3}$ $\Rightarrow \text{مجموع درایه ها} = -9 \times 81 = -729$	
۴	$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x^2 & x \\ 1 & . & . \end{vmatrix} = 1(x^2 - x^4) = 0 \Rightarrow x^2(1 - x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$ ریشه ۳	
۵	$A = \begin{bmatrix} a+b & a+2b & a+3b \\ 2a+b & 2a+2b & 2a+3b \\ 3a+b & 3a+2b & 3a+3b \end{bmatrix} \Rightarrow \text{سطر اول را از سطر دوم و سوم کم می‌کنیم} \Rightarrow \begin{bmatrix} a+b & a+2b & a+3b \\ a & a & a \\ 2a & 2a & 2a \end{bmatrix}$ چون دو سطر ضربی از هم هستند؛ پس: $ A = 0$	
۶	$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 - 2y - 1 - 0 - 2x + 3y = 0 \Rightarrow y = 2x + 1$ $\Rightarrow b = 2a + 1 \Rightarrow b - 2a = 1$ نقطه را در خط می‌گذاریم	

$A^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} = I$ $A^T = A \Rightarrow (A^T + A^T - A + I)^{-1} = (A + I - A + I)^{-1} = (2I)^{-1} = \frac{1}{2}(I)^{-1} = \frac{1}{2}I$ <p>مجموع دایره ها $= \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} + 0 = 1$</p>	۷
<p>چون بر دو محور مماس است؛ پس با توجه به شکل نقطه‌ی مرکز روی نیمساز ربع اول است و فاصله آن و نقطه از هر محور برابر r می‌شود. یعنی: $\alpha + \beta = r$</p>  $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 = 0 \Rightarrow A(1, 2), \alpha = \beta = r \Rightarrow (1 - r)^2 + (2 - r)^2 - r^2 = 0$ $\Rightarrow 1 - 2r + r^2 + 4 - 4r - r^2 + r^2 = 0 \Rightarrow r^2 - 6r + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 5 \text{ غ ق} \\ r = 1 \Rightarrow S = \pi r^2 = \pi \end{cases}$	۸
<p>معادله دایره در حالت کلی: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$؛ که باید هر ۳ نقطه روی دایره صدق کنند.</p> $\begin{cases} (1, 2) \Rightarrow 1 + 4 + a + 2b + c = 0 & (1) \\ (4, -1) \Rightarrow 16 + 1 + 4a - b + c = 0 & (2) \\ (2, 3) \Rightarrow 4 + 9 + 2a + 3b + c = 0 & (3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2) - (1) = 12 + 3a - 2b = 0 \\ (3) - (1) = 8 + a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = -2 \\ c = 5 \end{cases}$	۹
 $\sqrt{0^2 + (R - R')^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ <p>طول مماس خارجی</p>	۱۰
$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$ <p>با توجه به معادله؛ بیشترین x برابر ۴ می‌باشد. در نتیجه با توجه به این که دایره در انتهای خود قرار دارد و خطی که از مرکز به بیشترین x دایره وصل می‌شود موازی محور x ها است؛ پس معادله مماس بر آن برابر $x = 4$ است.</p>	۱۱
<p>باید فاصله مرکز دایره تا دو خط برابر ۳ باشد. پس اگر $O(x_1, x_2)$ مرکز دایره باشد، داریم:</p> $\begin{cases} \frac{ 2y_1 - x_1 }{\sqrt{5}} = 3 \Rightarrow 2y_1 - x_1 = 3\sqrt{5} \\ \frac{ 2x_2 - y_2 }{\sqrt{5}} = 3 \Rightarrow -y_2 + 2x_2 = 3\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3\sqrt{5} \\ y_1 = 3\sqrt{5} \end{cases}$ $(x - 3\sqrt{5})^2 + (y - 3\sqrt{5})^2 = 9$	۱۲

$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ c & -d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-ad + bc} \begin{bmatrix} -d & b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -5 \\ d = -3 \end{cases}$ $(4 - m, n - 1) \Rightarrow \begin{cases} 2(4 - m) - (n - 1) = m \\ -5(4 - m) + 3(n + 1) = 1 - m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m + n = 9 \\ 6m + 3n = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 6 \\ m = 1 \end{cases}$	۱۳
امضاء:	جمع بارم : ۲۰ نمره