

۱- توابع  $f$  و  $g$  در  $\mathbb{R}$  با ضابطه‌ی  $f(x) = x + 2$  و  $g(x) = x - 1$  مفروض اند ضابطه‌ی  $(f \circ g)^{-1}(x)$  برابر با کدام عبارت است؟

- ۱  $x - 2$      
  ۲  $x + 2$      
  ۳  $x - 1$      
  ۴  $x + 1$

۲- اگر  $(f \circ g)(x) = -f(x)$  و  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$  باشد آن گاه  $g(x)$  کدام است؟  
( $x \neq 0, 1$ )

- ۱  $\frac{1}{x}$      
  ۲  $\frac{2}{x}$      
  ۳  $x$      
  ۴  $2x$

۳- اگر رابطه‌ی  $f = \{(3, 2), (a, 5), (3, a^2 - a), (b, 2), (-1, 4)\}$  تابع یک به یک باشد، دوتایی  $(a, b)$  کدام است؟

- ۱  $(-1, 1)$      
  ۲  $(-1, 3)$      
  ۳  $(2, 1)$      
  ۴  $(2, 3)$

۴- اگر داشته باشیم  $f^{-1}(x) = 8x^3 + 4x$ ،  $f^{-1}(x) = 2f\left(\frac{x}{3}\right)$ ،  $g(x) = 2f\left(\frac{x}{3}\right)$ ،  $g^{-1}(x) = ax^3 + bx$ ، آنگاه  $a + b$  کدام است؟

- ۱ ۱     
  ۲ ۶     
  ۳ ۹     
  ۴ ۱۸

۵- اگر  $f(x) = 4 - 3^{2x}$  باشد، دامنه‌ی تابع  $g(x) = \sqrt{xf^{-1}(x)}$ ، کدام است؟ (با تغییر)

- ۱  $[2, 3]$      
  ۲  $[3, 4]$      
  ۳  $[0, 3]$      
  ۴  $[0, 4]$

۶- دامنه‌ی تابع  $f(x) = \sqrt{-x^2(x^2 - 9)^4}$  چند عضو دارد؟

- ۱ صفر     
  ۲ ۱     
  ۳ ۳     
  ۴ ۴

۷- دامنه‌ی تابع  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4} - 2$  شامل چند عدد گویا نمی‌باشد؟

- ۱ صفر     
  ۲ ۴     
  ۳ ۶     
  ۴ ۲

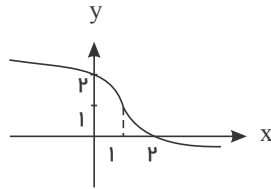
۸- رابطه‌ی  $f = \{(9, 3m + 4), (3, -14m), (3, 8), (10, -2), (9, 7m^2)\}$  به ازای کدام مقدار  $m$  یک تابع است؟

- ۱ ۱     
  ۲  $-2$      
  ۳  $-\frac{4}{7}$      
  ۴ هیچ مقدار  $m$

۹- تابع  $f(x) = \frac{1}{x-5}$  و  $g(x) = \frac{x}{x+1}$  مفروض هستند،  $D_{f \circ g}$  کدام است؟

- ①  $\mathbb{R} - \{-1, 5\}$       ②  $\mathbb{R} - \{-5\}$       ③  $\mathbb{R} - \{-\frac{5}{4}\}$       ④  $\mathbb{R} - \{-1, -\frac{5}{4}\}$

۱۰- نمودار تابع  $f(x)$  به صورت روبه‌رو می‌باشد. تعداد جواب‌های معادله  $f(x) = f^{-1}(x)$  کدام است؟



- ① ۱      ② ۲  
③ ۳      ④ صفر

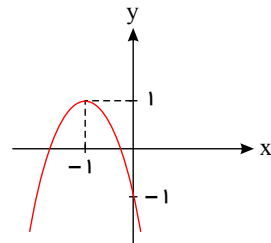
۱۱- اگر بدانیم که  $f(x) = 2^{-x}$  و  $g = \{(5, 6), (4, 5), (2, 1), (3, a)\}$  حداکثر  $a$  برای این که تابع  $f \circ g$  نزولی باشد، کدام است؟

