

۱- دامنه تابع $f(x) = \text{tg}(\omega\pi x)$ را حساب کنید.

« پاسخ »

$$\omega\pi x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\div (\omega\pi)} x \neq \frac{k}{\omega} + \frac{1}{\omega} \Rightarrow D = \left\{ x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{k}{\omega} + \frac{1}{\omega} \right\}$$

۲- در تابع $f(x) = \pi \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 1$ تناوب، بیشترین و کمترین مقدار تابع را حساب کنید.

« پاسخ »

$$T = \frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{2}\right|} = 4$$

$$\begin{cases} y_{\max} = \pi(1) + 1 = \pi + 1 \\ y_{\min} = \pi(-1) + 1 = -\pi + 1 \end{cases}$$

۳- در تابع $f(x) = 2\cos^2 x - 2\sin^2 x + 3$ تناوب، بیشترین و کمترین مقدار تابع را حساب کنید.

« پاسخ »

$$\cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$f(x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) + 3 \Rightarrow f(x) = 2\cos 2x + 3$$

$$T = \frac{2\pi}{|2|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\begin{cases} y_{\max} = 2(1) + 3 = 5 \\ y_{\min} = 2(-1) + 3 = 1 \end{cases}$$

۴- در تابع $f(x) = 5 - \sin x \cos x$ تناوب، بیشترین و کمترین مقدار تابع را حساب کنید.

« پاسخ »

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$$

$$f(x) = 5 - \sin x \cos x \Rightarrow f(x) = 5 - \frac{1}{2}\sin(2x)$$

$$T = \frac{2\pi}{|2|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\begin{cases} y_{\min} = 5 - \frac{1}{2}(1) = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \\ y_{\max} = 5 - \frac{1}{2}(-1) = 5 + \frac{1}{2} = \frac{11}{2} \end{cases}$$

۵- دامنه تابع $y = ۵ - ۲ \operatorname{tg}(\pi x)$ را به دست آورید.

« پاسخ »

$$y = ۵ - ۲ \operatorname{tg}(\pi x) \Rightarrow \pi x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\div(\pi)} x \neq k + \frac{1}{2}$$

$$D = \left\{ x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq k + \frac{1}{2} \right\}$$

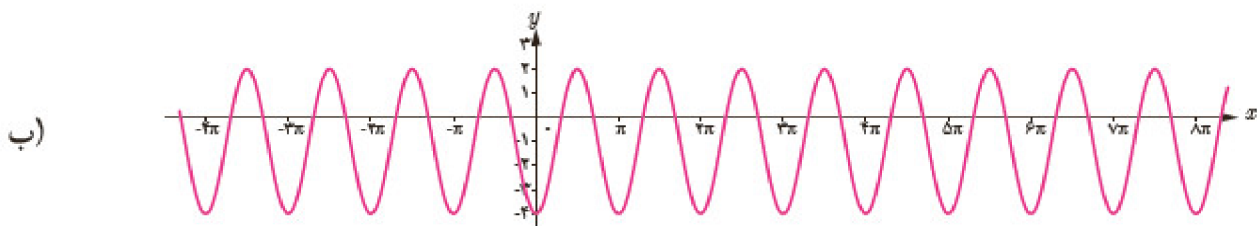
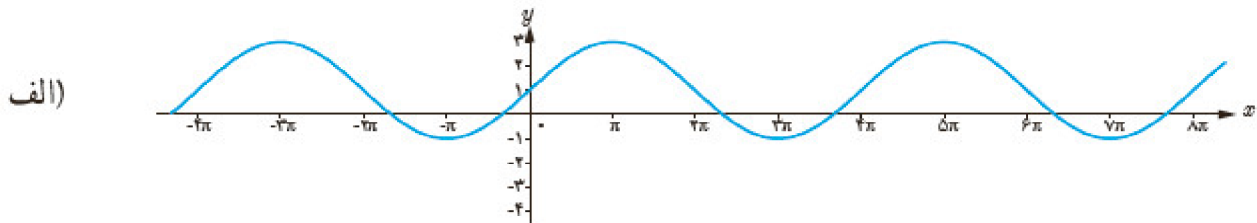
۶- در تابع $f(x) = ۵ - ۲ \operatorname{Cos}(۳x)$ بیشترین و کمترین مقدار تابع را حساب کنید.

