

نام و نام خانوادگی:
 مقطع و رشته: دوازدهم تجربی
 نام پدر:
 شماره داوطلب:
 تعداد صفحه سؤال: ۲

جمهوری اسلامی ایران
 اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران
 اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۱۲ تهران
 دبیرستان غیردولتی پسرانه سرای دانش واحد حافظ
 آزمون پایان ترم نوبت اول سال تحصیلی ۹۹-۱۳۹۸

نام درس: ریاضی ۳
 نام دبیر: شهروز رحیمی
 ساعت امتحان: ۰۸:۰۰ صبح / عصر
 مدت امتحان: ۹۰ دقیقه

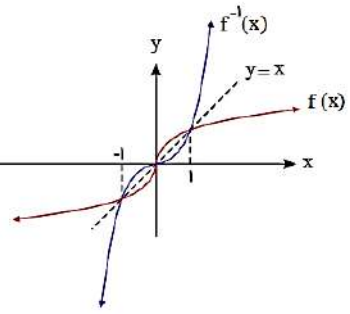
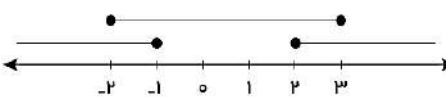
محل مهر و امضاء مدیر	نمره به عدد:	نمره به حروف:	نمره به عدد:	نمره به حروف:	
	نام دبیر:	تاریخ و امضاء:	نام دبیر:	تاریخ و امضاء:	
س:۱	سؤالات				س:۲
۱/۵	اگر چند جمله ای $p(x) = x^3 - ax^2 + bx + 1$ بر چند جمله ای های $x - 2$ و $x + 1$ بخش پذیر باشد باقیمانده تقسیم $p(x)$ بر $2x - 1$ کدام است؟				۱
۲	نمودار f مطابق شکل زیر است، دامنه تابع $y = \sqrt{\frac{f(x)-f(x)^{-1}}{x^2-1}}$ کدام است؟				۲
۲	اگر $f(x) = x^2 - \sqrt{3x}$ و $g = \{(2, 3), (1, -1), (3, -2), (-2, 0), (0, 3)\}$ باشند، $f(g^{-1}(-2))$ کدام است؟				۳
۱/۵	حدود m چقدر باشد تا $f = \{(5, 3), (3, m^2 - m), (-4, 2), (4, m^2 - m)\}$ یک تابع صعودی باشد.				۴
با توجه به نمودار $y = 3 - f(2 - x)$ ، نمودار تابع $y = 2 - f(x + 3)$ کدام است؟					
۲	اگر $f\left(\frac{-x}{x+1}\right) = \frac{1}{x+1}$ باشد، آنگاه $f(x)$ کدام است؟ ($x \neq 1$)				۶
۲	اگر نمودار تابع $f(x)$ بصورت مقابل باشد نمودار $f \circ f(x)$ را رسم کنید.				۷

۲	بازای چند مقدار a دو تابع زیر دوره تناوب یکسان دارند. $y_2 = -3 \cos 3ax - 2$ و $y_1 = -2 \sin((a^2 + 2)x) + 3$	۸
۴	معادلات زیر رد بازه مورد نظرشان چند جواب دارند. $2 \sin^2 x + 3 \cos x = 3$ در بازه $[-\pi, \pi]$ $\tan 2x = 3 \tan x$ در بازه $(0, \frac{5\pi}{2})$	۹
۱	اگر برد تابع $y = - \cos x - 1$ بصورت $[a, b]$ حاصل $b - a$ کدام است؟	۱۰

