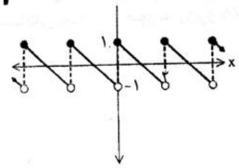
۱۴ ریاضی

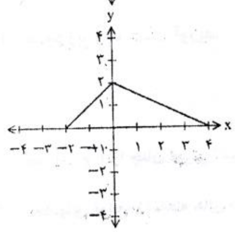
نام :		
نام خانوادگی :	تولید ملی دبیرستان ماندگار البرز 98-99امتحانات نوبت دوم - سال تحصیلی تاریخ : //	۱۰۰ دقیقه
کلاس :	درس: نام دبیر: آقای	
صفحه : ۱	حسابان	۹۸/۱۰/۲۱

ردیف	توجه: پاسخ سوالات رابادقت ، کامل و خوش خط و خوانا با خودکار آبی یا مشکی بنویسید . در همه حال و همه جا یاد و ذکر خداوند متعال را فراموش نکنید.	بارم

۱- نمودار روبرو از انتقال، تقارن و انبساط طولی و عرضی تابع باضابطهٔ $y = x - \lfloor x \rfloor$ بدست آمده است. ضابطهٔ این تابع را مشخص نمایید. (۱/۵ نمره)



۲- نمودار تابع با ضابطهٔ $y = 2f(1-x) - 1$ به صورت روبرو می باشد. نمودار تابع f را رسم نموده، دامنه و برد آنرا مشخص کنید. (۲نمره)

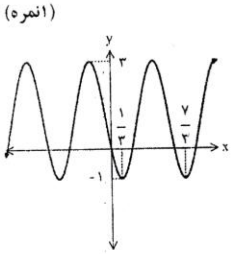


۳- نمودار تابع وارون تابع باضابطهٔ $f(x) = 7 - x^3 + 6x^2 - 12x$ چگونه بر نمودار تابع باضابطهٔ $y = 1 - \sqrt[4]{2x-4}$ منطبق می گردد. (۱نمره)

٤- مقدار a را چنان تعیین کنید که تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & x \geq a \\ 3 - 2x & x < a \end{cases}$ یکنوا باشد. (۱/۵ نمره)

٥- باقیماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x + 2$ و $x - 1$ به ترتیب برابر ۷- و ۵ می باشد، باقیمانده تقسیم $p(x)$ بر $x^2 + x - 2$ را به دست آورید. (۱نمره)

٦- مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که نمودار تابع باضابطهٔ $y = k\sin(ax + b)) + c$ به صورت روبرو باشد. (۲نمره)



۷- مقدار a را چنان تعیین کنید که $x = \frac{\pi}{3}$ یکی از ریشه های معادلهٔ $a^2\cos(4x) + \sqrt{3}a\sin(x) + 2 = 0$ باشد. (۱نمره)

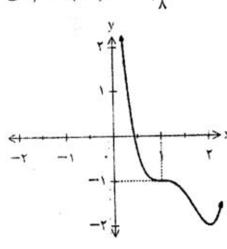
۸- جواب کلی معادلات زیر را به دست آورید. (۳نمره)

الف) $\cos(3x) = \sin(\frac{\pi}{8} - x)$

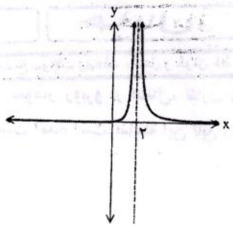
ب) $\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 1$

۹-اگر نمودار تابع f به صورت روبرو باشد، آن گاه حاصل حد زیر را بدست آورید.(۱نمره)

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x+2}{f(x)+1} + \lim_{x \to 0^+} \frac{x - \lfloor x \rfloor}{f(x)}$$



۱۰- a و b را چنان تعیین کنید که نمودار تابع باضابطه $f(x)=\dfrac{x}{2x^2+ax+b}$ در همسایگی عدد ۲ به صورت روبرو باشد. (۱نمره)



۱۱- حدود زیر را به دست آورید. (۲نمره)

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-\sqrt{x})^2(\sqrt{x}+2)-\sqrt{x^5}+x\sqrt{16x}}{8x+\sqrt{x^3}}$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left\lfloor\dfrac{1-x^3}{x^2+1}\right\rfloor$

