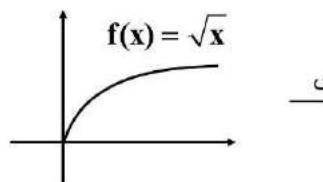




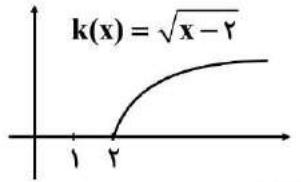
$f(x) = \sqrt{x}$ نمودار تابع $g(x) = f(x) + 3$ و $k(x) = f(x - 2)$ را به کمک انتقال رسم

کنید و دامنه و برد آنها را مشخص کنید.

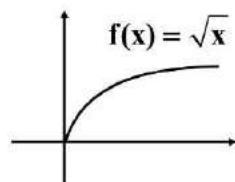
پاسخ:



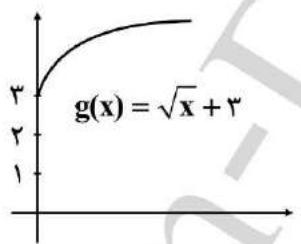
انتقال ۲ واحد به سمت راست



$$\Rightarrow \begin{cases} D_k = [2, +\infty) \\ R_k = [0, +\infty) \end{cases}$$



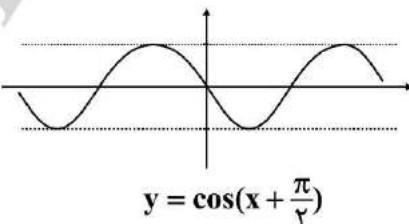
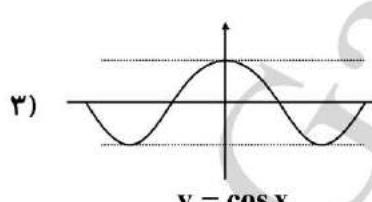
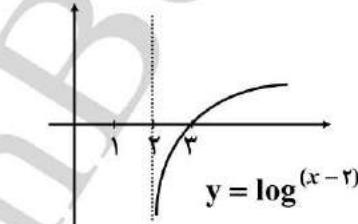
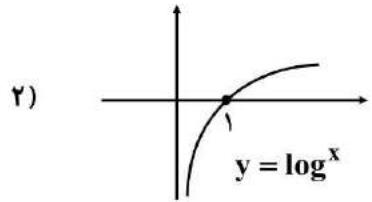
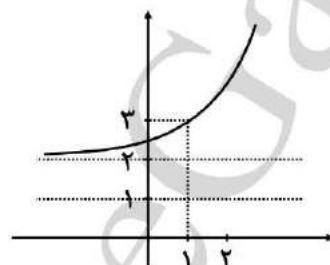
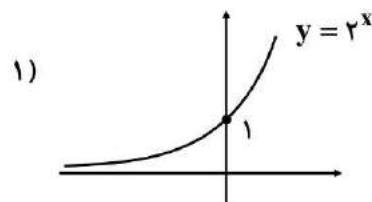
انتقال ۳ واحد به سمت بالا



$$\Rightarrow \begin{cases} D_g = [0, +\infty) \\ R_g = [3, +\infty) \end{cases}$$

-۲- به کمک نمودار توابع $y = 2^{x-1} + 2$ و $y = \cos x$ و $y = \log^x$ و $y = \log^{(x-1)}$ نمودار توابع $y = \cos x$ و $y = \log^x$ را رسم کنید.

$y = \cos(x + \frac{\pi}{2})$ را رسم کنید.