جمع بارم : ۲۰ نمره



کلید سؤالات پایان ترم نوبت اول سال تحصیلی ۹۸-۹۹

ردیف	راهنمای تصحیح	محل مهر یا امضاء مدیر																																
۱	چون $p(x) = x^3 - ax^2 + bx + 1$ بر $x - 2$ و $x + 1$ بخش پذیر است، داریم: پس $p(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$ است.	$\left. \begin{aligned} p(2) = 0 &\Rightarrow 8 - 4a + 2b + 1 = 0 \Rightarrow 4a - 2b = 9 \\ p(-1) = 0 &\Rightarrow -1 - a - b + 1 = 0 \Rightarrow a + b = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow a = \frac{3}{2}, b = -\frac{3}{2}$ $2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{3}{2} \times \frac{1}{4} - \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{8} - \frac{3}{8} - \frac{3}{4} + 1 = 0$																																
۲	ابتدا نمودار f^{-1} را رسم می کنیم و نمودار را در چهار بازه زیر بررسی می کنیم: می دانیم که زیر رادیکال همواره باید نامنفی باشد.	 <table border="1" data-bbox="574 750 1037 1019"> <thead> <tr> <th>بازه</th> <th>$x = -1$</th> <th>$x = 0$</th> <th>$x = 1$</th> <th>$(-\infty, -1)$</th> <th>$(-1, 0)$</th> <th>$(0, 1)$</th> <th>$(1, +\infty)$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$f(x) - f^{-1}(x)$</td> <td>+</td> <td>0</td> <td>-</td> <td>+</td> <td>0</td> <td>+</td> <td>-</td> </tr> <tr> <td>$x^2 - 1$</td> <td>+</td> <td>0</td> <td>-</td> <td>+</td> <td>0</td> <td>-</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>$\frac{f(x) - f^{-1}(x)}{x^2 - 1}$</td> <td>+</td> <td>+</td> <td>0</td> <td>-</td> <td>-</td> <td>-</td> <td>-</td> </tr> </tbody> </table> تعریف نشده تعریف نشده بنابراین دامنه تابع $y = \sqrt{\frac{f(x) - f^{-1}(x)}{x^2 - 1}}$ به صورت $\{-1\} \cup (-\infty, 0]$ است.	بازه	$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$	$f(x) - f^{-1}(x)$	+	0	-	+	0	+	-	$x^2 - 1$	+	0	-	+	0	-	+	$\frac{f(x) - f^{-1}(x)}{x^2 - 1}$	+	+	0	-	-	-	-
بازه	$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$																											
$f(x) - f^{-1}(x)$	+	0	-	+	0	+	-																											
$x^2 - 1$	+	0	-	+	0	-	+																											
$\frac{f(x) - f^{-1}(x)}{x^2 - 1}$	+	+	0	-	-	-	-																											
۳		$g = \{(-2, 0), (0, 3), (1, -1), (3, -2)\} \rightarrow g^{-1} = \{(0, -2), (3, 0), (-1, 1), (-2, 3)\}$ پس $(f \circ g^{-1})(-2) = f(g^{-1}(-2)) = f(3) = 9 - \sqrt{9} = 9 - 3 = 6$																																
۴	ابتدا آنها را از کوچک به بزرگ مرتب می کنیم. می دانیم در تابع صعودی اگر $x_1 < x_2$ باشد آن گاه $f(x_1) \leq f(x_2)$ است پس:	$f: \{(-2, 2), (3, m^2 - m), (4, m^2 - m), (5, 6)\}$ $2 \leq m^2 - m \leq 6 \rightarrow \begin{cases} m^2 - m \geq 2 \rightarrow m^2 - m - 2 \geq 0 \rightarrow (m - 2)(m + 1) \geq 0 \\ \text{تعیین علامت} \rightarrow m \leq -1 \text{ یا } m \geq 2 \text{ (I)} \\ m^2 - m \leq 6 \rightarrow m^2 - m - 6 \leq 0 \rightarrow (m - 3)(m + 2) \leq 0 \\ \text{تعیین علامت} \rightarrow -2 \leq m \leq 3 \text{ (II)} \end{cases}$ از اشتراک جواب های (I) و (II) داریم:  $\rightarrow m \in [-2, 2] \cup (-1, 2)$																																
۵		$y = 3 - f(2 - x) \xrightarrow{x \rightarrow -x} y = 3 - f(2 + x) \xrightarrow{x \rightarrow x+1} y = 3 - f(2 + x + 1)$ قرینه نسبت به y ها واحد انتقال به چپ یک واحد انتقال به پایین $\Rightarrow y = 3 - f(x + 3) \rightarrow y = 2 - f(x + 3)$																																
۶	عبارت را ساده تر می کنیم تا دو طرف تساوی جملات مشابه داشته باشند بنابراین:	$f\left(\frac{-x}{x+1}\right) = f\left(\frac{-x-1+1}{x+1}\right) = f\left(-1 + \frac{1}{x+1}\right)$ با فرض $\frac{1}{x+1} = t$ و $x \neq -1$ خواهیم داشت: $f(-1 + t) \stackrel{t=u+1}{=} f(u) = u + 1 \Rightarrow f(x) = x + 1$																																

