تمرین‌های فصل چهارم: مشتق

تیپ اول: تعریف حدی مشتق

۱- معادله خط مماس بر منحنی تابع $y=x^{۲}+۳$ را در نقطه‌ای به طول (-۲) بنویسید.

پاسخ: می‌دانیم شیب خط مماس بر منحنی f در نقطه $A(\alpha, f(\alpha))$ به صورت زیر است:

$$\text{شیب خط مماس بر منحنی} = \lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(\alpha)$$

$$f(-۲)=(-۲)^{۲}+۳=۷\ ,\ f(-۲+h)=(-۲+h)^{۲}+۳=۴-۴h+h^{۲}+۳=۷-۴h+h^{۲}$$

$$f'(-۲)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(-۲+h)-f(-۲)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۷-۴h+h^{۲}-۷}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{-۴h+h^{۲}}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\cancel{h}(-۴+h)}{\cancel{h}}=-۴$$

۲- اگر $f(x)=x^{۲}$، $f'(۳)$ را به دو روش به دست آورید.

پاسخ: روش اول:

$$f(۳)=۹$$

$$f'(۳)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(h+۳)^{۲}-۹}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{h^{۲}+۶h+۹-۹}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\cancel{h}(h+۶)}{\cancel{h}}=۶$$

روش دوم: می‌دانیم $f'(\alpha)=\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$

$$f'(۳)=\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{x^{۲}-۹}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{(x-۳)(x+۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}(x+۳)=۶$$

۳- برای تابع $f(x)=-x^{۲}+۱۰x$، $f'(۸)$ را به دو روش حساب کنید.

روش اول:

$$f(۸)=-(۸)^{۲}+۱۰(۸)=-۶۴+۸۰=۱۶$$

$$f'(۸)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۸+h)-f(۸)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{-(۸+h)^{۲}+۱۰(۸+h)-۱۶}{h}$$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{-(۶۴+h^{۲}+۱۶h)+۸۰+۱۰h-۱۶}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{-h^{۲}-۶h}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{-\cancel{h}(h+۶)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to ۰}(-(h+۶))=-۶$$

روش دوم:

$$f'(۸)=\lim_{x\to ۸}\frac{f(x)-f(۸)}{x-۸}=\lim_{x\to ۸}\frac{-x^{۲}+۱۰x-۱۶}{x-۸}=\lim_{x\to ۸}\frac{-\cancel{(x-۸)}(x-۲)}{\cancel{x-۸}}=-۶$$

۴- اگر $f(x)=۳x^{۲}-۲x+۱$، $f'(۲)$ را به دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

پاسخ: ابتدا شیب خط مماس را به کمک فرمول حدی مشتق به دست می‌آوریم:

$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}\xrightarrow{f(۲)=۹}\lim_{x\to ۲}\frac{۳x^{۲}-۲x+۱-۹}{x-۲}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(۳x+۴)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}(۳x+۴)=۱۰$$

$$\begin{cases}(۲,۹)\\ m=۱۰\end{cases}\Rightarrow y-۹=۱۰(x-۲)\Rightarrow y=۱۰x-۱۱ \quad \text{معادله خط مماس}$$

۵- اگر $f(x)=x^3-2$ ، $f'(-1)$ را به کمک تعریف مشتق به دست آورید.

پاسخ:

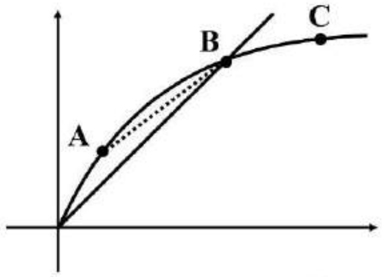
$$f(-1)=(-1)^3-2=-3$$

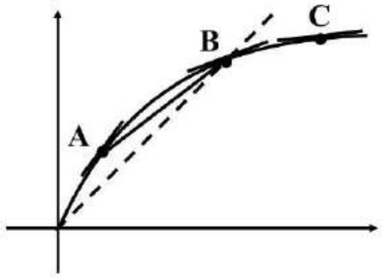
$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^3-2-(-3)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}{\cancel{x+1}}=\lim_{x\to -1}(x^2-x+1)=3$$

تیپ دوم: محاسبه شیب از روی نمودار

۶- برای نمودار $y=f(x)$ در شکل زیر شیب‌های داده‌شده از (الف) تا (ج) را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.





الف) شیب نمودار در نقطه A : پاسخ: m_1

ب) شیب نمودار در نقطه B : پاسخ: m_2

پ) شیب نمودار در نقطه C : پاسخ: m_3

ت) شیب خط AB : پاسخ: m_4

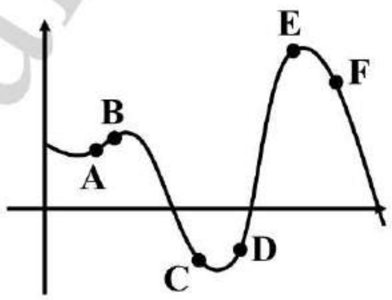
ث) شیب خط $y=2$: پاسخ: $m_5=0$

ج) شیب خط $y=x$: پاسخ: $m_6=1$

با توجه به نمودار شیب در نقطه A بیشتر از سایر نقاط می‌باشد و ترتیب قرارگیری به صورت زیر است:

$$m_1>m_6>m_4>m_2>m_3>m_5$$

۷- نقاط داده‌شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه‌شده در جدول نظیر کنید.

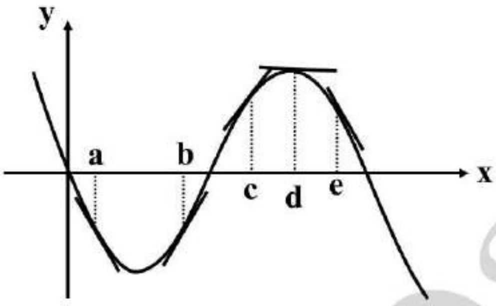


نقطه	شیب
F	-3
C	-1
E	0
A	$\frac{1}{2}$
B	1
D	2

پاسخ: با توجه به نمودار شیب در نقطه D از شیب در نقطه B تند است پس عدد ۲ را برای D انتخاب می‌کنیم. هم‌چنین در نقطه F با سرعت بیشتری نسبت به نقطه C در حال نزول هستیم.

۸- با در نظر گرفتن نمودار F در شکل زیر، نقاط به طول‌های a، b، c، d و e را با مشتق‌های داده‌شده در جدول نظیر کنید.

x	$f'(x)$
d	۰
b	۰/۵
c	۲
a	−۰/۵
e	−۲



پاسخ: با توجه به نمودار مشاهده می‌کنیم خط مماس در نقطه d موازی محور x هاست پس مشتق در آن نقطه برابر صفر است و شیب خط مماس در نقطه c تندتر از شیب در نقطه b می‌باشد و هم‌چنین در نقطه e با شیب تندتری در حال نزول هستیم.

۹- نقاطی مانند A، B، C، D، E، F و G را روی نمودار $y=f(x)$ مشخص کنید. به طوری که:

الف) A، نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

ب) B نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن نقطه منفی است.

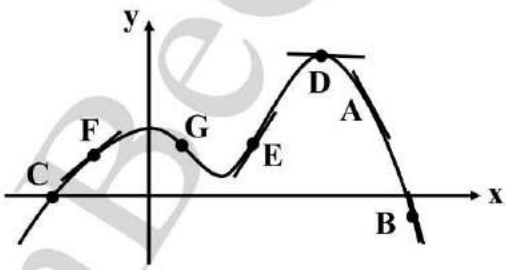
پ) C نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آن‌جا صفر است ولی مقدار مشتق در آن نقطه مثبت است.

ت) D نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آن‌جا صفر است.

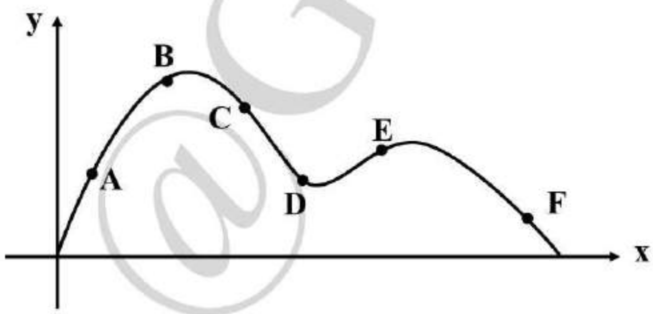
ث) نقاط E و F نقاط متفاوتی روی نمودار هستند که مشتق یکسان دارند.

ج) G نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آن‌جا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.

پاسخ:



۱۰- نقاط A، B، C، D، E و F را روی منحنی زیر در نظر می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره درست و کدام‌یک نادرست است؟



الف) شیب منحنی در همه نقاط مثبت است.

پاسخ: نادرست ـ (شیب در نقطه C، D و F منفی است.

ب) $m_A < m_B$

پاسخ: نادرست ـ (شیب در نقطه A از نقطه B تندتر است.)

پ) $m_E < m_B < m_A$

پاسخ: درست

ت) شیب منفی در نقاط D، F و C منفی است.

پاسخ: درست

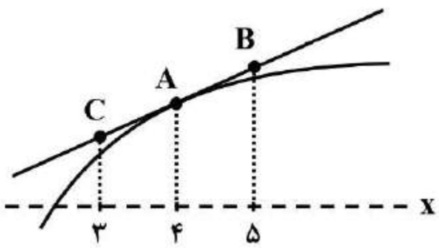
ث) $m_F < m_D < m_C$

پاسخ: (شیب در نقطه D کندتر از نقطه C است.)

ج) $m_C < m_D < m_F < m_E < m_B < m_A$

پاسخ: درست

۱۱- برای تابع f در شکل زیر داریم: $f'(۴)=۱/۵$, $f(۴)=۲۵$ ، با توجه به شکل مختصات نقاط A ، B و C را بیابید.



پاسخ: با توجه به شکل مشاهده می‌کنیم شیب خطی که از نقاط A ، B و C عبور می‌کند برابر است. مشتق در نقطه $x=۴$ یعنی $f'(۴)$.

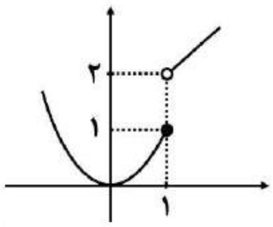
$$m=f'(۴)=۱/۵=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}\Rightarrow\frac{y_B-۲۵}{۵-۴}=۱/۵\to y_B=۲۶/۵\to B(۵,۲۶/۵)$$

$$۱/۵=\frac{y_A-y_C}{x_A-x_C}\Rightarrow\frac{۲۵-y_C}{۴-۳}=۱/۵\to y_C=۲۳/۵\to C=(۳,۲۳/۵)$$

تیپ سوم: مشتق‌پذیری و پیوستگی

۱۲- تابع g (شکل زیر) را به صورت $g(x)=\begin{cases}x^۲ & x\le ۱\\ x+۱ & x>۱\end{cases}$ در نظر می‌گیریم. چرا $g'(۱)$ موجود نیست.

