

۱. چند گراف ساده‌ی از مرتبه 6 می توان ساخت؟

- (۱) 2^6 (۲) $\binom{6}{2}$ (۳) 2^{15} (۴) 2^{30}

۲. در گرافی 6- منتظم ، می دانیم $p+q=16$ ، حاصل $|p-q|$ چیست؟

- (۱) 6 (۲) 8 (۳) 10 (۴) هیچ کدام

۳. در گرافی با اندازه ی 21 می دانیم $\deg(v_i) \geq 5$ است ، حداکثر مرتبه چیست؟

- (۱) 7 (۲) 6 (۳) 10 (۴) 8

۴. در گرافی از مرتبه ی 11 می دانیم $\Delta = 7$ و $\delta = 3$ ، مجموع حداکثر و حداقل اندازه ی این گراف چیست؟

- (۱) 53 (۲) 54 (۳) 55 (۴) 56

۵. می خواهیم 21 نفر را به گروه هایی تقسیم کنیم به نحوی که هر نفر با 3 نفر دیگر به طور رفت و برگشت بازی کنند ، به چند طریق این عمل میسر است؟

- (۱) $\binom{21}{3}$ (۲) $\binom{21}{4}$ (۳) $\binom{7}{3}$ (۴) 0

۶. در گرافی با اندازه ی 15 ، حداقل مرتبه چیست؟

- (۱) 7 (۲) 6 (۳) 5 (۴) 8

۷. اگر گرافی با اندازه ی 27 و حداقل مرتبه داشته باشیم ، چند رأس آن از درجه ی ماکزیم می باشند؟

- (۱) 5 (۲) 6 (۳) 7 (۴) 2

۸. اگر در گرافی با اندازه ی 26 و حداقل مرتبه واقع باشیم ، کمترین مقدار δ چیست؟

- (۱) 5 (۲) 6 (۳) 4 (۴) 7

۹. چند گراف اویلری و منتظم از مرتبه ی 10 داریم؟

- (۱) 4 (۲) 3 (۳) 5 (۴) 6

۱۰. در درختی ، 3 رأس از درجه ی 4 ، 4 رأس از درجه ی 3 و 2 رأس از درجه ی 2 داریم ، در این درخت چند رأس از درجه ی 1 داریم؟

- (۱) 11 (۲) 12 (۳) 13 (۴) 14

۱۱. به ازاء کدام مقدار x دنباله ی $x+1$ ، $x+3$ ، $\dots$ ، $x+1375$ ، $x+1377$ ، دنباله ی درجات رئوس یک گراف می باشد؟

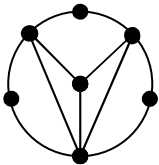
- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) هیچ کدام

۱۲. یک گراف ، ده رأس و دوازده یال دارد ، مکمل گراف چند ریال دارد؟

- (۱) 13 (۲) 78 (۳) 33 (۴) 23

۱۳. به گراف مقابل چند یال اضافه کنیم تا منتظم شود؟

- (۱) 6 (۲) 7 (۳) 8 (۴) 9



۱۴. در یک گراف 6- منتظم ، $q = 2P + 5$ ، q کدام است؟

- (۱) 13 (۲) 15 (۳) 17 (۴) هیچ کدام

۱۵. چند مورد از موارد زیر ، درست است؟

(ب) هر گراف منتظم ، همیلتنی است.

(د) هر گراف همیلتنی ، دارای دور است.

4 (۴)

3 (۳)

(الف) هر گراف همیلتنی ، منتظم است.

(ج) هر گراف همیلتنی ، هم بند است.

2 (۲)

1 (۱)

۱۶. کدام گراف همیلتنی نیست؟

k_2 (۴)

k_4 (۳)

k_5 (۲)

k_6 (۱)

۱۷. مجموع درجات رئوس گراف کامل k_{p+1} کدام است؟

$\frac{P(P-1)}{2}$ (۴)

$P^2 - P$ (۳)

$P^2 + P$ (۲)

$2P$ (۱)

۱۸. کدام جفت از اعداد زیر می توانند ، به ترتیب مرتبه و اندازه ی یک درخت باشند؟

21 و 20 (۴)

19 و 18 (۳)

7 و 10 (۲)

11 و 8 (۱)

۱۹. در یک گراف منتظم تعداد یال ها مساوی 15 است ، اگر تعداد رئوس این گراف ، از تعداد یال های آن کمتر باشد ، این گراف چند رأس دارد؟

14 یا 12 (۴)

8 یا 12 (۳)

5 یا 8 (۲)

6 یا 10 (۱)

۲۰. کدام گراف بازه ای زیر ، کامل است؟

$\{(0,6), (1,4), (2,5), (3,7)\}$ (۲)

$\{(1,3), (2,4), (3,5), (4,6)\}$ (۱)

$\{(1,2), (1,3), (1,4), (2,5)\}$ (۴)

$\{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5)\}$ (۳)

۲۱. با افزوده شدن سه رأس به رئوس یک گراف کامل ، گراف کامل دیگری بدست می آید که اندازه ی آن 21 واحد بیشتر از اندازه ی گراف قبلی می باشد ، مرتبه ی گراف اولیه چقدر است؟

7 (۴)

6 (۳)

5 (۲)

4 (۱)

۲۲. کدام یک از احکام زیر ، نادرست است؟

(۱) گراف G ، با اندازه ی 15 می تواند کامل باشد.

(۲) یک گراف ساده ی هم بند از مرتبه ی 8 ، حداقل 7 یال دارد.

(۳) گراف $G = (V, E)$ ، یک گراف تهی است اگر که : $V = \emptyset = E$

(۴) درخت از مرتبه ی 10 ، 9 یال دارد.

۲۳. در گراف ساده ی G ، حداقل Δ و حداکثر δ ، به ترتیب عبارتند از :

$\frac{q}{P}, \frac{q}{P}$ (۴)

$\frac{P}{q}, \frac{P}{q}$ (۳)

$\frac{2q}{P}, \frac{2q}{P}$ (۲)

$\frac{2P}{q}, \frac{2P}{q}$ (۱)

۲۴. کدام گزینه ی زیر صحیح است؟

(۱) گرافی نمی توان یافت که اویلری باشد ، اما همیلتنی نباشد.

(۲) گرافی نمی توان یافت که همیلتنی باشد ، اما اویلری نباشد.

(۳) گرافی نمی توان یافت که هم اویلری باشد هم همیلتنی.

(۴) گرافی می توان یافت که نه اویلری باشد و نه همیلتنی.

۲۵. کدام یک از اعداد زیر می تواند مجموع مرتبه و اندازه ی یک درخت باشد؟

54 (۴)

52 (۳)

51 (۲)

50 (۱)

۲۶. گراف کامل G دارای 55 یال می باشد ، از هر رأس آن چند یال می گذرد؟

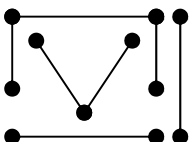
15 (۴)

12 (۳)

11 (۲)

10 (۱)

۲۷. چند یال به گراف شکل زیر افزوده شود تا گراف تبدیل به یک درخت گردد؟



2 (۱) 3 (۲) 4 (۳) 5 (۴)

۲۸. گراف G یک گراف $12-$ منتظم با اندازه ی 72 است ، مرتبه ی G کدام است؟

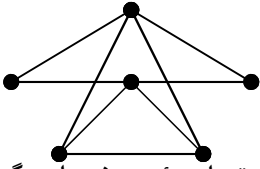
12 (۱) 13 (۲) 15 (۳) ۴ (۴) چنین گرافی وجود ندارد

۲۹. در گراف $G = (V, E)$ که $V = \{V_1, V_2, \dots, V_p\}$ و $\delta = \Delta = 4$ ، $\sum_{i=1}^p \deg V_i = 36$ ، مقدار P کدام است؟

7 (۱) 8 (۲) 9 (۳) 10 (۴)

۳۰. در گراف مقابل ، حاصل $p + q + \delta + \Delta$ برابر است با :

20 (۱) 21 (۲) 22 (۳) 23 (۴)



۳۱. گرافی دارای P رأس و q یال است که همه ی رأس های آن از درجه ی 5 یا 6 می باشند ، تعداد رئوس فرد این گراف کدام است؟

1 (۱) $2q - 5P$ (۲) $6P - 2q$ (۳) $2q - 6P$ (۴) $2q + 5P$

۳۲. گراف G با کدام یک از اندازه های زیر یک گراف کامل نیست؟

15 (۱) 20 (۲) 28 (۳) 36 (۴)

۳۳. اگر در گراف G ، $\delta = \Delta = 3$ و $q(G) = 6$ ، مرتبه ی گراف کدام است؟

4 (۱) 8 (۲) 12 (۳) 16 (۴)

۳۴. درختی P رأس و q یال دارد ، از اعداد pq ، $p + q$ و $p - q$ چند عدد فرد است؟

1 (۱) 2 (۲) 3 (۳) ۴ (۴) هیچ

۳۵. اگر در گراف ساده ی G ، داشته باشیم : $\Delta = 19$ ، آنگاه $\text{Min}(P)$ کدام است؟

19 (۱) 20 (۲) 21 (۳) 22 (۴)

۳۶. اگر M ماتریس مجاورت گراف G باشد ، در کدام یک از گزینه های زیر ، گراف G نمی تواند یک درخت باشد؟

$$M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۲)$$

$$M^2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (۴)$$

$$M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (۱)$$

$$M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (۳)$$

۳۷. درجه ی هر رأس در گرافی از مرتبه ی 18 ، حداکثر برابر 8 است ، این گراف حداکثر چند یال دارد؟

66 (۱) 70 (۲) 72 (۳) 74 (۴)

۳۸. اگر تعداد یال های گراف k_p و k_{p-1} روی هم برابر 36 باشد ، P کدام است؟

6 (۱) 7 (۲) 8 (۳) 9 (۴)

۳۹. اگر ماتریس مجاورت گراف G به صورت $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد ، کدام درست است؟

- (۱) $\delta + \Delta = 2$ (۲) $2 < \delta + \Delta < 5$ (۳) $\delta + \Delta = 4$ (۴) $\delta + \Delta > 4$

۴۰. اگر $p + q = 5$ ، آنگاه ماتریس مجاورت گراف G ، کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

۴۱. اگر G یک درخت باشد ، کدام یک از گزاره های زیر نادرست است؟ ($P \geq 2$)

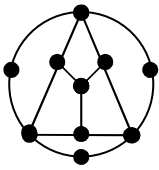
- (۱) $\Delta(G) \geq \frac{P}{2}$ (۲) $\delta(G) = 1$

(۳) $p - q = 1$ (۴) G حداقل دو رأس درجه ی یک دارد.

۴۲. گرافی 3 رأس از درجه ی 6 دارد و اندازه ی آن 24 است ، اگر بقیه ی رئوس این گراف از درجه ی فرد باشند ، مجموع درجات رئوس فرد آن کدام است؟

- (۱) 28 (۲) 30 (۳) 32 (۴) 26

۴۳. کدام گزینه در مورد گراف شکل مقابل درست است؟



(۱) ساده نیست (چند گانه است)

(۲) اویلری نیست ولی همیلتنی است.

(۳) نه اویلری و نه همیلتنی است.

(۴) اویلری است ، اما همیلتنی نیست.

۴۴. حداکثر تعداد یال هایی که می توان از گراف کامل K_6 ، حذف کرد تا هم بند باقی بماند ، کدام است؟

- (۱) 8 (۲) 9 (۳) 10 (۴) 11

۴۵. تعداد مسیر های به طول 3 در K_5 ، برابر است با :

- (۱) 8 (۲) 10 (۳) 9 (۴) 6

۴۶. تعداد دور های به طول 5 در K_5 ، برابر است با :

- (۱) 10 (۲) 11 (۳) 12 (۴) 13

۴۷. در گراف کامل K_p ، اگر $p = q$ ، در این صورت $p + q$ کدام است؟

- (۱) 8 (۲) 6 (۳) 10 (۴) 11

۴۸. گراف G ، 3 رأس از درجه ی 4 و 2 رأس از درجه ی 3 دارد، اگر این گراف از مرتبه ی 5 باشد، اندازه ی G کدام است؟

- (۱) 18 (۲) 12 (۳) 6 (۴) 9

۴۹. اگر p و q به ترتیب، مرتبه و اندازه ی درخت T بوده و هر دو اول باشند، در این صورت حاصل $p^2 + q^2$ ، کدام است؟

- (۱) 5 (۲) 25 (۳) 16 (۴) 13

۵۰. گراف 5 منتظم از کدام مرتبه ، وجود ندارد؟

- (۱) 7 (۲) 8 (۳) 6 (۴) 10

۵۱. حاصل ضرب مرتبه های دو درخت ، 12 واحد بیشتر از حاصل ضرب اندازه های آنها است ، مجموع تعداد یال های

دو درخت روی هم چند است؟

- ۱) 10 (۲) 11 (۳) 12 (۴) 13 (۵) اگر دنباله ی $(4, 4, 3, 3, 2, 2)$ یک دنباله ی گرافیکی باشد ، گراف مکمل این گراف چند یال دارد؟

- ۱) 1 (۲) 3 (۳) 4 (۴) 6 (۵)

۵۳. درختی $k+3$ رأس دارد ، جمع درجات رئوس آن برابر است با :

- ۱) $2k+2$ (۲) $2k+4$ (۳) $k+2$ (۴) $k+4$

۵۴. تعداد یال های یک گراف $5-$ منتظم از مرتبه ی 8 برابر است با :

- ۱) 20 (۲) 28 (۳) 32 (۴) 8

۵۵. یک گراف ساده ی با 27 یال ، حداقل چند رأس دارد؟

- ۱) 8 (۲) 9 (۳) 12 (۴) هیچ کدام

۵۶. مرتبه ی یک گراف ساده ، 10 می باشد ، کدام گزینه نمی تواند اندازه ی این گراف باشد؟

- ۱) 36 (۲) 20 (۳) 30 (۴) 48

۵۷. در داخل گراف کامل k_4 ، چند گراف کامل متمایز با مرتبه های کمتر یا مساوی 4 وجود دارد؟

- ۱) صفر (۲) 4 (۳) 7 (۴) 15

۵۸. کدام گراف هم بند است؟

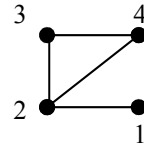


۵۹. در گراف هم بندی که فاقد دور است و ماتریس مجاورت آن A می باشد ، مجموع درایه های واقع بر قطر اصلی

ماتریس A^2 ، 4 واحد بیشتر از مرتبه ی گراف است ، مرتبه ی این گراف برابر است با :

- ۱) 4 (۲) 5 (۳) 6 (۴) 7

۶۰. اگر M ماتریس مجاورت گراف



- ۱) 8 (۲) 12 (۳) 14 (۴) 4

۶۱. اگر ماتریس مجاورت یک گراف ساده ی از مرتبه ی 6 ، دارای 16 درایه ی صفر باشد ، اندازه ی گراف کدام است؟

- ۱) 5 (۲) 7 (۳) 10 (۴) 15

۶۲. چند یال باید از گراف k_{10} حذف شود ، تا تبدیل به درخت T_{10} گردد؟

- ۱) 35 (۲) 38 (۳) 36 (۴) 34

۶۳. در گراف ساده و هم بند G داریم : $p+q=30$ ، حاصل $p+q$ کدام است؟

- ۱) 9 (۲) 10 (۳) 11 (۴) 13

۶۴. اگر M ماتریس مجاورت گراف کامل k_p باشد ، جمع درایه های هر سطر از ماتریس M^2 ، کدام است؟

- ۱) $(P-2)^2$ (۲) $(P-1)^2$ (۳) $P-1$ (۴) $P(P-1)$

۶۵. گراف ساده ی G از مرتبه ی P ، نا هم بند است ، حداقل درایه های صفر در ماتریس مجاورت آن کدام است؟

- ۱) P (۲) $2P-1$ (۳) $3(P-1)$ (۴) $3P-2$

۶۶. کدام عدد می تواند مجموع درجات رئوس مکمل گرافی باشد که 2 یال دارد؟

- ۱) 18 (۲) 20 (۳) 16 (۴) 24

۶۷. هرگاه G گرافی دارای ۹ راس و G' مکمل آن باشد و $\Delta(G) = 7$ ، آنگاه کمترین درجه، بین درجات رئوس G' ، کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۶۸. تعداد دور های همیلتنی (دور های به طول P) در گراف K_5 کدام است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۱۲ (۳) ۳۷ (۴) ۱۸

۶۹. گراف هم بند G از مرتبه p و اندازه q مفروض است، کدام درست است؟

- (۱) اگر $q = \frac{Pr}{2}$ ، گراف r -منتظم است. (۲) اگر $q = p-1$ ، گراف درخت است.

- (۳) اگر $q = \frac{P(P-1)}{2}$ ، گراف کامل است. (۴) هر سه مورد

۷۰. اگر A ، ماتریس مجاورت گراف K_6 باشد، آنگاه هر یک از درایه های روی قطر اصلی A^2 کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۷ (۴) ۲

۷۱. کدام گراف نه همیلتونی و نه اویلری است؟



۷۲. اگر در گراف $G = (V, E)$ داشته باشیم: $q(G) = q(G')$ ، اندازه ی این گراف کدام است؟

- (۱) $\frac{P(P-1)}{4}$ (۲) $\frac{P-1}{2}$ (۳) $\frac{P}{2}$ (۴) $P(P-1)$

۷۳. اگر مرتبه ی درخت T برابر $-3x$ و اندازه ی آن برابر $2x^2$ باشد، حاصل $p+2q$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۱۴ (۴) ۱

۷۴. تعداد رئوس از درجه ی زوج هر گراف:

- (۱) همیشه زوج است. (۲) همیشه فرد است.

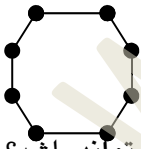
(۳) با تعداد رئوس درجه ی فرد برابر است. (۴) هر عدد صحیح حسابی می تواند باشد.

۷۵. اگر گراف G از مرتبه ی ۱۱ باشد، آنگاه:

- (۱) $0 \leq q \leq 45$ (۲) $0 \leq q \leq 55$ (۳) $0 \leq q \leq 10$ (۴) $11 \leq q \leq 55$

۷۶. اندازه ی گراف مکمل گراف مقابل برابر است با:

- (۱) ۲۰ (۲) ۴۶ (۳) ۲۸ (۴) ۱۲



۷۷. گراف ساده ی G از مرتبه ی ۹ مفروض می باشد، تعداد رئوس زوج این گراف، کدام عدد نمی تواند باشد؟

- (۱) ۷ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) هر سه مورد

۷۸. دترمینان ماتریس مجاورت گراف K_4 کدام است؟

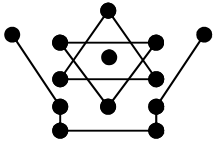
- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۱ (۴) ۰

۷۹. اگر مرتبه ی گراف هم بند G برابر ۸ و اندازه ی آن q باشد، کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) $0 \leq q \leq 72$ (۲) $7 \leq q \leq 28$ (۳) $8 \leq q \leq 28$ (۴) $8 \leq q \leq 72$

۸۰. عدد P اول است، تعداد گراف های $-P$ منتظم از مرتبه ی $P+2$ ، کدام است؟

- ۱ (۱) 2 (۲) ۳ (هیچ) ۴ (بی شمار)
۸۱. تعداد رئوس گراف G که ۱۲ یال داشته باشد و $\delta = \Delta = 4$ باشد، برابر است با:
- ۶ (۱) 7 (۲) 8 (۳) 9 (۴)
۸۲. تعداد یال های گراف 4 - منتظم از مرتبه ی ۸ کدام است؟
- ۱۶ (۱) 9 (۲) 10 (۳) 15 (۴)
۸۳. در یک گراف با اندازه ی ۱۰، همه ی رئوس از درجه ی ۳ هستند، به جزء ۲ رأس که درجه ی آنها ۴ است، در این صورت، این گراف چند رأس دارد؟
- 8 (۱) 5 (۲) 4 (۳) 6 (۴)
۸۴. گرافی G 4-منتظم بوده، اگر ۷ یال به آن اضافه کنیم، گرافی کامل بدست می آید، مرتبه ی این گراف برابر است با:
- 6 (۱) 7 (۲) 8 (۳) 9 (۴)
۸۵. در گراف ساده و هم بند G ، کدام درست است؟
- ۱ (۱) $\begin{cases} P=7 \\ q=3 \end{cases}$ (۲) $\begin{cases} P=7 \\ q=4 \end{cases}$ (۳) $\begin{cases} P=7 \\ q=5 \end{cases}$ (۴) $\begin{cases} P=7 \\ q=6 \end{cases}$
۸۶. گرافی هم بند با ۲۰ رأس است، مینیم تعداد یال هایی که G می تواند داشته باشد، کدام است؟
- 20 (۱) 19 (۲) 18 (۳) 17 (۴)
۸۷. بیشترین تعداد رئوس گراف هم بند G با ۲۰ یال کدام است؟
- 21 (۱) 20 (۲) 19 (۳) 22 (۴)
۸۸. گرافی نا هم بند با ۷ رأس و ۴ یال است، می نیم تعداد یال هایی که باید به G بیفزاییم تا هم بند شود برابر است با:
- 1 (۱) 2 (۲) 3 (۳) 4 (۴)
۸۹. یک گراف ساده ی هم بند از مرتبه ی ۱۵، حداقل چند یال دارد؟
- ۱۴ تا (۱) ۱۵ تا (۲) ۱۶ تا (۳) ۱۰۵ تا (۴)
۹۰. مرتبه ی یک درخت با اندازه ی ۹ برابر است با:
- 8 (۱) 9 (۲) 10 (۳) 11 (۴)
۹۱. اگر G یک درخت از مرتبه ی P و اندازه ی q باشد، آنگاه $p+q$ ، کدام یک از اعداد زیر می تواند باشد؟
- 7 (۱) 8 (۲) 9 (۳) ۴ گزینه ی ۱ یا ۳ (۴)
۹۲. تعداد یال های یک گراف کامل برابر ۴۵ می باشد، مرتبه ی این گراف کدام است؟
- 10 (۱) 11 (۲) 9 (۳) 8 (۴)
۹۳. در گرافی با اندازه ی ۲۰، مجموع درجات رئوس زوج برابر ۳۰ است، اگر رئوس فرد، همگی هم درجه باشند، چه تعدادی می توانند باشند؟
- 2 (۱) 4 (۲) 5 (۳) 1 (۴)
۹۴. یک گراف ساده با P رأس، حداکثر چند یال ممکن است داشته باشد؟
- ۱ (۱) $P-1$ (۲) $P(P-1)$ (۳) $\frac{P(P-1)}{2}$ (۴)
۹۵. کدام یک از گراف های زیر، درخت است؟
- ۱ (۱) k_2 (۲) k_3 (۳) k_4 (۴) k_5
۹۶. تعداد رأس ها و یال های یک گراف ساده به ترتیب ۵ و ۹ است، تعداد رأس های درجه ی ۳ در این گراف برابر است با:
- 1 (۱) 2 (۲) 3 (۳) 4 (۴)



۹۷. گراف مقابل چند مولفه ی هم بندی (بخش) دارد؟

- ۱) 5 ۲) 4 ۳) 2 ۴) 1

۹۸. کدام دنباله ، دنباله ی درجات رئوس یک گراف است؟

- ۱) 1, 1, 3, 4, 5 ۲) 1, 2, 2, 3, 4, 5
۳) 1, 2, 3, 3, 4, 5 ۴) 1, 2, 2, 3, 3, 4, 5

۹۹. در گراف 4 منتظم G ، $q = 3P - 2$ ، $q + p$ کدام است؟

- ۱) 9 ۲) 8 ۳) 7 ۴) 6

۱۰۰. اگر G یک درخت باشد ، کدام گزینه می تواند نادرست باشد؟

- ۱) G هم بند است. ۲) $q = p - 1$ ۳) $\Delta > 1$ ۴) $\delta \leq 1$

۱۰۱. در گراف G ، $P = 6$ ، $q = 15$ ، از هر رأس حداقل چند یال می گذرد؟

- ۱) 2 ۲) 3 ۳) 4 ۴) 5

۱۰۲. در یک گراف مانند G ، کدام رابطه صحیح است؟

- ۱) $P\delta \leq 2q \leq P\Delta$ ۲) $\delta \leq \frac{q}{P} \leq \Delta$ ۳) $\delta \leq p + q \leq \Delta$ ۴) $\delta \leq |p - q| \leq \Delta$

۱۰۳. به یک درخت از مرتبه ی 10 چند یال اضافه کنیم تا تبدیل به یک گراف کامل شود؟

- ۱) 34 ۲) 35 ۳) 36 ۴) 33

۱۰۴. می نیم درجه ی گراف G مساوی 3 و اندازه ی آن 7 است ، کدام نادرست است؟

- ۱) $P \leq 4$ ۲) $P \leq 3$ ۳) $P = 5$ ۴) $P = 4$

۱۰۵. در یک درخت از مرتبه ی $P > 1$ ، مجموع حداقل و حداکثر تعداد رأس های از درجه ی 1 گراف ، کدام عدد می تواند باشد؟

- ۱) P ۲) $P - 1$ ۳) $P + 1$ ۴) $P - 2$

۱۰۶. چند درخت مجزا وجود دارد که مجموع درجات رئوس آنها برابر 8 باشد؟

- ۱) 2 ۲) 3 ۳) 4 ۴) 1

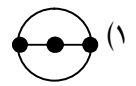
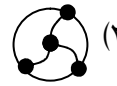
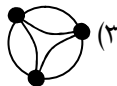
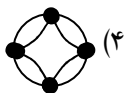
۱۰۷. فرض کنید A ماتریس مجاورت گراف کامل K_8 باشد ، مجموع یک های ماتریس A ، کدام است؟