$$D_f = [-1, 2], R_f = (-1, 1]$$

$$D_{f \circ f} = x \in D_f; f \in [-1, 2] \rightarrow D_{f \circ f} = [-1, 2]$$

با توجه به نمودار تابع وقتی $-1 \leq x < 2$ است مقدار $f \circ f$ در بازه $[0, 1]$ تغییر می کند بنابراین برد تابع $f \circ f$ بازه $[0, 1]$ می باشد.

$$y_1 = -2 \sin((a^2 + 2)x) + 3 : T_1 = \frac{2\pi}{|a^2 + 2|}$$

$$y_2 = -3 \cos 3ax - 2 : T_2 = \frac{2\pi}{|3a|}$$

$$T_1 = T_2 \rightarrow |a^2 + 2| = |3a| \Rightarrow \begin{cases} a^2 + 2 = 3a \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \\ a^2 + 2 = -3a \Rightarrow a^2 + 3a + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-1)(a-2) = 0 \\ (a+1)(a+2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = -1, 1, -2, 2$$

$$2 \sin^2 x + 3 \cos x = 3 \Rightarrow 2 \sin^2 x + 3 \cos x - 3 = 0 \Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) + 3 \cos x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 2 - 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 3 = 0 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} \cos x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi \\ \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

جواب های واقع در بازه $[-\pi, \pi]$ عبارت اند از: $-\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}$

می دانیم $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$

$$\tan 2x = 3 \tan x \rightarrow \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = 3 \tan x \rightarrow 2 \tan x = 3 \tan x (1 - \tan^2 x) \rightarrow 2 \tan x = 3 \tan x - 3 \tan^3 x \rightarrow 3 \tan^3 x - \tan x = 0 \rightarrow \tan x (3 \tan^2 x - 1) = 0 \rightarrow \tan x = 0 \text{ یا } 3 \tan^2 x - 1 = 0$$

$$\tan x = 0 \rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \rightarrow \sin x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi \rightarrow x = \pi, 2\pi \text{ جواب } 2$$

$$3 \tan^2 x - 1 = 0 \rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{3} \rightarrow \tan x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan(\pm \frac{\pi}{6}) \xrightarrow{\tan x = \tan \alpha \rightarrow x = k\pi + \alpha} x = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \pi + \frac{\pi}{6}, \pi - \frac{\pi}{6}, 2\pi - \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6} \text{ جواب } 5$$

در کل معادله در بازه $(0, \frac{5\pi}{6}]$ دارای ۷ جواب است.

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq |\cos x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -|\cos x| \leq 0 \Rightarrow -1 - 1 \leq -|\cos x| - 1 \leq 0 - 1$$

$$\Rightarrow -2 \leq y \leq -1 \Rightarrow \text{برد تابع} = [-2, -1] \Rightarrow a = -2, b = -1 \Rightarrow b - a = -1 - (-2) = 1$$

امضاء:

نام و نام خانوادگی مصحح : شهرزاد رحیمی

جمع بارم : ۲۰ نمره