پاسخ: با توجه به نمودار مشاهده می‌کنیم که حدهای چپ و راست تابع در نقطه $x=۱$ با هم برابر نیستند. پس تابع پیوسته نیست و مشتق هم ندارد.



۱۳- نشان دهید مشتق تابع $f(x)=|x^۲-۱|$ در نقطه $x=-۱$ موجود نیست.

پاسخ:

$$f'(-۱)=\lim_{x\to -۱}\frac{|x^۲-۱|-۰}{x-(-۱)}=\lim_{x\to -۱}\frac{|x^۲-۱|}{x+۱}$$

$$\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{x^۲-۱}{x+۱}=\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{\cancel{(x+۱)}(x-۱)}{\cancel{x+۱}}=\lim_{x\to(-۱)^+}(x-۱)=-۲$$: حد راست

$$\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{-(x^۲-۱)}{x+۱}=\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{-(x-۱)(x+۱)}{x+۱}=\lim_{x\to(-۱)^-}-(x-۱)=+۲$$: حد چپ

مشاهده می‌کنیم مشتق‌های چپ و راست با هم برابر نیستند پس $f'(-۱)$ موجود نیست.

۱۳- مشتق‌پذیری روی بازه‌های $[a,b)$ و $(a,b]$ را به طور مشابه تعریف کنید.

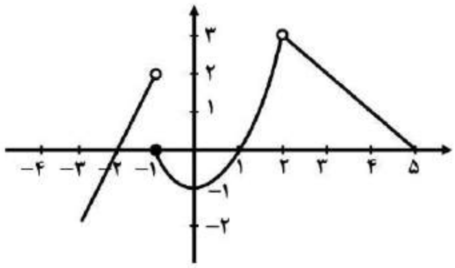
پاسخ: تابع f روی بازه $[a,b)$ مشتق‌پذیر است. هرگاه f روی بازه‌ی (a,b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطه a مشتق راست داشته باشد.

تابع f روی بازه $(a,b]$ مشتق‌پذیر است، هرگاه f روی بازه (a,b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطه b مشتق چپ داشته باشد.

۱۴- تابع $f(x)=\begin{cases}x^۲ & -۲\le x\le ۱\\ x+۱ & x>۱\end{cases}$ را در نظر می‌گیریم. چرا تابع f در بازه $[۱,۲]$ مشتق‌پذیر نیست؟

پاسخ: زیرا با این‌که روی بازه $(۱,۲)$ مشتق‌پذیر است، اما در $x=۱$ پیوستگی راست ندارد. (حد راست با مقدار تابع برابر نیست)، پس در $x=۱$ مشتق راست ندارد.

۱۵- اگر $f(x)\begin{cases} ۲x+۴ & x<-۱ \\ x^۲-۱ & -۱\le x<۲ \\ -x+۵ & ۲<x<۵ \end{cases}$ نمودار f را رسم کنید و مشتق‌پذیر f را روی بازه‌های $[-۱,۱]$، $(۲,۵)$ و $[-۲,۰]$ بررسی کنید.

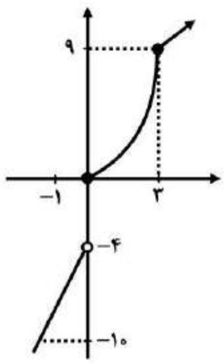


پاسخ: تابع در بازه $[-۲,۰]$ مشتق‌پذیر نیست. زیرا در $x=-۱$ ناپیوسته است.
تابع در بازه‌ی $(۲,۵)$ مشتق‌پذیر است.
تابع در بازه $[-۱,۱]$ مشتق‌پذیر است.

۱۶- تابع $f(x)=\begin{cases} ۵x-۴ & x<۰ \\ x^۲ & ۰\le x\le ۳ \\ x+۶ & x>۳ \end{cases}$ داده شده است.

الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

پاسخ:



ب) نشان دهید که $f'(۰)$ و $f'(۳)$ وجود ندارند.

پاسخ:

$$f(۰)=۰$$

$$f'_+(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{x^۲-۰}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}x=۰$$

$\Rightarrow$ پیوسته نیست

$$f'_-(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{۵x-۴-۰}{x-۰}=\frac{-۴}{۰^-}=+\infty$$

$$f(۳)=۹$$

$$f'_+(۳)=\lim_{x\to ۳^+}\frac{x+۶-۹}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{x-۳}{x-۳}=۱$$

$\Rightarrow$ مشتق چپ و راست با هم برابر نیست

$$f'_-(۳)=\lim_{x\to ۳^-}\frac{x^۲-۹}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{(x-۳)(x+۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^-}(x+۳)=۶$$

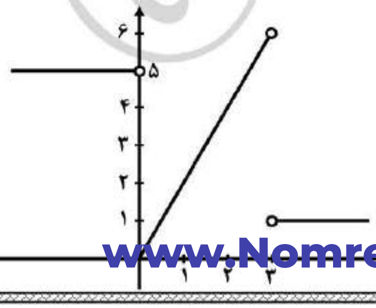
پ) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

پاسخ: می‌دانیم در $x=۰$ و $x=۳$ مشتق‌پذیر نیست.

$$f'(x)=\begin{cases} ۵ & x<۰ \\ ۲x & ۰<x<۳ \\ ۱ & x>۳ \end{cases}$$

ت) نمودار تابع مشتق را رسم کنید.

پاسخ:

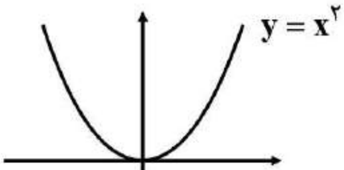


۱۷- نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن:

الف) در یک نقطه برابر صفر شود.

پاسخ:

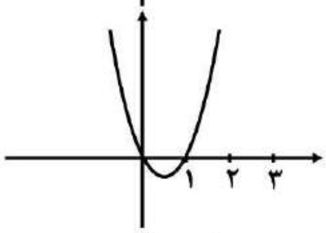
$y = x^2$



ب) در ۲ = x برابر ۳ شود.

پاسخ:

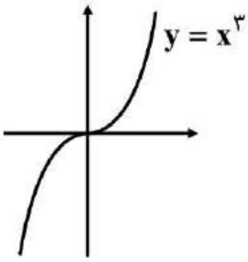
$$f(x) = x^2 - x$$
$$f'(x) = 2x - 1$$
$$f'(2) = 2(2) - 1 = 3$$



پ) در تمام نقاط مثبت شود.

پاسخ:

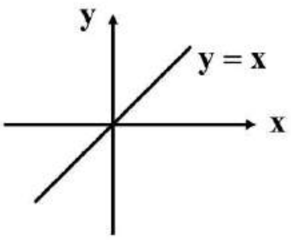
$y = x^3$



ت) در تمام نقاط یکسان شود.

پاسخ:

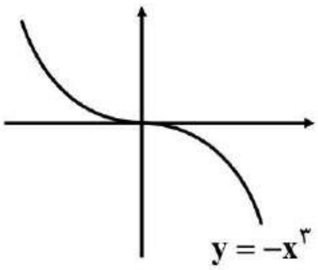
$y = x$



ث) در تمام نقاط منفی شود.

پاسخ:

$y = -x^3$



۱۸- مشتق‌پذیری تابع $f(x)\begin{cases} x^2+3 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

پاسخ:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^2+3) = 4$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (2x) = 2$$

حد چپ و راست در نقطه $x=1$ برابر نیست. پس پیوسته نیست و مشتق هم در $x=1$ ندارد.

۱۹- اگر $f(x) = |x^2 - 4|$، به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیر f را در نقطه $x = -2$ بررسی کنید.

پاسخ:

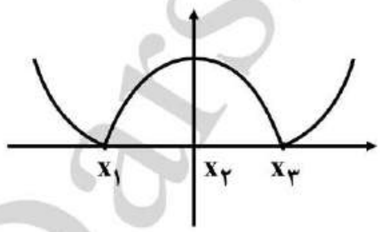
$$f'+(-2) = \lim_{x\to(-2)^+} \frac{-(x^2-4)-0}{x+2} = \lim_{x\to(-2)^+} \frac{-(x-2)(x+2)}{x+2} = \lim_{x\to(-2)^-} -(x-2) = +4$$

$$f'_-(-2) = \lim_{x\to(-2)^-} \frac{(x^2-4)-0}{x+2} = \lim_{x\to(-2)^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = -4$$

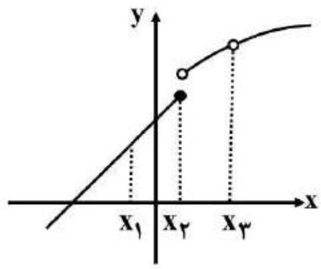
مشاهده می‌کنیم مشتق چپ و راست با هم برابر نیست پس تابع f در $x=-2$ مشتق ندارد.

۲۰- در شکل‌های زیر مشخص کنید که هر تابع در کدام نقطه یا نقاط مشخص‌شده، مشتق‌پذیر نیست.

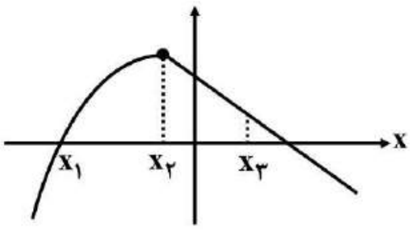
پاسخ:



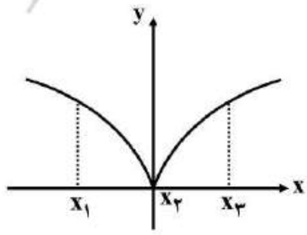
در x_1 و x_3 مشتق‌پذیر نیست.
نقاط گوشه‌ای



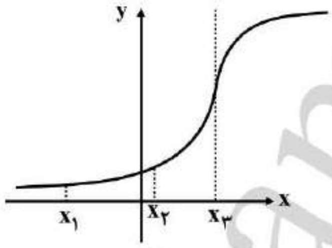
در x_2 و x_3 مشتق‌پذیر نیست.
نقاط ناپیوسته



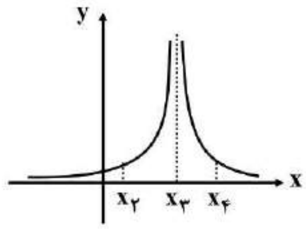
در x_2 مشتق‌پذیر نیست.
نقاط گوشه



در x_2 مشتق‌پذیر نیست.
مشتق نامتناهی



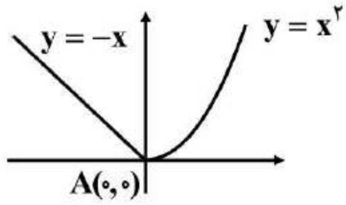
در x_3 مشتق‌پذیر نیست.
(مشتق نامتناهی)



در x_3 مشتق‌پذیر نیست.
(نقطه ناپیوستگی)

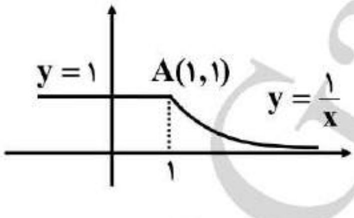
۲۱- با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ توابع داده‌شده در نقطه A، نشان دهید که این توابع در نقطه A مشتق‌پذیرنیستند.