- ۱) 56 ۲) 28 ۳) 8 ۴) 64

۱۰۸. زوج بودن درجه ی رئوس یک گراف هم بند ، چگونه شرطی برای اوپلری بودن این گراف است؟

- ۱) لازم ۲) کافی ۳) لازم و کافی ۴) نه لازم و نه کافی

۱۰۹. کدام گراف زیر ، یک گراف ساده است؟

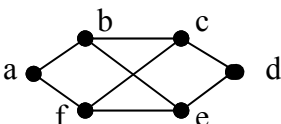


۱۱۰. در گراف ساده ای مانند G از مرتبه ی 19 ، کدام یک از موارد زیر ، نمی تواند صحیح باشد؟

- ۱) $\delta = 0$ ۲) $\Delta = 0$ ۳) $\delta = \Delta = 18$ ۴) $\delta = \Delta = 17$

۱۱۱. چند مسیر متفاوت ، بین دو رأس a و d در شکل مقابل وجود دارد؟

- ۱) 6 ۲) 8 ۳) 10 ۴) 9



۱۱۲. اگر داشته باشیم : $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ و $E = \{bc, bf, ae, fc\}$ ، آنگاه گراف $G = (V, E)$ از چند مؤلفه‌ی هم بندی (بخش) تشکیل شده است؟

- (۱) 1 (۲) 3 (۳) 3 (۴) 4
۱۱۳. مرتبه ی گراف G برابر 8 و اندازه ی آن 27 است ، درجه ی چند رأس آن ماکزیمم است؟

- (۱) 5 (۲) 6 (۳) 7 (۴) 8

۱۱۴. اگر A ماتریس مجاورت گراف G باشد ، دنباله ی درجات $\bar{G}$ ، کدام است؟

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- (۱) 0, 1, 1, 3, 3 (۲) 0, 1, 1, 2, 2

- (۳) 1, 2, 3, 3, 3 (۴) 0, 2, 2, 3, 3

۱۱۵. اگر در درخت G داشته باشیم : $G \leq a$ ، $b \leq \Delta$ ، آنگاه a و b به ترتیب برابرند با :

- (۱) q ، $p-q$ (۲) q ، $1+p-q$ (۳) q ، $p-q-1$ (۴) $q-2$ ، $\sqrt{P}$

۱۱۶. گراف ساده ای از مرتبه ی 13 می باشد ، حداکثر مقدار اندازه ی گراف چقدر باشد تا گراف بتواند از 6 بخش (مؤلفه ی) جدا از هم تشکیل یابد؟

- (۱) 29 (۲) 26 (۳) 32 (۴) 28

۱۱۷. در گرافی با 18 یال ، حداقل درجه ی بین رئوس ، برابر 3 است ، کدام عدد نمی تواند تعداد رئوس گراف باشد؟

- (۱) 8 (۲) 9 (۳) 12 (۴) 14

۱۱۸. دنباله ی درجات رئوس یک گراف کامل به صورت $\gamma-2$ ، $\gamma-2$ ، $\beta+1$ ، $\beta+1$ ، α ، α : S است ، مقدار $\alpha + \beta + \gamma$ کدام است؟

- (۱) 17 (۲) 18 (۳) 15 (۴) 16

۱۱۹. گرافی از مرتبه ی 12 ، به ازاء هر عدد طبیعی $1 \leq k \leq 6$ ، دو رأس از درجه ی k^2 دارد ، مجموع مرتبه و اندازه ی این گراف ، کدام است؟

- (۱) 100 (۲) 101 (۳) 102 (۴) 103

۱۲۰. G گرافی کامل با P رأس و q یال است ، $p+q$ کدام یک از اعداد زیر می تواند باشد؟

- (۱) 53 (۲) 56 (۳) 54 (۴) 55

۱۲۱. گراف G دارای 5 رأس و 9 یال است ، G چند رأس از درجه ی 4 دارد؟

- (۱) 2 (۲) 3 (۳) صفر (۴) 4

۱۲۲. اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ماتریس مجاورت گراف G باشد و $B = A^2$ ، حاصل $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 b_{ii}$ $p+q$ کدام است؟

- (۱) 4 (۲) 5 (۳) 6 (۴) 9

۱۲۳. اگر G گرافی کامل از مرتبه ی p و اندازه ی q باشد ، $p+2q$ کدام عدد می تواند باشد؟

- (۱) 81 (۲) 75 (۳) 91 (۴) 42

۱۲۴. در ماتریس مجاورت گراف اویلری ساده ی از مرتبه ی 4 ، چند درایه ی غیر صفر وجود دارد؟

۱۲۵. گراف ساده ی G از مرتبه ی 11 می باشد ، ماکزیم مقدار عبارت $\left(\frac{\delta + \Delta}{2}\right)^2$ کدام است؟
 6 (۱) 8 (۲) 10 (۳) 12 (۴)

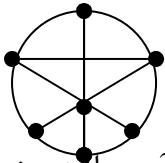
۱۲۶. q چقدر باشد تا مجموع درایه های قطر اصلی A^2 ، عددی اول گردد؟
 121 (۱) 100 (۲) 81 (۳) 99 (۴)

۱۲۷. اگر در گراف G ، $\delta = \Delta = 4$ و $\sum_{i=1}^p \deg v_i = 24$ ، مرتبه ی G کدام است؟
 0 (۱) 3 (۲) 2 (۳) 1 (۴)

۱۲۸. هرگاه G یک گراف ساده با n رأس و m یال باشد ، تعداد یال های $\bar{G}$ (مکمل G) کدام است؟
 3 (۱) 8 (۲) 6 (۳) 12 (۴)

۱۲۹. چند گراف ساده ی 5 رأسی با دو یال وجود دارد؟
 $\binom{m}{2}$ (۱) $\binom{n}{2}$ (۲) $\binom{m}{2} - n$ (۳) $\binom{n}{2} - m$ (۴)

۱۳۰. در گراف شکل مقابل مرتبه و اندازه به ترتیب عبارتند از :
 25 (۱) 45 (۲) 60 (۳) 70 (۴)



13, 6 (۴) 13, 7 (۳) 7, 7 (۲) 12, 7 (۱)

۱۳۱. در درخت T ، تعداد رئوس درجه ی یک و دو مساوی است و T دارای دو رأس درجه ی 3 می باشد و هیچ رأسی با درجه ی بیش از 3 ندارد ، مرتبه ی این درخت کدام است؟

9 (۱) 10 (۲) 11 (۳) 7 (۴)

۱۳۲. گرافی دارای 50 رأس می باشد و از هر رأس آن ، بیش از 6 یال نمی گذرد ، این گراف حداکثر چند یال می تواند داشته باشد؟

120 (۱) 150 (۲) 135 (۳) 125 (۴)

۱۳۳. مرتبه ی یک گراف کامل $\frac{1}{3}$ اندازه ی آن است ، مرتبه ی این گراف برابر است با :

5 (۱) 6 (۲) 7 (۳) 8 (۴)

۱۳۴. اگر G درختی از مرتبه ی 11 باشد ، مجموع درجات رئوس آن کدام است؟

22 (۱) 20 (۲) 18 (۳) 24 (۴)

۱۳۵. گرافی از مرتبه ی 7 و اندازه ی 12 مفروض است و درجه ی هر رأس آن 3 یا 4 می باشد ، این گراف چند رأس از درجه ی 4 دارد؟

5 (۱) 4 (۲) 3 (۳) 2 (۴)

۱۳۶. اگر G گرافی از مرتبه ی p و اندازه ی q و 4 منتظم باشد و $p + q = 12$ ، P کدام است؟

7 (۱) 6 (۲) 5 (۳) 4 (۴)

۱۳۷. اگر درخت T از مرتبه ی 7 باشد ، حداقل چند رأس از درجه ی 1 دارد؟

1 (۱) 2 (۲) 3 (۳) 4 (۴)

۱۳۸. اگر T درختی از مرتبه ی 8 باشد ، ماکزیم درجه ای که این گراف می تواند داشته باشد ، چند است؟

3 (۱) 7 (۲) 5 (۳) 6 (۴)

۱۳۹. دنباله ی درجات گراف G به صورت $1, 1, 1, 3, 3, 4, 4$ است :

(۱) G از مرتبه ۸ و اندازه ی ۹ است.

(۳) G از مرتبه ی ۸ و اندازه ی ۸ است.

(۴) G از مرتبه ی ۹ و اندازه ی ۱۶ است.

۱۴۰. در یک گراف ساده ی هم بند با ۴۱ رأس ، درجه ی هر رأس ، حداکثر ۵ است ، این گراف حداکثر چند یال دارد؟

(۱) ۲۰۴ (۲) ۱۰۸ (۳) ۱۶۴ (۴) ۱۰۲

۱۴۱. تعداد کل مسیر ها در گراف k_4 کدام است؟

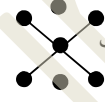
(۱) ۲۴ (۲) ۳۰ (۳) ۱۸ (۴) ۳۶

۱۴۲. در گراف G که از مرتبه ی ۱۲ و اندازه ی ۴۸ است ، کدام عدد نمی تواند ، برابر Δ باشد؟

(۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۱

۱۴۳. گراف ، حداقل با چند یال ، به یک گراف منتظم تبدیل می شود؟

(۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲



۱۴۴. در یک گراف ساده ، $\Delta = 3$ و $\delta = 1$ ، اگر این گراف $2n$ رأس داشته باشدو تعداد یال هایش برابر ۱۱ باشد، حدود n چیست؟

(۱) $1 \leq n \leq 3$ (۲) $4 \leq n \leq 11$ (۳) $11 \leq n \leq 13$ (۴) $12 \leq n \leq 14$

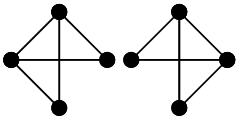
۱۴۵. گراف G ، ۳ منتظم است و اندازه ی آن ۳ واحد کمتر از ۲ برابر مرتبه ی آن است، حاصل ضرب مرتبه در اندازه ی

این گراف ، کدام است؟

(۱) ۲۴ (۲) ۵۴ (۳) ۷۶ (۴) ۳۶

۱۴۶. در ماتریس مجاورت گراف رو به رو ، چند درایه ی صفر وجود دارد؟

(۱) ۱۲ (۲) ۴۴ (۳) ۱۵ (۴) ۳۶



۱۴۷. به گرافی یک منتظم از مرتبه ی ۱۲ ، حداقل چند یال بیافزاییم تا گرافی هم بند شود؟

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۱۴۸. گراف G یک رأس درجه ی ۱ و دو رأس درجه ی ۲ و... n رأس درجه ی n دارد ، مقدار $\frac{q}{p}$ در این گراف، کدام است؟

(۱) $\frac{2n+1}{6}$ (۲) $\frac{n(n+1)}{12}$ (۳) $\frac{2n+1}{24}$ (۴) $\frac{n(n+1)}{24}$

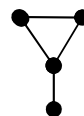
۱۴۹. اگر M ماتریس مجاورت گراف G باشد ، در کدام یک G نمی تواند درخت باشد؟

(۱) $M^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (۲) $M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (۳) $M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (۴) $M^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

۱۵۰. ماتریس مجاورت یک درخت ۲۶ درایه ی صفر دارد ، اگر مرتبه ی درخت p باشد ، p کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۱۵۱. اگر A ، ماتریس مجاورت گراف باشد ، A^2 کدام است؟



$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4) \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (3) \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (2) \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

۱۵۲. در گراف ساده ی Γ $= \binom{2}{1} \binom{10}{3} + \binom{10}{4} = 2 \times 120 + 210 = 450$ تواند ماتریس گراف G باشد؟

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4) \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3) \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2) \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

۱۵۳. چند گراف Γ منتظم وجود دارد ، به طوری که در آنها $p - q = 3$ باشد؟

(۱) 2 تا (۲) 3 تا (۳) فقط یکی (۴) وجود ندارد.

۱۵۴. کدام گراف اویلری است و همیلتونی نیست؟



۱۵۵. گرافی با 8 رأس و 12 یال (3- منتظم) موجود است ، کدام گزینه صحیح است؟

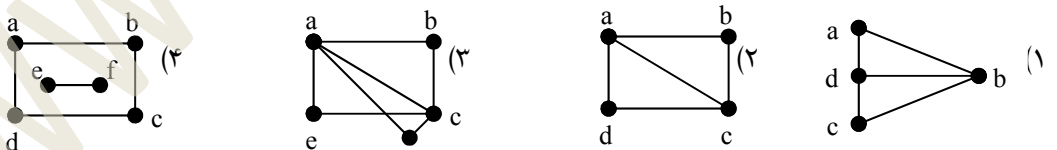
(۱) حتما هم بند است. (۲) حتما نا هم بند است. (۳) کامل است. (۴) هم می تواند هم بند باشد و هم نا هم بند. ۱۵۶. چند درخت وجود دارد که تعداد یال های آن ، یکی کمتر از تعداد رأس های آن باشد؟

(۱) 1 (۲) 0 (۳) 2 (۴) بی شمار

۱۵۷. اگر M ماتریس مجاورت گراف ساده ی G باشد ، درایه ی m_{ii} ماتریس M^2 ... است؟

(۱) تعداد رئوس گراف G (۲) تعداد یال های گراف G (۳) درجه ی رأس i ام گراف G (۴) بیشترین درجه رئوس گراف G

۱۵۸. در کدام یک از گراف های زیر می توان از یک رأس شروع کرده و با گذشتن از تمام یال ها (از هر یال فقط یک بار) به آن رأس بازگشت؟



۱۵۹. اگر گراف منتظم G دارای 22 رأس و 231 یال باشد d ناه درجه ی هر رأس برابر است با :

(۱) 20 (۲) 16 (۳) 21 (۴) 19

۱۶۰. یال های یک گراف عبارتند از $E = \{ad, bc, cd, ef\}$ ، این گراف ، حتما است؟

(۱) کامل (۲) همیلتنی (۳) اویلری (۴) نا هم بند

۱۶۱. در یک گراف ساده ی از مرتبه ی $P = 15$ ، اگر تعداد رئوس زوج آن را با n نشان دهیم ، n می تواند کدام یک از

اعداد الف) 6 ب) 7 ج) 9 د) 10 ه) 11 باشد؟

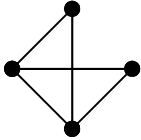
(۱) الف و ج (۲) ب و ج و ه (۳) الف و د (۴) ب و ج و د

تستهای کنکور سراسری و آزاد گراف از ۷۹ تا ۸۴

۱۶۲. دنباله ی درجات رأس های گراف G به صورت $S: 3, 3, 2, 2, 2$ است ، اگر دو رأس با ماکزیمم درجه مجاور نباشند ، تعداد دور های به طول ۳ یا ۵ کدام است؟ (سراسری نظام جدید - ۷۹)

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۶۳. در ماتریس مجاورت گراف مقابل چند درایه ی صفر وجود دارد؟ (سراسری نظام جدید - ۷۹)



- (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۳

۱۶۴. در کدام گزینه ، ماتریس مجاورت ، نشان دهنده ی یک گراف منتظم است؟ (آزاد - ۷۹)

- (۱) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (۴) هیچ کدام

۱۶۵. اگر A ماتریس مجاورت گراف G از مرتبه ی ۴ باشد ، حاصل ضرب درایه های قطری ماتریس A کدام عدد نمی تواند باشد؟ (سراسری - ۸۰)

- (۱) ۳ (۲) ۱۲ (۳) ۱۸ (۴) ۳۶

۱۶۶. گرافی که دنباله ی درجه ی رأس هایش « $3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1$ » می باشد ، چگونه است؟ (سراسری - ۸۰)

- (۱) قطعاً دارای دور (۲) درخت (۳) هم بند (۴) نا هم بند

۱۶۷. گرافی با ۸ رأس و از هر رأس به رأس دیگر مسیری وجود دارد ، این گراف حداقل چند یال دارد؟ (آزاد - ۸۰)

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۱۵ (۴) ۹

۱۶۸. در گراف G ، با درجه ی رأس های $3, 3, 2, 2, 2$ ، دو رأس با ماکسیمم درجه ، غیر مجاورند ، تعداد دور های به طول ۴ ، کدام است؟ (سراسری - ۸۱)

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۰

۱۶۹. گرافی دارای ۱۳ رأس و درجه ی هر رأس دو است ، این گراف حداکثر چند دور دارد؟ (آزاد - ۸۱)

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۱ (۴) ۱۲

۱۷۰. گرافی دارای ۸ رأس و ۲۳ یال است ، بیشترین مقدار $\delta(G) - \Delta(G)$ ، Δ ماکسیمم درجه و δ مینیمم درجه ی رئوس است) کدام است؟ (آزاد - ۸۱)

- (۱) ۵ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۶

۱۷۱. شکل مقابل ۵ منطقه ی A و B و C و D و E را با ۸ پل به هم راه داده است ، اگر مجاز باشیم از هر پل ، دقیقاً یک بار عبور کنیم ، با شروع از نقطه ی B ، منطقه ی پایان کدام است؟ (سراسری - ۸۲)



- (۱) نشدنی (۲) B (۳) D (۴) E

۱۷۲. تعداد درخت های متمایز از مرتبه ی ۶ کدام است؟ (سراسری - ۸۲)

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۱۷۳. گرافی دارای ۸ رأس و درجه ی هر رأس آن ۱ می باشد ، تعداد یال ها کدام است؟ (آزاد - ۸۲)

- (۱) ۸ (۲) ۴ (۳) ۱۶ (۴) ۲۸

۱۷۴. گرافی با درجه ی رئوس $4, 4, 4, 4, 4$ ، دارای چند یال است؟ (آزاد - ۸۲)

- (۱) ۸ (۲) ۲۰ (۳) ۱۶ (۴) ۱۰

۱۷۵. درجه ی رأس های گراف هم بند G ، به صورت $a, b, 5, 4, 3, 2$ است ، کمترین مقدار $a + b$ کدام است؟ (سراسری - ۸۳)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۷۶. گرافی با ۶ رأس دارای ۱۴ یال است ، درجه ی چند رأس از این گراف ۵ است؟ (آزاد - ۸۳)

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۳ (۴) ۲

۱۷۷. گرافی که ماتریس مجاورت آن به صورت
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
 باشد، دارای چند دور است؟ (آزاد - 83)

1 (۱) 4 (۲) 3 (۳) 2 (۴)

۱۷۸. چند نوع گراف ساده، هم بند و نا منتظم که مجموع مرتبه و اندازه ی آنها 10 باشد، وجود دارد؟ (سراسری - 84)

3 (۱) 4 (۲) 5 (۳) 6 (۴)

۱۷۹. ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ متناظر با کدام گراف است؟ (سراسری - 84)



۱۸۰. در گرافی به درجه ی رئوس $\{7, 7, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2\}$ که دو رأس با درجه ی 7، مجاور نیستند، چند دور وجود دارد؟ (آزاد - 84)

7 (۱) 14 (۲) 21 (۳) 28 (۴)

۱۸۱. در گرافی با رئوس a و b و c و d و e و درجه ی رئوس $\{4, 4, 4, 3, 3\}$ چند دور به طول 3 وجود دارد؟ (آزاد-84)

6 (۱) 7 (۲) 8 (۳) 9 (۴)

پاسخ تستهای گراف

۱- (۳)

$$\text{تعداد گراف های ساده ی } P \text{ رأسی} = 2^{\binom{P}{2}} = 2^{\binom{6}{2}} = 2^{15}$$

۲- (۴)

$$\left. \begin{array}{l} Pr = 2q \Rightarrow 6P = 2q \\ p + q = 16 \Rightarrow P = 16 - q \end{array} \right\} \Rightarrow 6(16 - q) = 2q \Rightarrow 96 = 8q$$

$$q = 12 \Rightarrow P = 16 - 8 = 4$$

اما چنین گرافی وجود ندارد ، زیرا $P < r$ شده است.

۳- (۲)

$$\deg V_i \geq 5 \Rightarrow \delta = 5$$

یاد آوری : $P\delta \leq 2q \leq P\Delta$

$$2q \geq P\delta \Rightarrow 2 \times 21 \geq 5P \Rightarrow P \leq \frac{42}{5} = 8 / \text{خورده ای} \Rightarrow P_{\text{Max}} = 8$$

۴- (۳)

$$P\delta \leq 2q \leq P\Delta \Rightarrow 33 \leq 2q \leq 77 \Rightarrow 16/5 \leq q \leq 38/5$$

$$\Rightarrow q_{\text{Min}} = 17 \quad \text{و} \quad q_{\text{Max}} = 38 \Rightarrow 38 + 17 = 55$$

۵- (۴) در واقع باید بگوییم چند گراف از مرتبه ی ۲۱ و ۳ منتظم داریم ، که می دانیم چنین گرافی وجود ندارد، زیرا گراف از مرتبه ی فرد ، فرد منتظم نداریم.

۶- (۲) یاد آوری : گرافی با اندازه ی q که حداقل رأس را داشته باشد ، کامل است.

$$\frac{P(P-1)}{2} = 15 \Rightarrow P(P-1) = 30 = 6(6-1) \Rightarrow P = 6$$

۷- (۲) یاد آوری: گرافی با اندازه ی q که حداقل رأس را داشته باشد، کامل است و یا اولین گراف کامل، بزرگتر از آن است.

$$q = 27 \Rightarrow 2q = 54 \Rightarrow \text{اولین گراف کامل بزرگتر از این گراف} \Rightarrow 2q = 56 \Rightarrow \begin{cases} q = 28 \\ P = 8 \end{cases}$$

در این گراف کامل 8 رأسی، درجه ی هر رأس 7 است، حال اگر یک یال حذف شود (یعنی تعداد یال هایش 27 یال شود) در این صورت دو یال از درجه ی 6 شده و بقیه ی یال ها (6 یال دیگر)، از درجه ی 7 = ماکزیمم باقی می ماند، لذا تعداد رئوس از درجه ی ماکزیمم، 6 رأس است.

$$q = 26 \Rightarrow 2q = 52 \Rightarrow \text{اولین گراف کامل بزرگتر از این گراف} \Rightarrow 2q = 56 \Rightarrow \begin{cases} q = 28 \\ P = 8 \end{cases} \quad (۱) - ۸$$

اما دو یال را باید حذف کنیم لذا برای اینکه حداقل δ را بیابیم، کافی است در گراف k_8 (که درجه ی هر رأسش 7 است) هر دو یال را از یک رأس حذف کنیم (تا تعداد یال ها 26 یال شود)، لذا درجه ی رأس مذکور، 5 می شود، در واقع در این حالت 5 رأس از درجه ی 7، 2 رأس از درجه ی 6 و یک رأس از درجه ی 5 (رأس Min) وجود دارد.

۹- (۱) در واقع باید درجه ی همه ی رئوس زوج باشد.

$$\delta = 2, 4, 6, 8, \quad (\delta \neq 0)$$

$$\sum_{i=1}^P \deg(V_i) = 2q \Rightarrow \sum_{i=1}^{q=P-1} \deg(V_i) = 2P - 2 \quad (۲) - ۱۰$$

با فرض اینکه تعداد رئوس از درجه ی 1، برابر x باشد داریم:

$$(3)(4) + (4)(3) + 2(2) + x(1) = 2(9+x) - 2$$

$$28 + x = 16 + 2x \Rightarrow x = 12$$

۱۱- (۴) به ازاء هیچ مقدار x ، چرا که دنباله ی درجات داده شده، به ازاء جمیع مقادیر x ، اعدادی متمایز هستند، در صورتی که می دانیم، دنباله ی از اعداد، هنگامی می تواند گرافیکی باشد که جمله ی تکراری داشته باشد.

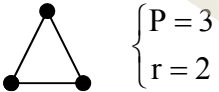
$$q = \frac{P(P-1)}{2} \Rightarrow \frac{10 \times 9}{2} = 45 \Rightarrow q(G') = q(k_p) - q(G) \quad (۳) - ۱۲$$

$$q(G') = 45 - 12 = 33$$

$$\text{حداکثر یال} = q_{\text{Max}} = \frac{P(P-1)}{2} = \frac{7(6)}{2} = 21 \Rightarrow 21 - 11 = 9 \quad (۴) - ۱۳$$

دقت کنید که در شمارش یال های گراف داده شده، یال های روی محیط دایره را هم بشمارید.

$$۱۴- (۲) \text{ گراف 2 منتظم از مرتبه ی 3 مقابل را در نظر می گیریم:}$$



همان طور که دیده می شود این دو مقدار فقط در (الف) و (ج) صدق می کنند.

۱۵- (۲) گزینه ی (1) نادرست است، زیرا گراف همیلتنی هست ولی منتظم نیست.

گزینه ی 2 نیز، نادرست است، زیرا گراف ، منتظم است ولی همیلتنی نیست.

گزینه ی 3 درست است زیرا دوری به طول P دارد که از همه ی رئوس (فقط یک بار) می گذرد و گزینه ی 4 نیز درست است.

۱۶- (۴) نکته: به ازاء $P \geq 3$ ، همه ی گراف های کامل (k_p) ، همیلتنی هستند.

$$17- (2) \quad 2q = 2 \times \frac{(P+1)P}{2} = P^2 + P \quad \text{مجموع درجات رئوس}$$

۱۸- (۳) می‌دانیم در هر درخت: $q = p - 1$ لذا p و q همواره باید دو عدد متوالی باشند به طوری که p از q بزرگتر باشد.

۱۹- (۱)

$$Pr = 2q \Rightarrow \begin{cases} Pr = 30 \\ P < 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P = 10 \\ r = 3 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} P = 3 \\ r = 10 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} P = 6 \\ r = 5 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} P = 5 \\ r = 6 \end{cases}$$

(1) (2) (3) (4)

دو حالت ۲ و ۴ امکان ندارند (زیرا باید $r < P$ باشد)، لذا $P = 6$ یا $P = 10$.