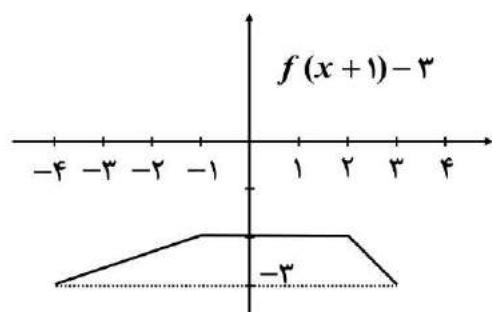
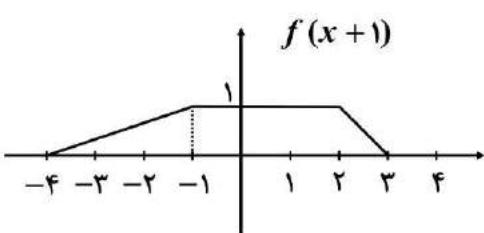
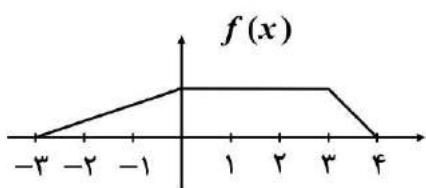




موضوع : فصل اول

نهیه و تنظیم، مهندس مجتبی لشینی

۳- $y = f(x+1) - 3$ به صورت روبرو داده شده است. با انتقال عمودی و افقی، نمودار تابع $y = f(x)$ را رسم کنید.



۴- اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ به ترتیب بازه‌های $[a,b]$ و $[c,d]$ باشند، دامنه و برد تابع $y = kf(x)$ را تعیین کنید.

پاسخ: هالت اول: $k > 0$ در کل $f(x)$ ضرب شده است، پس تاثیری در دامنه ندارد.

$$D_f = [a,b], R_f = [k_c, k_d]$$

هالت دو: $k < 0$ در کل $f(x)$ ضرب شده است، پس تاثیری در دامنه ندارد.

$$D_f = [a,b], R_f = [k_d, k_c]$$

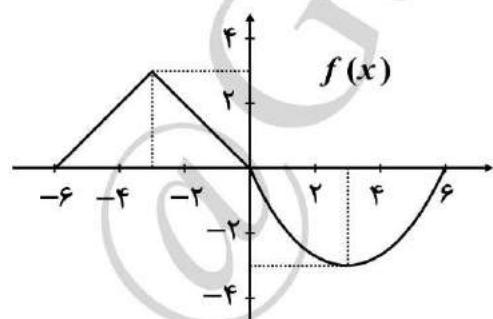
۵- اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ به ترتیب بازه‌های $[a,b]$ و $[c,d]$ باشند، دامنه و برد تابع $y = f(kx)$ را تعیین کنید.

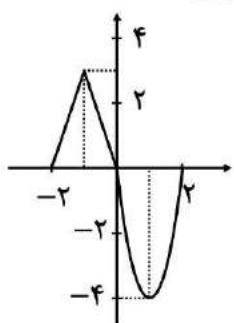
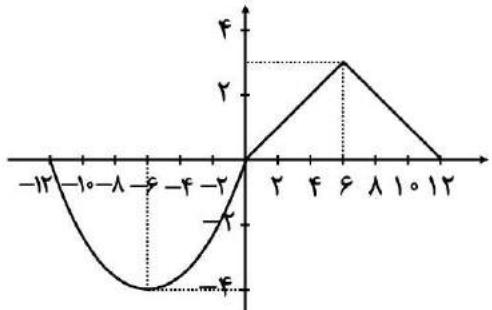
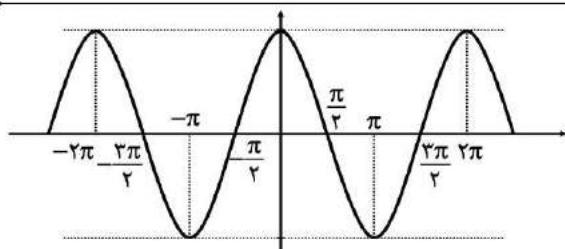
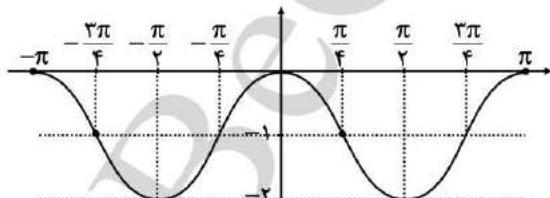
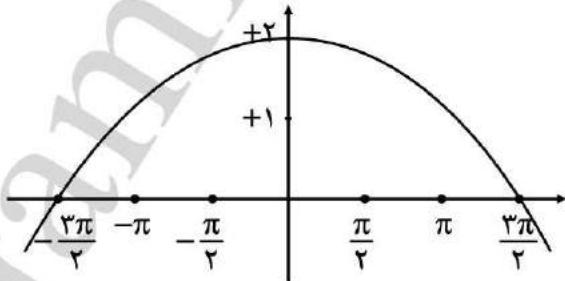
پاسخ: هون k فقط در x ضرب شده است پس تاثیری در برد ندارد.