پاسخ:



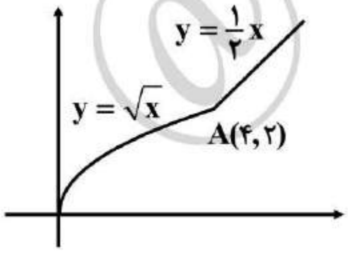
$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases} \rightarrow f'(x)=\begin{cases} 2x & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_+(0)=0 \\ f'_-(0)=-1 \end{cases} \qquad f'_+(0)\neq f'_-(0)$$



$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & x\geq 1 \\ 1 & x<1 \end{cases} \rightarrow f'(x)=\begin{cases} -\frac{1}{x^2} & x>1 \\ 0 & x<1 \end{cases}$$

$$f'_+(1)=-1\ ,\ f'_-(1)-0 \rightarrow f'_+(1)\neq f'_-(1)$$

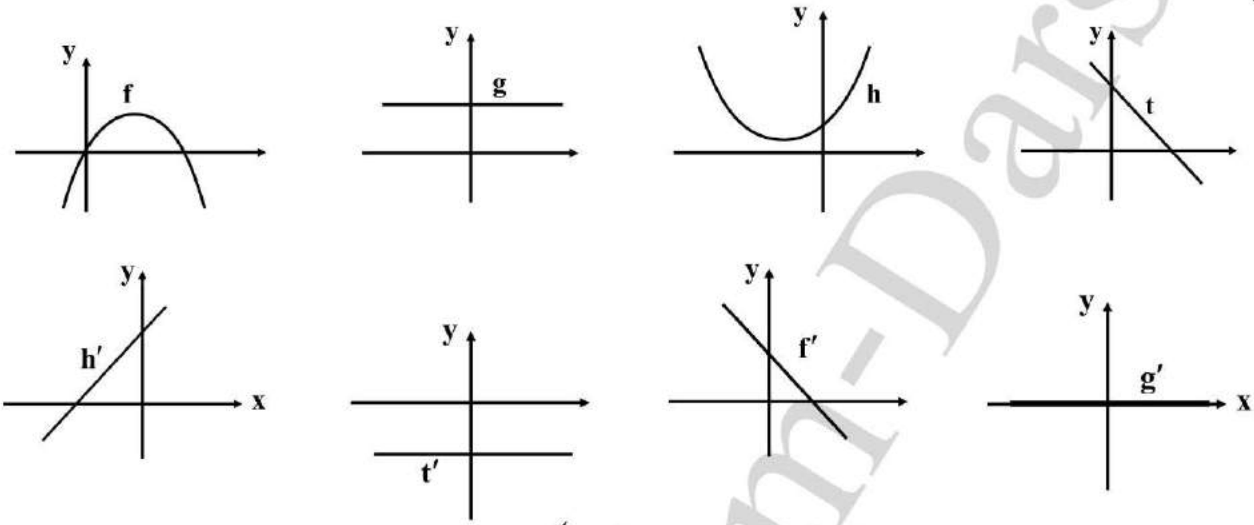


$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x & x\geq 4 \\ \sqrt{x} & x<4 \end{cases} \rightarrow f'(x)=\begin{cases} \frac{1}{2} & x>4 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & x<4 \end{cases}$$

$$f'_+(۴)=\frac{۱}{۲}\ ,\ f'_-(۴)=\frac{۱}{۴}\to f'_+(۴)\neq f'_-(۴)$$

۲۲- نمودار توابع f ، g ، h و t را به نمودار مشتق آن‌ها نظیر کنید.

پاسخ:



۱) اگر نمودار تابع اصلی صعودی باشد، نمودار مشتق آن بالای محور x ها قرار می‌گیرد.

۲) اگر نمودار تابع اصلی نزولی باشد، نمودار مشتق آن پایین محور x ها قرار می‌گیرد.

۳) اگر نمودار تابع اصلی قله یا دره داشته باشد، در نمودار مشتق، آن نقاط محل برخورد با محور x ها می‌شود.

تیپ چهارم: محاسبه مشتق توابع

۲۳- مشتق توابع زیر را محاسبه کنید.

۱) $f(x)=x^۵+۴x^۳-\sqrt{۲}x+۱$

$$f'(x)=۵x^۴+۱۲x^۲-\sqrt{۲}$$

۲) $f(x)=(۲x^۳+۱)(-x^۲+۷x-۲)$

$$f'(x)=(۶x^۲)(-x^۲+۷x-۲)+(۲x^۳+۱)(-۲x+۷)$$

۳) $f(x)=\dfrac{x^۲-۴}{۳x+۱}$

$$f'(x)=\frac{(۲x)(۳x+۱)-(۳)(x^۲-۴)}{(۳x+۱)^۲}=\frac{۳x^۲+۲x+۱۲}{(۳x+۱)^۲}$$

۴) $f(x)=\dfrac{۱}{x-۴}$

$$f'(x)=\frac{۰(x-۴)-(۱)(۱)}{(x-۴)^۲}=\frac{-۱}{(x-۴)^۲}$$

۵) $f(x)=\left(\dfrac{-۳x-۱}{x^۲+۵}\right)^۸$

$$f'(x)=۸\left(\frac{-۳(x^۲+۵)-(۲x)(-۳x-۱)}{(x^۲+۵)^۲}\right)\left(\frac{-۳x-۱}{x^۲+۵}\right)^۷$$

۶) $f(x)=\dfrac{x}{2x^2+x-1}$

$$f'(x)=\frac{(1)(2x^2+x-1)-(4x+1)(x)}{(2x^2+x-1)^2}$$

۷) $f(x)=(3x^2-4)(2x-5)^2$

$$f'(x)=(6x)(2x-5)^2+(3x^2-4)(2(2)(2x-5)^1)=(2x-5)(24x^2-30x-16)$$

۸) $f(x)=(\sqrt{3x+2})(x^3+1)$

$$f'(x)=(\frac{3}{2\sqrt{3x+2}})(x^3+1)+(\sqrt{3x+2})(3x^2)$$

۹) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{-3x+2}$

$$f'(x)=\frac{(2x-3)(-3x+2)-(-3)(x^2-3x+1)}{(-3x+2)^2}=\frac{-3x^2+4x-3}{(-3x+2)^2}$$

۱۰) $f(x)=\dfrac{9x-2}{\sqrt{x}}$

$$f'(x)=\frac{9(\sqrt{x})-\frac{1}{2\sqrt{x}}\times(9x-2)}{(\sqrt{x})^2}$$

۲۴- اگر f و g توابع مشتق‌پذیر باشند و $f(2)=3$ ، $f'(2)=5$ و $g(2)=8$ و $g'(2)=-6$ مقدار $(fg)'(2)$ و $(\frac{f}{g})'(2)$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$(f.g)'(2)=f'(2)g(2)+f(2).g'(2)=5\times 8+3\times(-6)=40-18=22$$

$$(\frac{f}{g})'(2)=\frac{f'(2).g(2)-g'(2).f(2)}{(g(2))^2}=\frac{5\times 8-3\times(-6)}{8^2}=\frac{40+18}{64}=\frac{29}{32}$$

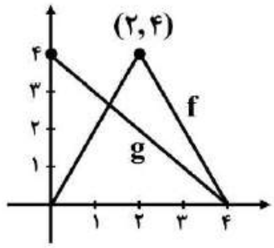
۲۵- اگر $f'(1)=3$ و $g'(1)=5$ مطلوب است، $(f+g)'(1)$ و $(3f+2g)'(1)$.

پاسخ:

$$(f+g)'(1)=f'(1)+g'(1)=3+5=8$$

$$(3f+2g)'(1)=3f'(1)+2g'(1)=3(3)+2(5)=9+10=19$$

۲۶- نمودار توابع f و g را در شکل زیر در نظر بگیرید.



الف) اگر $h(x)=f(x)-g(x)$ مطلوب است $h'(1)$، $h'(2)$ و $h'(3)$

ب) اگر $k(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است $k'(1)$، $k'(2)$ و $k'(3)$

پاسخ:

ابتدا ضابطه توابع f و g را می‌نویسیم:

ضابطه تابع f برای بازه‌ی $[2,4]$: $mf=\dfrac{0-4}{4-2}=-2=f'(x)\ ,\ y-0=(-2)(x-4)\Rightarrow y=-2x+8$

ضابطه تابع f برای بازه‌ی $[0,2]$: $mf=\dfrac{4-0}{2-0}=2=f'(x)\Rightarrow y-0=2(x-0)\Rightarrow y=2x$

ضابطه تابع g: $mg=\dfrac{0-4}{4-0}=-1\rightarrow y-0=(-1)(x-4)\Rightarrow y=-x+4$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}-2x+8 & 2\le x\le 4\\ 2x & 0\le x\le 2\end{cases}\ ,\ g(x)=-x+4$$

$$\begin{array}{llll} f(1)=2 & f'(1)=2 & g(1)=3 & g'(1)=-1\\ f(2)=4 & f'_+(2)=-2\ ,\ f'_-(2)=2 & g(2)=2 & g'(2)=-1\\ f(3)=2 & f'(3)=-2 & g(3)=1 & g'(3)=-1\end{array}$$

$$h'(1)=f'(1).g(1)+f(1).g'(1)=2\times 3+(-1)\times 2=4$$

$$h'(2)=\begin{cases}f'_+(2).g(2)+f(2).g'(2)=(-2)\times 2+4(-1)=-8\\ f'_-(2).g(2)+f(2).g'(2)=2\times 2+4(-1)=0\end{cases}$$ در $x=2$ مشتق‌پزیر نیست

$$h'(3)=f'(3).g(3)+f(3).g'(3)=(-2)\times 1+2(-1)=-4$$

$$k'(1)=\frac{f'(1).g(1)-g'(1)f(1)}{g^2(1)}=\frac{2\times 3-2\times(-1)}{3^2}=\frac{8}{9}$$

$$k'_+(2)=\frac{f'_+(2).g(2)-g'(2)f(2)}{g^2(2)}=\frac{-2\times 2-4(-1)}{2^2}=\frac{0}{4}=0$$ در $x=2$ مشتق‌پزیر نیست.

$$k'_-(2)=\frac{f'_-(2).g(2)-g'(2).f(2)}{g^2(2)}=\frac{2\times 2-4(-1)}{4}=2$$

$$k'(3)=\frac{f'(3).g(3)-g'(3).f(3)}{g^2(3)}=\frac{-2\times 1-2\times(-1)}{1^2}=0$$