- ① ۵      ② ۴      ③ ۲      ④ ۱

۱۲- نمودارهای دو تابع  $f(x) = \frac{4\sqrt{2}}{2^x}$  و  $g(x) = (\sqrt{2})^{ax+1}$  در نقطه‌ای به طول ۱ متقاطع هستند، حاصل  $f^{-1}(a)$  کدام است؟

- ①  $\frac{3}{2}$       ②  $-\frac{1}{2}$       ③  $\frac{1}{4}$       ④  $-\frac{3}{4}$

۱۳- نمودار تابع  $f(x) = \frac{a}{2}(x+b)^2 + \frac{c}{3}$  در زیر رسم شده است. حاصل  $a+bc$  کدام است؟

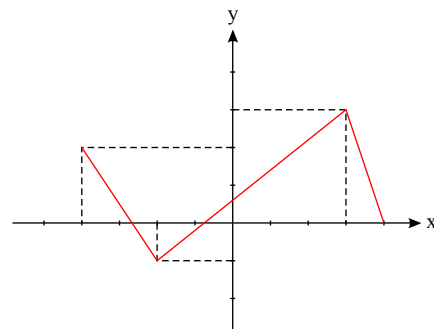


- ① +۱      ② -۳  
③ -۱      ④ +۳

۱۴- کدام یک از توابع زیر معکوس پذیر هستند؟

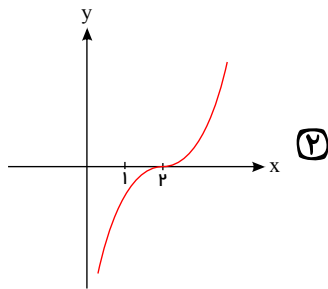
- ①  $f(x) = |x-1| + 2$       ②  $f(x) = x^3 + 4x^2 + 3x$   
③  $f(x) = 2 \log(x+1)$       ④  $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

۱۵- اگر  $f(x)$  به صورت زیر باشد، تفاضل ماکزیمم دامنه  $f(x-1)$  از مینیمم برد  $f(x+1)$  کدام است؟

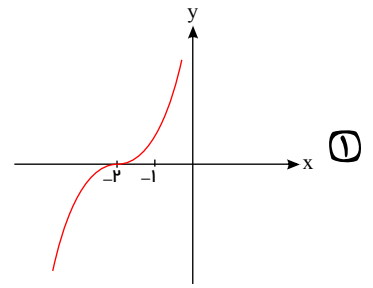


- ① ۶  
② ۷  
③ ۴  
④ ۵

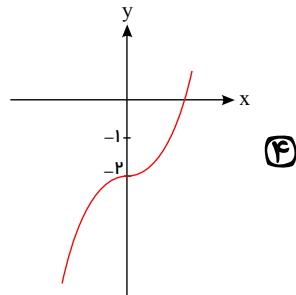
۱۶- نمودار تابع  $y = (x - 2)^3$  کدام است؟



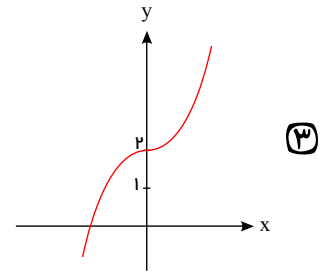
۲



۱



۴



۳

۱۷- اگر ضابطه تابع معکوس تابع  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  بصورت

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1} + 3$$

حاصل  $a + b - c$  کدام است؟

۴۷ ۴

۴۴ ۳

۴۵ ۲

۴۶ ۱

۱۸- اگر عبارت  $x^{2n+1} + 2x^{2n} + x^5 - 5x^3 + m$  به ازای هر عدد طبیعی  $n$  بر عبارت

$$x + 2$$

بخش پذیر باشد، آنگاه باقی مانده تقسیم آن بر  $x^2 - 1$  کدام است؟

$2x + 4$  ۴

$3x - 4$  ۳

$-2x + 1$  ۲

$-3x - 6$  ۱

۱۹- اگر باقی مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $x^2 - 1$  و  $x^2 - 9$  به ترتیب  $x + 6$  و  $x - 4$  باشد،

$$f(x)$$

باقی مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $x^2 - 2x - 3$  کدام است؟

$\frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$  ۴

$4x - 27$  ۳

$-\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$  ۲

$x^2 + 2x - 24$  ۱

۲۰- تابع  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$  مفروض است. تابع  $g(x) = \sqrt[3]{x}$  با کدام یک