۲۰- (۲) گرافی کامل است که هر رأس آن، با تمام رئوس دیگر، مجاور باشد، چون هر یک از بازه‌های گزینه ی ۲ با بقیه ی بازه‌ها اشتراک دارند، لذا هر یک از رئوس این گراف با بقیه ی رئوس مجاورند.

$$21- (3) \quad q = \frac{P(P-1)}{2} = \text{اندازه ی گراف اولیه} \rightarrow P = \text{مرتبه ی گراف اولیه}$$

$$q' = \frac{(P+3)(P+2)}{2} = \text{اندازه ی گراف دوم} \rightarrow P+3 = \text{مرتبه ی گراف دوم}$$

$$\frac{(P+3)(P+2)}{2} = 21 + \frac{P(P-1)}{2} \Rightarrow P^2 + 5P + 6 = 42 + P^2 - P \Rightarrow P = 6$$

۲۲- (۲) گراف $G(V, E)$ ، یک گراف تهی است، هرگاه: $V \neq \emptyset = E$
سه گزینه ی دیگر صحیح می باشند.

$$23- (2) \quad \begin{cases} \text{Min}(\Delta) = \frac{2q}{P} \\ \text{Max}(\delta) = \frac{2q}{P} \end{cases} \Rightarrow \delta \leq \frac{2q}{P} \leq \Delta \Rightarrow \frac{2q}{P} = \text{میانگین درجات رئوس}$$

۲۴- (۴) گراف (۴)، نه اویلری است و نه همیلتنی.

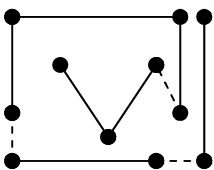
۲۵- (۲) یاد آوری: مجموع مرتبه و اندازه ی هر درخت، عددی فرد است.

$$p + q = P + P - 1 = 2P - 1 = \text{فرد}$$

۲۶- (۱)

$$\frac{P(P-1)}{2} = 55 \Rightarrow P(P-1) = 11 \times 10 \Rightarrow P = 11 \Rightarrow q = P - 1 = 10$$

۲۷- (۲) چون گراف داده شده، از چهار درخت مجزا (جنگل) تشکیل شده است، لذا با افزودن سه یال می توان این درخت‌ها را به هم وصل کرده و درخت جدیدی بدست آوریم، دقت کنید:



$$Pr = 2q \Rightarrow 12P = 2 \times 72 \Rightarrow P = 12 \quad \text{غ. ق. ق.}$$

۲۸- (۴)

دقت کنید که ، گراف از مرتبه ی 12 ، نمی تواند 12 منتظم باشد ، زیرا درجه ی هر رأس حداکثر $P-1=11$ است.

۲۹- (۳) گرافی که در آن $\delta = \Delta = r$ باشد ، $-r$ منتظم است ، لذا چون $\delta = \Delta = 4$ است ، گراف G ، 4-منتظم است.

$$Pr = 2q \Rightarrow 4P = 36 \Rightarrow P = 9$$

پس :

۳۰- (۲) با توجه به نمودار گراف داریم :

$$P = 5 = \text{تعداد رؤوس}$$

$$q = 9 = \text{تعداد یال ها}$$

$$\rightarrow p + q + \delta + \Delta = 6 + 9 + 2 + 4 = 21$$

$$\delta = 2 = \text{می نیم درجه}$$

$$\Delta = 4 = \text{ماکزیمم درجه}$$

۳۱- (۲) فرض می کنیم x ، تعداد رؤوس از درجه ی فرد (از درجه ی 5) باشد ، لذا تعداد رؤوس از درجه ی 0 برابر است

با $P - x$ ، برای بدست آوردن تعداد رؤوس فرد ، کافی است x را بیابیم.

$$\sum_{i=1}^P \deg V_i = 2q \Rightarrow x(5) + (P-x)6 = 2q \Rightarrow x = 6p - 2q$$

۳۲- (۲) در هر گراف کامل مانند k_p همواره داریم :

$$2q = P(P-1) \quad \text{یا} \quad q = \frac{P(P-1)}{2}$$

لذا دو برابر اندازه ی G باید حاصل ضرب دو عدد صحیح نا منفی متوالی باشد و تنها عددی در گزینه ها که در این رابطه صدق نمی کند ، عدد 20 است.

۳۳- (۱) چون $\delta = \Delta = 3$ ، لذا گراف 3-منتظم است ، بنابراین داریم :

$$Pr = 2q \Rightarrow 3P = 2 \times 6 \Rightarrow P = 4$$

۳۴- می دانیم در هر درخت رابطه ی $p = q + 1$ برقرار است ، لذا در هر درخت مرتبه و اندازه ، دو عدد طبیعی متوالی اند می دانیم مجموع و تفاضل دو عدد طبیعی متوالی (مجموع و تفاضل دو عدد که یکی فرد و دیگر زوج است) ، همواره عددی فرد است ، ضمناً حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی ، همیشه زوج است ، بنابراین گزینه ی (۲) صحیح است.

۳۵- (۲) می دانیم در هر گراف ساده رابطه ی $0 \leq \Delta \leq P-1$ برقرار است ، لذا $0 \leq 19 \leq P-1$ یا $20 \leq P$ بنابراین $\text{Min}(P) = 20$ است.

۳۶- (۲) می دانیم هر درخت از مرتبه ی $P \geq 2$ ، دست کم ، 2 رأس از درجه ی 1 دارد ، ضمناً می دانیم درایه های روی قطر اصلی ماتریس M^2 ، درجه ی رؤوس گراف می باشند ، لذا گزینه ای را باید انتخاب کنیم که روی قطر اصلی اش ، کمتر از 2 درایه ی 1 داشته باشد.

$$\frac{2q}{P} \leq \Delta \Rightarrow q \leq \frac{P\Delta}{2} \Rightarrow q \leq \frac{18 \times 8}{2} = 72 \Rightarrow \text{Max}(q) = 72 \quad (۳) \text{ - } ۳۷$$

$$\frac{P(P-1)}{2} + \frac{(P-1)(P-2)}{2} = 36 \Rightarrow P(P-1) + (P-1)(P-2) = 72 \quad (۲) \text{ - } ۳۸$$

$$(P-1)(P+P-2) = 72 \Rightarrow 2(P-1)^2 = 72 \Rightarrow P-1 = \pm 6 \Rightarrow \begin{cases} \text{ق. ق. } P = 7 \\ \text{غ. ق. ق. } P = -5 \end{cases}$$

۳۹- (۴) می دانیم مجموع درایه های هر سطر (هر ستون) درجه ی رأس مربوطه می باشد، لذا با توجه به این نکته داریم :

$$\delta = 2 \text{ و } \Delta = 3 \text{ و در نتیجه : } \delta + \Delta = 5$$

۴۰- (۴) می دانیم اگر ماتریس مجاورت گراف $P \times P$ باشد ، آنگاه مرتبه ی گراف P است ، ضمناً نصف مجموع تعداد یک های ماتریس مجاورت برابر اندازه ی گراف یعنی q است ، بنابراین گزینه ی 4 صحیح است.

در این گزینه $P = 4$ و $q = 1$ و لذا $p + q = 5$

۴۱- (۱) درخت مقابل نشان می دهد که گزاره ی ۱ نادرست است :

در این درخت $\Delta = 2$ و $P = 6$

۴۲- (۲)

$$\text{مجموع درجات زوج} + \text{مجموع درجات فرد} = 2q$$



A



B

+

$$= 2q \Rightarrow B = 2q - A = 2(24) - 3(6) = 30$$

۴۳- (۳) گراف داده شده دارای طوقه یا یال چندگانه نیست ، لذا ساده نیست ، از طرف دیگر ، اویلری نیز نیست ، زیرا درجه ی همه ی رئوسش زوج نمی باشد و همیلتنی نیز نیست ، زیرا دوری به طول 10 که از همه رئوس (از هر رأس فقط یک بار) بگذرد ، ندارد.

۴۴- (۳) می دانیم گراف k_6 ، $\frac{6 \times 5}{2} = 15$ یال دارد و برای اینکه گرافی از مرتبه ی 6 ، هم بند باشد ، کافی است حداقل $P - 1 = 5$ یال داشته باشد ، لذا حداکثر تعداد یال هایی که می توان از گراف k_6 حذف کرد تا هم بند بماند برابر است با : $15 - 5 = 10$

۴۵- (۴) تعداد مسیر های به طول m در گراف کامل k_p برابر است با : $(P - 2)_{m-1}$ لذا داریم :

$$(5 - 2)_{3-1} = (3)_2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$$

۴۶- (۳) نکته : اگر $P \geq 3$ باشد ، تعداد دور های مختلف با طول m در گراف کامل برابر است با :

$$\frac{1}{2m} \times (P)_m \Rightarrow k_5 \text{ تعداد دور های به طول 5 در } k_5 = \frac{1}{2 \times 5} \times (5)_5 = \frac{1}{10} \times \frac{5!}{0!} = 12$$

۴۷- (۲)

$$\begin{cases} q = \frac{P(P-1)}{2} \Rightarrow P = \frac{P(P-1)}{2} \Rightarrow 2P = P^2 - P \Rightarrow P^2 - 3P = 0 \\ p = q \end{cases} \begin{cases} \text{غ. ق. ق.} & P = 0 \\ \text{ق. ق.} & P = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = 3 \Rightarrow q = 3 \Rightarrow p + q = 6$$

۴۸- (۴) چون گراف 3 رأس از درجه ی 4 و 2 رأس از درجه ی 3 دارد و $P = 5$ ، لذا داریم :

$$\sum_{i=1}^5 \deg V_i = 2q \Rightarrow 3(4) + 2(3) = 2q \Rightarrow q = 9$$

۴۹- (۴) می دانیم که در هر درخت $q = p - 1$ ، یعنی p و q دو عدد طبیعی متوالی اند و از طرفی تنها دو عدد اولی که متوالی اند 2 و 3 می باشند ، لذا $P = 3$ و $q = 2$ در نتیجه داریم :

$$p^2 + q^2 = 9 + 4 = 13$$

۵۰- (۱) گراف از مرتبه ی فرد ، فرد منتظم نداریم.

$$\begin{cases} pp' = 12 + qq' \\ p = q + 1 \\ p' = q' + 1 \end{cases} \Rightarrow (q+1)(q'+1) = 12 + qq' \quad (۲) \quad ۵۱-$$

$$q + q' + 1 = 12 \Rightarrow q + q' = 11$$

$$4+4+3+3+2+2=18=2q \Rightarrow q=9 \quad (۴) - ۵۲$$

تعداد رئوس گراف داده شده (تعداد جملات دنباله ی گرافیکی) برابر شش است یعنی : $P=6$

$$q(G)+q(\bar{G})=q(k_p) \Rightarrow 9+q(\bar{G})=\frac{6 \times 5}{2}=15 \Rightarrow q(\bar{G})=6$$

$$p=q+1 \Rightarrow k+3=q+1 \Rightarrow q=k+2 \quad (۲) - ۵۳$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^p \deg V_i = 2q = 2k+4$$

$$(۱) - ۵۴$$

$$Pr=2q \Rightarrow 8 \times 5=2q \Rightarrow q=20$$

$$0 \leq q \leq \frac{P(P-1)}{2} \Rightarrow 27 \leq \frac{P(P-1)}{2} \Rightarrow P(P-1) \geq 54 \quad (۱) - ۵۵$$

کوچکترین عددی که در رابطه ی فوق صدق می کند ، $P=8$ است.

$$0 \leq q \leq \frac{P(P-1)}{2} \Rightarrow 0 \leq q \leq \frac{10 \times 9}{2} \Rightarrow 0 \leq q \leq 45 \quad (۴) - ۵۶$$

لذا اندازه ی این گراف نمی تواند 48 باشد.

۵۷- (۴) نکته : تعداد گراف های کامل متمایزی که می توان در گراف کامل k_p مشخص کرد برابر است با:

$$2^p - 1$$

$$2^4 - 1 = 15$$

برای درک بهتر نکته ی فوق ، تعداد گراف های کامل را در گراف k_4 می شماریم :

$$\binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 2^4 - 1 = 15$$



۵۸- (۴) گرافی هم بند است که بین هر دو رأس دسوره آن ، حداقل یک مسیر وجود بسد ، به عبارت دیگر محض از یک بخش تشکیل شده باشد.

۵۹- (۲) یاد آوری : گراف هم بندی که فاقد دور است ، درخت است.

یاد آوری : درایه های قطر اصلی A^2 ، درجه ی رئوس گراف می باشند ، لذا مجموع درایه های قطر اصلی A^2 برابر $2q$ می باشد.

$$\begin{cases} 2q = 4 + P \\ p = q + 1 \end{cases} \quad (\text{درخت}) \Rightarrow 2q = 4 + q + 1 \Rightarrow q = 5$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ii} = M^2 \quad \text{مجموع درجات رئوس} = \text{مجموع درایه های قطر اصلی} = 3 + 2 + 2 + 1 = 8 \quad (۱) - ۶۰$$

$$\text{تعداد درایه های یک-کل درایه ها} = \text{تعداد درایه های صفر} \quad (۳) - ۶۱$$

$$= P^2 - 2q \Rightarrow 16 = 36 - 2q \Rightarrow 2q = 20 \Rightarrow q = 10$$

$$k_{10} \quad \text{تعداد یال های گراف} = q = \frac{10 \times 9}{2} = 45 \Rightarrow 45 - 9 = 36 \quad (۳) - ۶۲$$

$$T_{10} \quad \text{تعداد یال های درخت} = q = P - 1 = 9$$

$$pq = 30 = 30 \times 1 = 15 \times 2 = 10 \times 3 = 6 \times 5 \quad (۳) - ۶۳$$

$$\begin{array}{llll} \left\{ \begin{array}{l} P=30 \\ q=1 \end{array} \right. \text{ الف) } & \left\{ \begin{array}{l} P=1 \\ q=30 \end{array} \right. \text{ ب) } & \left\{ \begin{array}{l} P=15 \\ q=2 \end{array} \right. \text{ ج) } & \left\{ \begin{array}{l} P=2 \\ q=15 \end{array} \right. \text{ د) } \\ \left\{ \begin{array}{l} P=5 \\ q=6 \end{array} \right. \text{ ح) } & \left\{ \begin{array}{l} P=10 \\ q=3 \end{array} \right. \text{ ه) } & \left\{ \begin{array}{l} P=3 \\ q=10 \end{array} \right. \text{ و) } & \left\{ \begin{array}{l} P=6 \\ q=5 \end{array} \right. \text{ ز) } \end{array}$$

در حالت های (ب)، (د)، (و) نمی توان گراف ساده رسم کرد، در گراف های (الف) و (ج) و (ه) گراف، هم بند نمی شود، تنها در حالت (ز) و (ح)، می توان گراف هم بند ساده رسم کرد، پس: $p+q=11$

۶۴- (۲) یاد آوری: همه ی درایه های روی قطر اصلی ماتریس مجاورت گراف کامل k_p ، $P-1$ و بقیه ی درایه ها $P-2$ می باشند.

لذا داریم:

$$\begin{aligned} \text{جمع درایه های هر سطر} &= \underbrace{(P-2) + (P-2) + \dots + (P-2)}_{(P-1) \text{ تا}} + P-1 = (P-1)(P-2) + P-1 \\ &= (P-1)(P-2+1) = (P-1)^2 \end{aligned}$$

۶۵- (۴) یاد آوری: هرگاه G ، نا هم بند باشد، آنگاه داریم $\frac{(P-1)(P-2)}{2} = \binom{P-1}{2} \leq q$ ، به عبارت دیگر $2q \leq (P-1)(P-2)$ ، لذا تعداد درایه های غیر صفر (که برابر $2q$ می باشد)، حداکثر برابر $(p-1)(p-2)$ است، بنابراین داریم:

$$P^2 - 2q \geq P^2 - (P-1)(P-2) = 3P - 2 = \text{تعداد درایه های صفر}$$

این بدان معنی است که می نیم درایه های صفر در ماتریس مجاورت گراف G برابر $3P-2$ است.

$$q(G) + q(G') = q(k_p) \quad \text{۶۶- (۳)}$$

$$2 + q(G') = \frac{P(P-1)}{2} \Rightarrow \underbrace{4 + 2q(G')}_{\text{مجموع درجات رئوس گراف مکمل}} = P(P-1)$$

یعنی اگر چهار واحد به مجموع درجات گراف مکمل (یعنی ریه سی در درجه دوم، سی و یک درجه اول، سی و دو درجه اول، سی و سه درجه اول، سی و چهار درجه اول) حاصل باید به صورت $16 + 4 = 20 = 5 \times 4$ حاصل ضرب دو عدد متوالی درآید که فقط عدد 16 به این صورت است:

۶۷- (۲) نکته: اگر G' مکمل گراف G از مرتبه ی P ، باشد، همواره داریم:

$$\Delta(G) + \delta(G') = P-1 \Rightarrow \delta(G') = P-1 - \Delta(G) = 9-1-7=1$$

$$\frac{(P-1)!}{2} \quad \text{۶۸- (۲) نکته: تعداد دور های همیلتنی در گراف } k_p \text{ برابر است با:}$$

$$\frac{(5-1)!}{2} = \frac{4!}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

لذا داریم:

۶۹- (۴)

۷۰- (۱) درایه های روی قطر اصلی ماتریس A درجه ی رئوس گراف می باشند، چون گراف کامل است لذا درجه ی هر یک از رئوسش $P-1 = 6-1 = 5$ می باشد.

۷۱- (۴) فقط گراف (3) اویلری است، زیرا درجه ی همه ی رئوسش زوج می باشد، ضمناً گراف های (1) و (2) همیلتونی هستند و لذا تنها گراف (4) است که نه اویلری است و نه همیلتنی.

$$q(G) + q(G') = q(k_p) \Rightarrow x + x = \frac{P(P-1)}{2} \quad (۱) - ۷۲$$

$$x = \frac{P(P-1)}{4} \Rightarrow q(G) = \frac{P(P-1)}{4}$$

$$\begin{cases} P = -3x \\ q = 2x^2 \Rightarrow -3x = 2x^2 + 1 \Rightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1 & \text{ق ق} \\ x = \frac{-1}{2} & \text{غ ق ق} \end{cases} \\ P = q + 1 \end{cases} \quad (۲) - ۷۳$$

$$x = -1 \Rightarrow \begin{cases} P = 3 \\ q = 2 \end{cases} \Rightarrow P + 2q = 3 + 4 = 7$$

۷۴- (۴) تعداد رئوس فرد هر گراف باید همیشه زوج باشد، اما تعداد رئوس زوج آن، هر عدد صحیح حسابی (صحیح نا منفی) می تواند باشد.

$$0 \leq q \leq \frac{P(P-1)}{2} \Rightarrow 0 \leq q \leq \frac{11 \times 10}{2} \Rightarrow 0 \leq q \leq 55 \quad (۲) - ۷۵$$

$$q(G) + q(\bar{G}) = q(k_p) \Rightarrow q(\bar{G}) = \frac{P(P-1)}{2} - q(G) \quad (۱) - ۷۶$$

$$q(\bar{G}) = \frac{8 \times 7}{2} - 8 = 20$$

۷۷- (۲) با توجه به اینکه مرتبه ی گراف عددی فرد می باشد (9)، لذا تعداد رئوس زوج، نمی تواند عددی زوج باشد، زیرا اگر تعداد رئوس زوج گراف زوج باشد، ما بقی رئوس (که تعداد شان فرد است) باید از درجه ی فرد باشند، در صورتی که می دانیم تعداد رئوس فرد، در هر گراف، همیشه عددی زوج است.

(۲) - ۷۸

$$k_p \text{ ماتریس مجاورت گراف } = \begin{cases} P-1 & \text{و } (P \text{ فرد}) \\ -(P-1) & \text{و } (P \text{ زوج}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow k_4 \text{ ماتریس مجاورت گراف } = -(4-1) = -3$$

$$\bullet \xrightarrow{k_2} \bullet \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (1)(1) - (0)(0) = 0 \quad \text{مثال :}$$

۷۹- (۲) نکته: هرگاه G گرافی هم بند از مرتبه ی P باشد، آنگاه G حداقل P-1 یال دارد، لذا در هر گراف هم بند داریم:

$$P-1 \leq q \leq \frac{P(P-1)}{2} \Rightarrow 8-1 \leq q \leq \frac{8 \times 7}{2} \Rightarrow 7 \leq q < 28$$

۸۰- (۱) نکته: می دانیم گراف از مرتبه ی فرد، فرد منتظم نداریم. در واقع اگر P عددی اول غیر از 2 باشد، چون فرد است، لذا P+2 نیز فرد می شود و طبق نکته ی فوق این امکان ندارد. لذا تنها گراف P- منتظم از مرتبه ی P+2، گراف 2- منتظم از مرتبه ی 4 است (P=2).

۸۱- (۱) نکته: هرگاه در یک گراف $\delta = \Delta = 4$ باشد، گراف 4- منتظم است، لذا داریم:

$$Pr = 2q \Rightarrow 4P = 2 \times 12 \Rightarrow P = 6$$

$$Pr = 2q \Rightarrow q = \frac{P \times r}{2} = \frac{8 \times 4}{2} = 16 \quad (۱) - ۸۲$$

۸۳- (۴) فرض می کنیم تعداد کل رئوس P باشد اگر ۲ رأس از درجه ی ۴ باشند ، در این صورت $P - 2$ رأس از درجه ی ۳ خواهند بود ، لذا داریم :

$$\sum_{i=1}^P \deg V_i = 2q \Rightarrow 2(4) + (P-2)(3) = 10 \Rightarrow 3P = 18 \Rightarrow P = 6$$

(۲) - ۸۴

$$\begin{cases} Pr = 2q \\ Pr = 2q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4P = 2q \Rightarrow q = 2P \\ P(P-1) = 2(q+7) \end{cases} \Rightarrow P^2 - P = 2(2P+7)$$

$$P^2 - 5P - 14 = 0 \Rightarrow (P-7)(P+2) = 0 \quad \begin{cases} P = 7 \text{ ق. ق.} \\ P = -2 \text{ غ. ق. ق.} \end{cases}$$

۸۵- (۴) نکته : هرگاه G گرافی ساده و هم بند از مرتبه ی P باشد ، آنگاه حداقل $P-1$ یال دارد.
لذا گزینه ی ۴ صحیح است.

۸۶- (۲) نکته : هرگاه G گرافی ساده و هم بند از مرتبه ی P باشد ، آنگاه حداقل $P-1$ یال دارد.

یعنی $q \leq P-1$ و در نتیجه $q \leq 19$ ، پس $\text{Min}(q) = 19$

۸۷- (۱) نکته : هرگاه G گرافی ساده و هم بند از مرتبه ی P باشد ، آنگاه حداقل $P-1$ یال دارد.

یعنی $q \geq P-1$ یا $p \leq q+1$ و در نتیجه $P \leq 21$ لذا $\text{Max}(P) = 21$

۸۸- (۲) نکته : هرگاه G گرافی ساده و هم بند از مرتبه ی P باشد ، آنگاه حداقل $P-1$ یال دارد ، چون $P = 7$ لذا حداقل تعداد یال های این گراف برای آنکه هم بند باشد ، برابر ۶ است ، پس باید حداقل ۲ یال دیگر به تعداد یال های G که ۴ تا هستند ، اضافه کنیم ، تا هم بند شود.

۸۹- (۱) زیرا حداقل یالی که یک گراف هم بند ساده ی از مرتبه ی P می تواند داشته باشد ، $P-1$ است.

$$p = q+1 \Rightarrow p = 9+1 = 10 \quad (۳) - ۹۰$$

$$p+q = q+1+q = 2q+1 = \text{عدد فرد} \quad (۴) - ۹۱$$

$$q = 45 \Rightarrow q = \frac{P(P-1)}{2} = 45 \Rightarrow P(P-1) = 90 \Rightarrow P(P-1) = 10(9) \Rightarrow P = 10 \quad (۱) - ۹۲$$

$$20 \times 2 + 30 = \text{مجموع درجات فرد} \Rightarrow 2q = \text{مجموع درجات زوج} + \text{مجموع درجات فرد} \quad (۱) - ۹۳$$

$$\Rightarrow 10 = \text{مجموع درجات فرد}$$

چون همه ی رئوس از درجه ی فرد ، هم درجه هستند لذا باید یا درجه ی همه آنها 1 بوده و تعدادشان 10 تا باشد و یا 5 بوده و تعدادشان 2 تا باشد ، که با توجه به گزینه ها ، تعداد رئوس فرد ، 2 تا می باشد.

۹۴- (۴)

$$q_{\text{Max}} = \binom{P}{2} = \frac{P(P-1)}{2}$$

۹۵- (۱) نکته : تنها گراف کامل که درخت می باشد ، k_2 است ، زیرا از k_2 به بعد ، همگی دارای دور می باشند.

۹۶- (۲) اگر این گراف کامل باشد ، $\frac{5 \times 4}{2} = 10$ یال دارد ، اما گراف داده شده 9 یال دارد ، لذا اگر از گراف کامل k_5 ،

یک یال حذف کنیم ، در این صورت 3 رأس از درجه ی 4 (Max) و 2 رأس از درجه ی 3 خواهد داشت.

۹۷- (۲)

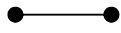
۹۸- (۳) در گزینه های (2) و (4) ، تعداد رئوس فرد ، فرد است ، و در گزینه ی 1 ، چون $P = 5$ است ، لذا بزرگترین جمله نمی تواند 5 باشد ، زیرا درجه ی هر رأس در چنین گرافی باید $P - 1 = 4$ باشد.

۹۹- (۴)

$$\begin{aligned} Pr = 2q &\Rightarrow \begin{cases} 4P = 2q \Rightarrow q = 2P \\ q = 3P - 2 \end{cases} \Rightarrow 2P = 3P - 2 \Rightarrow P = 2 \end{aligned}$$

$$q = 2P \Rightarrow q = 4 \Rightarrow p + q = 6$$

۱۰۰- (۳) با توجه به نکات درخت ، گزینه ی 3 می تواند ، نادرست باشد.