تیپ پنجم: آهنگ تغییر

۲۷- با توجه به تابع رشد $(f(x)=\text{۷}\sqrt{x}+\text{۵۰})$ به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) آهنگ متوسط رشد، در بازه زمانی [۰,۲۵] چه‌قدر است؟

پاسخ:

$$\begin{aligned}&f(\text{۲۵})=\text{۷}\sqrt{\text{۲۵}}+\text{۵۰}=\text{۸۵}\\&f(\text{۰})=\text{۷}(\sqrt{\text{۰}})+\text{۵۰}=\text{۵۰}\end{aligned}\Rightarrow\frac{f(\text{۲۵})-f(\text{۰})}{\text{۲۵}-\text{۰}}=\frac{\text{۸۵}-\text{۵۰}}{\text{۲۵}}=\frac{\text{۳۵}}{\text{۲۵}}=\text{۱/۴}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر قد کودک را در ۲۵ ماهگی و ۴۹ ماهگی، با هم مقایسه کنید. کدام‌یک بیشتر است؟

پاسخ: برای به دست آوردن آهنگ لحظه‌ای باید از تابع مشتق بگیریم:

$$f'(x)=\text{۷}\times\frac{\text{۱}}{\text{۲}\sqrt{x}}=\frac{\text{۷}}{\text{۲}\sqrt{x}}\Rightarrow f'(\text{۲۵})=\frac{\text{۷}}{\text{۲}\sqrt{\text{۲۵}}}=\frac{\text{۷}}{\text{۱۰}}\ ,\ f'(\text{۴۹})=\frac{\text{۷}}{\text{۲}\sqrt{\text{۴۹}}}=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}=\frac{\text{۵}}{\text{۱۰}}$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر در $x=\text{۲۵}$ بیشتر است.

۲۸- ارتفاع یک جسم از سطح زمین از معادله $h(t)=-\text{۵}t^{\text{۲}}+\text{۴۰}t$ به دست می‌آید.

الف) سرعت جسم هنگام پرتاب و هنگام برخورد به زمین را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا زمان برخورد به زمین را به دست می‌آوریم:

$$h(t)=\text{۰}\Rightarrow-\text{۵}t^{\text{۲}}+\text{۴۰}t=\text{۰}\Rightarrow-\text{۵}t(t-\text{۸})=\text{۰}\Rightarrow\begin{cases}t=\text{۰}\\t=\text{۸}\end{cases}$$

برای به دست آوردن معادله سرعت، کافی است از معادله $h(t)$ نسبت به t مشتق بگیریم:

$$V_{(t)}=-\text{۱۰}t+\text{۴۰}\Rightarrow\begin{cases}V(\text{۰})=-\text{۱۰}(\text{۰})+\text{۴۰}=\text{۴۰}\\V(\text{۸})=-\text{۱۰}(\text{۸})+\text{۴۰}=-\text{۴۰}\end{cases}$$

ب) لحظاتی را معلوم کنید که سرعت جسم $\text{۳۵}\frac{m}{s}$ و $-\text{۳۵}\frac{m}{s}$ است.

پاسخ:

$$V=-\text{۱۰}t+\text{۴۰}\Rightarrow\begin{cases}-\text{۱۰}t+\text{۴۰}=\text{۳۵}\to-\text{۱۰}t=-\text{۵}\to t=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\\-\text{۱۰}t+\text{۴۰}=-\text{۳۵}\to-\text{۱۰}t=-\text{۷۵}\to t=\text{۷/۵}\end{cases}$$

۲۹- جدول زیر درجه حرارت T (سانتی‌گراد) را در شهری از ساعت ۸ تا ۱۸ در یک روز نشان می‌دهد.

ساعت h	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
درجه حرارت T	۱۱	۱۲	۱۴	۱۷	۱۹	۱۸	۱۷	۱۵	۱۳	۱۰	۹

آهنگ تغییر متوسط درجه حرارت نسبت به زمان را:

الف) از ساعت ۸ تا ساعت ۱۲ به دست آورید.

پاسخ:

$$T(\text{۸})=\text{۱۱}\ ,\ T(\text{۱۲})=\text{۱۹}\Rightarrow\frac{\text{۱۹}-\text{۱۱}}{\text{۱۲}-\text{۸}}=\frac{\text{۸}}{\text{۴}}=\text{۲}$$

ب) از ساعت ۱۲ تا ساعت ۱۸ به دست آورید.

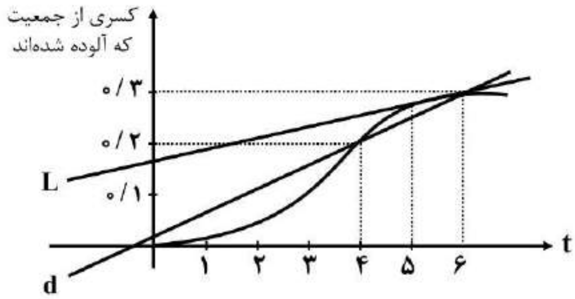
پاسخ:

$$T(\text{۱۲})=\text{۱۹}\ ,\ T(\text{۱۸})=\text{۹}\to\frac{\text{۹}-\text{۱۹}}{\text{۱۸}-\text{۱۲}}=-\text{۱/۷}$$

مشاهده می‌کنیم از ساعت ۸ تا ۱۲ به طور متوسط هوا گرم‌تر می‌شود. از ساعت ۱۲ تا ۱۸ به طور متوسط هوا سردتر می‌شود.

۳۰- کسری از جمعیت یک شهر که به وسیله یک ویروس آلوده شده‌اند برحسب زمان (هفته) در نمودار زیر نشان داده شده است.

الف) شیب‌های خطوط L و d چه چیزی را نشان می‌دهند؟



پاسخ: در هفته سوم آهنگ آلوده شدن از هفته ششم بیشتر است. یعنی هر چه زمان بیشتر گذشته شود، جمعیت کم‌تری از شهر آلوده شدند.

ب) گسترش آلودگی در کدام‌یک از زمان‌های $t=1$ و $t=2$ یا $t=3$ بیشتر است؟

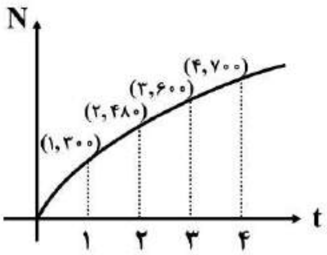
پاسخ: در $t=3$ شیب خط مماس بیشتر است.

پ) قسمت (ب) را برای $t=4$، $t=5$ و $t=6$ بررسی کنید.

پاسخ: در $t=6$ از همه کم‌تر است.

۳۱- نمودار روبه‌رو نمایش میزان فروش تعداد نوعی کالا (N) پس از ضرب t میلیون تومان هزینه برای تبلیغ است.

الف) آهنگ تغییر N برحسب t را وقتی t از صفر تا ۱، ۱ تا ۲، ۲ تا ۳ و ۳ تا ۴ تغییر می‌کند به دست آورید.



پاسخ:

$$\frac{N(1)-N(0)}{1-0}=\frac{300-0}{1}=300\ ,\ \frac{N(2)-N(1)}{2-1}=\frac{480-300}{1}=180$$

$$\frac{N(3)-N(2)}{3-2}=\frac{600-480}{1}=12\ ,\ \frac{N(4)-N(3)}{4-3}=\frac{700-600}{1}=100$$

ب) به نظر شما چرا آهنگ تغییرات، وقتی که مقادیر t افزایش می‌یابند، در حال کاهش است؟

پاسخ: چون شب مماس‌ها کم می‌شود. (چون آهنگ لحظه‌ای در حال کاهش است) (تعقر روی به پایین است.)

۳۲- معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t)=t^2-t+10$ برحسب متر در بازه زمانی $[0,5]$ (t برحسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0,5]$ با هم برابرند؟

پاسخ:

$$\text{سرعت متوسط} \Rightarrow \begin{cases} f(0)=10 \\ f(5)=5^2-5+10=30 \end{cases} \Rightarrow \text{سرعت متوسط}=\frac{30-10}{5-0}=4$$

$$\text{سرعت لحظه‌ای} : f'(t)=2t-1 \Rightarrow \text{سرعت لحظه‌ای} = \text{سرعت متوسط}$$

$$2t-1=4 \rightarrow t=\frac{5}{2}=2/5$$

۳۳- توپی از یک پل به ارتفاع ۱۱ متر به هوا پرتاب می‌شود. $f(t)$ نشان‌دهنده فاصله توپ از سطح زمین در زمان t است. برخی از مقادیر $f(t)$ در جدول روبه‌رو نمایش داده شده است. براساس جدول کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند سرعت توپ را هنگامی که در ارتفاع نظیر زمان ۰/۴ ثانیه است، نشان دهد؟

ثانیه t	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
متر $f(t)$ m	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

الف) ۱/۲۳
ب) ۱۴/۹۱
پ) ۱۱/۵
ت) ۱۶/۰۳

پاسخ: برای این‌که سرعت توپ را در $t=۰/۴$ به دست آوریم می‌توانیم میانگین سرعت متوسط را در بازه‌های $[۰/۳,۰/۴]$ و $[۰/۴,۰/۵]$ به دست آوریم.

$$۱)\ \frac{f(۰/۵)-f(۰/۴)}{۰/۵-۰/۴}=\frac{۱۷/۴-۱۶/۳}{۰/۱}=\frac{۱/۱}{۰/۱}=۱۱$$

$$۲)\ \frac{f(۰/۴)-f(۰/۳)}{۰/۴-۰/۳}=\frac{۱۶/۳-۱۵/۱}{۰/۱}=\frac{۱/۲}{۰/۱}=۱۲$$

$$\text{میانگین}=\frac{۱۱+۱۲}{۲}=۱۱/۵$$

۳۴- کدام‌یک از عبارات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) آهنگ تغییر متوسط تابعی مانند f در بازه $[۰,۱]$ همیشه کم‌تر از شیب منحنی در نقطه است.

پاسخ: نادرست است. زیرا تابع $y=x^۳$ و از $(۰,۰)$ و $(۱,۱)$ می‌گذرد.

$$\text{آهنگ تغییر متوسط}=\frac{f(۱)-f(۰)}{۱-۰}=\frac{۱-۰}{۱-۰}=۱$$

$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای}: f'(x)=۳x^۲ \to f(۰)=۰$$

ب) اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن، همواره صعودی است.

پاسخ: نادرست است. تابعی مانند $y=\sqrt{x}$ تابعی صعودی است و آهنگ تغییر متوسطش همواره نزولی است. (تقعرش رو به پایین است.)