از انتقال های زیر بر تابع  $f^{-1}$  منطبق می شود؟

۲ یک واحد به سمت چپ و ۲ واحد به سمت پایین

۱ یک واحد به سمت چپ و ۲ واحد به سمت بالا

۴ یک واحد به سمت راست و ۲ واحد به سمت پایین

۳ یک واحد به سمت راست و ۲ واحد به سمت بالا

## پاسخنامه تشریحی

۱- گزینه ۳

$$(f \circ g)(x) = (x - 1) + 2 = x + 1$$

$$x + 1 = y \Rightarrow y - 1 = x \Rightarrow y^{-1} = x - 1 = (f \circ g)^{-1}(x)$$

۲- گزینه ۱

به کمک تابع  $f(x)$  تابع  $f(g(x))$  را می‌سازیم و مساوی تابع  $y = f \circ g(x)$  که صورت سؤال داده قرار می‌دهیم تا  $g(x)$  محاسبه شود.

$$f(g(x)) = \frac{g(x) + 1}{g(x) - 1} = \frac{-x - 1}{x - 1} \Rightarrow xg(x) - g(x) + x - 1 = -xg(x) - g(x) + x + 1$$

$$\Rightarrow 2xg(x) = 2 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{x}$$

۳- گزینه ۴ (الف) شرط تابع بودن: هیچ دو زوج مرتب متمایز، مولفه‌ی اول برابر نداشته باشند.

$$(3, 2) = (3, a^2 - a) \Rightarrow a^2 - a = 2 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (a - 2)(a + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -1 \end{cases}$$

(ب) شرط یک به یک بودن: هیچ دو زوج مرتب متمایز، مولفه‌ی دوم برابر نداشته باشند.

$$(3, 2) = (b, 2) \Rightarrow b = 3$$

اما از میان دو مقدار به دست آمده برای  $a$ ، باید یکی را به گونه‌ای انتخاب کنیم که شرایط (الف) و (ب) کماکان برقرار بماند. در نتیجه فقط  $a = 2$  قابل قبول می‌باشد زیرا اگر  $a = -1$  باشد، دو زوج مرتب  $(-1, 4)$  و  $(-1, 5)$  در مجموعه دیده می‌شوند که در آن صورت مجموعه‌ی حاصل تابع نخواهد بود. در نتیجه  $(a, b) = (2, 3)$  می‌باشد.

۴- گزینه ۳

$$y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$g(x) = 2f\left(\frac{x}{3}\right) = y \Rightarrow \begin{cases} x = g^{-1}(y) \\ f\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{y}{2} \Rightarrow \frac{x}{3} = f^{-1}\left(\frac{y}{2}\right) \Rightarrow x = 3f^{-1}\left(\frac{y}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow g^{-1}(y) = 3f^{-1}\left(\frac{y}{2}\right) \Rightarrow g^{-1}(x) = 3f^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) = 3\left(8\left(\frac{x}{2}\right)^3 + 4\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 3x^3 + 6x$$

$$a = 3, b = 6 \Rightarrow a + b = 9$$

۵- گزینه ۳

می دانیم:  $\log_a^a e = 1$  ,  $\log a^b = b \cdot \log a$

ابتدا  $f^{-1}(x)$  را می یابیم:

$$(x) = 4 - 3^{2x} \rightarrow y = 4 - 3^{2x} \rightarrow 3^{2x} = 4 - y \xrightarrow[\text{پایه سه می گیریم}]{\text{از طرفین لگاریتم در}} 2x = \log_3(4 - y) \rightarrow x = \frac{1}{2} \log_3(4 - y)$$

$$\rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \log_3(4 - x) \quad 4 - x > 0 \rightarrow x < 4 \rightarrow D_{f^{-1}} = (-\infty, 4)$$

$$g(x) = \sqrt{x f^{-1}(x)} \Rightarrow g(x) = \sqrt{\frac{1}{2} x \cdot \log_3(4 - x)} \Rightarrow \log_3(4 - x) = 0 \Rightarrow 4 - x = 1 \Rightarrow x = 3$$

برای یافتن دامنه  $g(x)$  باید ریشه های عبارت زیر رادیکالی را بیابیم و سپس تعیین علامت کنیم.