$$I) k > 0 \Rightarrow D_f = \left[\frac{a}{k}, \frac{b}{k} \right], R_f = [c, d]$$

$$II) k < 0 \Rightarrow D_f = \left[\frac{b}{k}, \frac{a}{k} \right], R_f = [c, d]$$

۶- اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، نمودار تابع $y = f(\frac{-x}{3})$ و $y = f(3x)$ را رسم کنید.



 $y = f(3x)$  $y = f\left(\frac{-x}{3}\right)$ ۷- نمودار تابع زیر را به کمک نمودار تابع $y = \cos x$ رسم کنید:۱) $y = \cos 2x - 1$  $y = 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ 

موضوع : فصل اول

نهیه و تنظیم : مهندس مجتبی لشینی

-۸- هر یک از توابع زیر، تبدیل یافته تابع $y = \sqrt{x}$ هستند. هر یک از آنها را به نمودارش نظری کنید.

(الف) $y = \sqrt{2+x}$ a

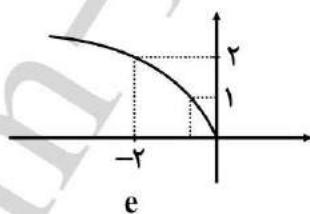
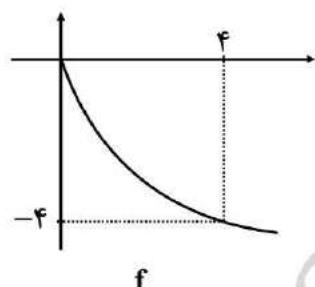
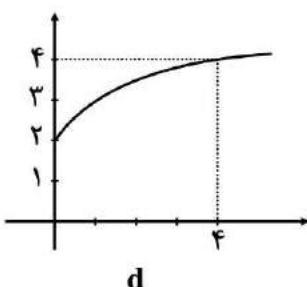
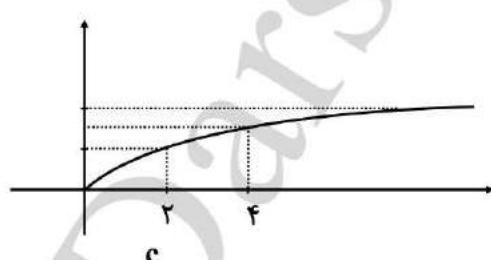
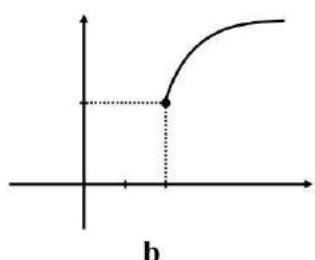
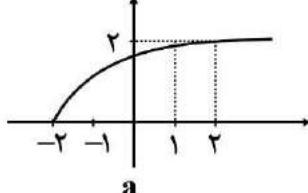
(ب) $y = 2 + \sqrt{x}$ d

(ب) $y = -2\sqrt{x}$ f

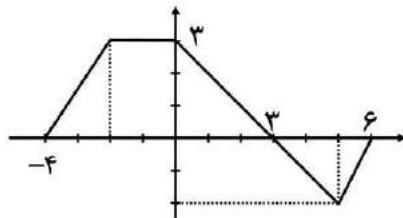
(ت) $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$ c