۱۲- مقدار a و b را چنان تعیین کنید که تساوی $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(a+1)x^3+2x^2+5x-1}{(b-2)x^2+3x-1}=\dfrac{1}{3}$ برقرار باشد. (۱نمره)

۱۳- مجانبهای توابع با ضابطه های زیر را تعیین کنید. (۲نمره)

الف) $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^3-3x+2}$

ب) $f(x)=\dfrac{\lfloor x^2\rfloor}{1-2^{\sin(x)}}\ ,\ x\in[-\pi,\pi]$

موفق باشید.

کلید درس حسابان ترم اول ۹۸

۱

۱) مراحل رسم نمودار داده شده به ترتیب زیر است:

$$y = x - [x] \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به طول‌ها}} y = -x + [x] \xrightarrow{\text{انبساط افقی به اندازه ۲ واحد}} y = \frac{-x}{۲} + \left[\frac{x}{۲}\right] \xrightarrow{\text{انبساط عمودی به اندازه ۲ واحد}}$$

$$y = ۲\left(\frac{-x}{۲} + \left[\frac{x}{۲}\right]\right) \xrightarrow{\text{انتقال عمودی به اندازه ۱ واحد به بالا}} y = -x + ۲\left[\frac{x}{۲}\right] + ۱$$

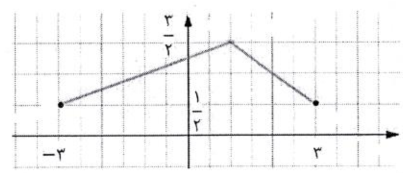
۲) نمودار تابع f را به ترتیب زیر رسم می‌کنیم:

$$y = ۲f(۱-x) - ۱ \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور طول‌ها}} y = ۲f(۱+x) - ۱$$

$$\xrightarrow{\text{انتقال افقی به اندازه ۱ واحد به راست}} y = ۲f(x) - ۱ \xrightarrow{\text{انتقال عمودی به اندازه ۱ واحد به بالا}}$$

$$y = ۲f(x) \xrightarrow{\text{انقباض عمودی به اندازه نیم واحد}} y = f(x)$$

$$D_f = [-۳\,,۳]\ ,\ R_f = \left[\frac{۱}{۲}\,,\frac{۳}{۲}\right]$$



۳) وارون تابع به صورت زیر محاسبه می‌شود:

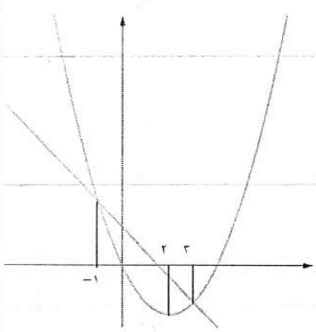
$$f(x) = -۱ + ۸ - ۱۲x + ۶x^۲ - x^۳ \rightarrow y = -۱ + (۲-x)^۳ \rightarrow x = -۱ + (۲-y)^۳ \rightarrow$$

$$x + ۱ = (۲-y)^۳ \rightarrow \sqrt[۳]{x+۱} = ۲ - y \rightarrow y = ۲ - \sqrt[۳]{x+۱} \rightarrow f^{-۱}(x) = ۲ - \sqrt[۳]{x+۱}$$

برای آنکه نمودار $f^{-۱}(x)$ بر نمودار تابع $y = ۱ - \sqrt[۳]{۲x-۴}$ منطبق شود به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$y = ۲ - \sqrt[۳]{x+۱} \xrightarrow{\text{انتقال افقی به اندازه ۵ واحد به راست}} y = ۲ - \sqrt[۳]{x-۴} \xrightarrow{\text{انقباض افقی به اندازه نیم واحد}} y = ۲ - \sqrt[۳]{۲x-۴}$$

$$\xrightarrow{\text{انتقال عمودی به اندازه ۱ واحد به پایین}} y = ۱ - \sqrt[۳]{۲x-۴}$$