پ) تابعی وجود ندارد که برای آن هم $f(\alpha)=۰$ و $f'(\alpha)=۰$

پاسخ: نادرست است. تابع $y=x^۳$ در نظر بگیرید.

$$f(۰)=۰$$

$$f'(x)=۳x^۲ \to f'(۰)=۰$$

۳۵- یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+۲t^۳$ گرم است.

الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $۳\le t\le ۴$ چند گرم افزایش می‌یابد؟

پاسخ:

$$\left.\begin{aligned} m(۴)&=\sqrt{۴}+۲\times۴^۳=۱۳۰\\ m(۳)&=\sqrt{۳}+۲\times۳^۳=۵۵/۷\end{aligned}\right\}\Rightarrow ۱۳۰-۵۵/۷=۷۴/۳$$

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t=۳$ چه‌قدر است؟

پاسخ:

$$m'(t)=\frac{۱}{۲\sqrt{t}}+۶t^۲ \to m'(۳)=\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}+۶(۳)^۲=\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}+۵۴$$

۳۶- گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر است. در لحظه $t=0$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی‌مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V=40(1-\frac{t}{100})^2$ به دست می‌آید:

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[0,1]$ چه‌قدر است؟

پاسخ:

$$V(0)=40(1-\frac{0}{100})^2=40 \quad , \quad V(1)=40(1-\frac{1}{100})^2=39/204 \Rightarrow \bar{V}=\frac{39/204-40}{1-0}=-0/796$$

ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0,100]$ می‌شود؟

پاسخ:

$$V'=40\times 2(1-\frac{t}{100})\times(-\frac{1}{100})=\frac{-8}{10}(1-\frac{t}{100})$$

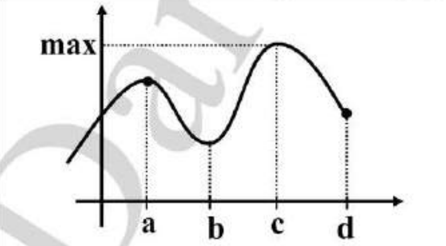
$$\begin{cases} V(0)=40 \\ V(100)=40\times(1-\frac{100}{100})^2=0 \end{cases} \Rightarrow \bar{V}=\frac{0-40}{100-0}=-\frac{4}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{-8}{10}+\frac{0/8t}{100}=-\frac{4}{10} \Rightarrow \frac{8t}{1000}=\frac{4}{10} \Rightarrow t=50$$

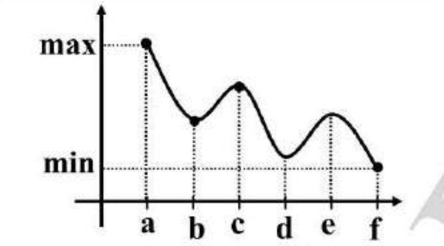
فصل ۵ کاربرد مشتق ریاضی

۱- در هر یک از نمودارهای توابع زیر مقدار ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق و هم‌چنین طول نقاط ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را مشخص نمایید.

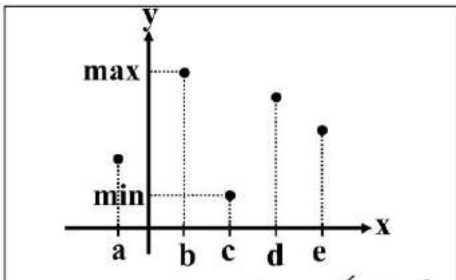
پاسخ:



$x=c$ ماکزیمم مطلق
مینیمم مطلق ندارد.



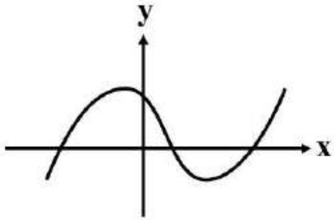
$x=a$ ماکزیمم مطلق
$x=f$ مینیمم مطلق



$x=b$ ماکزیمم مطلق
$x=c$ مینیمم مطلق

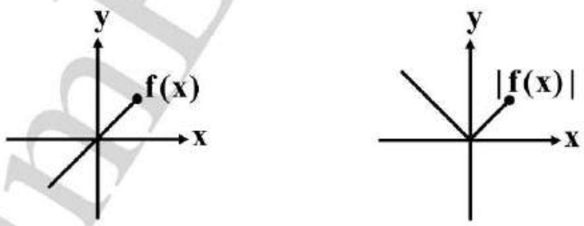
۲- نمودار تابعی را رسم کنید که بر دامنه‌اش پیوسته باشد ولی بر آن ماکزیمم و مینیمم مطلق نداشته باشد.

پاسخ:



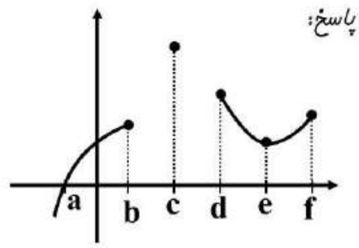
۳- نمودار تابع f را به گونه‌ای رسم کنید که ماکزیمم مطلق داشته باشد ولی تابع $|f|$ ماکزیمم مطلق نداشته باشد.

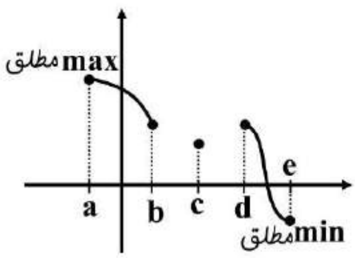
پاسخ:

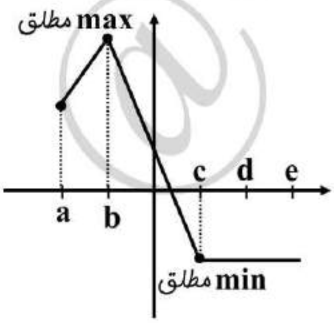


۴- دقت کنید که با توجه به تعریف، نقطه ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی به گونه‌ای است که تابع در یک همسایگی آن تعریف شده است. اما ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق لازم نیست. حتماً در چنین شرطی صدق کند. حال با توجه به این مطلب در هر نمودار زیر، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی و ماکزیمم و مینیمم مطلق را مشخص کنید.

پاسخ:

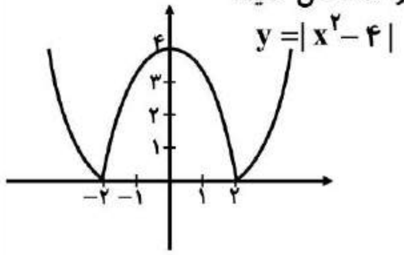




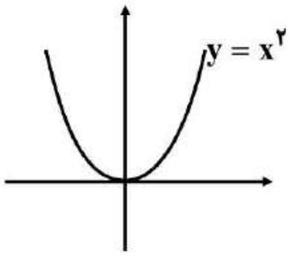


در $x=c$ ماکزیمم نسبی ندارد ولی ماکزیمم مطلق دارد.
در $x=e$ مینیمم نسبی دارد ولی در کل تابع مینیمم مطلق ندارد.

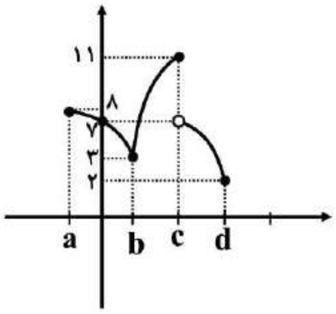
۵- در هر یک از نمودارهای زیر، مقادیر و طول اکسترمم‌های نسبی و اکسترمم‌های مطلق را مشخص کنید.



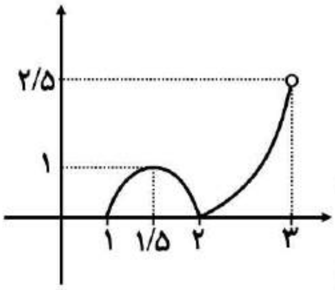
پاسخ: تابع max مطلق ندارد.
در $x=0$، max نسبی دارد که مقدار آن برابر ۴ است.
در $x=2$، $x=-2$، min نسبی و مطلق دارد.
که مقدار آن‌ها برابر صفر است.



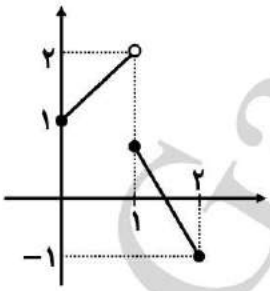
در $x=0$ مینیمم مطلق و مینیمم نسبی دارد و مقدار آن برابر صفر است.
تابع max مطلق ندارد.



در $x=b$ مینیممی نسبی دارد که مقدار آن برابر ۳ است.
در $x=c$ ماکزیمم مطلق و نسبی دارد و مقدار آن برابر ۱۱ است.
در $x=d$ مینیمم مطلق دارد و مقدار آن برابر ۲ است.



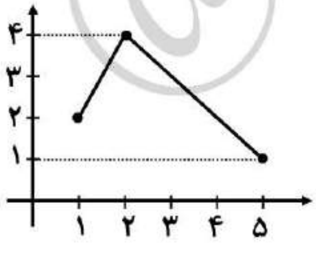
تابع در $x=1$ و $x=2$ مینیمم مطلق دارد که مقدار آن برابر صفر است.
در $x=1/5$ ماکزیمم نسبی دارد و مقدار آن برابر ۱ است.
در $x=2$ مینیمم نسبی دارد و مقدار آن برابر صفر است.
تابع ماکزیمم مطلق ندارد.



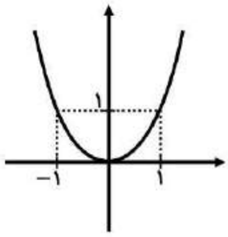
تابع ماکزیمم مطلق و نسبی ندارد.
در $x=2$ مینیمم مطلق دارد که مقدار آن برابر (-1) است.

۶- نمودار یک تابع را رسم کنید که در نقطه $(2,4)$ ماکزیمم نسبی و در نقطه $(5,1)$ مینیمم مطلق دارد.

پاسخ:



۷- تابع $f(x)=x^{2}$ را در نظر بگیرید.



الف) وجود مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f را در بازه‌های $[0,1]$ و $(0,1)$ بررسی کنید.

پاسخ: در بازه $[0,1]$، مینیمم مطلق تابع برابر صفر و ماکزیمم مطلق آن برابر ۱ است.

اما در بازه $(0,1)$، مینیمم و ماکزیمم مطلق ندارد.

ب) وجود اکسترمم‌های مطلق تابع f را بر $\mathbb{R}$ بررسی نمایید.

پاسخ: در نقطه $(0,0)$ دارای مینیمم مطلق است ولی ماکزیمم مطلق ندارد.

۸- نمودار تابعی را رسم کنید که همه شرایط زیر را داشته باشد.