« پاسخ »

$$T = \frac{۲\pi}{|۳|} = \frac{۲\pi}{۳}$$

$$\begin{cases} y_{\text{Max}} = ۵ - ۲(-۱) = ۷ \\ y_{\text{Min}} = ۵ - ۲(۱) = ۳ \end{cases}$$

۷- ضابطه‌ی مربوط به هریک از نمودارهای داده شده را بنویسید.



« پاسخ »

الف) $\max = ۳, \min = -۱, T = ۴\pi$

$$c = \frac{۳ + (-۱)}{۲} = ۱, a = \frac{۳ - (-۱)}{۲} = ۲, |b| = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲\pi}{۴\pi} = \frac{1}{2}$$

$$y = ۲ \operatorname{Sin}\left(\frac{1}{2}x\right) + ۱$$

$\max = ۲, \min = -۴, T = \pi$

ب) $c = \frac{۲ + (-۴)}{۲} = -۱, a = \frac{۲ - (-۴)}{۲} = ۳, |b| = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲\pi}{\pi} = ۲$

$$y = -۳ \operatorname{Cos}(۲x) - ۱$$

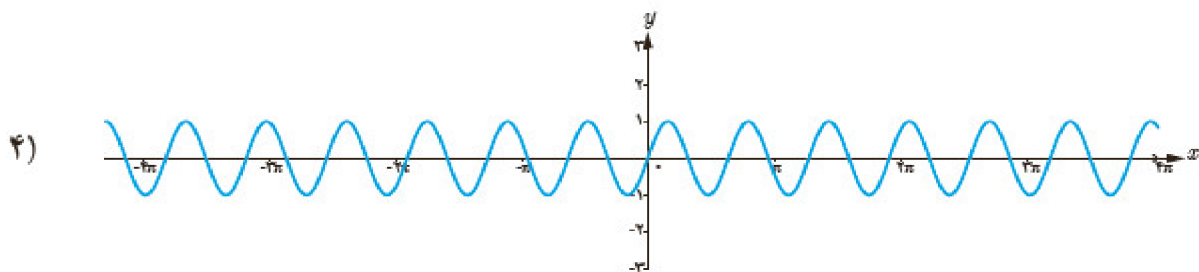
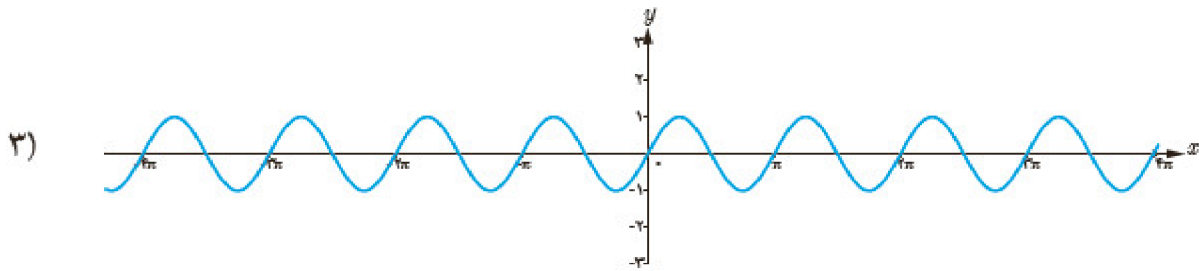
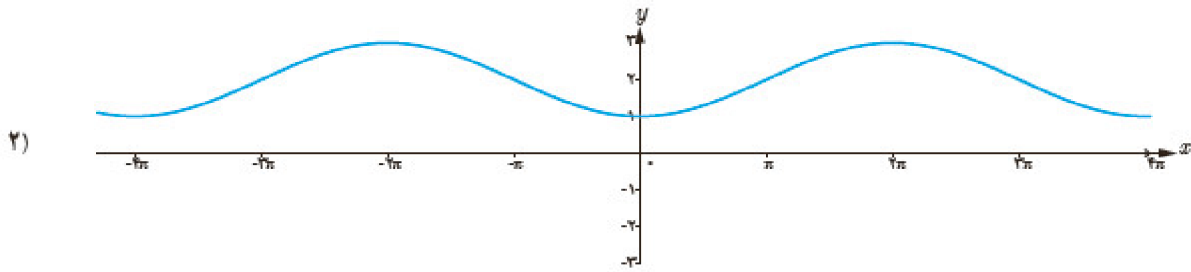
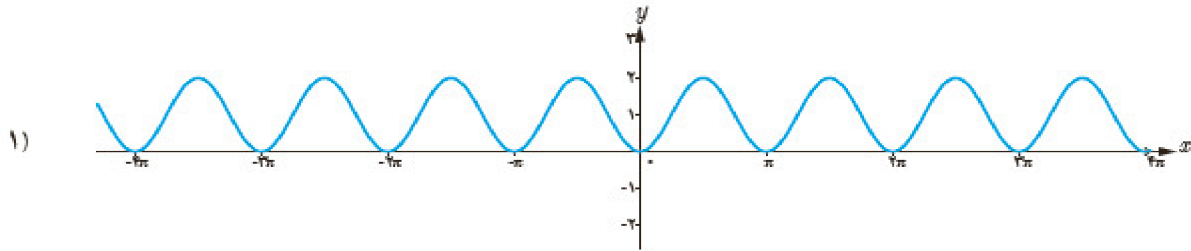
۸- هر یک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