(ث) $y = 2 + \sqrt{x-2}$ b

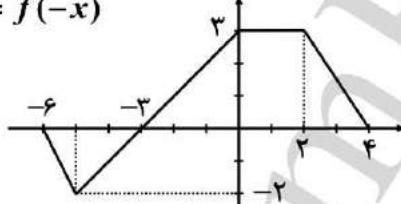
(ج) $y = \sqrt{-2x}$ e



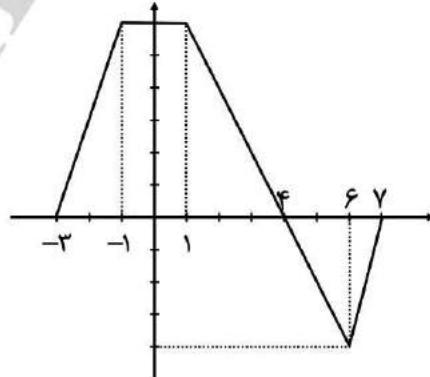
-۹- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.



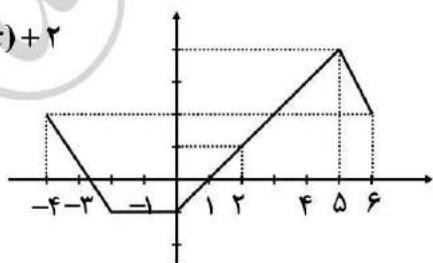
(الف) $y = f(-x)$



(ب) $y = 2f(x-1)$

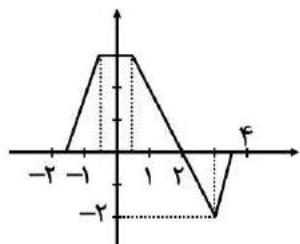


(ب) $y = -f(x)+2$

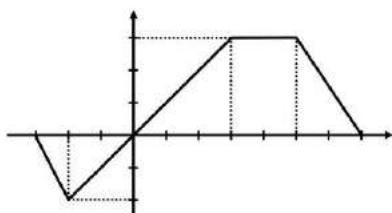




(ت) $y = f(2x - 1)$



(ث) $y = f(3 - x)$

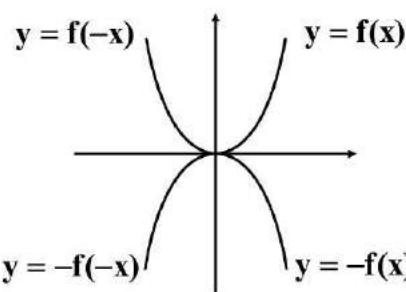


(الف) $y = f(-x)$

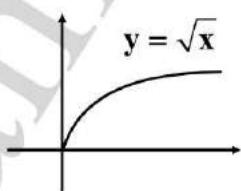
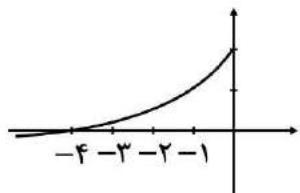
(ب) $y = -f(x)$

(پ) $y = -f(-x)$

۱۰- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار توابع زیر را به کمک آن رسم کنید.



۱۱- نمودار تابع مقابله قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ بدست آمده است. ضابطه این تابع را بنویسید.



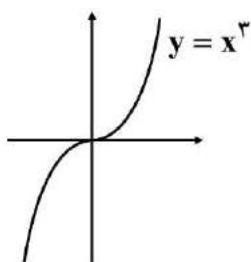
پاسخ: می‌دانیم نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ به صورت مقابله قرینه‌یابی است:

حال برای رسیدن به نمودار تابع داده شده باید نمودار تابع $g = \sqrt{x}$, را نسبت به محورهای x و y قرینه و سپس ۲ واحد به سمت بالا انتقال دهیم:

$$-f(-x) + 2 = -\sqrt{-x} + 2 \Rightarrow y = 2 - \sqrt{-x}$$



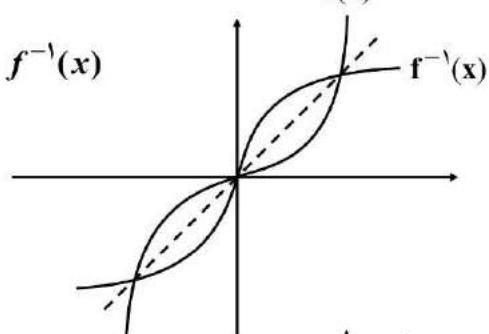
سوالات مربوط به تابع درجه سوم



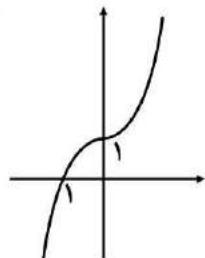
۱- به کمک نمودار تابع $f(x) = x^3$ ، نمودارهای زیر را رسم کنید:

پاسخ: برای رسم تابع وارون، کافی است نمودار را نسبت به خط $y = x$ قرینه کنیم.