مثال : در درخت $\Delta = 1$ 

۱۰۱- واضح است که این گراف ، گراف کامل k_6 است ، زیرا $q = \frac{6 \times 5}{2} = 15$ و لذا از هر رأس آن 5 یال می گذرد.

$$\delta \leq \frac{2q}{P} \leq \Delta \Rightarrow P\delta \leq 2q \leq P\Delta \quad \text{۱۰۲- (۱) یاد آوری :}$$

$$\begin{cases} P = 10^{\text{درخت}} \Rightarrow q = P - 1 = 9 \\ P = 10^{\text{کامل}} \Rightarrow q(k_{10}) = \frac{10 \times 9}{2} = 45 \end{cases} \Rightarrow 45 - 9 = 36 \quad \text{۱۰۳- (۳)}$$

$$\delta \leq \frac{2q}{P} \Rightarrow 3 \leq \frac{2 \times 7}{P} \Rightarrow 3P < 14 \Rightarrow P < \frac{14}{3} = 4 \frac{2}{3} \Rightarrow P \leq 4 \quad \text{۱۰۴- (۳)}$$

$$2 = \text{حداقل تعداد رئوس از درجه ی 1 در درخت} \Rightarrow P - 1 + 2 = P + 1 \quad \text{۱۰۵- (۳)}$$

$$P - 1 = \text{حداکثر تعداد رئوس از درجه ی 1 در درخت}$$

$$\sum_{i=1}^P \deg V_i = 2q \Rightarrow 8 = 2q \Rightarrow q = 4 \Rightarrow p = q + 1 = 5 \quad \text{۱۰۶- (۳)}$$

تعداد درختان از مرتبه ی 5 ، برابر 4 تا است.

$$2q = P(P-1) = 8 \times 7 = 56 = \text{مجموع درجات رئوس} = \text{تعداد یک ها} \quad \text{۱۰۷- (۱)}$$

۱۰۸- (۳)

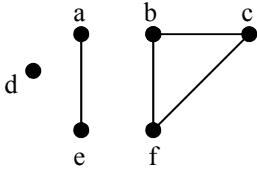
۱۰۹- (۲) گراف های (1) ، (3) ، (4) ، یال چند گانه دارند.

۱۱۰- (۴) هرگاه $\delta = \Delta = 17$ باشد، در این صورت گراف ۱۷- منتظم خواهد شد، اما گراف از مرتبه ی ۱۹، ۱۷- منتظم نداریم. (گراف از مرتبه ی فرد، فرد منتظم نداریم).

۱۱۱- (۲) با توجه به اینکه شکل گراف نسبت به محور ad متقارن است، کافی است تعداد مسیر های از a به d و از طریق b (یعنی مسیر بالا) را شمرده، دو برابر کنیم، چون از a به d و از طریق b ، ۴ مسیر وجود دارد، لذا کلاً ۸ مسیر وجود دارد.

$abcd$, $abed$, $abcfed$, $abefcd$

۱۱۲- (۲) اگر نمودار گراف مورد نظر را رسم کنیم، مشاهده می کنیم که از سه بخش جدا از هم که عبارتند از: (یک نقطه، یک خط و یک مثلث) تشکیل یافته است.



۱۱۳- (۲) می دانیم گراف k_8 دارای $\frac{8 \times 7}{2} = \frac{56}{2} = 28$ یال است، در مقایسه ی این گراف با گراف G ، متوجه می شویم که G یک یال کمتر از k_8 دارد، با حذف یک یال از k_8 ، گراف داده شده (گراف G) بدست می آید که دارای ۶ رأس از درجه ی ۷ و دو رأس از درجه ی ۶ خواهد بود و در نتیجه، ۶ رأس آن دارای درجه ی ماکزیمم می باشند.

۱۱۴- (۳) نکته: درجه ی هر رأس در گراف $\bar{G}$ برابر است با: -1 - تعداد صفر های هر سطر (ستون)

	a	b	c	d	e	
a	0	1	1	1	1	$\bar{G}$ در رأس a درجه $= 1 - 1 = 0$
b	1	0	1	0	1	$\bar{G}$ در رأس b درجه $= 2 - 1 = 1$
c	1	1	0	0	0	$\bar{G}$ در رأس c درجه $= 3 - 1 = 2 \rightarrow 2, 2, 1, 1, 0$
d	1	0	0	0	1	$\bar{G}$ در رأس d درجه $= 3 - 1 = 2$
e	1	1	0	1	0	$\bar{G}$ در رأس e درجه $= 2 - 1 = 1$

روش دیگر:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{G} \text{ در رأس } a \text{ درجه } = 4 - (\text{تعداد یک ها در } G) \Rightarrow \deg_a^{\bar{G}} = 4 - 4 = 0 \\ \text{یا} \\ \bar{G} \text{ در رأس } b \text{ درجه } = 4 - (\text{تعداد یک ها در } G) \Rightarrow \text{به همین ترتیب در مورد بقیه} \end{array} \right.$$

۱۱۵- (۱) در هر درخت، درجه ی هر رأس به دلیل هم بندی، حداقل ۱ و حداکثر $P-1$ است.

$$1 \leq \deg V_i \leq P-1$$

یعنی:

اما در درخت رابطه ی $q = p-1$ برقرار است، لذا $p-q=1$ و در نتیجه:

$$p-q \leq \deg V_i \leq q$$

۱۱۶- (۴) می خواهیم حداکثر تعداد یال ها را داشته باشیم، لذا برای به وجود آمدن ۶ بخش، کاری می کنیم که ۵ رأس به صورت منفرد دیده شوند و بقیه ی رأس ها (۸ رأس باقی مانده) تشکیل یک گراف کامل دهند، لذا طبق

فرمول $q = \frac{P(P-1)}{2}$ در گراف های کامل، با ۸ رأس باقی مانده، حداکثر $\frac{8 \times 7}{2} = 28$ یال می توان رسم کرد. (دقت

کنید که اگر یک یال دیگر به گراف اضافه کنیم، گراف کمتر از ۶ بخش خواهد شد) پس:

$$\max(q) = 28$$

$$P \geq \frac{1 + \sqrt{1 + 8q}}{2} = \frac{1 + \sqrt{1 + 8(18)}}{2} \approx 6/5 \stackrel{P \in \mathbb{N}}{\Rightarrow} P \geq 7 \quad (۴) - ۱۱۷$$

$$\delta \leq \frac{2q}{P} \Rightarrow P \leq \frac{2q}{\delta} = \frac{2 \times 18}{3} = 12 \Rightarrow 7 \leq P \leq 12$$

۱۱۸- (۴) با توجه به تعداد جملات دنباله ، گراف کامل داده شده ، همان گراف k_6 است که درجه ی کلیه ی رئوس آن برابر $P - 1 = 5$ است ، لذا داریم :

$$\begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta + 1 = 5 \Rightarrow \beta = 4 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 16 \\ \gamma - 2 = 5 \Rightarrow \gamma = 7 \end{cases}$$

$$2(1) + 2(2^2) + 2(3^2) + 2(4^2) + 2(5^2) + 2(6^2) = 2q \quad (۴) - ۱۱۹$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = q \Rightarrow \frac{6(7)(13)}{6} = q \Rightarrow q = 91$$

$$\Rightarrow p + q = 12 + 91 = 103$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{نکته :}$$

$$p + q = P + \frac{P(P-1)}{2} = \frac{2P + P(P-1)}{2} = \frac{P(P+1)}{2} \quad (۴) - ۱۲۰$$

یعنی دو برابر هر یک از گزینه ها ، باید حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد ، اما بین اعداد 106 ، 112 ، 108 ، 110 ، تنها $110 = 11 \times 10$ قابل قبول است.

۱۲۱- (۲) اگر G ، گراف کامل باشد ، $\frac{5 \times 4}{2} = 10$ یال خواهد داشت ، چون G ، یک یال کمتر از k_5 دارد ، پس دو رأس آن دارای درجه ی ۳ بوده و ۳ رأس دیگر از درجه ی ۴ (از درجه ی ماکزیمم) می باشند.

(۱) - ۱۲۲

$P =$ تعداد سطر ها یا ستون های ماتریس = مرتبه ی گراف = 4

$q =$ نصف تعداد یک های ماتریس = اندازه ی گراف = 5

$$\sum_{i=1}^4 b_{ii} = A^2 \quad \text{مجموع درجیات رئوس گراف} = \text{مجموع درجیات رئوس گراف} = 3 + 2 + 2 + 3 = 10$$

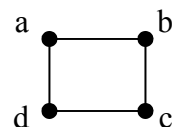
$$\Rightarrow p + q - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 b_{ii} = 4$$

$$q = \frac{P(P-1)}{2}$$

۱۲۳- (۱) نکته : در گراف کامل می دانیم :

$$p + 2q = P + 2 \left(\frac{P(P-1)}{2} \right) = P + P^2 - P = P^2 = \text{مربع کامل}$$

۱۲۴- (۲) چون گراف اویلری ساده ی مرتبه ی ۴ داریم ، لذا درجه ی همه ی رئوس گراف باید زوج باشد ، یعنی گراف به



صورت باشد ، در نتیجه ماتریس مجاورت آن به صورت

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 1 & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

است و همان طور که

مشاهده می شود ، این ماتریس 8 درایه ی غیر صفر دارد.

۱۲۵- (۲) برای اینکه عبارت $\left(\frac{\delta+\Delta}{2}\right)^2$ ماکزیمم شود لازم است $\delta+\Delta$ ماکزیمم گردد و برای اینکه $\delta+\Delta$ ماکزیمم گردد ، لازم است $\delta=\Delta=10$ باشد ، یعنی گراف دارای حداکثر درجه و حداکثر یال باشد ، (یعنی گراف از مرتبه ی 11 ، ده منتظم باشد) پس :

$$\text{Max} \left(\frac{\delta+\Delta}{2} \right)^2 = \left(\frac{10+10}{2} \right)^2 = 100$$

۱۲۶- (۴) می دانیم مجموع درایه های قطر اصلی A ، همان مجموع درجات رئوس گراف بوده و لذا همواره عددی زوج است و تنها عدد اول زوج 2 است ، پس مجموع درایه های قطر اصلی A^2 ، برابر 2 بوده و داریم :

$$A^2 \text{ مجموع درجات رئوس} = 2q = 2 \Rightarrow q = 1$$

۱۲۷- (۳) چون $\delta=\Delta=4$ است ، لذا گراف 4- منتظم است از طرفی داریم :

$$\sum_{i=1}^P \deg V_i = 24 = 2q \Rightarrow q = 12 \Rightarrow Pr = 2q \Rightarrow 4P = 24 \Rightarrow P = 6$$

$$q(G) + q(\overline{G}) = q(K_P) \Rightarrow q(G) + q(\overline{G}) = \binom{n}{2} \Rightarrow q(\overline{G}) = \binom{n}{2} - m \quad \text{۱۲۸- (۴) نکته :}$$

۱۲۹- (۲) گراف P رأسی ، $\binom{P}{2}$ یال دارد ، لذا باید 2 یال را از میان $\binom{P}{2}$ یال انتخاب کنیم ، بنابراین داریم :

$$\binom{\binom{5}{2}}{2} = \binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$$

۱۳۰- (۳)

$$P = 7 = \text{تعداد رئوس} = \text{مرتبه}$$

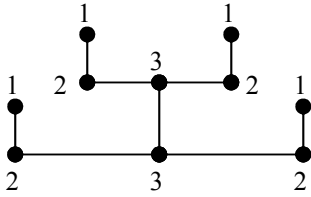
$$q = 13 = \text{تعداد یال ها} = \text{اندازه}$$

۱۳۱- (۲) فرض می کنیم x تعداد رئوس از درجه ی 1 باشد ، لذا طبق فرض تعداد رئوس از درجه ی 2 نیز برابر x است اکنون داریم :

$$x + x + 2 = \text{تعداد رئوس} = p = q + 1$$

$$x(1) + x(2) + 2(3) = \text{مجموع درجات رئوس} = 2q \Rightarrow \begin{cases} 2x - q = -1 \\ 3x - 2q = -6 \end{cases} \Rightarrow q = 9 \Rightarrow p = q + 1 = 10$$

نمودار



(۲) - ۱۳۲

$$\deg V_i \leq 6 \Rightarrow \sum_{i=1}^{50} \deg V_i \leq \sum_{i=1}^{50} 6 \Rightarrow 2q \leq 50 \times 6 \Rightarrow q \leq 150 \Rightarrow \text{Max}(q) = 150$$

(۳) - ۱۳۳

$$P = \frac{1}{3}q \Rightarrow P = \frac{1}{3} \times \frac{P(P-1)}{2} \Rightarrow 6 = P-1 \Rightarrow P = 7$$

(۴) - ۱۳۴

$$P = 11 \Rightarrow q = p - 1 = 10 \Rightarrow \sum_{i=1}^P \deg V_i = 2q = 20$$

(۳) - ۱۳۵

$$\begin{cases} P = 7 \\ q = 12 \end{cases}, \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{تعداد رئوس از درجه } x \\ \text{تعداد رئوس از درجه } y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = P = 7 \\ 3x + 4y = 2q = 24 \end{cases} \Rightarrow \{y = 3\}$$

(۴) - ۱۳۶

$$Pr = 2q \Rightarrow \begin{cases} 4P = 2q \Rightarrow q = 2P \\ p + q = 12 \end{cases} \Rightarrow P + 2P = 12 \Rightarrow q = 4$$

۱۳۷- (۲) یاد آوری : قضیه : هر درختی که بیش از یک رأس داشته باشد ، دست کم دو رأس از درجه ی یک دارد.



(۲) - ۱۳۸

$$P = 8 \Rightarrow q = p - 1 = 7 \Rightarrow \text{ماکزیمم درجه} = 7$$

(۱) - ۱۳۹

$$8 = \text{تعداد جملات دنباله} = P = \text{مرتبه ی گراف}$$

$$\text{گراف } q = \text{اندازه ی گراف} = \frac{18}{2} = 9$$

(۴) - ۱۴۰

$$\deg V_i \leq 5 \Rightarrow \sum_{i=1}^{41} \deg V_i \leq \sum_{i=1}^{41} 5 \Rightarrow 2q \leq 50 \times 41 = 205$$

اما $2q$ ، 205 نمی تواند باشد، زیرا 205 فرد است، لذا حداکثر می تواند 204 باشد، در نتیجه داریم:

$$\text{Max}(2q) = 204 \Rightarrow \text{Max}(q) = 102$$

(۲) - ۱۴۱

$$k_p \text{ تعداد کل مسیر ها در } \left(\begin{matrix} P \\ 2 \end{matrix} \right) \lfloor (P-2)!e \rfloor \Rightarrow \left(\begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right) \lfloor (4-2)! \times 2/7 \rfloor = 6 \times 5 = 30$$

(۱) - ۱۴۲

$$\frac{2q}{P} \leq \Delta \leq P-1 \Rightarrow \frac{2 \times 48}{12} \leq \Delta \leq 12-1 \Rightarrow 8 \leq q \leq 11$$

۱۴۳- (۲) چون در گراف مذکور، بیشترین درجه، 4 است، پس گراف باید به یک گراف 4- منتظم از مرتبه ی 7 تبدیل شود، لذا:

$$Pr = 2q \Rightarrow 7 \times 4 = 2q \Rightarrow q = 14$$

که با اضافه کردن حداقل $10 = 14 - 4$ یال، به یک گراف منتظم تبدیل می گردد.

$$\delta \leq \frac{2q}{P} \leq \Delta \Rightarrow 1 \leq \frac{2 \times 11}{2n} \leq 13 \Rightarrow 1 \leq \frac{11}{n} \leq 3 \Rightarrow \frac{11}{3} \leq n \leq 11$$

(۲) - ۱۴۴

$$\Rightarrow 3/ \leq n \leq 11 \Rightarrow 4 \leq n \leq 11$$

n مقادیر طبیعی را قبول می کند.

$$Pr = 2q \Rightarrow \begin{cases} 3P = 2q \\ q = 2P - 3 \end{cases} \Rightarrow 2q = 4P - 6 \Rightarrow 3P = 4P - 6$$

(۲) - ۱۴۵

$$\Rightarrow P = 6 \Rightarrow q = 9 \Rightarrow pq = 54$$

(۲) - ۱۴۶

$$\text{کل درایه ها} = 64 - 20 = 44$$

$$\text{تعداد یال} = 10$$

$$\text{تعداد یک ها} = 2q = 20$$

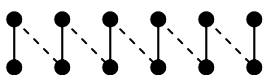
$$\longrightarrow \text{تعداد صفرها} = 64 - 20 = 44$$

(۲) - ۱۴۷

$$Pr = 2q \Rightarrow 12 = 2q \Rightarrow q = 6$$

حداقل 5 یال باید بیفزاییم تا هم بند شود $\Rightarrow 11 > 6 \Rightarrow P-1 > q \Rightarrow$ نا هم بند

راه دیگر:



مطابق نمودار گراف مقابل ، حداقل 5 یال (یال های نقطه چین) باید اضافه شود ، تا هم بند شود.

$$\begin{aligned} p &= 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \\ \text{مجموع درجات رئوس} &= 2q = 1(1) + 2(2) + 3(3) + \dots + n(n) \\ &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \Rightarrow \frac{q}{p} = \frac{2n+1}{6} \end{aligned} \quad (1) - 148$$

۱۴۹- (۱) می دانیم درایه های روی قطر اصلی M ، درجه ی رئوس گراف می باشند ، چون در هر درخت ، حداقل 2 رأس درجه ی 1 داریم ، لذا گزینه ی 1 نمی تواند مربوط به یک درخت باشد.
۱۵۰- (۳)

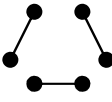
$$\begin{cases} \text{تعداد صفر های درخت} = P^2 - 2q \\ q = P - 1 \end{cases} \Rightarrow 26 = P^2 - 2(P - 1) \Rightarrow P^2 - 2P - 24 = 0$$

$$(P - 6)(P + 4) = 0 \quad \begin{cases} P = 6 \\ P = -4 \end{cases}$$

۱۵۱- (۳) درایه های روی قطر اصلی A ، درجه ی رئوس خراف می باشند ، لذا با توجه به اینکه درجه ی رئوس گراف 3 ، 2 ، 2 ، 1 است ، گزینه ی 3 صحیح می باشد.

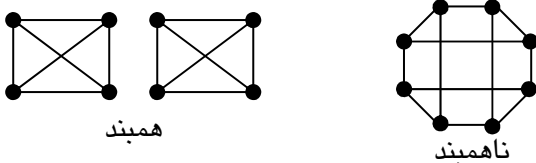
۱۵۲- (۳) چون ماتریس ها 3×3 می باشند پس $P = 3$ است و لذا q نیز باید 3 باشد تا $q + 2p = 9$ شود ، بنابراین با توجه به اینکه تعداد یال های هر گراف نصف تعداد یک ها است ، گزینه ی 3 صحیح است.
۱۵۳- (۱)

$$\begin{cases} p - q = 3 \Rightarrow 2p - 2q = 6 \\ pr = 2q \end{cases} \Rightarrow 2p - rp = 6 \Rightarrow P(2 - r) = 6 = 1 \times 6 = 6 \times 1 = 2 \times 3 = 3 \times 2$$

$P = 1, 2 - r = 6 \Rightarrow r = -4$	$\times$			
$P = 6, 2 - r = 1 \Rightarrow r = 1$	$\checkmark$	$\longrightarrow$		6 رأسی 1- منتظم
$P = 2, 2 - r = 3 \Rightarrow r = -1$	$\times$			
$P = 3, 2 - r = 2 \Rightarrow r = 0$	$\checkmark$	$\longrightarrow$		3 رأسی 0- منتظم

۱۵۴- (۳) گراف های اشکال (1) و (2) هر دو هم اویلری و هم همیلتونی هستند ، زیرا درجه ی همه ی رئوس آنها زوج بوده و لذا اویلری اند و ضمناً هر دوی آنها دارای مسیری به طول P که از همه ی رئوس (از هر رأس فقط یک بار) می گذرد ، می باشند و لذا همیلتونی نیز هستند ، گراف گزینه ی 4 اویلری نمی باشد ، زیرا رأس از درجه ی فرد دارد ، بنابراین پاسخ صحیح گزینه ی 3 می باشد.

۱۵۵- (۴)



۱۵۶- (۴) می دانیم در هر درخت رابطه ی $q = p - 1$ همواره برقرار است ، لذا گزینه ی 4 ، صحیح است.

۱۵۷- (۳) یاد آوری : درایه ی m_{ii} ماتریس M^2 درجه ی رأس i ام گراف G می باشد.

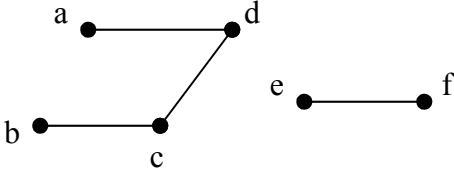
۱۵۸- (۳) گراف مطلوب ، باید اویلری باشد ، به عبارت دیگر ، درجه ی همه ی رئوسش زوج باشد.

(۴)-۱۵۹

$$Pr = 2q \Rightarrow 22r = 2 \times 231 \Rightarrow r = \frac{231}{11} = 21$$

لذا گراف 21- منتظم بوده و در نتیجه درجه ی هر رأسش 21 می باشد.

۱۶۰- (۴) با توجه به نمودار گراف ، گراف نا هم بند است.



$$15 = \text{تعداد رئوس فرد} + \text{تعداد رئوس زوج}$$

(۲)-۱۶۱

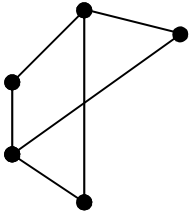
می دانیم تعداد رئوس فرد در هر گراف ، همیشه زوج است ، لذا داریم :

$$\text{فرد} = \text{زوج} - \text{فرد} = 15 - n \Rightarrow 15 = \text{عددی زوج} + n$$

پس n باید فرد باشد.

۱۶۲- (۱) با توجه به اطلاعات داده شده ، اگر نمودار گراف مورد نظر را رسم کنیم ، مشاهده می کنیم دوری به طول 3 یا

5 ندارد.



(۱)-۱۶۳

$$P^2 - 2q = 4^2 - 10 = 6 = \text{تعداد درایه های صفر}$$

در واقع ، چون مرتبه ی گراف ، 4 می باشد ، تعداد درایه های ماتریس مجاورت آن $P^2 = 16$ خواهد بود و چون در این گراف 5 یال وجود دارد ، پس از 16 درایه ، 10 تای آنها 1 می باشند ، لذا 6 درایه ی غیر صفر دارد.

۱۶۴- (۳) در ماتریس مجاورت گراف منتظم ، تعداد یک های تمام سطر ها یا ستون ها ، برابر است.

۱۶۵- (۳) درایه های قطر اصلی ماتریس A ، همان درجات رئوس گراف می باشند ، چون ماتریس ، مرتبه ی 4 است ، اگر درجه ی رئوس گراف را x و y و z و t بنامیم ، با توجه به گزینه ها داریم :

شدنی است ، زیرا 4 رأس از درجه ی فرد دارد $3 \times 1 \times 1 \times 1 = 3 \Rightarrow x y z t = 3$ گزینه ی (۱)

شدنی است ، زیرا 2 رأس از درجه ی فرد دارد $3 \times 2 \times 2 \times 1 = 12 \Rightarrow x y z t = 12$ گزینه ی (۲)

نشدنی است ، زیرا تعداد رئوس فرد آن ، فرد است $3 \times 3 \times 2 \times 1 = 18 \Rightarrow x y z t = 18$ گزینه ی (۳)

شدنی است ، زیرا 2 رأس از درجه ی فرد دارد $3 \times 3 \times 2 \times 2 = 36 \Rightarrow x y z t = 36$ گزینه ی (۴)

(۴)-۱۶۶

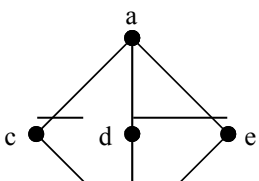
چون $P = 8$ لذا برای آنکه این گراف هم بند باشد ، باید بین هر دو رأس آن ، دست کم یک مسیر وجود داشته باشد ، یعنی لااقل 7 یال داشته باشد ، در حالی که در اینجا تعداد یال ها $q = 6$ است ، لذا این گراف نا هم بند است.

یاد آوری : اگر در یک گراف $q < p-1$ باشد ، گراف نا هم بند است و اگر $q = p-1$ باشد ، گراف ، درخت است.

۱۶۷- (۲) گرافی که هم بند باشد و کمترین تعداد یال را داشته باشد ، درخت است ، می دانیم در درخت ها $q = p-1$ ، پس حداقل تعداد یال ها در گرافی با $P = 8$ رأس برابر است با 7 ، زیرا : $q \geq p-1 = 7$

۱۶۸- (۱) با توجه به اطلاعات داده شده ، اگر نمودار گراف را رسم کنیم ، به صورت زیر در می آید.

دو رأس با ماکزیمم درجه (رئوس a و b) غیر مجاورند ، لذا تعداد دور های به طول 4 برابر است با 3 دور ، این 3 دور



عبارتند از : $acbda-adbea-acbea$

۱۶۹- (۲) یاد آوری یک نکته : تعداد گراف های ۲ منتظم از مرتبه P ، برابر است با تعداد حالت هایی که می توان عدد P را به صورت مجموع چند عدد بزرگتر از ۲ افراز کرد. چون درجه ی هر رأس ۲ است، لذا برای آنکه بتوانیم بیشترین تعداد دور را داشته باشیم، باید عدد ۱۳ را تا جای ممکن، به قطعات زیادتری افراز کنیم (بشکنیم).