ب) $y = 2 - \cos \frac{1}{4}x$

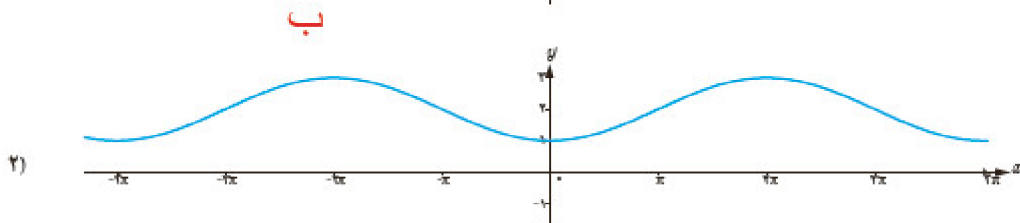
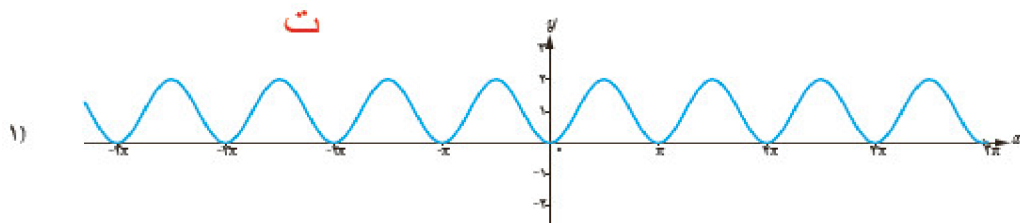
الف) $y = \sin \pi x$

ت) $y = 1 - \cos 2x$

پ) $y = \sin 2x$



« پاسخ »



۹- مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = 1 - 2 \sin\left(\frac{-\pi}{3} x\right)$ را به دست آورید.

« پاسخ »

$$\underbrace{\max = |-2| + 1 = 3}_{0/25}, \quad \underbrace{\min = -|-2| + 1 = -1}_{0/25}$$

۱۰- الف) دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = 2 - 3 \sin 4x$ را به دست آورید.
ب) دامنه تابع $f(x) = \operatorname{tg}(2x)$ را به دست آورید.

« پاسخ »

(الف)

$$\max = |3| + 2 = 5 \quad (0/25) \quad \min = -|3| + 2 = -1 \quad (0/25) \quad T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad (0/5)$$

$$2x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (0/25) \Rightarrow x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (0/25) \quad \text{ب)}$$

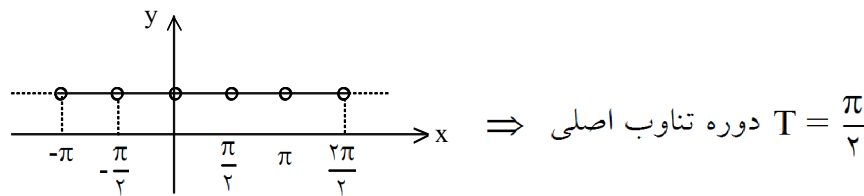
۱۱- تابع $y = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{Cot} x$ را مفروض است. نمودار تابع را رسم کنید و سپس دوره تناوب آن را تعیین کنید.