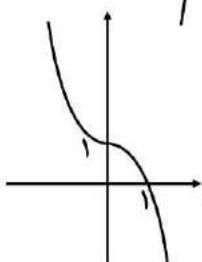
الف) $y = f^{-1}(x)$



ب) $y = (x+1)^3$



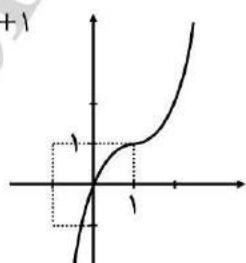
پ) $y = -x^3 + 1$



ت) $y = x^3 - 3x^2 + 3x$

پاسخ: برای رسم این تابع می‌توانیم ابتدا عدد ۱ را اضافه و کم کنیم تا بتوانیم اتحاد مکعب تشکیل دهیم.

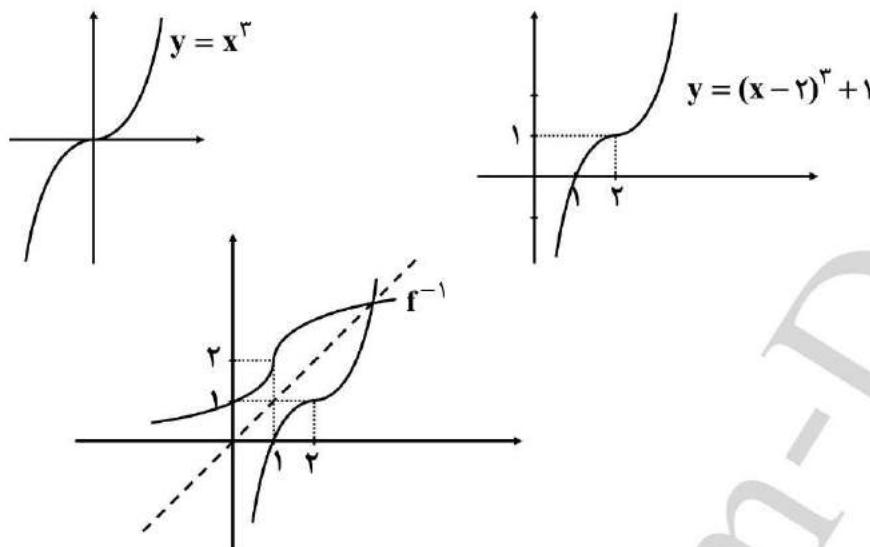
$$y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1 - 1 = (x-1)^3 + 1$$





۲- (الف) نمودار تابع $y = x^3 + 2$ را به کمک تابع $y = x^3$ رسم کنید.

(ب) نمودار تابع $f^{-1}(x)$ را رسم و سپس ضابطه آنرا بیابید.



$$\begin{aligned} y = (x - 2)^3 + 1 &\rightarrow x = (y - 2)^3 + 1 \rightarrow (y - 2)^3 = x - 1 \\ \Rightarrow y - 2 &= \sqrt[3]{x - 1} \rightarrow y = 2 + \sqrt[3]{x - 1} \Rightarrow f^{-1}(x) = 2 + \sqrt[3]{x - 1} \end{aligned}$$

سوالات مربوط به توابع صعودی و نزولی

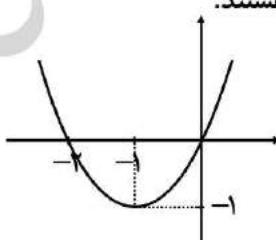
۱- نمودار توابع $y = x^3 + 2x$ و $y = 2^{-x}$ و $y = |x + 2|$ را رسم کنید و مشخص کنید این توابع در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی هستند.