$x$	$-\infty$	$0$	$3$	$4$
$\frac{1}{2} x \log(4 - x)$		-	+	-

جواب:  $D_f = [0, 3]$

۶- گزینه ۳

$$-x^2(x^2 - 9)^4 \geq 0 \Rightarrow \underbrace{x^2(x^2 - 9)^4}_{\text{نامنفی}} \leq 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 9)^4 = 0$$

$$x^2 = 0 \rightarrow \boxed{x = 0} , x^2 - 9 = 0 \rightarrow \boxed{x = \pm 3} \rightarrow D_f = \{0, 3, -3\}$$

۷- گزینه ۲ باید ریشه های تمام مخرج ها را حذف کنیم

$$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

$$\frac{1}{x^2 - 1} - 2 = 0 \rightarrow \frac{1}{x^2 - 1} = 2 \rightarrow x^2 - 1 = \frac{1}{2} \rightarrow x^2 = \frac{3}{2} \quad x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ \pm 2, \pm 1, \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \right\} \text{ تا } \pm 2, \pm 1 \rightarrow \text{اعداد گویایی که در دامنه نیستند}$$

۸- گزینه ۳

$$(3, -14m), (3, 8) \Rightarrow -14m = 8 \rightarrow m = -\frac{8}{14} \rightarrow m = -\frac{4}{7} \quad (1)$$

$$3m + 4, 9 = -2 \text{ د}$$

$$\frac{4}{7}$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow m = -\frac{4}{7}$$

$$(9, \sqrt{m^2}) \Rightarrow \sqrt{m^2} = 3m + 4 \rightarrow \sqrt{m^2} - 3m - 4 = 0 \rightarrow m = 1, m$$

۹- گزینه ۴

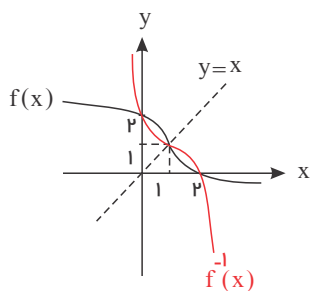
$$D_f : x \neq 5, \quad D_g : x \neq -1$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \neq -1 \mid g(x) \neq 5\} \quad (1)$$

$$g(x) \neq 5 \rightarrow \frac{x}{x+1} \neq 5 \Rightarrow 5x + 5 \neq x \Rightarrow x \neq -\frac{5}{4}$$

$$(1) \rightarrow D_{f \circ g} = \left\{ x \neq -1 \mid x \neq -\frac{5}{4} \right\} = \mathbb{R} - \left\{ -1, -\frac{5}{4} \right\}$$

۱۰- گزینه ۳



جواب‌های معادله  $f(x) = g(x)$ ، طول نقاط برخورد نمودارهای دو تابع  $f(x)$  و  $g(x)$  است.

اگر  $f(x)$  تابعی یک‌به‌یک باشد، برای به‌دست آوردن نمودار تابع  $f^{-1}(x)$ ، کافی است قرینه  $f(x)$  را نسبت به خط  $y = x$  (نیمساز ربع اول و سوم) به‌دست بیاوریم. نمودار  $f^{-1}(x)$  را رسم می‌کنیم:

با توجه به شکل، واضح است که توابع  $f(x)$  و  $f^{-1}(x)$  هر دو از سه نقطه  $(0, 2)$ ،  $(1, 1)$  و  $(2, 0)$  می‌گذرند.

بنابراین معادله  $f(x) = f^{-1}(x)$  دارای سه جواب است.

۱۱- گزینه ۱ بنا به تعریف دامنه تابع  $f \circ g(x)$  داریم:

$$D_{f \circ g(x)} = \{x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

$$D_g = \{5, 4, 2, 3\}, \quad (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$\Rightarrow f \circ g = \left\{ (5, 2^{-6}), (4, 2^{-5}), (2, 2^{-1}), (3, 2^{-a}) \right\}$$

$$= \left\{ (5, \frac{1}{64}), (4, \frac{1}{32}), (3, \frac{1}{2^a}), (2, \frac{1}{2}) \right\}$$