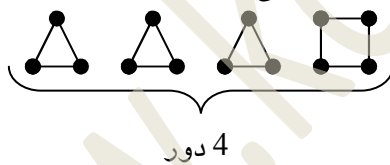
$$13 = \underbrace{13+0} = \underbrace{10+3} = \underbrace{9+4} = 8+5 = 7+6 =$$

$\swarrow$ $\downarrow$ $\searrow$ $\searrow$
 ۱۳ ضلعی ۱۰ ضلعی و ۳ ضلعی ۹ ضلعی و ۴ ضلعی

$$= 3 + 3 + 7 = \dots = 3 + 3 + 3 + 4$$

$\swarrow$ $\downarrow$ $\searrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 مثلث مثلث ۷ ضلعی مثلث مثلث مثلث مربع

بنابراین اگر عدد ۱۳ را به صورت $3+3+3+4$ بشکنیم، سه دمسب و یک چهار ضلعی حاصل می شود، یعنی در این حالت ۴ دور به وجود می آید، در صورتی که در حالت های قبلی، تعداد دور ها کمتر از ۴ دور است، مثلاً در حالت $10+3$ ، دو دور و در حالت $13+0$ ، فقط یک دور ایجاد می شود.

$$13 = 3+3+3+4 \rightarrow$$


$$\binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

۱۷۰- (۱) می دانیم تعداد یال های گراف K_8 برابر است با :

گراف داده شده، نسبت به گراف K_8 ، ۵ یال کم دارد (به عبارت دیگر ۵ یال از K_8 حذف شده است)، این ۵ یال ممکن است از جاهای مختلف حذف شده باشند. (یعنی ممکن است هر پنج تا، از یک رأس حذف شده باشند و یا از چند رأس)، برای $\Delta - \delta$ شدن، باید Δ حداکثر و δ حداقل شود. لذا باید حالتی را در نظر بگیریم که هر پنج یال از یک رأس حذف شده باشند.

$$\underbrace{7, 7, 7, 7, 7, 7, 7}_{K_8} \xrightarrow{\text{از یک رأس ۵ یال حذف}} 7, 7, 6, 6, 6, 6, 2$$

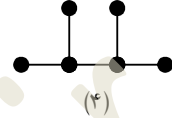
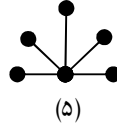
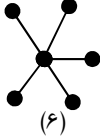
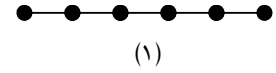
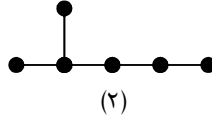
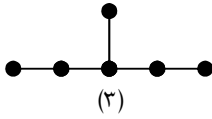
$\downarrow$ $\downarrow$
 Δ δ

$$\Rightarrow \text{Max}(\Delta - \delta) = 7 - 2 = 5$$

۱۷۱- (۳) یاد آوری یک نکته : اگر در گراف هم بند G ، فقط دو رأس از درجه ی فرد وجود داشته باشد و بخواهیم مسیری اویلری بیابیم که از هر یال دقیقاً یک بار عبور کند، کافی است از یکی از رئوس فرد شروع به حرکت نموده و در رأس فرد دیگر متوقف شویم، بنابراین اگر از رأس درجه ی فرد B ، شروع کنیم رأس پایانی، رأس درجه ی فرد دیگر

یعنی D می باشد.

۱۷۲- (۳) تعداد درخت های از مرتبه ی ۶ برابر است با ۶ نوع برای رسم آنها ، ابتدا شکل (۱) یعنی درخت خطی را رسم کرده ، سپس هر بار یک یال را جدا کرده در جاهای دیگر می چسبانیم تا اینکه بالاخره به ستاره برسیم.



۱۷۳- (۲) واضح است که گراف منتظم است.

$$P = 8$$

$$r=1 \Rightarrow Pr=2q \Rightarrow 1 \times 8 = 2q \Rightarrow q=4$$

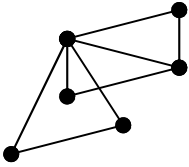
$$q=?$$

۱۷۴- (۴) واضح است که گراف منتظم است.

$$\begin{cases} P=5 \\ r=4 \end{cases} \Rightarrow Pr=2q \Rightarrow 5 \times 4 = 2q \Rightarrow q=10$$

$$q=?$$

۱۷۵- (۴) باید $a, b \geq 1$ باشند ، اما با $a=1$ و $b=1$ ، گراف غیر قابل ترسیم است ، اگر $a=1$ و $b=2$ باشد ، تعداد رؤس فرد ، فرد می شود که غیر ممکن است ، پس $a=2$ و $b=2$ مینیمم درجه ی رؤس است لذا کمترین مقدار $a+b$ ، ۴ است.



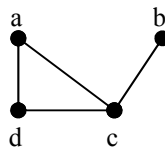
۱۷۶- (۱) اگر این گراف کامل باشد $\binom{6}{2} = 15$ یال دارد ، چون در اینجا ۱۴ یال وجود دارد ، پس یک یال نسبت به گراف کامل ، حذف شده و لذا ۲ رأس گراف درجه ی ۴ و بقیه ی رؤس درجه ی ۵ هستند ، یعنی ۴ رأس از درجه ی ۵ (از درجه ی Max) دارد.

۱۷۷- (۳) چون ماتریس 4×4 است ، اگر دو درایه ی a_{24} و a_{42} ، ۱ می بودند ، ماتریس داده شده ، ماتریس گراف کامل می شد چون در اینجا یک یال حذف شده پس گراف آن به صورت است و این گراف ۲ دور به طول ۳ و یک دور به طول ۴ و لذا جمعا ۳ دور دارد.

۱۷۸- (۲)

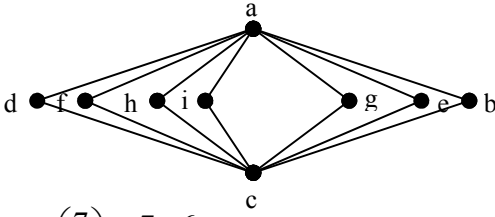
۱۷۹- (۱) با رسم نمودار گراف ، دیده می شود که گزینه ی ۱ صحیح است.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



۱۸۰- (۳) گراف را به صورت مقابل رسم می کنیم ، دو رأس این چهار ضلعی ها ، رؤس از درجه ی ۷ و دو رأس دیگر ،

رئوس از درجه ی 2 هستند ، هر دور مسلما از رئوس از درجه ی 7 می گذرند ، لذا برای ساختن هر دور مانند abceda کافی است از میان 7 رأس از درجه ی 2 ، دو رأس را انتخاب کنیم ،



$$\binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

لذا تعداد دورها برابر است با :

۱۸۱- (۲) در گراف کامل k_5 ، تعداد دورهای به طول 3 برابر است با : $\binom{5}{3} \times \frac{(3-1)!}{2} = 10$ اما اندازه ی گراف کامل k_5 ،

10 است ، در حالیکه اندازه گراف داده شده $\frac{4+4+4+3+3}{2}$ است ، لذا در گراف داده شده با یک یال حذف شده ، پس 3 دور به طول 3 کم می شود ، یعنی $10-3=7$.

نکته : در گراف کامل k_p ، با حذف یک یال ، $p-2$ دور به طول 3 ، کم می شود .

تستهای مبنا

۱- عددی که در مبنای 7 به صورت $\overline{ab}$ و در مبنای 9 به صورت $\overline{ba}$ ، a و b کدامند؟
 (۱) $a = 4$ و $b = 3$ (۲) $a = 3$ و $b = 4$ (۳) $a = 6$ و $b = 5$ (۴) $a = 5$ و $b = 6$

۲- عدد $\overline{x45y}$ بر 3 بخش پذیر است، $\min(xy)$ کدام است؟
 (۱) صفر (۲) 3 (۳) 9 (۴) 12

۳- عدد $\overline{m6y}$ بر 9 بخش پذیر است، $\max(x+y)$ کدام است؟
 (۱) 18 (۲) 15 (۳) 9 (۴) 12

۴- با در نظر گرفتن اینکه a به جای عدد 10 در مبنای 11 به کار می رود، عدد $(237)_{10}$ به چه صورتی در مبنای 11 نوشته می شود؟

(۱) 217 (۲) $\overline{\alpha 61}$ (۳) $\overline{\alpha 16}$ (۴) $\overline{1\alpha 6}$

۵- چند عدد دو رقمی مانند $\overline{ab}$ در مبنای 10 می توان یافت به طوریکه $\overline{ab} + \overline{ba}$ مربع کامل باشد؟
 (۱) 6 (۲) 7 (۳) 8 (۴) 9

۶- اگر عددی که در مبنای x با $\overline{100}$ نمایش داده می شود، از عددی که در مبنای $x+1$ به $\overline{100}$ نمایش داده می شود، 31 واحد کوچکتر باشد، x برابر است با:

(۱) 12 (۲) 13 (۳) 14 (۴) 15

۷- چند عدد دو رقمی در مبنای 7 مانند $\overline{ab}$ داریم به طوریکه $\overline{ba} - \overline{ab}$ مربع کامل باشد؟
 (۱) 5 (۲) 6 (۳) 7 (۴) 8

۸- چند عدد دو رقمی در مبنای 10 مانند $\overline{ab}$ داریم که با 5 برابر مجموع ارقامش برابر باشد؟
 (۱) 1 (۲) 0 (۳) 2 (۴) 3

۹- اگر بدانیم مربع رقم دهگان عددی دو رقمی به علاوه 4 برابر رقم یکان همان عدد با 4 برابر حاصلضرب ارقام آن برابر می باشد، این عدد همواره بر کدام عدد زیر بخش پذیر است؟

(۱) 21 (۲) 42 (۳) 32 (۴) 64

۱۰- چند عدد چهار رقمی در مبنای 4 وجود دارد؟

(۱) 81 (۲) 192 (۳) 224 (۴) 256

۱۱- اگر عدد $\overline{15x}$ مربع کامل باشد، x کدام یک از اعداد زیر می تواند باشد؟

(۱) 150 (۲) 60 (۳) 30 (۴) 120

۱۲- بزرگترین عدد دو رقمی در مبنای 6، در مبنای 3 چند رقم دارد؟

(۱) 3 (۲) 2 (۳) 4 (۴) 5

۱۳- تعداد همه اعداد چهار رقمی مربع کامل و قابل قسمت بر 11 کدام است؟

(۱) 7 (۲) 8 (۳) 11 (۴) 12

۱۴- عدد 132 در مبنای y به صورت 246 نمایش داده شده است، y برابر است با:

(۱) 9 (۲) 6 (۳) 7 (۴) 8

۱۵- کدام مجموعه، خوش ترتیب است؟

$$\{x \in \mathbb{Q} : x \geq 10\} \text{ (۴)} \quad \{x \in \mathbb{Z} : x > 10\} \text{ (۳)} \quad \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 10\} \text{ (۲)} \quad \{x \in \mathbb{Z} : x \leq 10\} \text{ (۱)}$$

۱۶- کدام مجموعه، خوش ترتیب است؟

$$\begin{array}{ll} \text{(۱) مجموعه اعداد اول چهار رقمی} & \text{(۲) مجموعه ی اعداد گویای مثبت} \\ \text{(۳) مجموعه اعداد حقیقی بازه ی [2 و 1]} & \text{(۴) مجموعه ی اعداد گویای بازه ی } [-\sqrt{2} \text{ و } \sqrt{2}] \end{array}$$

۱۷- تعداد اعداد چهار رقمی در مبنای 7 کدام است؟

$$\begin{array}{llll} \text{(۱) } 6^3 \times 7 & \text{(۲) } 9 \times 10^{10} & \text{(۳) } 7^4 & \text{(۴) } 6 \times 7^3 \end{array}$$

۱۸- کدامیک از اعداد سه رقمی زیر، نمی تواند مربع یک عدد طبیعی باشد؟

$$\begin{array}{llll} \text{(۱) } \overline{ab6} & \text{(۲) } \overline{abl} & \text{(۳) } \overline{ab7} & \text{(۴) } \overline{ab7} \end{array}$$

۱۹- عدد سه رقمی $\overline{2a3}$ که با 326 جمع شود، عدد سه رقمی $\overline{5b9}$ به دست می آید، اگر $\overline{5b9}$ بر 9 بخش پذیر باشد، آنگاه $a + b$ برابر است با:

$$\begin{array}{lll} \text{(۱) } 2 & \text{(۲) } 4 & \text{(۳) } 6 & \text{(۴) } 8 \end{array}$$

۲۰- کوچکترین عدد طبیعی که چون در 560 ضرب شود، حاصل مربع کامل گردد، کدام است؟

$$\begin{array}{llll} \text{(۱) } 30 & \text{(۲) } 35 & \text{(۳) } 20 & \text{(۴) } 25 \end{array}$$

۲۱- اگر در مبنای n اعداد 23 و 27 و 32 تشکیل تصاعد حسابی بدهند، n کدام است؟

$$\begin{array}{llll} \text{(۱) } 14 & \text{(۲) } 11 & \text{(۳) } 8 & \text{(۴) } 9 \end{array}$$

۲۲- کوچکترین عددی که باید در $8!$ ضرب کنیم تا حاصل مربع کامل گردد، کدام است؟

$$\begin{array}{llll} \text{(۱) } 35 & \text{(۲) } 2 \times 3^6 \times 5^8 \times 7^8 & \text{(۳) } 280 & \text{(۴) } 70 \end{array}$$

۲۳- عدد 1432 در مبنای 12 به چه صورتی است؟ ($a=10$, $b=11$, $c=12$ و ...)

$$\begin{array}{llll} \text{(۱) } \overline{4a9} & \text{(۲) } \overline{4c9} & \text{(۳) } \overline{9a4} & \text{(۴) } \overline{9b4} \end{array}$$

۲۴- مربع یک عدد طبیعی به کدام شکل زیر نمی تواند باشد؟

$$\begin{array}{llll} \text{(۱) } 5k-1 & \text{(۲) } 5k+1 & \text{(۳) } 5k+2 & \text{(۴) } 5k \end{array}$$

۲۵- مکعب یک عدد طبیعی به کدام صورت نمی تواند باشد؟

$$\begin{array}{llll} \text{(۱) } 4q+1 & \text{(۲) } 4q+2 & \text{(۳) } 4q+3 & \text{(۴) } 4q+4 \end{array}$$

۲۶- هرگاه، $60! \parallel 5^n$ ، n کدام است؟ (منظور از $60! \parallel 5^n$ ، یعنی n بزرگترین توانی است که 5^n ، $60!$ را عاد می کند).

$$\begin{array}{llll} \text{(۱) } 10 & \text{(۲) } 12 & \text{(۳) } 14 & \text{(۴) } 13 \end{array}$$

۲۷- مربع رقم دهگان بعلاوه ی شانزده برابر مربع رقم یکان عدد دو رقمی، مساوی هشت برابر حاصلضرب ارقامش است، این عدد همواره بر کدام عدد قابل قسمت است؟

$$\begin{array}{llll} \text{(۱) } 13 & \text{(۲) } 17 & \text{(۳) } 41 & \text{(۴) } 82 \end{array}$$

۲۸- کدام یک از اعداد زیر ریشه ی چهارم ندارد؟

$$\begin{array}{llll} \text{(۱) } 20737 & \text{(۲) } 50625 & \text{(۳) } 38416 & \text{(۴) } 14641 \end{array}$$

۲۹- سه عدد اول p و q و r در رابطه ی مقابل، صدق می کنند: $1 < p < q$ و $p+q=r$ در این صورت، p کدام عدد است؟

$$\begin{array}{llll} \text{(۱) } 2 & \text{(۲) } 3 & \text{(۳) } 13 & \text{(۴) } 17 \end{array}$$

۳۰- اصل استقراء ریاضی در مورد حکم $\frac{5n}{12} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ ، برای اعداد طبیعی $n \geq m$ برقرار است، کوچکترین مقدار m کدام است؟

8 (۴)

6 (۳)

5 (۲)

4 (۱)

پاسخ تستهای مبنا

(۱)-۱

$$(\overline{ab})_7 = (\overline{ba})_q \Rightarrow b + 7a = a + qb \Rightarrow 6a = 8b \Rightarrow 3a = 4b$$

a	b
0	0
4	3
8	6

$$\Rightarrow (43)_7 = (34)_q = (31)_{10} \Rightarrow \text{تنها جواب قابل قبول } b=3, a=4 \text{ است،}$$

دقت کنید که در مبنای 7، همه ارقام از 7 کوچکترند.

(۱)-۲ باید $x+y$ مضرب 3 باشد، با توجه x خواهیم داشت:

$$\min(xy) = 0 \text{ و } y=0 \text{ و } x=3$$

(۴)-۳ باید $x+6+y$ مضرب q باشد، لذا ماکزیمم $x+y$ می تواند باید 12 باشد.

$$(۴)-۴ \text{ با تقسیمات متوالی خواهیم داشت: } 237 = 1 \times 11^2 + 10 \times 11 + 6 = 1 \times 11^2 + \alpha \times 11 + 6 \times 11^0 = (\overline{1\alpha 6})_{11}$$

$$\overline{ab} + \overline{ba} = b + 10a + a + 10b = 11(a+b)$$

(۳)-۵

$a+b$ باید مضرب 11 باشد. که 8 عدد بدست می آید که عبارتند از: 29, 92, 38, 83, 47, 74, 56, 65

$$(100)_x - 31 = (\overline{100})_{x+1} \Rightarrow 1 \times x^2 + 0 \times x^0 + 31 = 1 \times (x+1)^2 + (x+1)^1 + 0(x+1)^0$$

(۴)-۶

$$\Rightarrow x^2 + 31 = (x+1)^2 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x = 15$$

$$\overline{ab} - \overline{ba} = (b + 7a) - (a + 7b) = 6a = 6(a-b)$$

(۵)-۷

$$\Rightarrow \begin{cases} a-b=0 \Rightarrow \begin{array}{c|cccccc} a & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ b & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \Rightarrow 6 \\ a-b=6 \Rightarrow \begin{array}{c|c} a & 6 \\ b & 0 \end{array} \Rightarrow 1 \end{cases} \Rightarrow 6+1=7$$

دقت کنید که در مبنای 7، همه ارقام از 7 کوچکترند)

(۱)-۸

$$\overline{ab} = 5(a+b) \Rightarrow b + 10a = 5a + 5b \Rightarrow 5a = 4b \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} a & 0 & 4 & 8 & 12 \\ b & 0 & 5 & 10 & 15 \end{array}$$

اما فقط $a=4$ و $b=5$ قابل قبول است.

(۱)-۹ فرض می کنیم عدد مورد نظر $\overline{ab}$ باشد در این صورت داریم:

$$a^2 + 4b^2 = 4ab \Rightarrow a^2 - 4ab + b^2 = 0 \Rightarrow (a-2b)^2 = 0$$

$$\Rightarrow a = 2b \Rightarrow \overline{ab} = b + 10a = b + 10(2b) = 21b \Rightarrow 21 | \overline{ab}$$

(۲)-۱۰

$$4 \text{ ارقام در مبنای } 4 \rightarrow \square \square \square \square \rightarrow 3 \times 4 \times 4 \times 4 = 192$$

۱۱- (۲) x باید به صورت $15k^2$ باشد $\Rightarrow 15x = 3 \times 5 \times x \Rightarrow$ لذا تنها عدد 60 است که به صورت 15×2^2 می باشد.

۱۲- (۲) می دانیم در مبنای 6، شش رقم 0، 1، 2، 3، 4، 5 وجود دارد لذا بزرگترین عدد در مبنای 6 برابر است با 55 و این عدد در مبنای برابر است با: $(2001)_3 = (55)_6$

$$1000 \leq 11^2 k^2 < 10000 \xrightarrow{\text{بدر}} 31/ \leq 11k < 100 \Rightarrow \quad (۱) - ۱۳$$

$$32 \leq 11k < 100 \Rightarrow 3 \leq k < 9 \Rightarrow \text{تعداد} = 7$$

(۳) - ۱۴

$$132 = (246)_y \Rightarrow 132 = 6 + 4y^2 + 2y^2 \Rightarrow y^2 + 2y - 63 = 0 \Rightarrow (y+9)(y-7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y=7 \\ y=-9 \end{cases} \text{ قابل قبول}$$

۱۵- (۳) مجموعه ای خوش ترتیب است که هر زیر مجموعه ی غیر خالیش، دارای عضو ابتدا باشد.

$$\{x \in \mathbb{Z} : x > 10\} = \{11, 12, 13, \dots\}$$

(۱) - ۱۶

۱۷- (۴) در مبنای 7، کلاً 7 رقم وجود دارد که عبارتند از 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، لذا:

$$\begin{array}{cccc} \square & \square & \square & \square \\ 6 & 7 & 7 & 7 \end{array} = 6 \times 7^3$$

۱۸- (۳) یادآوری می کنیم که مربع هیچ عددی به 2، 3، 7، 8 ختم نمی شود.

$$\overline{ab4} = 144 = 12^2, \overline{ab1} = 121 = 11^2, \overline{ab6} = 256 = 16^2$$

دقت کنید که:

(۳) - ۱۹

$$\overline{ab3} + 326 = \overline{5b9} \Rightarrow 3 + 10a + 200 + 326 = 9 + 10b + 500$$

$$3 + 10a + 26 = 9 + 10b \Rightarrow 20 = 10b - 10a$$

$$\Rightarrow b - a = 2 \quad (1), \quad \overline{5b9} \equiv 9 \pmod{10} \Rightarrow 5 + \overline{b} + 9 \equiv 0 \pmod{10} \Rightarrow b = 4 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow a = 2 \Rightarrow a + b = 6$$

$$560 = 56 \times 10 = 7 \times 8 \times 10 = 7 \times 2^4 \times 5$$

(۲) - ۲۰

اگر این عدد بخواهد مربع کامل شود باید حداقل در یک 5 و یک 7 ضرب شود تا به صورت $7^2 \times 2^4 \times 5$ که مربع کامل است در آید.

$$(23)_n + (32)_n = 2 \times (27)_n \Rightarrow (3+2n) + (2+3n) = 2(7+2n) \Rightarrow 5n + 5 = 4n + 14 \Rightarrow n = 9$$

(۴) - ۲۱

$$8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 2^7 \times 3^2 \times 5 \times 7$$

(۴) - ۲۲

اگر 8! را در $2 \times 5 \times 7 = 70$ ضرب کنید، عدد حاصل مربع کامل می گردد، ضمناً 70 کوچکتر عددی است که اگر در 8! ضرب کنیم، عدد حاصل مربع کامل می شود، یادآوری می کنیم که عددی مربع کامل است که توان همه ی عاملهایش در تجزیه به عوامل اول، زوج باشد.

(۴) - ۲۳

$$\begin{array}{r|l} 1432 & \begin{array}{l} \overline{12} \\ 12 \\ \hline 23 \end{array} \\ \hline & \begin{array}{l} \overline{119} \\ 108 \\ \hline 11 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} \overline{12} \\ 9 \end{array} \Rightarrow 1432 = (\overline{9b4})_{12}$$

۲۴- (۳) می دانیم هر عدد طبیعی را، می توان به پیمانه 5 به صورت $a=5q+r$ نوشت که در آن $0 \leq r \leq 4$ پس:

$$a^2 = 25q^2 + 10qr + r^2 = 5(5q^2 + 2qr) + r^2 = 5k + r^2$$

$$0 \leq r \leq 4 \Rightarrow \begin{cases} r=0 \Rightarrow a^2 = 5k \\ r=1 \Rightarrow a^2 = 5k+1 \\ r=2 \Rightarrow a^2 = 5k+4 = 5k+5-1 = 5(k+1)-1 = 5k'-1 \\ r=3 \Rightarrow a^2 = 5k+9 = 5k+10-1 = 5(k+2)-1 = 5k'-1 \\ r=4 \Rightarrow a^2 = 5k+16 = 5k+15+1 = 5(k+3)+1 = 5k+1 \end{cases}$$

همان طور که دیده می شود، مربع عدد طبیعی، هیچ گاه نمی تواند به صورت $5k+2$ باشد، به عبارت دیگر، باقیمانده ی هر مربع هر عدد طبیعی بر 5 هیچ گاه 2 نمی شود.

۲۵- (۲) می دانیم هر عدد طبیعی را، می توان به پیمانه ی 4 به صورت $a=4k+r$ نوشت که در آن $0 \leq r \leq 3$ پس:

$$a^3 = 64k^3 + 48k^2r + 12kr^2 + r^3 = 4(16k^3 + 12k^2r + 3kr^2) + r^3 = 4q + r^3$$

$$0 \leq r \leq 3 \Rightarrow \begin{cases} r=0 \Rightarrow a^3 = 4q \\ r=1 \Rightarrow a^3 = 4q+1 \\ r=2 \Rightarrow a^3 = 4q+8 = 4(q+2)5q' \\ r=3 \Rightarrow a^3 = 4q+27 = 4q+24+3 = 4(q+6)+3 = 4q'+3 \end{cases}$$

همان طور که ملاحظه می شود، مکعب هر عدد طبیعی، هیچگاه نمی تواند به صورت $4q+2$ باشد، به عبارت دیگر با قیمانده مکعب هر طبیعی بر 4 هیچگاه 2 نمی شود.