الف) $y = x^3 + 2x$ عدد ۱ را اضافه و کم می‌کنیم

$$y = x^3 + 2x + 1 - 1 = (x + 1)^3 - 1$$

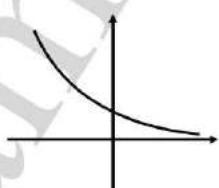
اکیدا نزولی $(-\infty, -1] \rightarrow$

اکیدا صعودی $[-1, +\infty) \rightarrow$



ب) $y = 2^{-x}$

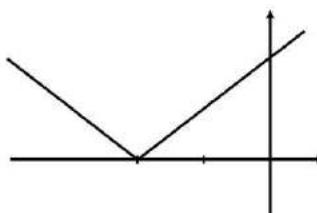
اکیدا نزولی $(-\infty, +\infty) \rightarrow$



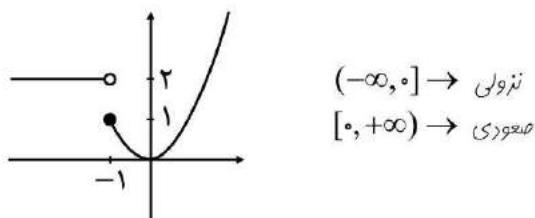
پ) $y = |x + 2|$

اکیدا نزولی $(-\infty, -2] \rightarrow$

اکیدا صعودی $[-2, +\infty) \rightarrow$



۲- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq -1 \\ 2 & x < -1 \end{cases}$ است؟



۳- فرض کنید تابع f در یک فاصله اکیداً صعودی باشد و a و b متعلق به این فاصله باشد. اگر $f(a) \leq f(b)$ نشان دهید که $a \leq b$.

پاسخ: از برهان فلاف استواره می‌کنیم. فرض کنیم $a > b$ باشد پس باید $f(a) > f(b)$ می‌باشد و از طرفی پون تابع اکیداً صعودی است پس این نتیجه فلاف فرض است.

۴- اگر $\log^{(x+1)} \leq \log^{(2x-3)}$, حدود x را بدست آورید.

پاسخ: پون مبنای لگاریتم بزرگتر از یک است داریم:

$$\log^{(x+1)} \leq \log^{(2x-3)} \Rightarrow x+1 \leq 2x-3 \Rightarrow x \geq 4$$

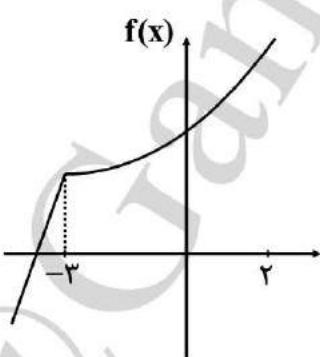
۵- فرض کنید تابع f در یک بازه اکیداً نزولی باشد و a و b متعلق به این بازه باشند. اگر $f(a) \leq f(b)$ ، نشان دهید که $a \geq b$.

پاسخ: از برهان فلاف استواره می‌کنیم. فرض کنیم $a > b$ باشد پس باید $f(a) > f(b)$ شود که این نتیجه فلاف فرض است.

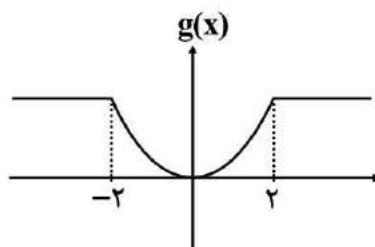
۶- اگر $\frac{1}{64} \leq \frac{1}{2^{3x-2}}$ ، حدود x را بدست آورید.

$$\frac{1}{2^{3x-2}} \leq \frac{1}{64} \Rightarrow 2^{3x-2} \geq 64 \Rightarrow 3x-2 \geq 6 \Rightarrow x \geq \frac{8}{3}$$

۷- نمودارهای توابع g و f در زیر رسم شده‌اند مشخص کنید تابع f در چه فاصله‌هایی اکیداً صعودی و در چه فاصله‌هایی نزولی و تابع g در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟



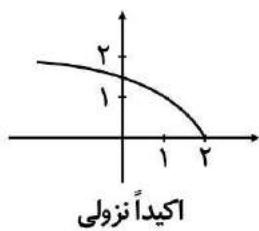
اکیداً صعودی $\rightarrow (-\infty, -3] \cup [0, +\infty)$
صعودی $\rightarrow (-\infty, +\infty)$



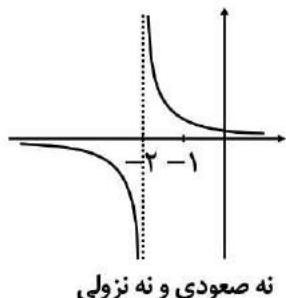
نزولی $\rightarrow [-2, 0] \cup [2, +\infty)$
اکیداً نزولی $\rightarrow (-\infty, 0]$

۸- نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. کدام یک از آنها در دامنه خود، اکیداً یکنوا هستند؟

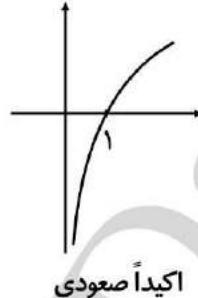
$$f(x) = \sqrt{2-x}$$



$$g(x) = \frac{1}{x+2}$$



$$h(x) = \log_2^x$$



سوالات مربوط به بخش پذیری

۱- باقیمانده تقسیم چند جمله‌ای $1 - x^3 + x^2 + x + 1$ بر $2x + 1$ را بدست آورید:

پاسخ: برای بدست آوردن باقیمانده کافی است ریشه مقسوم علیه را در مقسوم قرار دهیم:

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow R(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = \frac{-13}{8}$$

۲- اگر چند جمله‌ای $2 - x^3 + ax^2 - x - a$ بر $x - a$ بخش‌پذیر باشد، مقدار a را تعیین کنید.

پاسخ: چون مقسوم بر مقسوم علیه بخش‌پذیر است، پس باقیمانده برابر صفر می‌باشد.

$$x - a = 0 \Rightarrow x = a$$

$$R(x) = a^3 + a(a) - 2 = 0 \Rightarrow 2a^3 = 2 \rightarrow a^3 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

۳- اگر باقیمانده تقسیم چند جمله‌ای $x^3 + kx^2 + 2$ بر $x - 2$ برابر ۶ باشد، k را تعیین کنید.

پاسخ: اگر مقسوم را برابر $f(x)$ در نظر بگیریم آنگاه داریم:

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$f(2) = 6 \Rightarrow (2)^3 + k(2)^2 + 2 = 6 \Rightarrow 4k = -4 \rightarrow k = -1$$

۴- مقدار a و b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای $x^3 + ax^2 + bx + 1$ بر $x - 2$ و $x + 1$ بخش‌پذیر باشد.

پاسخ: چون مقسوم بر $x - 2$ و $x + 1$ بخش‌پذیر است، پس:

$$f(2) = 0$$

$$f(-1) = (-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) + 1 = 0 \rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b$$

$$4a + 2b = -9 \xrightarrow{a=b} 4b + 2b = -9 \rightarrow 6b = -9 \rightarrow b = -\frac{3}{2} \rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

۵- چند جمله‌ای‌های $1 - x^5$ و $x^6 - 64$ را به کمک اتحادها باز کنید.

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

$$x^6 - 64 = (x - 2)(x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 32)$$

۶- عبارت $x^5 + 1$ را بر حسب $(x+1)$ تجزیه کنید:

$$x^5 + 1 = (x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$$

۷- هر یک از چندجمله‌های زیر را بر حسب عبارت خواسته شده تجزیه کنید:

(الف) $x^6 - 1$ بر حسب $x-1$

$$(x^6 - 1) = (x-1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

(ب) $x^6 - 1$ بر حسب $1+x$

$$(x^6 - 1) = (x+1)(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1)$$

(پ) $x^5 + 32$ بر حسب $x+2$

$$x^5 + 32 = (x+2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$$