« پاسخ »

$$y = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{Cot} x = 1$$

اگر $\cos x \neq 0$, $\sin x \neq 0$:

$$\Rightarrow D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \right\}$$



۱۲- دوره تناوب تابع $f(x) = 3 \sin^2 2x + 2 \sin^2 3x$ را پیدا کنید.

« پاسخ »

$$T_1 = \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{6} \quad T_2 = \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{6} \rightarrow T_f = \text{م.م.ک}(T_1, T_2) = (6) \frac{\pi}{6} = \pi$$

۱۳- دوره‌ی تناوب تابع $f(x) = \text{tg } 2x + 2 \text{Sin } 3x$ را پیدا کنید.

« پاسخ »

$$\left. \begin{array}{l} y = \text{tg } 2x \rightarrow T_1 = \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{6} \\ y = 2 \text{Sin } 3x \rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{6} \end{array} \right\} \rightarrow T_f = \text{م.م.ک} (T_1, T_2) = (12) \frac{\pi}{6} = 2\pi$$

۱۴- نشان دهید تابع زیر متناوب است و دوره‌ی تناوب (دوره‌ی تناوب اصلی) آن را تعیین کنید.

$$y = 1 + \text{Cos }^2(x)$$

« پاسخ »

$$f(x) = 1 + \text{Cos }^2 x \rightarrow f(x) = 1 + \frac{1 + \text{Cos } 2x}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \text{Cos } 2x$$

$$f(x + c) = f(x) \rightarrow \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \text{Cos}(2x + 2c) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \text{Cos } 2x \rightarrow \text{Cos}(2x + 2c) = \text{Cos } 2x$$

$$\rightarrow 2x + 2c = 2k\pi + 2x \rightarrow c = k\pi \Rightarrow T = \pi$$

۱۵- معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin \frac{\pi}{2} = \sin 3x$

ب) $\cos x = \cos 2x$

ث) $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$

ب) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$

ت) $\cos 2x - 3\sin x + 1 = 0$

ج) $\sin x - \cos 2x = 0$

« پاسخ »

الف) $\sin \frac{\pi}{2} = \sin 3x$

$$1 = \sin 3x \Rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

ب) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$

$$2\cos^2 x - 1 - \cos x + 1 \Rightarrow \cos x(2\cos x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

پ) $\cos x = \cos 2x \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + 2x \Rightarrow x = -2k\pi \\ x = 2k\pi - 2x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$

ت) $\cos 2x - 3\sin x + 1 = 0 \Rightarrow 1 - 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0 \Rightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$

ث) $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - \sin^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 x + \sin x - \frac{3}{4} = 0$

$$\xrightarrow{\sin x = t} t^2 + t - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 3 = 4 \Rightarrow t = \frac{-1 \pm 2}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \\ \sin x = -\frac{3}{4} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \\ \sin x = \frac{-3}{4} \text{ غیر ممکن} \end{cases}$$

ج) $\sin x - \cos 2x = 0 \Rightarrow \sin x = \cos 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Rightarrow x = -2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

۱۶- معادله‌ی مثلثاتی $\cos 2\alpha - \sin \alpha + 1 = 1$ را حل کرده، جواب‌های کلی آن را بنویسید.

« پاسخ »

$$\underbrace{1 - 2 \sin^2 \alpha - \sin \alpha + 1 = 1}_{\cdot/25} \Rightarrow 2 \sin^2 \alpha + \sin \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = -1 \\ \sin \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\cdot/5$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{cases} \alpha = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{6}; \alpha = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}}_{\cdot/5} \quad k \in \mathbb{Z}$$

۱۷- معادله مثلثاتی $\cos 3x - \cos x = 0$ را حل کنید.

« پاسخ »

$$\cos 3x = \cos x \quad (\cdot/25) \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \quad (\cdot/25) \Rightarrow x = k\pi \quad (\cdot/25) \\ 3x = 2k\pi - x \quad (\cdot/25) \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \quad (\cdot/25) \end{cases}$$

۱۸- معادله $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ را حل کنید.

