

۱- معادله $\frac{x+1}{2} - \frac{3}{1-x} = \frac{11}{2}$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

- (۱) یک ریشه‌ی مضاعف دارد.
 (۲) دو ریشه‌ی حقیقی دارد.
 (۳) یک ریشه‌ی صفر دارد.
 (۴) ریشه‌ی حقیقی ندارد.

۲- معادله‌ی رادیکالی $\sqrt{x^2 - \frac{1}{x}} - x = 2$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

- (۱) یک ریشه‌ی صحیح
 (۲) یک ریشه‌ی گویا
 (۳) یک ریشه‌ی اصم
 (۴) دو ریشه‌ی مختلف علامت

۳- نامعادله $|x - x^3| \leq x$ در مجموعه اعداد صحیح دارای چند جواب است؟

- (۱) ۲
 (۲) ۳
 (۳) ۱
 (۴) بی‌شمار

۴- مجموعه جواب نامعادله $\frac{\sqrt{x} + x}{\sqrt{x+1}} + 1 > \sqrt{x} + x$ شامل چند عضو صحیح است؟

- (۱) هیچ
 (۲) یک
 (۳) دو
 (۴) بی‌شمار

۵- مجموعه جواب‌های نامعادله $\frac{x^4 - 2\sqrt{2}x^2 + 3}{x^2 - x - 2} \leq 0$ کدام است؟

- (۱) $-1 < x < 2$
 (۲) $-1 \leq x \leq 2$
 (۳) $-1 \leq x < 2$
 (۴) $-3 < x < 2$

۶- در کدام یک از روابط زیر، y تابعی از x است؟

(۱) $y^2 - y = 2x + 1$
 (۲) $|y| = \sin\left(\frac{\pi|x|}{x}\right)$

(۳) $|x - 1| + |y^2 - 1| = 0$
 (۴) $y = \begin{cases} x+1 & \text{و } x > 2 \\ x-1 & \text{و } x < 3 \end{cases}$

۷- به فرض آن که $f\left(\frac{x+1}{x}\right) = \sqrt{x}$ دامنه‌ی تابع $y = f(x)$ کدام است؟

- (۱) $(0, +\infty)$
 (۲) $(0, 1)$
 (۳) $(1, +\infty)$
 (۴) $(0, 1)$

۸- در کدام گزینه توابع f و g با هم برابرند؟

(۱) $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ و $g(x) = \sqrt{x}\sqrt{x-1}$
 (۲) $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$ و $g(x) = x^2 + 1$

(۳) $f(x) = 0$ و $g(x) = \left[\frac{x^2}{x^2 + 1}\right]$
 (۴) هر سه گزینه

۹- در تساوی $f(2x+1) + f(7) = x^2 + 1$ مقدار $f(0)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{15}{4}$
 (۲) -4
 (۳) $\frac{17}{4}$
 (۴) $-\frac{17}{4}$

۱۰- اگر $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$ و $g(x) = \frac{x}{x-2}$ ، آنگاه دامنه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ چند عدد صحیح را شامل نمی‌شود؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۱- اگر $g(x) = \frac{x-1}{x}$ و $f(g(x)) = \sqrt{2x-1}$ آنگاه ضابطه $f(x)$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ (۲) $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ (۳) $\sqrt{x^2-1}$ (۴) $\sqrt{1-x^2}$

۱۲- اگر $f(x) = 3\sqrt{f(x)} - 2$ و $gof(x) = \frac{f(x)+1}{f(x)-1}$ باشد، دامنه‌ی تابع gof کدام است؟

- (۱) $[0, +\infty)$ (۲) $R - \{1\}$ (۳) $[0, 1) \cup (1, +\infty)$ (۴) $(0, +\infty)$

۱۳- اگر $f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \frac{1-x^2}{2x}$ باشد، تابع $y = f(\sin x)$ برابر است با:

- (۱) $\operatorname{tg} x$ (۲) $\frac{1}{\cos x}$ (۳) $\frac{1}{\sin x}$ (۴) $\operatorname{Cotg} x$

۱۴- به ازای چند مقدار طبیعی n تابع $f(x) = |x+7-2n| - |x+n|$ صعودی است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بی‌شمار

۱۵- اگر $f(x) = 1 - |1 - x^2|$ ، آنگاه تابع با ضابطه‌ی $y = |f(x)|$ از بازه‌های زیر نزولی اکید است؟

- (۱) $\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$ (۲) $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ (۳) $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ (۴) $\left(-3, -\frac{3}{2}\right)$

۱۶- ضابطه تابع معکوس تابع $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ با شرط $x \geq 1$ کدام است؟

- (۱) $y = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$ (۲) $y = \sqrt{1 - \sqrt{x}}$ (۳) $y = -\sqrt{1 + \sqrt{x}}$ (۴) $y = -\sqrt{1 - \sqrt{x}}$