۴) با توجه به ضابطهٔ تابع یعنی $f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۴x\ ; x \le a \\ ۳ - ۲x\ ; x > a \end{cases}$ چون ضابطهٔ دوم نزولی اکید است باید ضابطهٔ اول نیز نزولی اکید باشد و لذا داریم:

$$\begin{cases} \text{طول راس سهمی} \ge a \\ f_۱(a) \ge f_۲(a) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{-(-۴)}{۲} \ge a \\ a^۲ - ۴a \ge ۳ - ۲a \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a \le ۲ \\ a^۲ - ۲a - ۳ \ge ۰ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a \le ۲ \\ a \le -۱ \text{ یا } a \ge ۳ \end{cases} \xrightarrow{\cap} a \le -۱$$

۵) طبق قضیهٔ تقسیم داریم:

$$p(x) = (x^۲ + x - ۲)q(x) + \underbrace{ax + b}_{r(x)}$$

$$\begin{cases} p(-۲) = -۷ \\ p(۱) = ۵ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -۲a + b = -۷ \\ a + b = ۵ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = ۴ \\ b = ۱ \end{cases} \rightarrow r(x) = ۴x + ۱$$

۶) برای یافتن پارامترهای تابع $f(x) = k\sin(ax+b)+c$ با توجه به نمودار داده شده بدیهی است که باید مقادیر a و k مختلف‌العلامه باشند و لذا کافی است k را منفی و a را مثبت اختیار کنیم و لذا داریم:

$$\begin{cases} Max(f) = ۳ \\ \min(f) = -۱ \\ T = \frac{۷}{۳} - \frac{۱}{۳} \\ f(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} |k| + c = ۳ \\ -|k| + c = -۱ \\ \frac{۲\pi}{|a|} = ۲ \\ -۲\sin b + ۱ = ۰ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k = -۲ \\ c = ۱ \\ a = \pi \\ b = \frac{\pi}{۶} \end{cases} \rightarrow f(x) = -۲\sin\left(\pi x + \frac{\pi}{۶}\right) + ۱$$

۷) چون $x = \frac{\pi}{۳}$ یکی از جواب‌های معادلهٔ $a^۲\cos ۴x + \sqrt{۳}a\sin x + ۲ = ۰$ است پس داریم:

$$a^۲\cos\frac{۴\pi}{۳} + \sqrt{۳}a\sin\frac{\pi}{۳} + ۲ = ۰ \rightarrow a^۲\left(\frac{-۱}{۲}\right) + \sqrt{۳}a\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) + ۲ = ۰ \rightarrow \frac{-a^۲}{۲} + \frac{۳a}{۲} + ۲ = ۰ \rightarrow$$
$$a^۲ - ۳a - ۴ = ۰ \rightarrow a = -۱\,,۴$$

۸) برای حل این معادلات به ترتیب زیر داریم:

الف) $\cos ۳x = \sin\left(\frac{\pi}{۸} - x\right) \rightarrow \cos ۳x = \cos\left(\frac{\pi}{۲} - \left(\frac{\pi}{۸} - x\right)\right) \rightarrow \cos ۳x = \cos\left(\frac{۳\pi}{۸} + x\right) \rightarrow$

$\nearrow ۳x = ۲k\pi + \left(\frac{۳\pi}{۸} + x\right) \rightarrow ۲x = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۸} \rightarrow x = k\pi + \frac{۳\pi}{۱۶}$

$\searrow ۳x = ۲k\pi - \left(\frac{۳\pi}{۸} + x\right) \rightarrow ۴x = ۲k\pi - \frac{۳\pi}{۸} \rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} - \frac{۳\pi}{۳۲}$

ب) $\cos ۲x + \sqrt{۳}\sin ۲x = ۱ \rightarrow \cos ۲x + \tan\frac{\pi}{۳}\sin ۲x = ۱ \xrightarrow{\times\cos\frac{\pi}{۳}}$

$\cos ۲x\cos\frac{\pi}{۳} + \sin ۲x\sin\frac{\pi}{۳} = \cos\frac{\pi}{۳} \rightarrow \cos\left(۲x - \frac{\pi}{۳}\right) = \cos\frac{\pi}{۳} \rightarrow$