« پاسخ »

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \quad (\cdot/25) \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \quad (\cdot/25) \\ \cos x = \frac{1}{2} \quad (\cdot/25) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (\cdot/25) \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \quad (\cdot/25) \end{cases} \end{cases}$$

۱۹- درستی تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$$

« پاسخ »

$$\cos^4 x - \sin^4 x = (\underbrace{\cos^2 x - \sin^2 x}_{\cdot/25}) (\underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_{\cdot/25}) = \cos 2x \times 1 = \cos 2x$$

$(\cdot/25) \quad (\cdot/25) \quad (\cdot/25)$

(صفحات ۳۵ و ۳۶)

۲۰- فرض کنید $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ و α زاویه‌ای حاده باشد، حاصل $\cos 2\alpha$ را به دست آورید.

« پاسخ »

$$\cos 2\alpha = \underbrace{1 - 2 \sin^2 \alpha}_{\textcircled{0/25}} = \underbrace{1 - 2 \left(\frac{16}{25}\right)}_{\textcircled{0/25}} = \underbrace{-\frac{7}{25}}_{\textcircled{0/25}}$$

۲۱- معادله‌ی مثلثاتی $\sin 5x = \sin 2x$ را حل کنید.

« پاسخ »

$$5x = 2k\pi + 2x \quad \textcircled{0/25} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \quad \textcircled{0/25}$$

$$5x = 2k\pi + (\pi - 2x) \quad \textcircled{0/25} \Rightarrow 7x = (2k+1)\pi \quad \textcircled{0/25} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{7} \quad \textcircled{0/25}$$

۲۲- معادله‌ی مثلثاتی $2 \sin^2 x - \sin x = 0$ را حل کرده و جواب‌هایی که در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ هستند را تعیین کنید.

« پاسخ »

$$\sin x (2 \sin x - 1) = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \quad \textcircled{0/25} \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi \quad \textcircled{0/25}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad \textcircled{0/25} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \quad \textcircled{0/25}, x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \quad \textcircled{0/25} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} \quad \textcircled{0/25}$$

۲۳- فرض کنید $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ و α زاویه‌ی حاده باشد. حاصل $\sin 2\alpha$ را به دست آورید.

« پاسخ »

$$1 + \tan^2 \alpha \quad \textcircled{0/25} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{4}{5} \quad \textcircled{0/25}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5} \quad \textcircled{0/25}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad \textcircled{0/25} = 2 \left(\frac{3}{5}\right) \left(\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25} \quad \textcircled{0/25}$$

۲۴- معادله‌ی مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$2 \sin x - \sqrt{2} = 0$$

« پاسخ »

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (0/25) \Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} & (0/25) \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} & (0/25) \end{cases}$$

۲۵- درستی برابری زیر را ثابت کنید.

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \tan \frac{x}{2}$$

« پاسخ »

طرف چپ:
$$\frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{1 + \cos \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

۲۶- فرض کنید $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ و $\sin \beta = \frac{15}{17}$ و α حاده و β منفرجه باشد، عبارت زیر را محاسبه کنید.

$$\cos 2\alpha$$

« پاسخ »

$$\sin \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = \frac{-7}{25}$$

۲۷- کلیه‌ی جواب‌های معادله‌ی $2 \cos^2 x - \cos x = 0$ را تعیین کنید.

« پاسخ »

$$\cos x (2 \cos x - 1) = 0 \quad (0/25) \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \quad (0/25) \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (0/25) \\ 2 \cos x - 1 = 0 \quad (0/25) \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \quad (0/25) \end{cases}$$

۲۸- معادله‌ی $\sin^2\left(x - \frac{\pi}{8}\right) + 2\cos\left(\frac{5\pi}{8} - x\right) = 3$ در بازه‌ی $(0, 2\pi)$ چند جواب دارد؟

« پاسخ »

$$x - \frac{\pi}{8} = a \Rightarrow \sin^2 a + 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = 3$$

$$\Rightarrow \sin^2 a + 2\sin a - 3 = 0 \Rightarrow \sin a = 1$$

$$\Rightarrow a = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{8}$$

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$$

۲۹- نشان دهید برای هر زاویه‌ی a داریم:

« پاسخ »

$$\cos 2a = \cos(a+a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a \quad (0/5)$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \quad (0/25) = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) \quad (0/25) = 2\cos^2 a - 1 \quad (0/25)$$

۳۰- معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\sqrt{2}(\sin x - \cos x) + 6\sin x \cos x = -1$$

« پاسخ »

$$a = \sin x - \cos x$$

$$a^2 = 1 - 2\sin x \cos x$$

$$\sqrt{2}a + \frac{6(a^2 - 1)}{-2} = -1 \Rightarrow 3a^2 - \sqrt{2}a - 4 = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2 + 48}}{2\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \text{ و } 2\sqrt{2}$$

چون $-\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$ پس معادله‌ی بالا جواب ندارد.

