







۷- حدهای زیر را بدست آورید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x}{x^2 - 4} = \frac{4}{0^-} = -\infty$

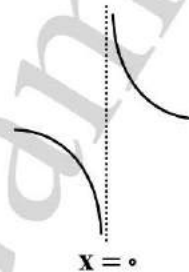
ب)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + x - 12} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + 2x - 1}{\underbrace{(x-3)(x+4)}_{0^-}} = \frac{14}{0^-} = -\infty$

پ)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{9-x^2} = \frac{3+1}{9-(9^+)} = \frac{4}{0^-} = -\infty$

## سوالات مربوط به مجانبات قائم

۱- نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x}$  در نزدیکی مجانبات قائم آن به چه صورتی است؟  
برای یافتن مجانبات قائم می‌توانیم ریشه‌های مخرج را بدست آوریم.

$$f(x) = \frac{x+1}{x(x^2+1)} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \end{cases}$$



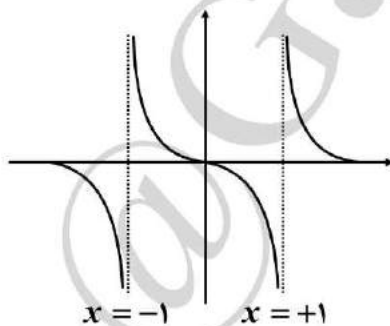
۲- مجانبات‌های قائم تابع  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 6}$  را در صورت وجود بدست آورید.  
ابتدا ریشه‌های مخرج را بدست می‌آوریم.

$$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 6} = \frac{9 - 9 + 2}{9 - 3 - 6} = \frac{2}{0} = \infty \Rightarrow x = 3 \text{ مجانبات قائم است.}$$

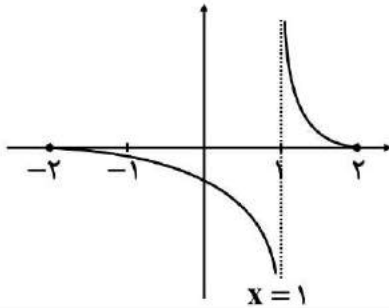
$$\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 6} = \frac{4 + 6 + 2}{4 + 2 - 6} = \frac{12}{0} = \infty \Rightarrow x = -2 \text{ مجانبات قائم است.}$$

۳- نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن  $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$  بوده و دارای دو مجانبات قائم باشد.





۴- نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه  $\{-1, 2\}$ ،  $[-2, 2]$  بوده و دارای مجانب قائم باشد.



۵- مجانب‌های قائم توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

$$\text{الف) } f(x) = \frac{2x-1}{3-x} \Rightarrow 3-x=0 \rightarrow x=3 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-1}{3-x} = \frac{5}{0} = \infty$$

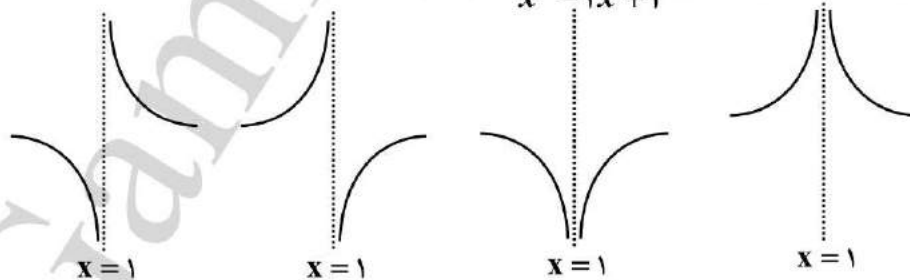
$$\text{ب) } f(x) = \frac{x^2+x}{x^2-x} \Rightarrow x^2-x=0 \rightarrow x(x-1)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+x}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x'(x+1)}{x'(x-1)} = -1 \Rightarrow x=0 \text{ مجانب قائم نیست.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x}{x^2-x} = \frac{2}{0} = \infty \Rightarrow x=1 \text{ مجانب قائم است.}$$

۶- نمودار تابع  $f(x) = \frac{1}{x-|x|}$  در مجاورت مجانب قائم خود چگونه است؟

۷- کدام شکل زیر وضعیت نمودار تابع  $f(x) = \frac{x}{x^2-2x+1}$  را در همسایگی  $x=1$  نمایش می‌دهد؟

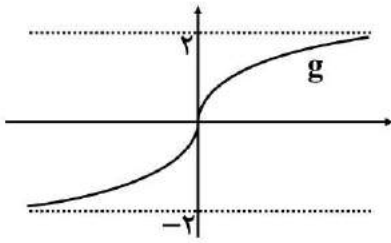


$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x^2-2x+1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x^2-2x+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

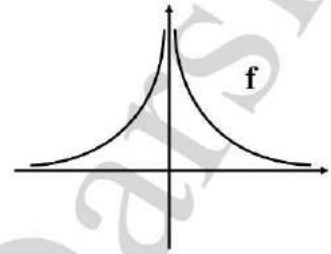


## سوالات مربوط به حد در بی نهایت

۱- با استفاده از نمودارهای  $f$  و  $g$  حدهای زیر را بدست آورید.