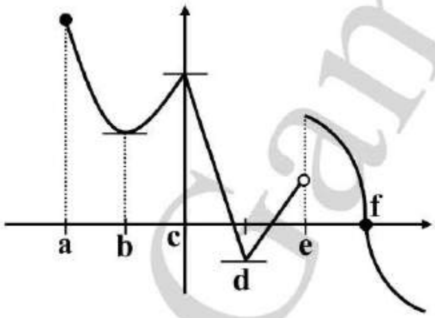
۱) نقطه ماکزیمم نسبی داشته باشد که مشتق در آن نقطه برابر صفر باشد.

۲) نقطه مینیمم نسبی داشته باشد که تابع در آن نقطه پیوسته باشد ولی مشتق نداشته باشد.

۳) نقطه ماکزیمم مطلق تابع نقطه بحرانی نباشد.

۴) نقطه ماکزیمم نسبی داشته باشد که تابع در آن ناپیوسته باشد.

۵) نقطه‌ای داشته باشد که اکسترمم نسبی نباشد ولی مشتق تابع در آن نقطه صفر باشد.



۹- نقاط اکسترمم نسبی و مطلق توابع زیر را در بازه‌های داده‌شده در صورت وجود بیابید و نقاط بحرانی این توابع را به دست آورید.

الف) $f(x): 3x^{2}-2x+5 \quad [-2,1]$

پاسخ:

$f'(x)=6x-2 \xrightarrow{f'(x)=0} 6x-2=0 \to x=\frac{1}{3}$ نقطه بحرانی

	$\frac{1}{3}$	
f'	− ۰ +	
f	↘ min ↗	

$f(\frac{1}{3})=3(\frac{1}{3})^{2}-2(\frac{1}{3})+5=\frac{14}{3}$ مینیمم نسبی

$$\left.\begin{array}{l} f(-2):3(-2)^{2}-2(-2)+5=21 \\ f(\frac{1}{3})=\frac{14}{3} \\ f(1)=3(1)^{2}-2(1)+5=6 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \max_{\text{مطلق}}=(-2,21) \\ \min_{\text{مطلق}}=(\frac{1}{2},\frac{14}{3}) \end{array}$$

ب) $f(x)=x^{3}-3x \quad [-1,2]$

پاسخ:

$f'(x):3x^{2}-3 \xrightarrow{f'(x)=0} 3x^{2}-3=0 \to x^{2}=1 \Rightarrow x=\pm 1$ نقاط بحرانی

		-1		$+1$	
f'	$+$		$-$		$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$f(-1)=(-1)^3-3(-1)=2\xrightarrow{\text{نسبی max}}(-1,2)$$
$$f(1)=1-3=-2\xrightarrow{\text{نسبی min}}(1,-2)$$
$$f(-1)=2\rightarrow \text{مطلق max}=(-1,2)$$
$$f(1)=-2\rightarrow \text{مطلق min}=(1,-2)$$
$$f(2)=2^3-3(2)=2\rightarrow \text{مطلق max}=(2,2)$$

پ) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & 0\le x<2\\ 4-x & x\ge 2\end{cases}$

پاسخ:

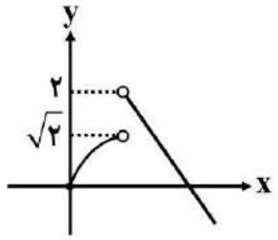
$x=2\rightarrow$ نقطه ناپیوستگی $\Rightarrow$ نقطه بحرانی

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{x}} & 0<x<2\\ -1 & x>2\end{cases}\xrightarrow{x=0}$$

		0		2	
f'			$+$		$-$
f		0	$\nearrow$	2	$\searrow$

$\Rightarrow (2,2)$ ماکزیمم نسبی

نمودار تابع $\Rightarrow$



۱۰- ضرایب a و b را در تابع $f(x)=x^3+ax+b$ طوری پیدا کنید که در نقطه $(1,2)$، ماکزیمم نسبی داشته باشد.

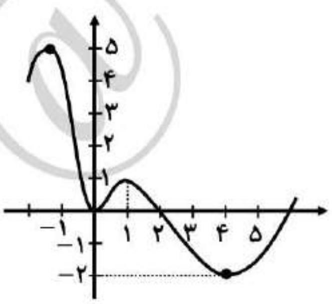
پاسخ: چون نقطه $(1,2)$ عضو تابع $f(x)$ است، پس $f(1)=2$

همچنین چون نقطه $(1,2)$، ماکزیمم نسبی تابع است پس $f'(1)=0$ می‌باشد.

$$f(1)=2\rightarrow 1+a+b=2\rightarrow a+b=1$$
$$f'(x):3x^2+a\xrightarrow{f'(1)=0}3+a=0\rightarrow \boxed{a=-3}$$
$$\xrightarrow{a+b=1}-3+b=1\rightarrow \boxed{b=4}$$

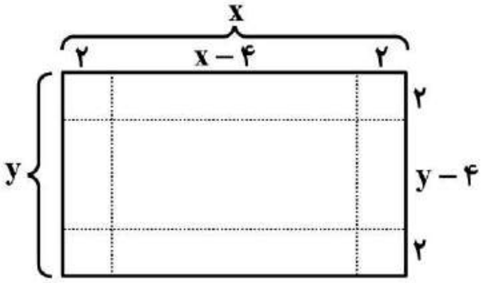
۱۱- نمودار تابعی مانند f را به گونه‌ای رسم کنید که در تمام شرایط زیر صدق کند. $f(0)=0$, $f(4)=-2$, $f(-1)=5$ ، نقطه $(1,1)$ ماکزیمم نسبی این تابع باشد.

پاسخ:



۱۲- یک برگه کاغذی مستطیل‌شکل با اضلاع x و y در اختیار داریم. با بریدن چهار مربع به ضلع h از گوشه‌های آن و تا زدن اضلاع، یک مکعب ساخته شده است. اگر $x.y=100cm^2$ و $h=2cm$، مقادیر x و y را طوری پیدا کنید که حجم این مکعب بیشترین مقدار شود.

پاسخ:



$$\Rightarrow x.y=100 \Rightarrow y=\frac{100}{x}$$

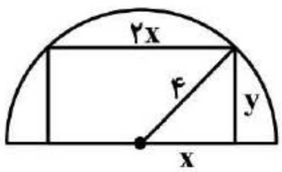
$$\text{حجم} \Rightarrow V=2\times(x-4)(y-4)=2xy-8x-8y+32$$

$$\xrightarrow[y=\frac{1}{x}]{xy=100} V=232-8x-\frac{800}{x} \Rightarrow V'(x)=-8+\frac{800}{x^2}$$

$$\xrightarrow{V'(x)=0} \frac{800}{x^2}=8 \to x^2=100 \Rightarrow x=10 \Rightarrow y=10$$

۱۳- یک مستطیل در یک نیم‌دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره، ۴ سانتی‌متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری به دست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار باشد.

پاسخ:



$$x^2+y^2=4^2 \Rightarrow y^2=4^2-x^2 \Rightarrow y=\sqrt{16-x^2}$$

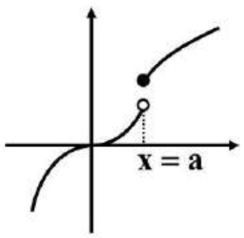
$$S=2x.y=2x\sqrt{16-x^2} \Rightarrow S'=2\sqrt{16-x^2}+2x\times\frac{-2x}{2\sqrt{16-x^2}}$$

$$\Rightarrow S'=\frac{2(16-x^2)-2x^2}{2\sqrt{16-x^2}}=\frac{32-4x^2}{\sqrt{16-x^2}}=0 \Rightarrow 4x^2=32 \to x^2=8 \Rightarrow x=\sqrt{8} \Rightarrow y=\sqrt{8}$$

۱۴- توابع $f(x)=\begin{cases}2x & x\ge 1\\ x & x<1\end{cases}$ و $g(x)=x^3$ در تمام $\mathbb{R}$ صعودی اکیداند.

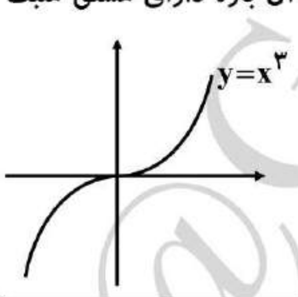
الف) آیا می‌توان گفت هر تابع که در یک بازه صعودی اکید باشد، در آن بازه مشتق‌پذیر هم هست؟

پاسخ: خیر ـ زیرا ممکن است تابع دارای ناپیوستگی باشد. نمودار روبه‌رو بیانگر یک تابع اکیداً صعودی است ولی در نقطه $x=a$ مشتق ندارد.

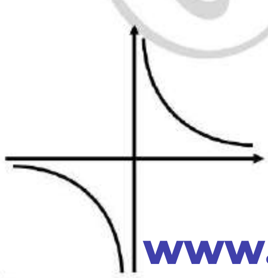


ب) آیا می‌توان گفت هر تابع که در یک بازه صعودی اکید و مشتق‌پذیر باشد، در هر نقطه از آن بازه دارای مشتق مثبت است؟

پاسخ: بله ـ تابع $y=x^3$ ، صعودی اکیداً است و مشتق در هر نقطه از آن مثبت است.

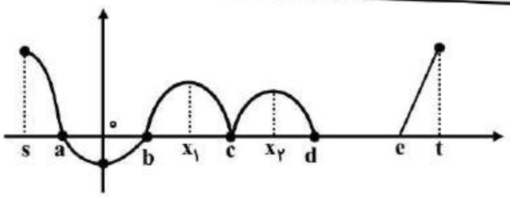


۱۵- آیا می‌توان گفت تابع $y=\frac{1}{x}$ در تمام دامنه خود نزولی اکید است؟



پاسخ: خیر ـ با توجه به نمودار تابع در می‌یابیم که تابع در $x=0$ مجانب قائم دارد پس دارای جهش می‌باشد پس در تمام دامنه‌اش نزولی اکید نیست ولی در بازه‌های $(-\infty,0)$ و $(0,+\infty)$ نزولی اکید است.

۱۶- نمودار تابع f' در شکل زیر داده شده است.



می دانیم در بازه‌هایی که نمودار f' بالای محور x هاست نمودار تابع f صعودی است.

الف) صعودی و نزولی بودن تابع f را در $[s,t]$ بررسی کنید.

پاسخ: تابع در بازه‌های (s,a) و (b,t) صعودی و در بازه‌ی (a,b) نزولی و هم‌چنین در بازه (d,e) نزولی می‌باشد.

ب) نقاط a، b، c، d و e کدام بحرانی، کدام ماکزیمم نسبی و کدام مینیمم نسبی‌اند؟

پاسخ: کافی است جدول تعیین‌علامت تابع f' را به دست آوریم.

	s		a		b		c		d		e	
f'		+		−		+		+		صفر		+
f		↗		↘		↗		↗		↗		

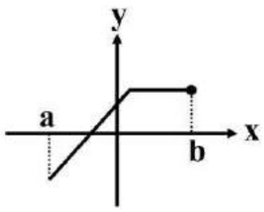
در $x=a$ ماکزیمم نسبی دارد.