۲۶- (۳) منظور از $a^n \parallel b$ ، یعنی n بزرگترین توانی است که اگر a به آن توان برسد، b را عاد کند، به عبارت دیگر: $a^n \parallel b \Leftrightarrow (a^n \mid b, a^{n+1} \nmid b, \dots, a^2 \mid b, a^1 \mid b, a^0 \mid b)$ با توجه به توضیح فوق کافی است توان عاملهای 5 را در 60 بشماریم تا معلوم شود که بزرگترین توانی از 5 که عدد 60 را عاد می کند چقدر است:

$$\left\lfloor \frac{60}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{60}{25} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{60}{125} \right\rfloor + \dots = 12 + 2 + 0 + 0 + \dots = 14$$

۲۷- (۴) فرض کنیم $\overline{ab}$ یک عدد دو رقمی باشد لذا داریم:

$$a^2 + 16b^2 = 8ab \Rightarrow a^2 - 8ab + 16b^2 = 0 \Rightarrow (a-4b)^2 = 0$$

$$\Rightarrow a = 4b \Rightarrow \begin{cases} b=1 \Rightarrow a=4 \Rightarrow \overline{ab} = 41 \\ b=2 \Rightarrow a=8 \Rightarrow \overline{ab} = 82 \end{cases}$$

۲۸- (۱) می دانیم مربع هر عدد طبیعی، هیچ گاه به 2، 3، 7 و 8 ختم نمی شود، به عبارت دیگر توان دوم هر عدد طبیعی باید حتماً به یکی از اعداد 1، 4، 5، 6، 9 ختم شود و در نتیجه توان چهارم هر عدد طبیعی، حتماً به یکی از اعداد 0، 1، 6، 5 ختم می شود.

لذا پاسخ صحیح، گزینه ی (۱) می باشد، ضمناً دقت کنید که: $11^4 = 14641$ ، $14^4 = 38416$ ، $15^4 = 50625$

$$\begin{cases} \text{اول } p, q, r \\ 1 < p < q \Rightarrow r \Rightarrow p = 2 \text{ عدد اول فردی است} \Rightarrow r \Rightarrow \text{عددی اول بزرگتر از 2 است} \\ p + q = r \end{cases} \quad (۱)-۲۹$$

زیرا: فرد = فرد + زوج $\Rightarrow p + q = r$

۳۰- (۳) باید تشخیص دهیم شروع استقراء به ازاء کدام مقدار n می باشد، لذا $n=5$ ، $n=6$ و ... را امتحان می کنیم.

$$n=5 \Rightarrow p_5: 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} < \frac{25}{12} \Rightarrow \frac{274}{120} < \frac{250}{120} \text{ نادرست}$$

$$n=6 \Rightarrow p_6: 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} < \frac{30}{12} \Rightarrow \frac{294}{120} < \frac{300}{120} \text{ درست}$$

پس شروع استقراء، $n=6$ می باشد.

تستهای بخش پذیری

۱- اگر بدانیم ab مربع کامل است، آنگاه کدامیک مربع کامل است؟ (d ب.م.م و c ک.م.م است)

$$(1) cd^2 \quad (2) C \quad (3) \frac{c}{d^2} \quad (4) \frac{c}{d}$$

۲- اگر باقیمانده تقسیم عدد m بر عدد n مساوی 5 باشد و باقیمانده تقسیم عدد $m+3$ بر عدد $n+2$ ، برابر $r+2$ باشد و خارج قسمتهای دو تقسیم مساوی باشند، خارج قسمت کدام است؟

$$(1) 13 \quad (2) 15 \quad (3) 12 \quad (4) 14$$

۳- چند عدد 6 رقمی به صورت $\overline{aaaaaa}$ وجود دارد که بر ۱۳ بخش پذیر باشند؟

$$(1) 0 \quad (2) 6 \quad (3) 8 \quad (4) 9$$

۴- چند عدد 11 رقمی به صورت $\overline{aaaaaaaaa}$ وجود دارد که بر 11 بخش پذیر باشند؟

$$(1) 9 \quad (2) 3 \quad (3) 1 \quad (4) 0$$

۵- عدد $a58b$ بر 26 قابل قسمت است و باقیمانده اش 5 مساوی 3 است $a+bc$ کدام است؟

$$(1) 11 \quad (2) 7 \quad (3) 5 \quad (4) 9$$

۶- در صورتی که عدد $11a9b$ مضرب 36 باشد، برای a و b چند جفت جواب وجود دارد؟

$$(1) 1 \quad (2) 2 \quad (3) 3 \quad (4) 0$$

۷- بین دو عدد 40 و 700 چند عدد طبیعی وجود دارد که 20 برابر آنها، مربع کامل باشد؟

$$(1) 5 \quad (2) 6 \quad (3) 9 \quad (4) 10$$

۸- اگر n عددی طبیعی باشد، چند عدد اول به صورت $n^n + n$ وجود دارد؟

$$(1) 0 \quad (2) 1 \quad (3) 2 \quad (4) \text{بی شمار}$$

۹- برای آنکه عدد $7b4ab2$ بر 7 بخش پذیر بشد، برای a ، چند مقدار وجود دارد؟

$$(1) 1 \quad (2) 3 \quad (3) 2 \quad (4) 4$$

۱۰- عدد 23175 بر کدام عدد بخش پذیر است؟

$$(1) 121 \quad (2) 122 \quad (3) 123 \quad (4) \text{هیچکدام}$$

۱۱- کدامیک از احکام زیر نادرست است؟

$$(1) 2 | n^2 + 3n + 2 \quad (2) 6 | n^3 - n \quad (3) 4 | 5^n - 1 \quad (4) 8 | 7^n + 1$$

۱۲- تعداد اعداد اول کوچکتر از 500 چقدر است؟

$$(1) 250 \quad (2) \text{بیش از 250} \quad (3) \text{بین 250 و 350} \quad (4) \text{کمتر از 250}$$

۱۳- هرگاه a و b دو عدد طبیعی بوده و $a^2 - b^2$ ، عددی اول باشد، کدامیک از احکام زیر، همواره درست است؟

$$(1) a \text{ و } b \text{ هر دو، اعدادی اول هستند} \quad (2) a \text{ یا } b$$

$$(3) a=b+2 \quad (4) a=b+1$$

۱۴- هرگاه $s \equiv b$ و $a \equiv b$ ، در این صورت کدام نادرست است؟

$$18 \quad 30$$

$$40 \mid a - b \quad (\epsilon) \quad 6 \mid a - b \quad (3) \quad 45 \mid a - b \quad (2) \quad 90 \mid a - b \quad (1)$$

۱۵- مجموع دو عدد اول، 103، حاصل ضرب کدام است؟

$$102 (\epsilon) \quad 206 (3) \quad 202 (2) \quad 388 (1)$$

۱۶- عدد صحیح 231×10^n ، بر چند عدد اول بزرگتر از یک قابل تقسیم است؟

$$5 (\epsilon) \quad 6 (3) \quad 7 (2) \quad 8 (1)$$

۱۷- هرگاه عدد $3a2b4$ بر 72 و بخش پذیر باشد، $a-b$ کدام است؟

$$5 (\epsilon) \quad 9 (3) \quad -5 (2) \quad 3 (1)$$

۱۸- هرگاه عدد چهار رقمی $ab4a$ بر 45 بخش پذیر باشد، $a+2b$ کدام است؟

$$11 (\epsilon) \quad 13 (3) \quad 14 (2) \quad 9 (1)$$

۱۹- تعداد عاملهای 2 در 25 کدام است؟

$$24 (\epsilon) \quad 16 (3) \quad 18 (2) \quad 22 (1)$$

۲۰- عدد 360 چند مقسوم علیه دارد؟

$$48 (\epsilon) \quad 28 (3) \quad 36 (2) \quad 24 (1)$$

۲۱- اگر α عددی زوج باشد، $a(a^2 - 4)$ بر کدام عدد زیر همواره بخش پذیر است؟

$$48 (\epsilon) \quad 36 (3) \quad 32 (2) \quad 15 (1)$$

۲۲- عدد $3^{34} - 5^{51}$ بر کدام یک از اعداد زیر بخش پذیر است؟

$$134 (\epsilon) \quad 116 (3) \quad 34 (2) \quad 17 (1)$$

۲۳- اگر P عددی اول، باشد و $p \mid 2b$ ، آنگاه کدام صحیح است؟

$$b \neq 1 \Rightarrow p \mid b \quad (\epsilon) \quad p > 2 \Rightarrow p \mid b \quad (3) \quad p \mid 2 \quad (2) \quad p \mid b \quad (1)$$

۲۴- تعداد اعداد شش رقمی مضرب 25 کدام است؟

$$(\epsilon) \text{ هیچکدام} \quad 36000 (3) \quad 360 (2) \quad 3600 (1)$$

۲۵- باقیمانده 640302010 بر 99 کدام است؟

$$51 (\epsilon) \quad 13 (3) \quad 7 (2) \quad 1 (1)$$

۲۶- کدامیک از روابط زیر نادرست است؟

$$d \mid ab \Rightarrow d \mid a \vee d \mid b \quad (2) \quad ab \mid c \Rightarrow a \mid c \quad (1)$$

$$d \mid a \vee d \mid b \Rightarrow d \mid ax + by \quad (\epsilon) \quad a \mid b \Rightarrow ac \mid bc \quad (3)$$

۲۷- به ازاء چند مقدار n ، عدد $A = \frac{3n^2 + 2n - 20}{n}$ یک عدد طبیعی است؟

$$6 (\epsilon) \quad 5 (3) \quad 4 (2) \quad 0 (1)$$

۲۸- وقتی عدد صحیح a بر 3 بخش پذیر نیست، a^2 برابر است با: $(a, k \in \mathbb{Z})$

$$9k+2 (\epsilon) \quad 9k+1 (3) \quad 3k+2 (2) \quad 3k+1 (1)$$

۲۹- A و B دو عدد صحیح متمایزند، شرط لازم و کافی برای آنکه $\overline{A5} \times \overline{B5}$ به 25 ختم شود این است که $A+B \dots$

(۱) مضربی از 5 باشد (۲) مضربی از 25 باشد

(۳) بر 2 قابل قسمت باشد (۴) بر 4 قابل قسمت باشد

۳۰- چند نقطه با طول و عرض صحیح روی منحنی $x^2 + y^2 = 515$ وجود دارد؟

(۱) 0 (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

۳۱- تعداد شمارنده های مثبت عدد 10! کدام است؟

(۱) 210 (۲) 64 (۳) 270 (۴) $2^{11} \times 3^4 \times 5$

۳۲- کدامیک از اعداد زیر، همواره عدد $3^{2n} + 7$ را می شمارد؟

(۱) 3 (۲) 5 (۳) 6 (۴) 8

۳۳- کدام یک از گزینه های زیر صحیح است؟

(۱) $a | b + c \Rightarrow a | b \wedge a | c$ (۲) $a | b - c \Rightarrow a | b \wedge a | c$

(۳) $a | bc \Rightarrow a | b \wedge a | c$ (۴) $a | b + c \Rightarrow a^7 | b^9$

۳۴- عدد 980 در Z چند شمارنده دارد؟

(۱) 36 (۲) 18 (۳) 4 (۴) 12

۳۵- تعداد صفرهای سمت راست $\frac{400!}{40!} + \frac{600!}{60!}$ برابر است با:

(۱) 134 (۲) 90 (۳) 99 (۴) 148

۳۶- حاصل عبارت $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ ($n \in \mathbb{N}$) کدام است؟

(۱) $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ (۲) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (۳) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (۴) $n^2 - n$

۳۷- در یک تقسیم، اگر به مقسوم 27 واحد اضافه کنیم، از باقیمانده 15 واحد کم و به خارج قسمت 2 واحد اضافه می شود، مقسوم علیه چقدر است؟

(۱) 21 (۲) 22 (۳) 25 (۴) 29

۳۸- در یک تقسیم، مقسوم علیه 56 و خارج قسمت 24 است، بزرگترین مقدار مقسوم برابر است با:

(۱) 1378 (۲) 1389 (۳) 1399 (۴) 1369

۳۹- در هر تقسیم، به شرط آنکه، خارج قسمت مخالف صفر باشد، مقسوم همواره از چند برابر باقیمانده بزرگتر است؟

(۱) 3 (۲) 5 (۳) 2 (۴) 4

پاسخ بخش پذیری

۱- (۴)

$$ab = a'b'd^2 \Rightarrow a'b' \text{ باید مربع کامل باشد}$$

$$c = a'b'd \Rightarrow \frac{c}{d} = a'b'$$

اما داشتیم:

پس $\frac{c}{d}$ باید مربع کامل باشد

۲- (۴)

$$m = n \quad q + r$$

$$\frac{m+30}{30} = \frac{(n+2)q+r+2}{2q+2} \Rightarrow q = 14$$

بالایی را از پایینی کم می کنیم:

۳- (۴)

$$\overline{aaaaaa} \cdot 13 - \overline{aaa} = 0 \Rightarrow \text{a هر رقمی از 1 تا 9 می تواند باشد}$$

دقت کنید که a نمی تواند صفر باشد چون در این صورت عدد شش رقمی بوجود نمی آید.

۴- (۴)

$$\overline{aaaaaaaa} = a(a - a + a - a + a - a + a - a + a) = a \neq q$$

توجه کنید که a یکی از اعداد 1 تا 9 بوده و بنابراین نمی تواند مضرب 11 باشد.

۵- (۱) چون عدد بر 26 قابل قسمت است پس هم بر 2 و هم بر 13 بخش پذیر است لذا b باید زوج باشد و چون گفته باقیمانده اش بر 5، 3 باشد (تنها رقم زوجی که باقیمانده اش بر 5، 3 است، 8 است) لذا b=8 است، اکنون برابر آنکه

$$\overline{a58b} = \overline{q588} \Rightarrow 13 \text{ بخش پذیر باشد باید داشته باشیم: } 588 - a = 13q$$

با توجه به اینکه b=8 شد لذا a+b بزرگتر است بنابراین گزینه های 2 و 3 نادرست اند، اکنون گزینه های 1 و 4 را امتحان می کنیم.

$$a + b = 11 \xrightarrow{b=8} a = 3 \Rightarrow 588 - 3 = 13q \Rightarrow 585 = 13 \times 45$$

صدق می کند.

۶- (۲) چون بر 36 بخش پذیر است پس بر 9 و 4 نیز بخش پذیر است لذا داریم:

$$\overline{11a9b} \equiv 0 \Rightarrow \overline{9b} \equiv 0 \Rightarrow b + 90 \equiv 0 \Rightarrow b \equiv 0 \Rightarrow b \equiv 2 \Rightarrow b = 4k + 2 \Rightarrow b = 2 \text{ یا } 6$$

$$\overline{11a9b} \equiv 0 \Rightarrow 1 + 1 + a + 9 + b \equiv 0 \Rightarrow a + b \equiv -11 \equiv 7$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b=2 \Rightarrow a=5 \\ b=6 \Rightarrow a=1 \end{cases}$$

۷- (۳) چون 2^2 مربع کامل است لذا کافی است، 5 برابر آنها، مربع کامل باشد $20 = 2^2 \times 5 \Rightarrow$

$$40 < 5k^2 < 700 \Rightarrow 8 < k^2 < 140 \Rightarrow 2_7 < k < 11_7 \Rightarrow \text{خورده ای } 2 < k \leq 11$$

لذا برای k مقدار وجود دارد.

$$n^n + n = n(n^{n-1} + 1)$$

۸- (۲) به ازاء n=1 داریم $n^n + n = 2$ که اول است و به ازاء $n \neq 1$ داریم:

این عدد، مرکب است، زیرا مضرب n است

$$2^2 + 2 = 2(2^{2-1} + 2) = 2(3) = 2 \text{ نیست}$$

مثلاً به ازاء $n=2$ داریم:

$$\overline{ab2} - \overline{7b4} \equiv 0 \Rightarrow 2 + 10b + 100a - (4 + 10b + 700) \equiv 0 \quad (3) \quad -9$$

$$2 + 3b + 2a - 4 - 3b + 0 \equiv 0 \Rightarrow 2a \equiv 2 \Rightarrow a \equiv 1 \Rightarrow a = 1 \text{ یا } 8$$

$$231 = 11 \times 21 = 11 \times 3 \times 7 \quad (1) \quad -10$$

چون 231 بر 11 بخش پذیر است پس 231^{75} بر 11^{75} و در نتیجه $11^2 = 121$ بخش پذیر است.

۱۱- (۴) گزینه 1 درست است زیرا $2 \mid (n+1)(n+2)$ (حاصلضرب دو عدد متوالی همواره بر 2 بخش پذیر است)

گزینه 2 درست است زیرا $6 \mid (n-1)(n+2)$ (حاصلضرب سه عدد متوالی همواره بر $3! = 6$ بخش پذیر است).

$$5 \equiv 1 \Rightarrow 5^n \equiv 1 \Rightarrow 4 \mid 5^n - 1 \text{ زیرا: } 3 \text{ گزینه}$$

گزینه 4 نادرست است زیرا اگر $n=2$ باشد آنگاه $8 \times 7^2 + 1$

۱۲- (۴) می دانیم اعداد زوج بین 500 به غیر از 2 (که اول است) همه اعدادی غیر اولند لذا بین 500 تا 250 عدد فرد وجود دارد که فقط تعدادی از آنها (که این تعداد از 250 تا کمترند) اولند.

$$a^2 - b^2 = p = \text{اول} \Rightarrow (a-b)(a+b) = 1 \times p \Rightarrow \begin{cases} a-b=1 \\ a+b=p \end{cases} \Rightarrow a=b+1 \quad (4) \quad -13$$

$$\begin{aligned} a \equiv b \pmod{4} &\Rightarrow 18 \mid a-b \Rightarrow 2 \times 9 \mid a-b \\ a \equiv b \pmod{30} &\Rightarrow 30 \mid a-b \Rightarrow 2 \times 3 \times 5 \mid a-b \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} 18 \mid a-b \\ 5 \mid a-b \end{cases} \Rightarrow 90 \mid a-b \Rightarrow \begin{cases} 45 \mid a-b \\ 6 \mid a-b \end{cases} \quad (4) \quad -14$$

چون $a-b$ بر 90 بخش پذیر است از 1 بر 45 و 6 (که مقسوم علیه های 90 هستند نیز بخش پذیر است).

۱۵- (۲) چون مجموع دو عدد اول، عدد فرد 103 شده است، لذا یکی از دو عدد اول فرد و دیگری زوج بوده است و چون تنها عدد اول زوج، 2 است لذا یکی 2 و دیگری 101 بوده و بنابراین حاصلضربشان $2 \times 101 = 202$ می باشد.

$$231 \times 10^n = 3 \times 7 \times 11 \times 2^n \times 5^n \quad (4) \quad -16$$

این عدد بر اعداد اول 3، 7، 11، 2 و 5 بخش پذیر است.

$$(4) \quad -17$$

$$\overline{3a2b4} \equiv 0 \Rightarrow \begin{cases} \overline{3a2b4} \equiv 0 \pmod{9} \Rightarrow \begin{cases} 3+a+2+b+4 \equiv 0 \pmod{9} \\ \overline{2b4} \equiv 0 \pmod{8} \end{cases} \\ \overline{3a2b4} \equiv 0 \pmod{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b+9 \equiv 0 \pmod{9} \\ 4+2b+8 \equiv 0 \pmod{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b \equiv 0 \pmod{9} \\ 2b \equiv -4 \pmod{8} \Rightarrow b \equiv -2 \pmod{4} \Rightarrow b = 2 \pmod{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=2 \Rightarrow a+2 \equiv 0 \pmod{9} \Rightarrow a \equiv -2 \pmod{9} \Rightarrow a=7 \\ b=6 \Rightarrow a+6 \equiv 0 \pmod{9} \Rightarrow a \equiv -6 \pmod{9} \Rightarrow a=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b=7-2=5 \\ a-b=3-6=-3 \end{cases}$$

یادآوری: عددی بر 8 بخش پذیر است که مجموع رقم یکان + دو برابردهگان + 4 برابر صدگان بر 8 بخش پذیر باشد.

$$\overline{ab4a} \equiv 0 \begin{cases} \overline{ab4a} \equiv 0 \Rightarrow a = 0 \text{ یا } 5 \\ \overline{ab4a} \equiv 0 \end{cases} \quad (۱۸) - (۳)$$

اما a نمی تواند صفر باشد زیرا عدد $\overline{ab4a}$ باید عددی چهار رقمی باشد، لذا: $a=5$

$$\begin{aligned} \overline{ab4a} \equiv 0 &\Rightarrow a + b + 4 + a \equiv 0 \Rightarrow 5 + b + 4 + 5 \equiv 0 \\ &\Rightarrow b + 14 \equiv 0 \Rightarrow b \equiv -14 \equiv 4 \Rightarrow b = 4 \\ &\Rightarrow a + 2b = 5 + 8 = 13 \end{aligned}$$

(۱) - ۱۹

$$\left[\frac{25}{2} \right] + \left[\frac{25}{4} \right] + \left[\frac{25}{8} \right] + \left[\frac{25}{16} \right] + \left[\frac{25}{32} \right] + \dots = 12 + 6 + 3 + 1 + 0 + \dots = 22$$

$$36 = 36 \times 10 = 2^2 \times 3^2 \times 2 \times 5 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \quad (۲۰) - (۴)$$

$$36 = (3+1)(2+1)(1+1) = 24 = \text{تعداد مقسوم علیه های مثبت 36}$$

عدد 36 به همین تعداد هم، مقسوم علیه دارد، لذا جمعاً $2 \times 24 = 48$ مقسوم علیه دارد.

$$a = 2k \Rightarrow 2k(4k^2 - 4) = 8k(k-1)(k+1) = 8 \times 6k = 48k \quad (۲۱) - (۴)$$

یادآوری می کنیم که حاصلضرب سه عدد متوالی همیشه بر $3! = 6$ بخش پذیر است.

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad (۲۲) - (۳) \text{ نکته:}$$

$$5^{51} - 3^{34} = (5^3)^{17} - (3^2)^{17} = (125 - 9)(\dots) = 116q$$

$$p > 2 \Rightarrow \begin{cases} (p, 2) = 1 \\ p \mid 2b \end{cases} \Rightarrow p \mid b \quad (۲۳) - (۳)$$

(۲۴) - (۳) عددی بر 25 بخشپذیر است که عدد حاصل از دو رقم سمت راست آن بر 25 بخشپذیر باشد، به عبارت دیگر دو

رقم سمت راستش 50، 25، 00 و یا 75 باشد

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline 9 & 10 & 10 & 10 \\ \hline \end{array} \quad \boxed{\begin{array}{|c|} \hline \text{یکان و دهگان} \\ \hline 4 \\ \hline \end{array}} = 9 \times 10^3 \times 4 = 36000$$

لذا:

$$6, 40, 30, 20, 10 \equiv 10 + 20 + 30 + 40 + 6 = 106 \equiv 7 \quad (۲۵) - (۲)$$

$$12 \mid 6 \times 4, \quad 12 \times 6, 12 \times 4 \quad (۲۶) - (۲)$$

$$A = \frac{3n^2}{n} + \frac{2n}{n} - \frac{20}{n} = 3n + 2 - \frac{20}{n} \quad (۲۷) - (۲)$$

برای اینکه A عددی طبیعی شود، اولاً لازم است که $\frac{20}{n}$ عددی صحیح شود یعنی $n \mid 20$ لذا n می تواند 1، 2، 4، 5، 10 و

۲۰ باشد اما به ازاء $n=1$ و $n=2$ A منفی می شود.

$$3 \times a \Rightarrow \begin{cases} a = 3k + 1 \\ a = 3k + 2 \text{ یا } 3k - 1 \end{cases} \Rightarrow a = 3k \neq 1 \quad (۲۸) - (۱)$$

$$\Rightarrow a^2 = 9k^2 \pm 6k + 1 = 3(3k^2 \mp 2k) + 1 = 3k' + 1$$

$$\overline{A5} \times \overline{B5} = (5 + 10A)(5 + 10B) = 25 + 50(A+B) + 100AB \Rightarrow \overline{85} \times \overline{B5} = 100AB + 50(A+B) + 25 \quad (۲۹) - (۳)$$

برای اینکه این عدد به 25 ختم شود باید، $A+B$ مضرب 2 باشد، چون در این صورت $50(A+B)$ مضرب 100 شده، به

عبارت دیگر به دو صفر ختم می شود، همچنین $100AB$ نیز مضرب 100 بوده و به دو صفر ختم میشود و لذا مجموع سه جمله به 25 ختم میشود.