برای اینکه  $f \circ g$  نزولی باشد لازم است با افزایش ورودی تابع، خروجی آن کاهش یابد یا ثابت بماند. بنابراین لازم است:

$$(f \circ g)(4) \leq (f \circ g)(3) \leq (f \circ g)(2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{32} \leq \frac{1}{2^a} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 32 \geq 2^a \geq 2 \Rightarrow 5 \geq a \geq 1 \Rightarrow a_{\max} = 5$$

۱۲- گزینه ۱ بنا به فرض، تابع  $f(x) = \frac{4\sqrt{2}}{2^x}$  و  $g(x) = (\sqrt{2})^{ax+1}$  در نقطه  $x = 1$  متقاطع هستند، پس داریم:

$$f(1) = g(1) \Rightarrow \frac{4\sqrt{2}}{2} = (\sqrt{2})^{a+1} \Rightarrow 2\sqrt{2} = (\sqrt{2})^{a+1}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{2})^3 = (\sqrt{2})^{a+1} \Rightarrow a+1 = 3 \Rightarrow a = 2$$

$$f^{-1}(a) = f^{-1}(2) = \alpha \Rightarrow f(\alpha) = 2 \Rightarrow \frac{4\sqrt{2}}{2^\alpha} = 2$$

$$\Rightarrow 2^\alpha = 2\sqrt{2} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}$$

۱۳- گزینه ۳ با توجه به رأس سهمی خواهیم داشت:  
(-1, 1)

$$b = 1, \frac{c}{3} = 1 \Rightarrow c = 3$$

$$\text{بنابراین: } f(x) = \frac{a}{2}(x+1)^2 + 1$$

با توجه به اینکه  $f(x)$  از نقطه  $(0, -1)$  عبور می کند خواهیم داشت:

$$-1 = \frac{a}{2}(0+1)^2 + 1 \Rightarrow \frac{a}{2} = -2 \Rightarrow a = -4$$

$$\Rightarrow a + bc = -4 + 1 \times 3 = -4 + 3 = -1$$

۱۴- گزینه ۳ برای آنکه یک تابع معکوس پذیر باشد باید یک به یک باشد؛ بنابراین خواهیم داشت:

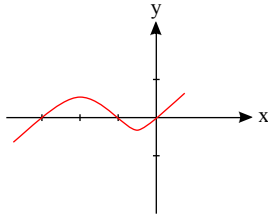
گزینه ۱: به ازای  $x = 2$  و  $x = 0$  می توان فهمید که یک به یک نیست.

گزینه ۲:

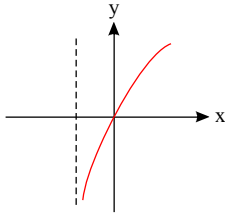
$$x = 0$$

$$x^3 + 4x^2 + 3x = x(x^2 + 4x + 3) = x(x+1)(x+3) = 0 \rightarrow x = -1$$

$$x = -3$$



با توجه به شکل  $f(x)$  می توان فهمید که یک به یک نیست.



گزینه ۴: چون تابع متناوب است بنابراین یک به یک نیست.

گزینه ۳: با توجه به شکل می توان گفت یک به یک است.

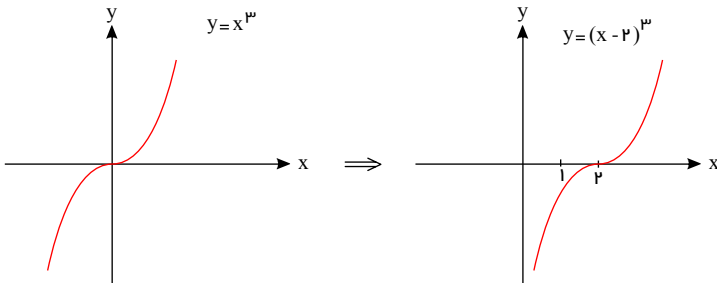
۱۵- گزینه ۱

$$D_{f(x)} = [-4, 4] \Rightarrow D_{f(x-1)} = [-3, 5] \Rightarrow \text{Max}(D_{f(x-1)}) = 5$$

$$R_{f(x)} = [-1, 3] \Rightarrow R_{f(x+1)} = [-1, 3] \Rightarrow \text{Min}(R_{f(x+1)}) = -1$$

$$\text{تفاضل} = 5 - (-1) = 6$$

۱۶- گزینه ۲ برای رسم  $y = (x-2)^3$  باید نمودار  $y = x^3$  را ۲ واحد به راست انتقال دهیم.