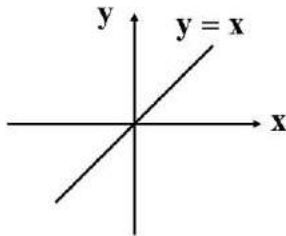
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -2$$

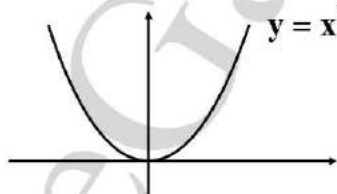


$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

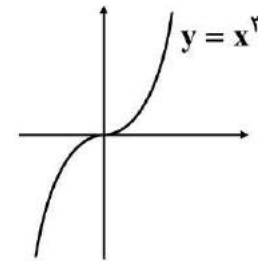
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

۲- مفاهیم  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  را بیان کنید.یعنی با کاهش مقدار  $x$  از هر عدد دلخواهی، مقادیر  $f(x)$  از هر عدد دلخواه مثبتی بزرگتر می شود.یعنی با کاهش مقادیر  $x$ ، مقادیر  $f(x)$  از هر عدد دلخواه منفی، کوچکتر می شود.۳- با توجه به نمودار توابع  $y = x$ ،  $y = x^2$  و  $y = x^3$  حدود زیر را مشخص کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

۴- با استفاده از قضیه ۷ حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 3 + \frac{5}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{5}{x^3} \right) = 3 + 0 = 3$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{3}{x^2}}{\frac{5}{x} + 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} (2) + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3}{x^2} \right)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{5}{x} \right) + \lim_{x \rightarrow -\infty} (4)} = \frac{2 + 0}{0 + 4} = \frac{1}{2}$$

۵- الف) اگر  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  و  $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$  دو چندجمله‌ای باشند، نشان دهید.

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{a_n}{b_n} \cdot x^{n-m}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)}{\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \pm \infty} a_n x^n}{\lim_{x \rightarrow \pm \infty} b_m x^m} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$





ب) در هر یک از حالت‌های  $m > n$  و  $m < n$  و  $m = n$  حدهای قسمت قبل به چه صورتی نوشته می‌شود؟

$$m > n \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) \gg g(x)}{f(x)} \rightarrow 0$$

$$m = n \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{a_m}$$

$$n > m \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) \gg g(x)}{g(x)} \rightarrow \pm\infty$$

۶- مفهوم هر یک از گزاره‌های زیر را بیان کنید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ : هر چه مقادیر  $x$  بزرگ و بزرگتر شود، مقادیر  $f(x)$  به عدد ۲ نزدیک می‌شود.

ب)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$ : هر چه مقادیر  $x$  کوچک و کوچکتر شود، مقادیر  $f(x)$  به عدد ۴ نزدیک می‌شود.

۷- برای تابع  $f$  که نمودار آن داده شده است، موارد زیر را بدست آورید.

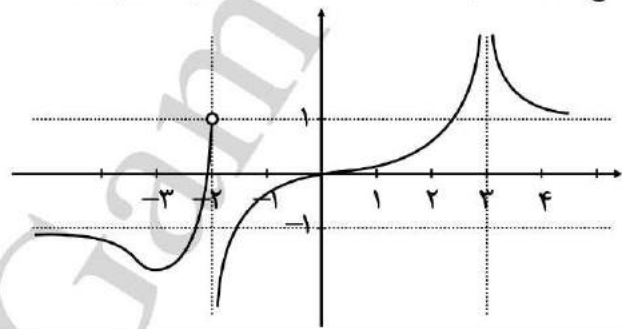
۱)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +1$

۲)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$

۳)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$

۴)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$

۵)  $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty$



۸- حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

۱)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^3 - 7x + 1}{2x^2 - x + 3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{2}x = \pm\infty$

۲)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x^2 + x + 1}{6x^3 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x^2}{6x^3} = -\frac{1}{2}$