۳۰- (۱) می دانیم مربع هر عدد فر، عددی است فرد و مربع هر عدد زوج نیز عددی است زوج، چون مجموع دو مربع کامل، فر شده است $(x^2 + y^2 = 5/5)$ ، نتیجه می گیریم که از بین x, y^2 ، یکی فرد و دیگری زوج بوده است، به عبارت دیگر یکی از x و y فرد و دیگری زوج بوده است لذا فرض می کنیم: $x = 2k + 1$ و $y = 2k'$ در این صورت داریم:

$$x^2 + y^2 = 515 \Rightarrow 2k^2 + 4k + 1 + 4k'^2 = 515 \Rightarrow 4k(k + 1) + 4k'^2 = 514$$

$$\Rightarrow 8q + 4q' = 514 \Rightarrow 4(2q + q') = 514 \Rightarrow 4q'' = 514$$

$$q'' = \frac{514}{4} \notin \mathbb{Z}$$

پس هیچ نقطه ای با طول و عرض صحیح روی منحنی واقع نیست.

$$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7^1 \quad (۳) - ۳۱$$

$$10! = (8+1)(4+1)(2+1)(1+1) = 270$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \Rightarrow a - b \mid a^n - b^n \quad (۴) - ۳۲$$

$$3^{2n} + 7 = (3^2)^n + 7 = 9^n + 7 = 9^n - 1 + 8 = 9^n - 1^n + 8$$

$$9 - 1 \mid 9^n - 1^n \Rightarrow \begin{cases} 8 \mid 9^n - 1 \\ 8 \mid 8 \end{cases} \Rightarrow 8 \mid 9^n - 1 + 8 \Rightarrow 8 \mid 9^n + 7$$

راه دیگر: به n ، یک می دهیم: $3^{2n} + 7 = 3^2 + 7 = 16$ ، در بین گزینه ها، عدد 8 عدد 8 است که 16 را می شمارد.

$$a \mid b \Rightarrow a^7 \mid b^7, b^7 \mid b^9 \Rightarrow a^7 \mid b^9$$

$$2 \mid 1 + 3 \text{ و } 2 \mid 1, 2 \mid 3$$

$$2 \mid 3 - 1 \text{ و } 2 \mid 3, 2 \mid 1$$

$$6 \mid 2 \times 3 \text{ و } 6 \mid 2, 6 \mid 3$$

$$980 = 9 \times 10 = 49 \times 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1 \times 7 \quad (۱) - ۳۴$$

$$980 = (2+1)(1+1)(2+1) = 18$$

تعداد شمارنده های طبیعی 980

$$980 = 2 \times 18 = 36$$

تعداد شمارنده های 980 در $\mathbb{Z}$

$$۳۵- (۲) \quad \frac{400!}{40!} < \frac{600!}{60!} \text{، پس تعداد و صفرهای } \frac{400!}{40!} + \frac{600!}{60!} \text{ با تعداد صفرهای } \frac{400!}{40!} \text{ برابر است، اکنون داریم:}$$

$$400! \text{ تعداد صفرهای سمت راست } = \left\lfloor \frac{400}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{400}{25} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{400}{125} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{400}{625} \right\rfloor + \dots = 80 + 16 + 3 + 0 + \dots = 99$$

$$40! \text{ تعداد صفرهای سمت راست } = \left\lfloor \frac{40}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{40}{25} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{40}{125} \right\rfloor + \dots = 8 + 1 + 0 + \dots = 9$$

$$\frac{400!}{40!} = \frac{10^{99} \times k}{10^9 \times k} = 10^{90} k^{11}$$

اکنون داریم:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (۲) - ۳۶$$

$$a = bq + r$$

$$a + 27 = b(q + 2) + r - 15$$

۳۷- (۱)

$$27 = 2b - 15 \Rightarrow 2b = 42 \Rightarrow b = 21$$

بالایی را از پائینی کم می کنیم:

۳۸- (۳)، مقسوم هنگامی بزرگترین مقدار خود را دارد که باقیمانده بزرگترین مقدار خود را داشته باشد لذا داریم

$$a = 56 \times 24 + 2 \quad (0 \leq r \leq 55) \xrightarrow{2r55} a = 56 \times 24 + 55 = 1399$$

۳۹- (۳) در هر تقسیم، مقسوم همواره از دو برابر باقیمانده، بزرگتر است، زیرا داریم:

$$a = bq + r, (0 \leq r < b, q \neq 0)$$

$$r < b \xrightarrow{1 < q} rq < bq \Rightarrow rq + r < \underbrace{bq + r}_a$$

$$\Rightarrow r(q + 1) < a$$

چون $q \neq 0$ است، لذا حداقل ۱ است و بنابراین $2r < a$ ، یعنی در هر تقسیم، به شرط آکه، خارج قسمت مخالف صفر باشد مقسوم همواره از دو برابر باقیمانده بزرگتر است.

سوالات ب.م.م و ک.م.م

۱- اگر بدانیم $17a + 24b = 1$ ، آنگاه حاصل $(a^2, 6b^2)$ کدام است؟

۱ (۱) 6 (۲) b^2 (۳) a^2 (۴)

۲- اگر بدانیم $(m, n) = 1$ و $\frac{m+n}{m-n} = 16$ ، آنگاه mn کدام است؟

۱ (۱) 205 (۲) 255 (۳) 148 (۴) 225

۳- اگر بدانیم $(a, b) = (a, c) = (b, c) = d$ آنگاه $[a, b, c]$ چیست؟

۱ (۱) abc (۲) $\frac{abc}{d}$ (۳) $\frac{abc}{d^2}$ (۴) $\frac{abc}{d^3}$

۴- اگر $(a+b)^2 = 26$ ، $(a, b) = 1$ ، آنگاه $(a+b, c)$ کدام است؟

۱ (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 5

۵- اگر $(a, b) = d$ و $[a, b]$ ، آنگاه $(25, a)$ کدام است؟

۱ (۱) $a+b$ (۲) d (۳) c (۴) $\frac{a+b}{2}$

۶- اگر $(a, 6) = (b, 6) = 3$ ، آنگاه $[a+b, 6]$ کدام است؟

۱ (۱) $a+b$ (۲) $6(a+b)$ (۳) 6 (۴) $3(a+b)$

۷- حاصل $(2n^2 - n, 2n^2 - 3n + 1)$ ، کدام است؟ $(n \in \mathbb{N})$

۱ (۱) 1 (۲) 2 (۳) $2n = 1$ (۴) 1 یا 2

۸- اگر $(a^4, b^4) = 3(a^2, b^2) + 1$ ، حاصل $(a+b, b)$ کدام است؟

۱ (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

۹- حاصلضرب دو عدد اول برابر 634 است، تفاضل این دو عدد بر کدام یک از اعداد زیر بخش پذیر است؟

۱ (۱) 214 (۲) 105 (۳) 135 (۴) 86

۱۰- اگر سه عدد a و b و c به ترتیب بر 12 و 32 و 48 بخش پذیر باشند، $2a+b+c$ بر کدام عدد زیر بخش پذیر است؟

- ۱۱- دو عدد 83 و 107 را بر عدد طبیعی b تقسیم کرده ایم، باقیمانده ها به ترتیب 5 و 3 شده اند، عدد b کدام است؟
- ۱۲- نسبت دو عدد طبیعی $\frac{5}{2}$ بوده و مجموع حاصلضرب آنها با کوچکترین مضرب مشترکشان 36600 شده است، ب.م.م این دو عدد کدام است؟
- ۱۳- کوچکترین عضو مثبت مجموعه $A = \{72m + 81n : m, n \in \mathbb{Z}\}$ کدام است؟
- ۱۴- هر گاه $ra + sb = d$ کدام گزینه درست است؟
- ۱۵- هر گاه a و b و c اعدادی طبیعی باشند، کدام گزاره، نادرست است؟
- ۱۶- کوچکترین مضرب مشترک دو عدد $2n+4$ و $4n+4$ کدام است؟
- ۱۷- بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد $2n+3$ و $5n+6$ کدام است؟
- ۱۸- هرگاه $x = 5 \times 6^2 \times 7$ و $y = 2^n \times 5 \times 7^{n+1}$ و $z = xy$ حاصل $\frac{Z}{(x, y)}$ کدام است؟ ($x \in \mathbb{N}$)
- ۱۹- حاصل $(2k+5)$ و $(2k-1)$ کدام است؟
- ۲۰- هرگاه $(\overline{ab}, \overline{ba}) = 12$ ، در صورت حاصل $[10\overline{ab}, 15\overline{ba}]$ کدام است؟
- ۲۱- اگر $ra + sb = 1$ در این صورت $(a-b)$ و $(a+b)$ کدام است؟
- ۲۲- عدد طبیعی p بر هر دو عدد 8 و k بخش پذیر است، اگر p بر $8k$ نیز بخش پذیر باشد، در این صورت، k کدام می تواند باشد؟
- ۲۳- کوچکتر عضو مثبت مجموعه $\{48x + 30y + 29 | x, y \in \mathbb{Z}\}$ کدام است؟
- ۲۴- هرگاه $(a, b) = 6$ و $a^2 - b^2 = 576$ ، در این صورت $a-5b$ کدام است؟
- ۲۵- حاصل $(2n-4, 2n^2+1)$ ، کدام است؟

۱) 4 یا 7 ۲) 4 یا 8 ۳) 1 یا 9 ۴) 4 یا 7

۲۶- بزرگترین مقسوم علیه مشترک اعداد $3k-5$ کدام است؟

۱) $2k$ ۲) 1 ۳) $3k$ ۴) $4k$

۲۷- هرگاه $(a, p^2) = p$ و $(b, p^4) = b^2$ ، حاصل (ab, p^2) کدام است؟

۱) p ۲) p^2 ۳) p^3 ۴) p^4

۲۸- حاصل $(8!+2, 7!)$ چیست؟

۱) 1 ۲) $7!$ ۳) 2 ۴) صفر

۲۹- کدام درست است؟

۱) $(a^n, b^n) = (a, b)^n$ ۲) $[a^n, b^n] = [a, b]^n$

۳) $(a, b) = (a, ka + b) = (k^nb + a, b)$ ۴) هر سه

۳۰- کدام نادرست است؟

۱) $(a, b) = d \Rightarrow ra + sb = d$ ۲) $ra + sb = 1 \Rightarrow (a, b) = 1$

۳) $(a, b) = 1 \Rightarrow ra + sb = 1$ ۴) $ra + sb = d \Rightarrow (a, b) = d$

۳۱- کدام یک از تساویهای زیر نادرست است؟

۱) $(20, 46) = (20 + 5 \times 46, 46)$ ۲) $60 \in [15, 12]$

۳) $[(12, 14), (12, 18)] = (12, [14, 18])$ ۴) $8 = [8, (8, 12)]$

۳۲- کدامیک از گزاره های زیر نادرست می باشد؟

۱) هر دو عدد متوالی نسبت به هم اولند

۲) هر دو عدد فرد متوالی متناسبند

۳) هر دو عدد اول متمایز نسبت به هم اولند

۴) اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند، لااقل یکی از آنها حتماً اول است

۳۳- اگر $5a+b=1$ ، حاصل $[a^3, b^4]$ کدام است؟ $(a, b \in \mathbb{N})$

۱) 1 ۲) ab ۳) a^3b^4 ۴) $a^{12}b^{12}$

۳۴- هرگاه $(a, b) = d$ ، $a > b$ ، حاصل $[a-b, (a, b)]$ کدام است؟ $(a, b \in \mathbb{N})$

۱) $a - b$ ۲) d ۳) ab ۴) a

۳۵- اگر $(a, b) = 1$ ، کدام نادرست است؟

۱) $(a, a+b) = 1$ ۲) $(a, a-b) = 1$ ۳) $(a+b, a-b) = 1$ ۴) $(a+b, ab) = 1$

۳۶- کسر متعارفی مساوی عدد اعشاری $1/39$ ، به صورت $\frac{p}{q}$ است به طوریکه $(p, q) = 1$ ، مجموع ارقام q کدام است؟

۱) 4 ۲) 5 ۳) 6 ۴) 7

۳۷- حاصل $[a, b]$ و (a, b) و (a, a) کدام است؟

۱) a ۲) b ۳) (a, b) ۴) $[a, b]$

۳۸- حاصل $21ab$ و $(3a + 7b)$ و $7b$ و $3a$ کدام است؟

(۱) $21ab$ (۲) $(3a + 7b)$ (۳) $(7 + 3)$ (۴) $(a + b)$

۳۹- مجموعه $\{51x + 85y : x, y \in \mathbb{Z}\}$ به چه صورتی است؟

(۱) $17\mathbb{Z}$ (۲) $\mathbb{Z}$ (۳) $13\mathbb{Z}$ (۴) $3\mathbb{Z}$

۴۰- کدام عدد عضو مجموعه $\{8r + 72s + 19 : r, s \in \mathbb{Z}\}$ نیست؟

(۱) ۱۱ (۲) ۷۶ (۳) ۴۳ (۴) ۵۹

۴۱- دو عدد $a = 2^2 \times 3^3 \times 5$ و $b = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$ چند مقسوم علیه مثبت مشترک دارند؟

(۱) ۳۶ (۲) ۱۸ (۳) ۱۲ (۴) ۲۴

۴۲- چه تعداد از گزاره های زیر صحیح اند؟

الف) $a | b \Rightarrow [a, b] = |b|$ ب) $(a, b) = 1 \Leftrightarrow ra + sb = 1$ ج) $(a, b) \Rightarrow (a - b, a + b) = 1$

د) $(a, b) = d \Rightarrow \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$ ه) $a | bc \xrightarrow{(a, b)=1} 1a | c$ و) $a | bc, b | c \Rightarrow ab | c$

(۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۳

۴۳- حاصل $[75 \text{ و } 345]$ و 345 کدام است؟

(۱) 5×345 (۲) 25×345 (۳) ۳۴۵ (۴) ۷۵

۴۴- هر گاه دو عدد ۳۰ و ۴۲ بر عدد k بخشپذیر باشند، در این صورت k ، کدام عدد را همواره می شمارد؟

(۱) ۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۱۸ (۴) ۲۰

۴۵- هرگاه دو عدد ۶۰ و ۳۶ هر دو عدد k را بشمارند، در این صورت عدد k بر کدام عدد، همواره بخش پذیر است؟

(۱) ۸۰ (۲) ۱۸۰ (۳) ۱۲۰ (۴) ۷۲

۴۶- هرگاه $a = 5^{n+1}$ و $b = 7^m$ ، آنگاه $[a, b]$ کدام است؟

(۱) $\frac{ab}{5}$ (۲) $\frac{ab}{35}$ (۳) ab (۴) $\frac{ab}{7}$

۴۷- اگر عدد $N = 2^B \times 3^{2\alpha}$ دارای ۱۸ مقسوم علیه مثبت باشد، $B - \alpha$ کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۱ (۴) ۲

۴۸- هر گاه $\frac{[a, b]}{(a, b)} = 1$ ، کدام گزینه، همواره درست است؟

(۱) $ab = 1$ (۲) $|ab| = 1$ (۳) $a - b = 0$ (۴) $ab = 0$

۴۹- اگر $ra + sb = d$ و $(a, b) = d$ ، کدام درست است؟

(۱) $(a, b) = (r, s)$ (۲) $(a^2, b^2) = (r, s)^2$ (۳) $(r^2, a^2) = d^2$ (۴) $(r, s) = 1$

۵۰- اگر $(a, 4) = 2$ و $(a, 4) = 2$ ، کدام درست است؟

(۱) $(a + b, 4)$ (۲) $(ab, 4) = 4$ (۳) $(a + b, 4) = 8$ (۴) هیچکدام

۵۱- تعداد جوابهای معادله $(x, 48) = x$ برابر است با:

(۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۶ (۴) ۲۰

پاسخ تستهای ب.م.م و ک.م.م

$$17a + 24b = 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (a, b) = 1 \Rightarrow (a^2, b^2) = 1 \\ (a, 24) = 1 \Rightarrow (a, 6) = 1 \Rightarrow (a^2, 6) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow (a^2, 6b^2) = 1 \quad (1) \quad -1$$

$$\frac{m+n}{m-n} = 16 \Rightarrow 16m - 16n = m + n \Rightarrow 15m = 17n \quad (2) \quad -2$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{15}{17} = \frac{n}{m} \\ (m, n) = 1 \\ (15, 17) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n = 15 \\ m = 17 \end{array} \right\} \Rightarrow mn = 255$$

$$[a, a, a] = a$$

۳- (۳) فرض می کنیم $a = b = c$ لذا داریم:

$$\frac{abc}{d^2} = \frac{aaa}{a^2} = \frac{a^3}{a^2} = a \quad \text{و تنها گزینه ای که به ازاء } a = b = c \text{، جوابش } a \text{ می شود، گزینه ۳ است زیرا:}$$

(۱) -۴

$$26 \mid (a+b)^2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \mid (a+b)^2 \Rightarrow 2 \mid a+b \xrightarrow{(a,b)=1} \left\{ \begin{array}{l} 2 \times a \Rightarrow (2, a) \Rightarrow (4, a) = 1 \quad (1) \\ 2 \times b \end{array} \right. \\ 13 \mid (a+b)^2 \Rightarrow 13 \mid a+b \xrightarrow{\text{به همین ترتیب}} (13, a) = 1 \quad (2) \end{array} \right.$$

$$1, 2) \Rightarrow (4 \times 13, a) = 1 \Rightarrow (52, a) = 1$$

$$(a+b, c) = (a'd + b'd, db'd) = d(a' + b', a'b') = d \times 1 = d \quad (2) \quad -5$$

$$(k \in \mathbb{N}), (ka, kb) = kd$$

یادآوری:

$$(a, 6) = 3 \Rightarrow 3 \mid a \Rightarrow a = 6q + 3$$

$$(b, 6) = 3 \Rightarrow 3 \mid b \Rightarrow \underline{b = 6q' + 3}$$

-۶ (۱)

$$a + b = 6(q + q' + 1) = 6k \Rightarrow 6 \mid a + b$$

$$\Rightarrow [a + b, 6] = \text{عدد بزرگتر} = a + b$$

$$a \mid b \Rightarrow [a, b] = b$$

یادآوری:

$$2n^2 - 3n + 1 \mid 2n^2 - n$$

$$\frac{-2n^2 + n}{-2n + 1} \Rightarrow (2n^2 - n, 2n^2 - 3n + 1) = 2n - 1$$

-۷ (۳)

$$d^4 - 3d^2 - 4 = 0 \text{ لذا داریم: } (a^n, b^n) = d^n \text{ در این صورت}$$

$$(d^2 - 4)d^2 + 1 = 0 \Rightarrow d^2 = 4 \Rightarrow d = 2 \text{ (د طبیعی است)}$$

$$\Rightarrow (a + b, b) = (a + b - b, b) = (a, b) = d = 2$$

$$(a, b) = d \Rightarrow (a \pm kb, b) = d$$

یادآوری:

-۹ می دانیم تنها عدد اول زوج ۲ است، لذا هر گاه حاصلضرب دو عدد اول، عددی زوج شود در این صورت یکی از آنها حتماً ۲ است لذا:

$$105 = 5 \times 7 \times 3 \text{ مضرب } 315 = 5 \times 7 \times 3^2 \text{ عدد } 634 = p \times q \Rightarrow \begin{cases} p = 2 \\ q = 317 \end{cases} \longrightarrow q - p = 315 = 5 \times 63 = 5 \times 7 \times 9$$

می باشد.

-۱۰ (۲)

$$\begin{cases} a = 12k \\ b = 32k' \Rightarrow 2a + b + v = 24k + 32k' + 48'' = 8 \left(\underbrace{3k + 4k' + 6k''}_{k''} \right) = 8k''' = 8 \\ c = 48k'' \end{cases}$$

مضرب

$$107 = bq + 3$$

$$\frac{83 = bq' + 5}{24 = b(q - q') - 2} \Rightarrow 24 = bq'' - 2 \Rightarrow 26 = bq''$$

-۱۱ (۴)

$$\Rightarrow b \mid 26 \Rightarrow b = 1 \text{ یا } 2 \text{ یا } 13 \text{ یا } 26$$

اما چون b باید بزرگتر از ۵ باشد لذا $b = 13$ یا $b = 26$ که فقط $b = 26$ در گزینه ها وجود دارد.

$$\frac{a}{b} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{a'd}{b'd} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{a'}{b'} = \frac{5}{2} \Rightarrow \begin{cases} a' = 5 \\ b' = 2 \end{cases} \rightarrow a'b' = 10$$

-۱۲ (۳)

$$ab + [a, b] = 36600 \Rightarrow a'b'd^2 + a'b'd = 36600$$

$$10d^2 + 10d = 36600 \Rightarrow d^2 + d = 3660 \Rightarrow d(d + 1) = 60 \times 61 = d = 60$$

$$\min(A) = (72, 81) = (8 \times 9, 9^2) = 9$$

-۱۳ (۳)

$$ra + sb = d, (a, b) \mid a \Rightarrow (a, b) \mid ra + sb \Rightarrow (a, b) \mid d$$

-۱۴ (۱)

$$(a, b) \mid b$$

-۱۵ (۴) دقت کنید که تساوی $(a, b)[a, b] = (ab)$ ، فقط برای ۲ عدد برقرار است، برای ۳ عدد یا بیشتر برقرار نیست.

$$2n+4=2(n+2) \quad 4n+4=2^2(n+1) \rightarrow \text{ک.م.م} = 2^2 \times (n+1)(n+2) \quad (۲) -۱۶$$

$$(2n+3, 5n+6)d \Rightarrow \begin{cases} d \mid 2n+3 \xrightarrow{\times 5} d \mid 10n+15 \\ d \mid 5n+6 \xrightarrow{\times 3} d \mid 15n+18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid 10n+15 \\ d \mid 15n+18 \end{cases} \Rightarrow d \mid 3 \Rightarrow d=1 \text{ یا } 3 \quad (۲) -۱۷$$

۱۸- (۲) می دانیم: قدر مطلق حاصلضرب دو عدد = ک.م.م $\times$ ب.م.م

$$\frac{Z}{(x,y)} = [x,y] = 5 \times 7^{n+1} \times 2^n \times 3^n = 5 \times 7 \times 7^n \times 2^n \times 3^n = 35 \times 42 \quad \text{لذا داریم:}$$

$$(12k+5, 12k-1) = d \Rightarrow \begin{cases} d \mid 12k+5 \\ d \mid 12k-1 \end{cases} \Rightarrow \frac{d \mid 12k+5}{d \mid 6} \Rightarrow d \mid 6 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 2 \text{ یا } 3 \text{ یا } 6 \quad (۲) -۱۹$$

اما اعداد $12k+5$ و $12k-1$ اعدادی فرد می باشند و لذا ب.م.م. آنها نمی تواند زوج باشد پس 3 یا $d=1$

$$(\overline{ab}, \overline{ba}) = 12 \Rightarrow (b+10a, a+10b) = 12 \Rightarrow \begin{cases} 12 \mid b+10a \\ 12 \mid a+10b \end{cases} \quad (۲) -۲۰$$

$$12 \mid 11a+11b \Rightarrow \begin{cases} 12 \mid 11(a,b) \xrightarrow{\text{لم افلیدس}} 12 \mid a+b \\ (12, 11) = 1 \end{cases} \Rightarrow a+b \text{ هر دو زوج} \Rightarrow \begin{cases} a=8 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow [10\overline{ab}, 15\overline{ba}] = [10 \times 84, 15 \times 48] = [5 \times 2^3 \times 3 \times 7, 3^2 \times 5 \times 2^4] = 2^4 \times 5 \times 3^2 \times 7 = 80 \times 63$$

$$ra+sb=1 \xrightarrow{\text{طبق عکس}} (a,b)=1 \quad (۳) -۲۱$$

$$(a-b, a+b) = d \Rightarrow \begin{cases} d \mid a+b \\ d \mid a-b \end{cases} \xrightarrow{+, -} \begin{cases} d \mid 2a \\ d \mid 2b \end{cases} \Rightarrow d \mid (2a, 2b) \Rightarrow$$

$$d \mid 2(a,b) \Rightarrow d \mid 2 \times 1 \Rightarrow d \mid 2 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 2$$

۲۲- (۴) می دانیم هرگاه $a \mid c$ و $b \mid c$ ، هنگامی $ab \mid c$ را که a و b نسبت به هم اول باشند، لذا k فقط می تواند 5 باشد.

$$(48, 30) = 6 \Rightarrow 48x + 30y + 29 = 6k + 29 \rightarrow k - 4 \Rightarrow 29 - 24 = 5 \quad (۲) -۲۳$$

$$a^2 - b^2 = 576 \Rightarrow (a'b')^2 - (b'b)^2 = 576 \Rightarrow (a'^2 - b'^2)d^2 = 576 \quad (۲) -۲۴$$

$$(a'^2 - b'^2) \times 6 = 576 \Rightarrow a'^2 - b'^2 = 16, a', b' = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a' - b' = 2 \\ a' + b' = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a' = 5 \\ b' = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = a'd = 30 \\ b = b'd = 18 \end{cases} \Rightarrow a - 5b = 30 - 90 = -60$$

(۳) -۲۵

$$(2n-4, 2n^2+1) = d \Rightarrow \begin{cases} d \mid 2n-4 \xrightarrow{\times n} d \mid 2n^2-4n \\ e \mid 2n^2+1 \end{cases} \Rightarrow \frac{d \mid 2n^2-4n}{d \mid 2n^2+1} \Rightarrow d \mid -4n-1$$

$$\begin{cases} d \mid 4n+1 \\ d \mid 2n-4 \end{cases} \xrightarrow{\times 2} \begin{cases} d \mid 4n+1 \\ d \mid 4n-8 \end{cases} \Rightarrow d \mid 9 \Rightarrow d=1 \text{ یا } 3 \text{ یا } 9$$

۲۶- (۲) ب.م.م دو عدد متوالی، همواره 1 است $(3k-4, 3k-5) = 1$

لذا داریم: $((3k-4, 3k-5), 72k, k^2+7k-1) \neq (1, 72k, k^2+7k-1) = 1$

$$\begin{aligned} (a, p^2) = p &\Rightarrow p \mid a \Rightarrow p^3 \mid ab \Rightarrow (ab, p^5) = p^3 \\ (a, p^4) = b^2 &\Rightarrow p^2 \mid b \end{aligned} \quad (۲) \quad ۲۷$$

$$(8!, 2, 7!) = d \Rightarrow \begin{cases} d \mid 8!+2 \\ d \mid 7! \Rightarrow \begin{cases} d \mid 8!+2 \\ d \mid 8! \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid 8!+2 \\ d \mid 8! \end{cases} \Rightarrow d \mid 2 \Rightarrow d=1, 2 \end{cases} \quad (۳) \quad ۲۸$$

چون $8!+2$ و $7!$ هر دو زوجند لذا $d=2$

$$(a, b) = d \Leftrightarrow (a^n, b^n) = d^n = (a, b)^n = d^n = (a, b)^n \quad (۴) \quad ۲۹ \text{ نکته:}$$

$$[a, b] = c \Leftrightarrow [a^n, b^n] = c^n = [a, b]^n \quad \text{نکته:}$$

$$(a, b) = d \Leftrightarrow \begin{cases} (a, ka+b) = d \\ (k'b+a, b) = d \end{cases} \quad \text{نکته:}$$

۳۰- (۴) گزینه ۱ اقصه نرو است، گزینه ۳ نیز قضیه نیرو در حالت خاص است، گزینه ۲ عکس قضیه بزو در حالت خاص است و گزینه ۴ نادرست است مثال نقض:

$$(5, 7) \neq 31, \quad 2(5) + 3(7) = 31 \quad \text{ولی}$$

دقت کنید که گزینه ۴، عکس قضیه بزو در حالت کلی است، که البته برقرار نیست.