۱۷- در تابع معکوس‌پذیر: $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-2}$ حاصل $f^{-1}(\sqrt{3})$ چقدر است؟

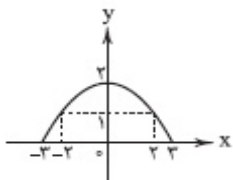
- (۱) ۳ و ۲ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۱۸- اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$ نمودار دو تابع f ، f^{-1} در چند نقطه متقاطع‌اند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) غیرمتقاطع

۱۹- اگر $g(x) = f(3x-4)$ ، $f^{-1}(x) = x + \sqrt{x}$ ، حاصل $g^{-1}(16)$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸



۲۰- اگر نمودار تابع f به صورت روبه‌رو باشد، دامنه‌ی تابع $y = \frac{1}{[f(x)]}$ کدام است؟

- (۱) $[-3, 3] - \{\pm 2\}$ (۲) $[-3, 3] - (-2, 2)$ (۳) $[-3, 3] - [-2, 2]$ (۴) $[-2, 2]$

۱- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{x+1}{2} - \frac{3}{1-x} = \frac{11}{2} \rightarrow \frac{x+1}{2} + \frac{3}{x-1} = \frac{11}{2} \rightarrow \frac{(x+1)(x-1)+6}{2(x-1)} = \frac{11}{2}$$

$$\rightarrow x^2 - 1 + 6 = 11x - 11 \rightarrow x^2 - 11x + 16 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 11^2 - 4(1)(16) = 121 - 64 = 57 > 0$$

چون مبین معادله، عددی مثبت است، لذا معادله دو ریشه حقیقی دارد.

۲- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\sqrt{x^2 - \frac{1}{x}} - x = 2 \rightarrow \sqrt{x^2 - \frac{1}{x}} = x + 2 \rightarrow x^2 - \frac{1}{x} = x^2 + 4x + 4$$

$$\rightarrow \frac{-1}{x} = 4x + 4 \rightarrow -1 = 4x^2 + 4x$$

$$\rightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 0 \rightarrow (2x + 1)^2 = 0 \Rightarrow 2x + 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

ملاحظه می‌شود که معادله‌ی فوق شامل یک ریشه‌ی مضاعف بوده که مقدار آن، عددی گویا است.

۳- گزینه ۱ صحیح است. $x = 0$ یک جواب است. واضح است که $x > 0$ باشد و داریم:

$$|x| |1 - x^2| \leq x \Rightarrow x |1 - x^2| \leq x \Rightarrow |1 - x^2| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq 1 - x^2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 2$$

$$\Rightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \Rightarrow 0 < x \leq \sqrt{2} \Rightarrow x = 1$$

۴- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} + 1 > \sqrt{x} + x \Rightarrow \frac{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1}} + 1 > \sqrt{x} + x$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+1} > \sqrt{x} + x \Rightarrow x < 1$$

$$\frac{x \geq 0}{x \in \mathbb{Z}} \rightarrow 0 \leq x < 1 \rightarrow x = 0 \Rightarrow \text{شامل یک عضو است.}$$

۵- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$x^4 - 2\sqrt{2}x^2 + 3 > 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow -1 < x < 2$$

۶- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$|y| = \sin\left(\frac{\pi|x|}{x}\right) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi x}{x}\right) = \sin \pi = 0; & x > 0 \\ \sin\left(\frac{\pi(-x)}{x}\right) = \sin(-\pi) = 0; & x < 0 \end{cases} \Rightarrow |y| = 0 \Rightarrow y = 0$$

بنابراین ضابطه‌ی این تابع به صورت $f(x) = 0$ با شرط $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ است.

۷- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{x+1}{x} = t \Rightarrow \frac{1}{x} = t - 1 \Rightarrow x = \frac{1}{t-1} \Rightarrow f(t) = \sqrt{\frac{1}{t-1}} \Rightarrow D_f = (1, +\infty)$$

۸- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. در گزینه‌های ۱ و ۲، تساوی دامنه‌ها برقرار نیست. در گزینه‌ی ۳، $D_f = D_g = \mathbb{R}$

$$\left[\frac{x^2}{x^2 + 1} \right] = 0 \text{ آنگاه } 0 < \frac{x^2}{x^2 + 1} < 1$$

۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا با قرار دادن $x = 3$ مقدار $f(3)$ را حساب می‌کنیم:

$$x = 3 \Rightarrow f(3) + f(3) = 3^2 + 1 \Rightarrow f(3) = 5$$

$$f(2x + 1) + 5 = x^2 + 1 \Rightarrow f(2x + 1) = x^2 - 4$$

برای پیدا کردن $f(0)$ به جای x عدد $-\frac{1}{2}$ را قرار می‌دهیم.

$$f(0) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 = \frac{1}{4} - 4 = -\frac{15}{4}$$

۱۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$, $D_g = \mathbb{R} - \{2\} \Rightarrow D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{1, 2\}$

$$g(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{x-2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} = (\mathbb{R} - \{1, 2\}) - \{0\} = \mathbb{R} - \{1, 2, 0\}$$

بنابراین دامنه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ سه عدد صحیح را شامل نمی‌شود.