۱۷- گزینه ۳ تابع معکوس تابع  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1} + 3$  همان تابع  $f(x)$  است، پس داریم:

$$y = \sqrt[3]{x-1} + 3 \Rightarrow \sqrt[3]{x-1} = y-3 \Rightarrow x-1 = (y-3)^3 \Rightarrow x = 1 + (y-3)^3$$

$$\Rightarrow y = f(x) = 1 + (x-3)^3 = 1 + x^3 - 9x^2 + 27x - 27$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 26 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$\Rightarrow a = -9, b = 27, c = -26 \Rightarrow a + b - c = -9 + 27 + 26 = 44$$



۱۸- گزینه ۱ برای یافتن باقی‌مانده تقسیم بر عبارت  $x + 2 = 0$  باید ریشه مقسوم‌علیه یعنی  $x + 2 = 0$  را در عبارت مقسوم قرار دهیم.

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow \text{باقی‌مانده} = (-2)^{2n+1} + 2(-2)^{2n} + (-2)^5 - 5(-2)^3 + m = 0$$

به‌ازای عدد طبیعی  $n$ ، عبارت  $2n + 1$  فرد و عبارت  $2n$  زوج است، پس داریم:

$$-2^{2n+1} + 2 \times 2^{2n} - 32 - 5(-8) + m = 0 \Rightarrow -2^{2n+1} + 2^{2n+1} - 32 + 40 + m = 0$$

$$\Rightarrow m = -8 \Rightarrow f(x) = x^{2n+1} + 2x^{2n} + x^5 - 5x^3 - 8$$

با جای‌گذاری  $x^2 = 1$  در مقسوم، باقی‌مانده به دست می‌آید.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$$

$$(x^2)^n \times x + 2(x^2)^n + (x^2)^2 x - 5x^2 \cdot x - 8 = (1)^n x + 2(1)^n + (1)^2 x - 5 \times 1 \times x - 8$$

$$= x + 2 + x - 5x - 8 = -3x - 6$$

۱۹- گزینه ۲ چون باقی‌مانده  $f(x)$  بر  $x^2 - 1$  برابر  $x + 6$  است داریم:

$$f(x) = (x^2 - 1)q(x) + x + 6 \Rightarrow f(-1) = 0 - 1 + 6 = 5$$

همچنین چون باقی‌مانده  $f(x)$  بر  $x^2 - 9$  برابر  $x - 4$  است داریم:

$$f(x) = (x^2 - 9)q'(x) + x - 4 \Rightarrow f(3) = 0 + 3 - 4 = -1$$

اگر باقی‌مانده  $f(x)$  بر  $x^2 - 2x - 3$  عبارت‌ی درجه اول بصورت  $ax + b$  باشد، داریم:

$$f(x) = (x^2 - 2x - 3)q''(x) + ax + b = (x - 3)(x + 1)q''(x) + ax + b \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 3 \xrightarrow{(1)} f(3) = 0 + 3a + b \rightarrow 3a + b = -1 \\ x = -1 \xrightarrow{(1)} f(-1) = 0 - a + b \rightarrow -a + b = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = -1 \\ a - b = -5 \\ \hline 4a = -6 \Rightarrow a = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$a - b = -5 \Rightarrow b = a + 5 = -\frac{3}{2} + 5 = \frac{7}{2} \Rightarrow \text{باقی‌مانده} = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$$

۲۰- گزینه ۳

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + 1 = (x - 2)^3 + 1$$

برای یافتن  $f^{-1}$  باید  $x$  را برحسب  $y$  حل کنیم.

$$(x - 2)^3 + 1 = y \Rightarrow (x - 2)^3 = y - 1 \Rightarrow x - 2 = \sqrt[3]{y - 1} \Rightarrow x = 2 + \sqrt[3]{y - 1}$$

$$y = f^{-1}(x) = 2 + \sqrt[3]{x - 1}$$

$$g(x) = \sqrt[3]{x} \xrightarrow{x \rightarrow x-1} y = \sqrt[3]{x-1} \rightarrow f^{-1}(x) = 2 + \sqrt[3]{x-1}$$

برای رسم  $f^{-1}$  باید نمودار  $g(x) = \sqrt[3]{x}$  را یک واحد به راست و دو واحد به بالا منتقل کنیم.