در نقاط $x=a,b,c,d,e$ بحرانی هستند زیرا مشتق در این نقاط برابر صفر است و در $x=b$ مینیمم نسبی است.

۱۷- برای هر یک از موارد زیر، یک نمودار رسم کنید.

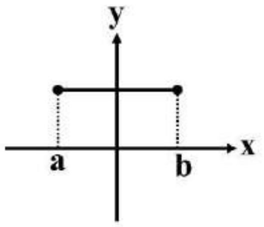
الف) تابع f در بازه‌ای مانند $[a,b]$ صعودی است اما صعودی اکید نیست.

پاسخ:



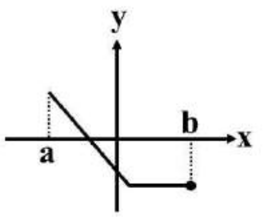
ب) تابع f در بازه‌ای مانند $[a,b]$ هم صعودی و هم نزولی است.

پاسخ: نکته: توابع ثابت هم صعودی هستند و هم نزولی.



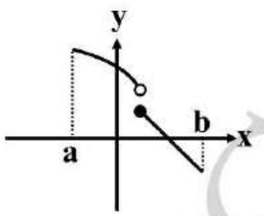
پ) تابع f در بازه‌ای مانند $[a,b]$ نزولی است اما نزولی اکید نیست.

پاسخ:



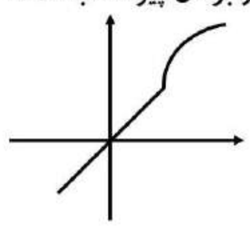
ت) تابعی که در یک بازه نزولی است اما در برخی نقاط آن بازه ناپیوسته است.

پاسخ:



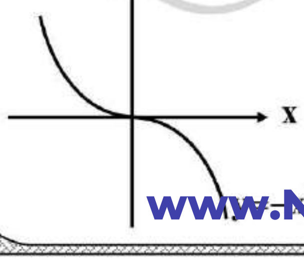
ث) تابعی مانند f در یک بازه اکیداً صعودی و بر آن پیوسته باشد اما در برخی نقاط آن بازه مشتق‌پذیر نباشد.

پاسخ:



ج) تابعی که در یک بازه اکیداً نزولی و مشتق‌پذیر است اما مشتق آن در برخی نقاط منفی نباشد.

پاسخ:



۱۸- توابع زیر در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی‌اند؟

الف) $y = ۲x^۳ - ۳x^۲ - ۱۲x + ۷$

پاسخ:

$$y' = ۶x^۲ - ۶x - ۱۲ \xrightarrow{y'=۰} ۶x^۲ - ۶x - ۱۲ = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ - x - ۲ = ۰ \Rightarrow (x-۲)(x+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ x = -۱ \end{cases}$$

تابع در بازه‌های $(-\infty, -۱)$ و $(۲, +\infty)$ صعودی و در بازه‌ی $(-۱, ۲)$ نزولی

x		-۱		۲	
y'	+		−		+
y	↗		↘		↗

ب) $f(x) = \dfrac{x}{x-۲} \Rightarrow Df = R - \{۲\}$

پاسخ:

$$f'(x) = \frac{(۱)(x-۲) - (۱)(x)}{(x-۲)^۲} = \frac{-۲}{(x-۲)^۲} \Rightarrow$$

x		۲	
f'	−		−
f	↘		↘

تابع در $\mathbb{R} - \{۲\}$ (در تمام نقاط دامنه) نزولی می‌باشد.

جهت تقعر نمودار و نقطه عطف آن

۱۹- موارد زیر را کامل کنید.

الف) اگر مقدار f'' در یک بازه مثبت باشد، تابع f' در آن بازه .... (صعودی) است و لذا شیب خطوط مماس بر منحنی در آن بازه .... (افزایش) می‌یابد و تقعر تابع f در آن بازه رو به .... (بالا) است.

ب) اگر مقدار f'' در یک بازه منفی باشد، تابع f' در آن بازه .... (نزولی) است ولذا شیب خطوط مماس بر منحنی در آن بازه .... (کاهش) می‌یابد و تقعر تابع f در آن بازه رو به .... (پایین) است.

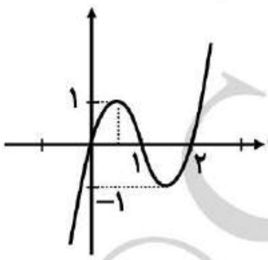
۲۰- نمودار تابع $f(x)$ را با اطلاعات زیر رسم کنید.

$$f(۰) = f(۱) = f(۲) = ۰$$

بر بازه $(-\infty, ۱)$ ، $f''(x) < ۰$

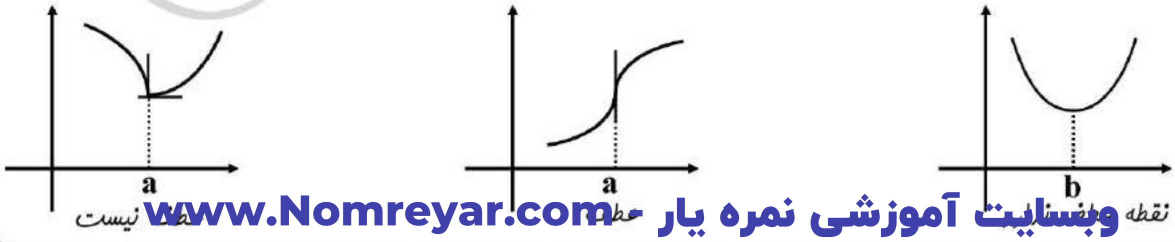
بر بازه $(۱, +\infty)$ ، $f''(x) > ۰$

پاسخ:



۲۱- در هر یک از نمودارهای زیر، نقاط عطف را در صورت وجود مشخص و خط مماس بر منحنی در نقاط عطف را رسم کنید.

پاسخ:



۲۲- کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست است؟

الف) در نقطه عطف علامت $f''(x)$ تغییر می‌کند.

پاسخ: درست است.

ب) هر نقطه‌ای که در آن مقدار f'' برابر صفر شود یک نقطه عطف است.

پاسخ: نادرست است. در تابع $f(x)=x^4$، $f''(a)=0$ می‌شود ولی چون جهت تقعر عوض نمی‌شود پس نقطه عطف است.

ت) تابع می‌تواند بیش از یک نقطه عطف داشته با شد.

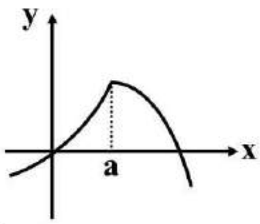
پاسخ: درست است.

ث) تابع صعودی اکید، نقطه عطف ندارد.

پاسخ: نادرست است. تابع $y=x^3$ تابع اکید صعودی است و در $x=0$ نقطه عطف دارد.

۲۳- نمودار تابع f را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطه‌ای مانند a جهت تقعر عوض شود ولی این نقطه، نقطه عطف نباشد.

پاسخ:



۲۴- جهت تقعر توابع زیر را در دامنه آن‌ها بررسی کرده و نقطه عطف آن‌ها را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x+4$

پاسخ:

$$f'(x)=x^2-3 \Rightarrow f''(x)=2x \Rightarrow$$

		0	
f''	$-$		$+$
f	تقعر رو به پایین		تقعر رو به بالا

$x=0$ نقطه عطف است.

ب) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ $\quad Df=\mathbb{R}-\{1\}$

پاسخ:

$$f'(x)=\frac{1(x-1)-(1)(x+1)}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{0+4(x-1)}{(x-4)^4}=\frac{4}{(x-1)^3} \Rightarrow$$

		1	
f''	$-$		$+$
f	تقعر رو به پایین		تقعر رو به بالا

$x=1$ نقطه عطف نیست.

پ) $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$

پاسخ:

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} \Rightarrow f''(x)=\frac{0-3\times\frac{2}{3\sqrt{x+1}}}{(3\sqrt[3]{(x+1)^2})^2}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{-2}{3\sqrt[3]{(x+1)^5}} \Rightarrow$$

		-1	
f''	$+$		$-$
f	تقعر رو به بالا		تقعر رو به پایین

$x=-1$ نقطه عطف است.

۲۵- برای هر مورد یک تابع درجه ۳ مثال بزنید که نقاط داده‌شده، نقطه عطف آن باشد.

الف) نقطه $(\circ,\circ)$ پاسخ: $y = x^{۳}$

ب) نقطه $(۱,\circ)$ پاسخ: $y = (x-۱)^{۳}$

پ) نقطه $(\circ,۱)$ پاسخ: $y = (x^{۳}+۱)$

ت) نقطه $(۲,۲)$ پاسخ: $y = (x-۲)^{۳}+۲$

۲۶- مقادیر a، b و c در تابع $f(x) = ax^{۳} + bx^{۲} + c$ طوری به دست آورید که در شرایط زیر صدق کند.

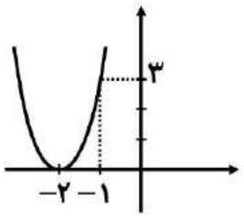
$f(\circ) = ۱$، $f(۱) = ۲$ و $x = \frac{۱}{۲}$ طول نقطه عطف نمودار تابع f باشد.

پاسخ:

$$f(x) = ax^{۳} + bx^{۲} + c$$
$$f(\circ) = ۱ \to \circ+\circ+c = ۱ \to c = ۱$$
$$f(۱) = ۲ \Rightarrow a+b+۱ = ۲ \to a+b = ۱$$
$$\text{عطف } x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow f''(\frac{۱}{۲}) = \circ \Rightarrow f'(x) = ۳ax^{۲} + ۲bx \Rightarrow f''(x) = ۶ax + ۲b$$
$$\Rightarrow f''(\frac{۱}{۲}) = ۶a \times (\frac{۱}{۲}) + ۲b = \circ \Rightarrow ۳a + ۲b = \circ$$
$$\begin{cases} a+b = ۱ \\ ۳a+۲b = \circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۲a-۲b = -۲ \\ ۳a+۲b = \circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -۲ \\ b = ۳ \end{cases}$$

۲۶- اگر شکل کشیده‌شده مربوط به نمودار تابع f' باشد، کدام نمودار می‌تواند نمودار تابع f باشد؟

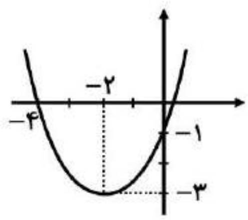
پاسخ:



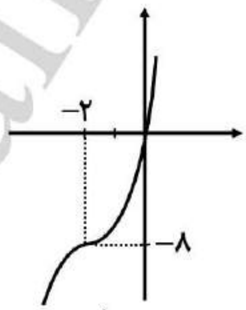
$$x_s < \circ \Rightarrow \frac{-b}{۲a} < \circ \xrightarrow{a>\circ} b > \circ$$

یعنی تابع صعودی و طول نقطه عطف آن منفی باشد، پس شکل (ب) درست است.