۱۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر $g(x) = t$ فرض شود از رابطه $t = \frac{x-1}{x}$ مقدار x بر حسب t محاسبه می‌شود:

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad tx = x-1 \rightarrow x = \frac{1}{1-t}$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{1-t} - 1} = \sqrt{\frac{t+1}{1-t}}$$

۱۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f \circ f(x) = 3\sqrt{f(x)} - 2 \Rightarrow f(f(x)) = 3\sqrt{f(x)} - 2 \Rightarrow f(x) = 3\sqrt{x} - 2$$

$$g \circ f(x) = \frac{f(x) + 1}{f(x) - 1} = \frac{3\sqrt{x} - 1}{3\sqrt{x} - 3} \Rightarrow D_{g \circ f} = [0, +\infty) - \{1\} = [0, 1) \cup (1, +\infty)$$

۱۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \frac{1-x^2}{2x}$$

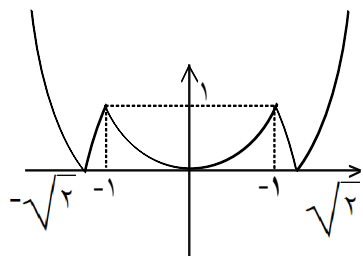
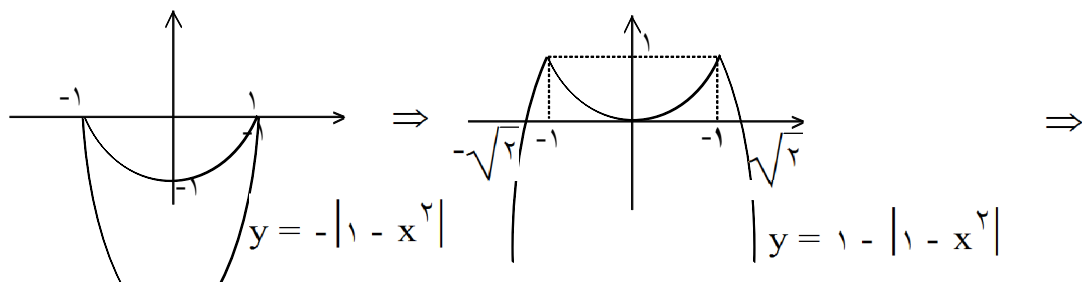
$$x \rightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{2} \rightarrow f\left(\frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}\right) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow f(\sin x) = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{Cotg} x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \\ \cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \\ \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \end{array} \right.$$

۱۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تابع $y = |x - a| - |x - b|$ با فرض $b \geq a$ صعودی است.

$$-n \geq 2n - 7 \Rightarrow n \leq \frac{7}{3} \Rightarrow n = 1, n = 2$$



$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1 \Rightarrow y = (x^2 - 1)^2 \Rightarrow \sqrt{y} = |x^2 - 1| \quad \left. \vphantom{f(x)} \right\} \Rightarrow \sqrt{y} = x^2 - 1 \Rightarrow \quad -۱۶$$

$$x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow |x^2 - 1| = x^2 - 1$$

$$x^2 = \sqrt{y} + 1 \Rightarrow |x| = \sqrt{\sqrt{y} + 1} \quad \left. \vphantom{x^2} \right\} \Rightarrow x = \sqrt{1 + \sqrt{y}} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$$

$$x \geq 1 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow |x| = x$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۱۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$(\sqrt{3}, a) \in f^{-1} \Rightarrow (a, \sqrt{3}) \in f \Rightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = \sqrt{3} \Rightarrow x+1 + \sqrt{x-2} = 3 \Rightarrow \sqrt{x-2} = 2-x \Rightarrow x=2$$

۱۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f^{-1}(x) = \frac{-3x-1}{x-2} \Rightarrow \frac{-3x-1}{x-2} = \frac{2x-1}{x+3} \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} f, f^{-1} \text{ غیر متقاطع}$$

۱۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$g(x) = f(3x-4) \Rightarrow y = f(3x-4) \Rightarrow 3x-4 = f^{-1}(y) \Rightarrow x = \frac{4 + f^{-1}(y)}{3}$$

$$\Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{4 + f^{-1}(x)}{3} \Rightarrow g^{-1}(16) = \frac{4 + 16 + 4}{3} = 8$$

۲۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دامنه‌ی تابع $y = \frac{1}{[f(x)]}$ به صورت $\{x \mid [f(x)] = 0\}$ می‌باشد، داریم:

$$[f(x)] = 0 \Rightarrow 0 \leq f(x) < 1 \xrightarrow{\text{طبق نمودار}} -3 \leq x < -2 \text{ یا } 2 < x \leq 3$$

پس دامنه‌ی تابع موردنظر به صورت $[-2, 2]$ است.