۳)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{4x^3 + 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2x} = 0$

۴)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 5}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x} = 3$

۵)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{t^2 + 1}{t^2 - 2t^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{t^2}{t^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1} = 1$

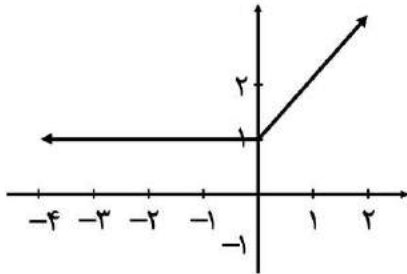
۶)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2 + 2x}{4x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2}{4x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-x) = \mp\infty$

۷)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2) = -\infty$

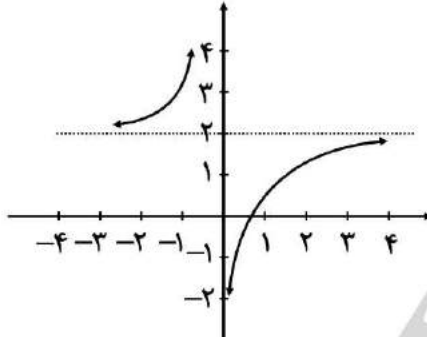


سوالات مربوط به مجانب افقی

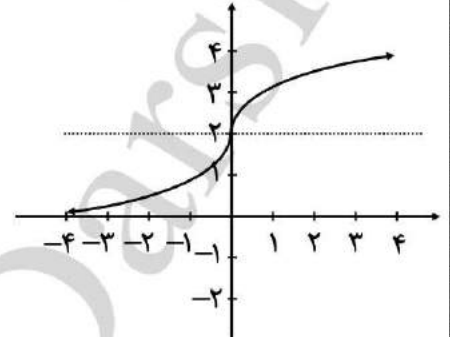
۱- کدام یک از نمودار توابع زیر مجانب افقی است؟ آن را مشخص کنید.



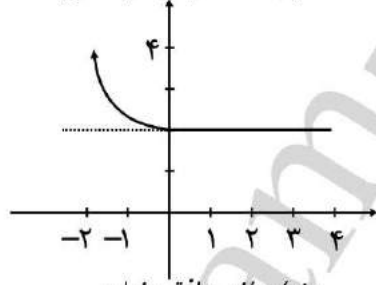
پ) مجانب افقی ندارد



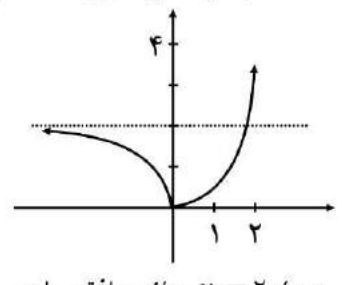
ب)  $y = 2$  مجانب افقی



الف) مجانب افقی ندارد



ث) مجانب افقی ندارد



ت)  $y = 2$  مجانب افقی دارد

۲- مجانب‌های افقی و قائم تابع‌های زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف)  $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1} \Rightarrow y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$

ب)  $g(x) = x^r \Rightarrow y = \lim_{x \rightarrow \pm} x^r = \pm\infty$  مجانب افقی ندارد.

پ)  $h(x) = \frac{x^r+1}{x+1} \Rightarrow y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^r+1}{x+1} = \pm\infty$  مجانب افقی ندارد.

۳- مجانب‌های افقی و قائم نمودارهای هر یک از توابع زیر را در صورت وجود بدست آورید.

الف)  $y = \frac{2x-1}{x-3} \begin{cases} \text{مجانب قائم } x=3 \\ \text{مجانب افقی } y=2 \end{cases}$

ب)  $y = \frac{x}{x^2-4} \begin{cases} \text{مجانب قائم } x=2 \rightarrow x=-2 \\ \text{مجانب افقی } y=0 \end{cases}$

پ)  $y = \frac{1+2x^2}{1-x^2} \begin{cases} \text{مجانب قائم } x=1, x=-1 \\ \text{مجانب افقی } y=-2 \end{cases}$

ت)  $y = \frac{2x}{1+x^2} \begin{cases} \text{مجانب قائم ندارد} \\ \text{مجانب افقی } y=0 \end{cases}$

۴- نمودار تابع  $f$  را به گونه‌ای رسم کنید که همه شرایط زیر را داشته باشد.

الف)  $f(-1) = f(-2) = 0$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$

پ) خط  $y = -1$  مجانب افقی آن باشد.