$\nearrow ۲x - \frac{\pi}{۳} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳} \rightarrow ۲x = ۲k\pi + \frac{۲\pi}{۳} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۳}$

$\searrow ۲x - \frac{\pi}{۳} = ۲k\pi - \frac{\pi}{۳} \rightarrow ۲x = ۲k\pi \rightarrow x = k\pi$

۹) طبق نمودار داده شده داریم:

$$\lim_{x\to ۱^-}\frac{x+۲}{f(x)+۱} + \lim_{x\to ۰^+}\frac{x-[x]}{f(x)} = \frac{۱+۲}{(-۱)^+ + ۱} + \frac{۰^+}{+\infty} = \frac{۳}{۰^+} + \infty = +\infty$$

۱۰) طبق نمودار داده شده چون $\lim_{x\to ۲} f(x) = +\infty$ پس باید $x = ۲$ ریشهٔ مضاعف مخرج باشد و لذا داریم:

$$۲x^۲ + ax + b = ۲(x-۲)^۲ \rightarrow ۲x^۲ + ax + b = ۲x^۲ - ۸x + ۸ \rightarrow a = -۸ \text{ و } b = ۸$$

۱۱) برای محاسبهٔ حدود داده شده باید ابتدا توابع را ساده کنیم و لذا طبق قواعد خوانده شده داریم:

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x-\sqrt{x}\right)^{۲}\left(\sqrt{x}+۲\right)-\sqrt{x^{۵}}+x\sqrt{۱۶x}}{۸x+\sqrt{x^{۳}}}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x^{۲}-۲x\sqrt{x}+x\right)\left(\sqrt{x}+۲\right)-\sqrt{x^{۴}x}+۴x\sqrt{x}}{۸x+\sqrt{x^{۲}x}}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{۲}\sqrt{x}+۲x^{۲}-۲x^{۲}-۴x\sqrt{x}+x\sqrt{x}+۲x-x^{۲}\sqrt{x}+۴x\sqrt{۴}}{۸x+x\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}+۲x}{x\sqrt{x}+۸x}=۱$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{۱-x^{۲}}{x^{۲}+۱}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{-x^{۲}-۱+۲}{x^{۲}+۱}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-۱+\dfrac{۲}{x^{۲}+۱}\right]=\left[(-۱)^{+}\right]=-۱$

۱۲) چون حاصل حد تابع $f(x)=\frac{(a+۱)x^{۳}+۲x^{۲}+۵x-۱}{(b-۲)x^{۲}+۲x-۱}$ در بینهایت برابر عدد ثابت $\frac{۱}{۳}$ شده است پس درجه‌های صورت و مخرج باید مساوی باشند و لذا داریم:

$$\begin{cases}a+۱=۰\\ \dfrac{۲}{b-۲}=\dfrac{۱}{۳}\end{cases}\to\begin{cases}a=-۱\\ b=۸\end{cases}$$

۱۳) برای تعیین مجانب‌های این توابع داریم:

الف) چون $f(x)=\frac{(x-۱)(x-۳)}{(x-۱)^{۲}(x+۲)}$ پس $D_f=R-\{-۲,۱\}$ و چون $f(x)=\frac{x-۳}{(x-۱)(x+۲)}$ پس د اریم:

$\lim\limits_{x\to-۲,۱}f(x)=\pm\infty\to x=-۲,۱$ مجانب قائم

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=۰\to y=۰$ مجانب افقی

ب) بدیهی است که تابع $x\in[-\pi,\pi]$, $f(x)=\frac{[x^{۲}]}{۱-۲^{\sin x}}$ مجانب افقی ندارد و برای تعیین مجانب قائم آن داریم:

$۱-۲^{\sin x}=۰\to ۲^{\sin x}=۱\to \sin x=۰\to x=-\pi,۰,\pi$

$\lim\limits_{x\to۰}f(x)=\dfrac{۰\ \text{مطلق}}{۰\ \text{حدی}}=۰$ و $\lim\limits_{x\to\pm\pi}f(x)=\dfrac{۹}{۰\ \text{حدی}}=\pm\infty\to x=\pm\pi$ مجانب قائم