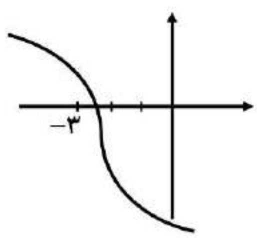
الف)



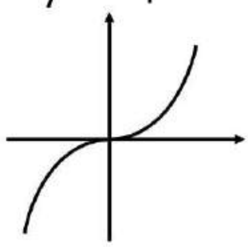
ب)



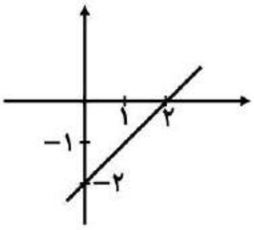
پ)



ت)



۲۷- اگر شکل زیر نمودار تابع f'' باشد، کدام نمودار می‌تواند نمودار تابع f باشد.

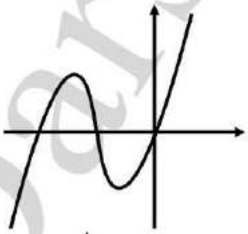


پاسخ:

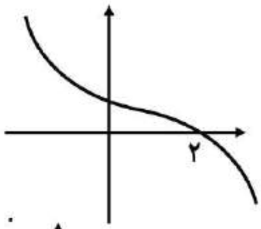
$$y = ax + b \Rightarrow a > 0 \,,\, b < 0$$

تابع صعودی و طول نقطه عطف یعنی $x = \dfrac{-b}{3a}$ مثبت می‌باشد. که گزینه‌ی (پ) درست است.

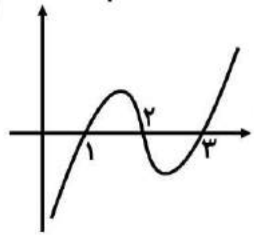
الف)



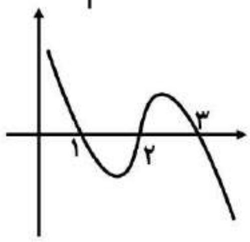
ب)



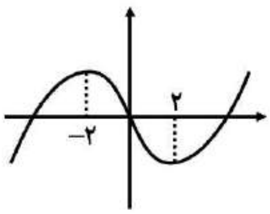
پ)



ت)



۲۸- اگر (۰,۰) نقطه عطف تابع درجه سوم $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ باشد که نمودار آن در شکل زیر رسم شده است، a، b و c را پیدا کنید.



پاسخ:

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c \xrightarrow{(0,0)} 0 + 0 + 0 + c = 0 \Rightarrow \boxed{c = 0}$$

$$y' = 3x^2 + 2ax + b$$

$$y'' = 6x + 2a$$

$$\xrightarrow[y''=0]{x=0} 6(0) + 2a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

$$\xrightarrow[f'(2)=0]{\min \quad x=2} 3(2)^2 + b = 0 \rightarrow b = -12$$

۲۹- جدول رفتار و نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $f(x) = 2x^2 - 4x + 1 \quad D_f = \mathbb{R}$

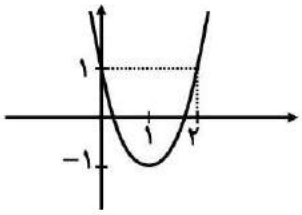
پاسخ:

$$f'(x) = 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f''(x) = 4 >$$

$$f(0) = 1$$

		۰		۱	
f'	−		−		+
f''	+ ◡		+ ◡		+ ◡
f	↘		↘		↗



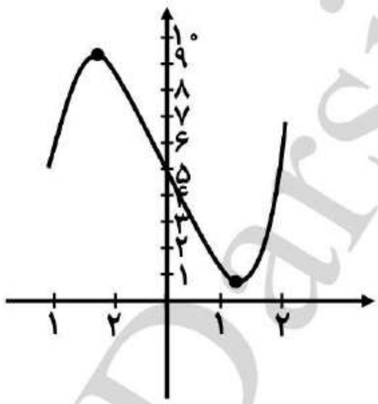
ب) $f(x) = x^3 - 5x + 5 \quad D_f = \mathbb{R}$

پاسخ:

$$f'(x)=3x^2-5=0 \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{\frac{5}{3}} \\ x=-\sqrt{\frac{5}{3}} \end{cases}$$

$$f''(x)=6x=0 \Rightarrow x=0$$

		$-\sqrt{\frac{5}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{5}{3}}$	
f'	+	0	−	|	−	0	+
f''	−		−	0	+		+
f	↗	۹/۳	↘	۵	↘	۰/۷	↗



پ) $f(x)=-x(x+2)^2$

پاسخ:

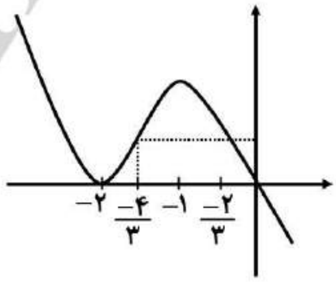
$$f'(x)=(-1)(x+2)^2+2(x+2)(-x)=0$$

$$=(x+2)(-x-2-2x)=(x+2)(-3x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$f''(x)=(1)(-3x-2)+(-3)(x+2)=0$$

$$\Rightarrow f''(x)=-6x-8=0 \to x=-\frac{4}{3}$$

x		-2		$-\frac{4}{3}$		$-\frac{2}{3}$	
f'	−	0	+	|	+	0	−
f''	+		+	0	−		−
f	↘	0	↗		↗		↘



ت) $f(x)=\frac{2x-1}{x-2} \qquad D_f=\mathbb{R}-\{2\}$

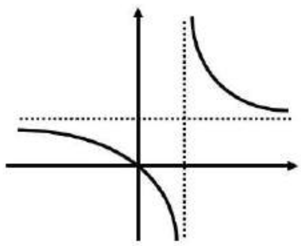
پاسخ:

$$(1)\begin{cases} x=2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=\pm\infty \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x-2}=2 \end{cases}$$

$$f'(x)=\frac{2(x-2)-(1)(2x-1)}{(x-2)^2}=\frac{-3}{(x-2)^2}$$

$$f''(x)=\frac{0-(-3)(2(x-2))}{(x-2)^4}=\frac{+6}{(x-2)^3}$$

x		0		2	
f'	−	|	−	|	−
f''	−		−		+
f	↘	0	↘		↘



ث) $f(x)=\dfrac{-x}{x+۳} \qquad D_f=\mathbb{R}-\{-۳\}$

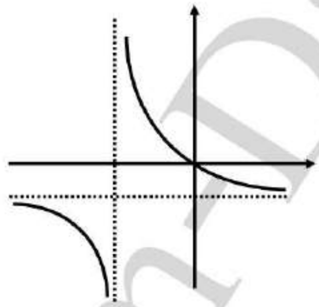
پاسخ:

(۱) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -۳} f(x)=\pm\infty \Rightarrow x=-۳ & \text{مجانب قائم} \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-x}{x+۳}=-۱ \Rightarrow y=-۱ & \text{مجانب افقی} \end{cases}$

(۲) $f'(x)=\dfrac{-(x+۳)-(۱)(-x)}{(x+۳)^۲}=\dfrac{-۳}{(x+۳)^۲}$

(۳) $f''(x)=\dfrac{۰+۳(۲(x+۳))}{(x+۳)^۴}=\dfrac{۶}{(x+۳)^۳}$

	−۳	
f'	−	−
f''	∩ (−)	∪ (+)
f	↘	↘



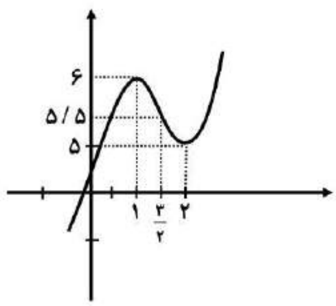
ج) $f(x)=۲x^۳-۹x^۲+۱۲x+۱ \qquad D_f=R$

پاسخ:

$f'(x)=۶x^۲-۱۸x+۱۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=۲ \end{cases}$

$f''(x)=۱۲x-۱۸=۰ \Rightarrow \boxed{x=\dfrac{۳}{۲}}$

x	$-\infty$		۱		$\frac{۳}{۲}$		۲		$+\infty$
f'	+	+	۰	−		−	۰	+	
f''	−	−		−	۰	+		+	
f	↗	↘	۶	↗	۵/۵	↘	۵	↗	



۳۰- فرض کنید $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$، محل تقاطع مجانب‌های آن نقطه $(۲,۱)$ است. اگر این تابع از نقطه $(-۱,۰)$ بگذرد. ضابطه تابع را به دست آورید.

پاسخ:

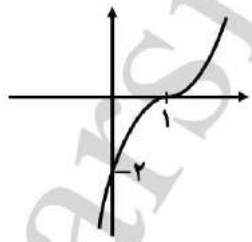
محل تقاطع مجانب‌ها: $(۲,۱) \Rightarrow (۲,۱)=(\dfrac{-d}{c}, \dfrac{a}{c})$

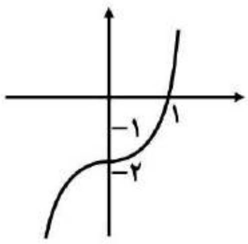
$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-d}{c}=۲ \Rightarrow d=-۲c \\ \dfrac{a}{c}=۱ \Rightarrow a=c \end{cases}$

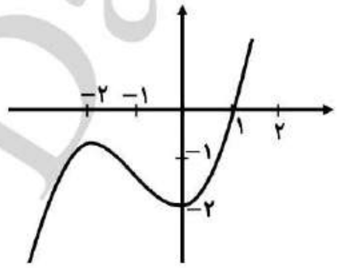
$(-۱,۰)$ صدق $\Rightarrow f(-۱)=۰ \Rightarrow \dfrac{-a+b}{-c+d}=۰ \Rightarrow -a=-b \Rightarrow a=b$

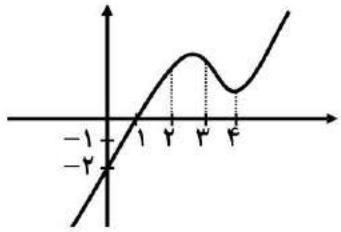
$f(x)=\dfrac{ax+a}{ax-۲a} \Rightarrow f(x)=\dfrac{x+۱}{x-۲}$

۳۱- کدام‌یک از نمودارهای زیر مربوط به تابع $f(x)=x^{3}+x-2$ است.

الف)


ب)


پ)


ت)


پاسخ:

$x=\frac{-b}{3a}=\frac{0}{3(1)}=0\Rightarrow f(0)=-2$:نقطه عطف

$a>0\Rightarrow$ تابع صعودی

پس نقطه $(0,-2)$ نقطه عطف و تابع صعودی است پس گزینه‌ی (ب) درست است.