۳۱- با فرض $\cos x = \frac{2}{3}$ حاصل $\tan^2 x$ را بیابید.

« پاسخ »

$$\cos x = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin x = \pm \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\pm\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \tan x = \frac{\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$\tan^2 x = \frac{\tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{\pm\sqrt{5}}{1 - \frac{5}{4}} = \mp 4\sqrt{5}$$

$$\tan^2 x = 80$$

۳۲- اگر $P = \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x \cos 16x$ آن‌گاه حاصل $P \sin x$ به‌ازای $x = \frac{\pi}{96}$ چه قدر است؟

« پاسخ »

$$P \sin x = \sin x \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x \cos 16x$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x \cos 4x \cos 8x \cos 16x$$

$$= \frac{1}{4} \sin 4x \cos 4x \cos 8x \cos 16x$$

$$= \frac{1}{8} \sin 8x \cos 8x \cos 16x$$

$$= \frac{1}{16} \sin 16x \cos 16x = \frac{1}{32} \sin 32x$$

$$x = \frac{\pi}{96} \Rightarrow P = \frac{1}{32} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{64}$$

۳۳- اگر $f(x) = \frac{\tan x (1 - \tan^2 x)}{(1 + \tan^2 x)^2}$ آن گاه مطلوب است $f\left(\frac{\pi}{24}\right)$.

« پاسخ »

$$f(x) = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)}{\left(1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)^2} = \frac{\sin x \cos x (\cos^2 x)}{1}$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x$$

$$f\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{8}$$

۳۴- اگر $\sin 2x = \frac{3}{4}$ آن گاه مقدار $\tan x$ را بیابید.

« پاسخ »

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow 2 \tan^2 x - 4 \tan x + 3 = 0 \Rightarrow \tan x = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}$$

۳۵- اگر $\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} = \frac{1}{4}$ آن گاه مقدار $\tan \frac{x}{2}$ چه قدر است؟

« پاسخ »

$$4(1 + \sin x) = 1 - \sin x \Rightarrow \sin x = -\frac{3}{5}$$

$$\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \left(\frac{x}{2}\right)} = -\frac{3}{5} \Rightarrow 2 \tan^2 \left(\frac{x}{2}\right) + 1 \cdot \tan \frac{x}{2} + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \tan \frac{x}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 9}}{3} = -3 \text{ یا } -\frac{1}{3}$$

۳۶- حاصل $P = \frac{\tan x (1 - \tan^2 x)}{(1 + \tan^2 x)^2}$ به ازای $x = \frac{\pi}{12}$ چه قدر است؟

« پاسخ »

$$P = \frac{\sin^x \cos x \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)}{\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2} = \frac{\sin x \cos^3 x}{\cos^4 x}$$

$$= \sin x \cos x \cos^2 x = \frac{1}{2} \sin 2x \cos^2 x = \frac{1}{4} \sin 4x$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

۳۷- معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\sin x + \sin 2x = \cos x + 2 \cos^2 x$$

« پاسخ »

$$\sin x (1 + 2 \cos x) = \cos x (1 + 2 \cos x) \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2 \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \\ \sin x = \cos x \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

۳۸- معادله‌ی مثلثاتی روبه‌رو را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بنویسید.

$$\cos 2x - \cos x + 1 = 0$$

« پاسخ »

$$2 \cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x (2 \cos x - 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۳۹- معادله‌ی مثلثاتی زیر را حل کنید و سپس جواب‌های آن را در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ به دست آورید.

$$\cos 2x - \cos x + 1 = 0$$

« پاسخ »

$$2\cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x(2\cos x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\text{جواب‌های خاص} = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$$

۴۰- معادله‌ی مثلثاتی زیر را حل کنید و سپس جواب‌های آن را در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ به دست آورید.

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

« پاسخ »

$$(2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2\cos x + 1 = 0 \\ \cos x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \\ \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad \text{جواب خاص} = \left\{ 0, 2\pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right\}$$