$$(15, [15, 12]) = (15, 60) = 15 \neq 60 \quad (۲) \quad ۳۱$$

سه گزینه دیگر را به عنوان نکته، در نکات ارائه شده در درس ملاحظه کنید.

$$(8, 15) = 1 \quad (۴) \quad ۳۲ \text{ مثال نقض:}$$

$$5a + b = 1 \Rightarrow (a, b) = 1 \Rightarrow (a^3, b^4) = 1 \Rightarrow [a^3, b^4] = a^3 b^4 \quad (۳) \quad ۳۳$$

یادآوری می کنیم که اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند، ک.م.م آنها، همانها حاصلضربشان می باشد.

$$a, b \in \mathbb{N}, \quad a \mid b \Rightarrow [a, b] = b = \text{عدد بزرگتر} \quad (۱) \quad ۳۴ \text{ نکته:}$$

$$\begin{cases} (a, b) \mid a \\ (a, b) \mid b \end{cases} \Rightarrow (a, b) \mid a-b \xrightarrow{\text{طبق نکته}} [a-b, (a, b)] = a-b = \text{عدد بزرگتر}$$

$$(۳) \quad ۳۵$$

$$(a, b) = 1 \Rightarrow (a-b, a+b) = 1 \quad \text{یا } 2 \quad \text{نکته:}$$

اثبات: فرض می کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{d \mid a+b}{d \mid 2a} + \frac{d \mid a-b}{d \mid 2b} &\Rightarrow \begin{cases} d \mid 2a \\ d \mid 2b \end{cases} \Rightarrow d \mid (2a, 2b) \\ (a, b) = 1 &\Rightarrow d \mid 2 \Rightarrow d = 1 \quad \text{یا } 2 \end{aligned}$$

۳۶- (۳) برای پیدا کردن کسر متعارفی اعشاری متناوب ساده، از فرمول استفاده می کنیم لذا داریم:

$$1/\overline{39} = 1 + \frac{39}{99} = \frac{99+390}{99} = \frac{138}{99} = \frac{46}{33} = \frac{p}{q}$$

چون $(p, q) = 1$ و $(33, 47) = 1$ لذا $p=46$ و $q=33$ و در نتیجه داریم:

$$q \text{ ارقام } = 3+3=6$$

۳۷- (۳) با فرض $(a, b) = d$ داریم: $a = a'd$ و $b = b'd$ و $[a, b] = a'b'd$ لذا داریم:

$$(\alpha, (a, b), [a, b]) = (a'd, d, a'b'd) = d(a', 1, a'b') = d \times 1 = d = [a, b]$$

یادآوری: $a, b \neq 0, (ka, kb) = 1, (ka, kb) = k(a, b)$

۳۸- با فرض $(a, b) = d$ ، داریم: $(a, b) = (a, b)$ و (a, b) ، ضمناً داریم: $(3a, 21ab) = 3a$ و $(7b, 21ab) = 7b$

اکنون داریم: $(3a, 7b, (3a, 7b), 21ab) = ((3a, 21ab), 7b, (3a, 7b)) = (3a, 7b, (3a, 7b)) = (3a, 7b)$

$$\{51x + 85y : x, y \in \mathbb{Z}\} = \left\{17(\underbrace{3x + 5y}_k) : x, y \in \mathbb{Z}\right\} = \{17k : k \in \mathbb{Z}\} = 17\mathbb{Z} \quad (۱) - ۳۹$$

۴۰- (۲)

$$A = \{8r + 72s + 19 : r, s \in \mathbb{Z}\} = \left\{8(\underbrace{r + 9s}_k) + 2\right\} + 3 : r, s \in \mathbb{Z} = \{8k + 3 : k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \Rightarrow 11 \in A \\ k = 5 \Rightarrow 43 \in A \\ k = 8 \Rightarrow 59 \in A \end{cases}$$

۴۱- (۲) نکته: تعداد مقسوم علیه های مثبت مشترک دو عدد برابر است با تعداد مقسوم علیه مثبت ب.م.م آن دو عدد

$$\begin{cases} a = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \\ b = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \end{cases} \Rightarrow (a, b) = 2^2 \times 3^2 \times 5^1 = 180$$

$(a, b) = 180 = (2+1)(3+1)(5+1) = 18$ تعداد مقسوم علیه های مثبت (a, b)

۴۲- (۳) الف، ب، دو ه صحیح اند ضمناً و غلط هستند مثال نقض برای و: $4 \times 6 \times 12$ ، $4 \mid 12$ ، $6 \mid 12$

دقت کنید که شکل صحیح گزینه و به صورت مقابل است:

ضمناً در مورد قسمت ج داریم:

۴۳- (۳) نکته: قانون جذب

$$[a'd, d] = [a', 1] = d \times a' = a'd = a \quad \text{اثبات:}$$

$$\begin{cases} k \mid 30 \\ k \mid 42 \end{cases} \Rightarrow k \mid (30, 42) \Rightarrow k \mid 6 \Rightarrow k \mid 18 \quad (۳) - ۴۴$$

دقت کنید که هر مقسوم علیه مشترک دو عدد، مقسوم علیه ب.م.م آن دو عدد نیز می باشد، چرا که ب.م.م دو عدد، بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد است.

$$\begin{cases} 60 \mid k \\ 36 \mid k \end{cases} \Rightarrow [60, 36] \mid k \Rightarrow 180 \mid k \quad (۲) - ۴۵$$

دقت کنید که هر که هر مضرب مشترک دو عدد، مضرب ک.م.م آن دو عدد نیز می باشد، چرا که ک.م.م دو عدد کوچکترین مضرب مشترک دو عدد است.

$$(5, 7) = 1 \Rightarrow (5^{n+1}, 7^m) = 1 \Rightarrow (a, b) = 1 \Rightarrow [a, b] = ab \quad (۳) - ۴۶$$

هرگاه دو عدد مثبت نسبت به هم اول باشند، ک.م.م آنها برابر با حاصلضربشان است.

$$N = 2^B \times 3^{2\alpha} \Rightarrow N - 1 \text{ تعداد مقسوم علیه های مثبت } = (B+1)(2\alpha+1) = 18 \quad (۱) - ۴۷$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B = 1 \\ \alpha = 4 \end{cases} \Rightarrow \alpha - B = 3$$

$$\frac{[a, b]}{(a, b)} = 1 \Rightarrow [a, b] = (a, b) \Rightarrow a = b \Rightarrow a - b = 0 \text{ لذا داریم: } a = b \quad (۳) - ۴۸$$

۴۹- (۴)

$$\begin{cases} (a, b) = d \\ ra + sb = d \xrightarrow{\div d} r \frac{a}{d} + s \frac{b}{d} = 1 \Rightarrow ra' + sb' = 1 \Rightarrow (r, s) = (r, b') = (a', s) = (a', b') = 1 \Rightarrow (r, s) = 1 \\ a = a'd, b = b'd \\ (a, 4) = 2 \Rightarrow 2 \mid a \Rightarrow a = 2k \\ (b, 4) = 2 \Rightarrow 2 \mid b \Rightarrow b = 2k' \Rightarrow (ab, 4) = (4kk', 4) = 4(kk', 1) = 4 \\ (x, 48) = x \Rightarrow x \in N, x \mid 48 \end{cases}$$

(۲) - ۵۰

(۲) - ۵۱

لذا کافی است تعداد مقسوم علیه های مثبت 48 را بشماریم:

$$48 = 6 \times 8 = 2 \times 3 \times 2^3 = 2^4 \times 3^1 \Rightarrow \text{تعداد مقسوم علیه های مثبت} = (4+1)(1+1) = 10$$

سوالات همنهشتی

- ۱- اگر سه عدد n و y و z بر 3 بخش پذیر نباشند، باقیمانده عدد $x^4 + y^4 - 2x^2y^2z^2$ بر 3 چیست؟
 (۱) 0 (۲) 1 (۳) 2 (۴) 0 یا 1
- ۲- باقیمانده عبارت $1^{12} + 2^{12} + 3^{12} + \dots + 20^{12}$ بر 3 چیست؟
 (۱) 5 (۲) 6 (۳) 7 (۴) 4
- ۳- طرف دوم همنهشتی مقابل چیست؟
 $11 + 21 + 31 + \dots + 100!$ 15 ؟
 (۱) 3 (۲) 4 (۳) 5 (۴) 6
- ۴- باقیمانده عدد $2001^{75} + 1978^{120}$ بر 11 کدام است؟
 (۱) 1 (۲) 0 (۳) 9 (۴) 3
- ۵- باقیمانده عدد 3127 بر 10 چیست؟
 (۱) 0 (۲) 1 (۳) 3 (۴) 4
- ۶- چند مقدار برای x می توان یافت تا باقیمانده عدد $8 \times x \times 24 \times 112$ بر 9، صفر شود؟

- ۱(۱) 2(۲) 3(۳) 9(۴) ۷- اگر $s = 1! + 2! + \dots + 1q!$ ، رقم یکان S^2 کدام است؟
- ۶(۱) 4(۲) 5(۳) 9(۴) ۸- باقیمانده ی تقسیم عدد $7^{3n+1} + 7^{6n+2}$ بر 19 برابر است با: $(n \in \mathbb{N})$
- 7(۱) 1(۲) 18(۳) 11(۴) ۹- باقیمانده ی $5^{50} + 4^{40} + 3^{30} + 2^{20}$ بر 3 کدام است؟
- 0(۱) 1(۲) 2(۳) ۴(هیچکدام) ۱۰- دو رقم سمت راست عدد 2^{40} کدام است؟
- 85(۱) 90(۲) 86(۳) 76(۴) ۱۱- باقیمانده تقسیم عبارت $A = 5^{9n+1} - 7 \times 2^{10n+3}$ بر 31 کدام است؟
- 14(۱) 17(۲) 11(۳) 29(۴) ۱۲- هرگاه P عددی اول باشد و $x \equiv 0^P$ ، جواب معادله همنهشتی $ax \equiv b^P$ ، کدام است؟
- ۱(۱) ab^P (۲) ab^{P-1} (۳) ab^{P-2} (۴) ab^{P-3} ۱۳- هرگاه $(x+2) \in [3]_7$ باشد، x کدام است؟
- ۱(۱) $k+7$ (۲) $7k+1$ (۳) $7k+3$ ۴(هیچکدام) ۱۴- به ازاء چه مقداری از x ، عدد $946142x \circ \circ$ بر 13 بخش پذیر است؟
- 4(۱) 6(۲) 9(۳) 0(۴) ۱۵- هرگاه $a=5k+2$ و $b=5k'-3$ باشد، دسته همنهشتی $[b+2a]_5$ کدام است؟
- ۱(۱) $\{5k''-4 : k'' \in \mathbb{Z}\}$ (۲) $\{10k''+3 : k'' \in \mathbb{Z}\}$ (۳) $\{15k''+2 : k'' \in \mathbb{Z}\}$ ۴(هیچکدام) ۱۶- باقیمانده 2^{81} بر 41 کدام است؟
- ۱(۱) 31(۲) 3(۳) 40(۴) ۱۷- عدد 9^{9^9} از سمت راست به کدام عدد ختم می شود؟
- 8(۱) 9(۲) 1(۳) 40(۴) ۱۸- باقیمانده $(19n-20)^{1001} + (13n-14)^{1000}$ بر $n-1$ کدام است؟ $(n \in \mathbb{N} - \{0\})$
- 3(۱) $n-2$ (۲) 1(۳) 0(۴) ۱۹- باقیمانده 1375^{1375} بر 7 کدام است؟
- 3(۱) 4(۲) 2(۳) 1(۴) ۲۰- باقیمانده $2^{93} \times (10!)^{84}$ بر 7 کدام است؟
- 3(۱) 1(۲) 4(۳) 5(۴) ۲۱- اگر a عددی طبیعی باشد، رقم یکان عدد، همواره صفر است؟
- ۱(۱) $a^{80} - s$ (۲) $a^{93} - a$ (۳) $a^{103} - a$ ۴(هیچکدام) $a^{602} - a$
- ۲۲- اگر $a > 35$ و $\begin{cases} a \equiv -3 \pmod{5} \\ a \equiv 7 \pmod{7} \\ a \equiv 9 \pmod{9} \end{cases}$ ، باقیمانده a بر 35 کدام است؟
- ۱(۱) 31(۲) 4(۳) 2(۴) 11(۴)

۲۳- اگر a یک عدد طبیعی باشد، رقم سمت راست a^4 ، کدام است؟

- (۱) $\{0, 1, 4\}$ (۲) $\{0, 1, 5\}$ (۳) $\{0, 1, 6\}$ (۴) $\{0, 1, 5, 6\}$

۲۴- کدام دو عدد در هم‌نهشتی $a + 2 \equiv b - 1 \pmod{19}$ صادق اند؟

- (۱) $\begin{cases} a = 29 \\ b = -11 \end{cases}$ (۲) $\begin{cases} a = 16 \\ b = -1 \end{cases}$ (۳) $\begin{cases} a = 73 \\ b = 20 \end{cases}$ (۴) $\begin{cases} a = 47 \\ b = -7 \end{cases}$

۲۵- مجموعه همه دسته های هم ارزی در رابطه هم‌نهشتی به پیمانه ۷ چنین است، $\{[0], [a], [a^2], \dots, [a^6]\}$ ، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۲۶- عدد $555^{333} + 333^{555}$ به کدام دسته هم‌نهشتی به پیمانه ۱۰ تعلق دارد؟

- (۱) ۵ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۱

۲۷- اگر n عددی طبیعی باشد، تعداد اعداد اول بزرگتر از $(2m)! + 1$ و کوچکتر از $(2n)! + 2n$ چند تا است؟

- (۱) ۰ (۲) $2n$ (۳) ۴ (۴) ۱

۲۸- رقم یکان هر عدد با رقم یکان کدامیک از توانهای زیر همیشه برابر است؟

- (۱) توان سوم (۲) توان چهارم (۳) توان پنجم (۴) توان ششم

۲۹- کوچکترین عددی به صورت $K!$ که بر 25^{11} بخشپذیر باشد کدام است؟

- (۱) $35!$ (۲) $95!$ (۳) $120!$ (۴) $110!$

۳۰- هر گاه n یک عدد طبیعی باشد، مجموع ارقام عدد $10^n \times 2^{2n+2} \times 25^n$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۴۰ (۳) ۸ (۴) عددی بزرگتر از ۱۰۰۰

۳۱- کدام درست است؟

- (۱) $n^7 \equiv n \pmod{7}$ (۲) $7^n + 5^n - 12^n \equiv 0 \pmod{35}$ (۳) $n^{202} \equiv n^{101} \pmod{2}$ (۴) هر سه

۳۲- مجموعه $\{m+1, m+2, m+3, \dots, 2m+1\}$ یک دسته هم‌نهشتی به کدام پیمانه است؟

- (۱) $m+1$ (۲) m (۳) $m-1$ (۴) $2m$

۳۳- باقیمانده $20! + 65^{56} + 999^{888}$ بر ۹ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۰

۳۴- باقیمانده $137^{31} + 129^{31} + 128^{31} + 127^{31}$ بر ۲۲ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۱۱ (۴) ۰

۳۵- باقیمانده $8^{65} + 4^{64} + 2^{65}$ بر ۶۵ کدام است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۶۴ (۳) ۳۲ (۴) ۷

۳۶- باقیمانده عدد $x = (3443)^{44} + (4334)^{33}$ بر ۸ برابر است با:

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۷

۳۷- اگر $\{17, 83, 1021, a, 1000\}$ یک دسته کامل مانده به پیمانه ۵ باشد آنگاه a کدام است؟

- (۱) ۲۱۲ (۲) ۳۰۴ (۳) ۵۰۵ (۴) ۱۶۹

۳۸- هرگاه $n \equiv 9$ ، باقیمانده $n^{52} - 801n + 4$ بر 9 کدام است؟

- (۱) 0 (۲) 1 (۳) 7 (۴) 2

۳۹- هرگاه $A = 2^2 \times 3^3 \times 5$ و، در این صورت تعدا مقسوم علیه های مثبت عدد AB کدام است؟

- (۱) 480 (۲) 60 (۳) 3^7 (۴) 128

۴۰- رقم یکان 4^{n^3-n} ، $(n \in N)$ کدام است؟

- (۱) 4 (۲) 6 (۳) 8 (۴) بستگی به n دارد

۴۱- رقم $10^{101} + 3^{101} + 2^{101} + 1^{101}$ کدام است؟

- (۱) 0 (۲) 9 (۳) 1 (۴) 5

۴۲- باقیمانده تقسیم عدد $5 - 223456^{16}$ بر 11 کدام است؟

- (۱) 5 (۲) 6 (۳) 4 (۴) 7

۴۳- باقیمانده عدد $6 - 7 \times 2^{55}$ بر 19 کدام است؟

- (۱) 2 (۲) 8 (۳) 1 (۴) 13

۴۴- باقیمانده $4^{1385} + 3^{1385} + 2^{1385} + 1^{1385}$ بر 5 کدام است؟

- (۱) 0 (۲) 2 (۳) 1 (۴) 4

۴۵- باقیمانده $5^{1382} + 2^{1382} + 1^{1382}$ بر 21 کدام است؟

- (۱) 9 (۲) 8 (۳) 1 (۴) 17

۴۶- اگر کوچکترین عضو مثبت مجموعه های $A = \{486r + 210s : r, s \in Z\}$ را α بنامیم باقیمانده تقسیم $\alpha^{1380} - 8$ بر 11 کدام است؟

- (۱) 9 (۲) 3 (۳) 7 (۴) 4

۴۷- هرگاه x و y و z مضرب 6 باشند، باقیمانده $x^3 + y^3 + z^3$ بر 7 کدام است؟

- (۱) 6 (۲) 72 (۳) 0 (۴) 17

۴۸- هرگاه مجموعه $\{a, b, c, d, e, f\}$ یک دسته کامل مانده ها در همنهشتی به پیمانه k باشد، کدامیک از گزینه های زیر یک دسته کامل مانده ها در همنهشتی به پیمانه k است؟

- (۱) $\{2a \text{ و } 2b \text{ و } 2c \text{ و } 2d \text{ و } 2e \text{ و } 2f\}$ (۲) $\{5a \text{ و } 5b \text{ و } 5c \text{ و } 5d \text{ و } 5e \text{ و } 5f\}$

- (۳) $\{9a \text{ و } 9b \text{ و } 9c \text{ و } 9d \text{ و } 9e \text{ و } 9f\}$ (۴) $\{3a \text{ و } 3b \text{ و } 3c \text{ و } 3d \text{ و } 3e \text{ و } 3f\}$

۴۹- اگر مجموعه A یک دسته کامل مانده ها در همنهشتی به پیمانه 6 باشد، به ازاء کدام مقدار a، مجموعه $\{ax + 4, x \in A\}$ یک دسته کامل مانده هادر همین همنهشتی است؟

- (۱) 3 (۲) 4 (۳) 5 (۴) 9

۵۰- هرگاه x_1, x_2 ریشه های معادله $x^2 + bx + c = 0$ باشند و $(x_1, x_2) = 1$ ، در این صورت، کدام درست است؟

- (۱) $(b \text{ و } c) = 1$ (۲) $(b + c \text{ و } x_1) = 1$ (۳) $(b - c \text{ و } x_1) = 3$ (۴) $(b + 1 \text{ و } c + 2) = 1$

۵۱- عدد $8^{100} \times 11^{1001}$ به کدام دسته مانده ها در همنهشتی به پیمانه 10 تعلق دارد؟

- (۱) [2] (۲) [4] (۳) [6] (۴) [8]

۵۲- باقیمانده $8^{71} + 9^{71} + 10^{71} + 11^{71} + 12^{71}$ بر 11 کدام است؟

- (۱) 2 (۲) 0 (۳) 4 (۴) 1

۵۳- رقم یکان $7093^{513^{726}}$ کدام است؟

- 3(۱) 9(۲) 4(۳) 1(۴)

۵۴- هرگاه $a \equiv (17^{80} + 9)^{17} - 7 \times 5^{32} \pmod{a}$ ، کدام است؟

- 8(۱) 9(۲) 2(۳) 1(۴)

۵۵- اگر $a > 21$ و $\begin{cases} a \equiv 3 \pmod{7} \\ a \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$ ، باقی مانده تقسیم a بر 21 کدام است؟

- 8(۱) 9(۲) 12(۳) 13(۴)

۵۶- تعداد عضوهای مجموعه $\{n : 65 \mid 2^2 + 1, n < 100\}$ کدام است؟

- 6(۱) 7(۲) 8(۳) 9(۴)

۵۷- هرگاه باقیمانده تقسیم عدد صحیح a بر 7 و 6 به ترتیب 2 و 3 باشد، باقیمانده ی تقسیم a بر 42 کدام است؟

- 6(۱) 0(۲) 9(۳) 1(۴)

۵۸- رقم یکان 212^{528} با رقم یکان کدام عدد برابر است؟

- 212¹⁰¹(۱) 212¹⁰²(۲) 212¹⁰³(۳) 212¹⁰⁴(۴)

۵۹- دو رقم سمت راست 9^{9^9} کدام است؟

- 89(۱) 98(۲) 09(۳) 99(۴)

۶۰- باقیمانده عدد 7 بر 100 کدام است؟

- 1(۱) 26(۲) 51(۳) 76(۴)

۶۱- رقم $9^{9^9} + 9^{9^9} + 9^{9^9} + 9$ کدام است؟

- 9(۱) 4(۲) 9(۳) 9(۴) صفر

۶۲- هرگاه $71 \equiv 11$ ، آنجا $9!$ به پیمانه 11، همنشست؛ با کدام عدد است؟

- 0(۱) 1(۲) 2(۳) 5(۴)

۶۳- اگر a فر باشد، کدام درست؟

- ۱) $a^2 \equiv 2 \pmod{9}$ ۲) $a^2 \equiv 1 \pmod{5}$ ۳) $a^2 \equiv 1 \pmod{8}$ ۴) $a^2 \equiv 3 \pmod{12}$

۶۴- عدد $(99999 \times 9^{19}) + 4^{n!}$ به چه رقمی ختم می شود؟ ($n \in \mathbb{N}$)

- 6(۱) 9(۲) 4(۳) 5(۴)

۶۵- کدام صحیح است؟

۲) $a^n \equiv b^n \pmod{m} \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$

۱) رقم یکان 9^{n^2-n} به اِزاء $n \in \mathbb{N}$ همواره است

۳) مجموعه $A = \{3^n : 0 \leq n \leq 6, n \in \mathbb{N}\}$ یک دسته کامل مانده ها به پیمانه 7 است.

۶۶- در کدام مجموعه، لااقل دو عضو دارای باقیمانده یکسان بر عدد 10 هستند؟

- ۱) $\{a^{10}, a^{10} + 1, \dots, a^{10} + 9\}$ ۲) $\{a - 9, a - 8, \dots, b\}$ ۳) $\{a + b, a + b + 11, \dots, a + b + 99\}$ ۴) $\{a, a + 1, a + 2, \dots, a + 10\}$

۶۷- هرگاه $\overline{ab}$ و $\overline{cd}$ دو عدد دو رقمی و بر 7 بخش پذیر باشند، دترمینان $\begin{vmatrix} 2a & 3b \\ 2c & 3d \end{vmatrix}$ بر کدام عدد بخش پذیر است؟

(۱) 49 (۲) 36 (۳) 42 (۴) 27

۶۸- اگر $A \cup = \{4k : 3 \leq k \leq 6\}$ یک دسته کامل مانده ها به پیمانه 5 باشد، A کدام است؟

(۱) $\{7, 20\}$ (۲) $\{4, 10\}$ (۳) $\{3, 5\}$ (۴) $\{2, 6\}$

۶۹- حاصل $[2]_7 \cap [5]_3$ کدام است؟

(۱) $[5]_{21}$ (۲) $[10]_{21}$ (۳) $[2]_{21}$ (۴) $[1]_{21}$

۷۰- هرگاه $a-2$ و $c|b-5$ ، باقیمانده $ab-8$ بر c کدام است؟

(۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 0

۷۱- باقیمانده 3^{163} بر 100 کدام است؟

(۱) 69 (۲) 36 (۳) 23 (۴) 27

۷۲- هرگاه، $a+4c \equiv 2b \pmod{21}$ ، باقیمانده $\overline{abc}$ بر 21 کدام است؟

(۱) 2 (۲) 10 (۳) 8 (۴) 0

۷۳- هرگاه، $a \equiv 11 \pmod{13}$ و $a \equiv 11 \pmod{3}$ ، آنگاه باقیمانده $\frac{a}{3}$ بر 13 کدام است؟

(۱) 8 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 1

۷۴- باقیمانده عدد 3^{667} بر 21 کدام است؟

(۱) 3 (۲) 4 (۳) 5 (۴) 7

۷۵- رقم یکان 1434567^{4n+1} کدام است؟ ($n \in \mathbb{N}$)

(۱) 7 (۲) 9 (۳) 3 (۴) بستگی به n دارد

۷۶- هرگاه، $a = 17k + 16$ ، در این صورت a^{19} به کدام است؟

(۱) $17k+1$ (۲) $17k+16$ (۳) $17k+14$ (۴) $17k$

۷۷- باقیمانده عدد $16^{n+2} + 4^{2n+1} + 3$ بر 26 کدام است؟

(۱) 0 (۲) 1 (۳) 2 (۴) 3

۷۸- تعداد اعداد اول به کدام صورت؟؟؟ است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

(۱) $3k-1$ (۲) $6k+2$ (۳) $4k+3$ (۴) $4k-1$

۷۹- کدام نادرست است؟ ($n \in ?$)

(۱) رقم یکان $6, 2^{720}$ است

(۲) اگر 2 و 3 و 5 و ... و p، اعداد اول از 2 تا خود p باشند، آنگاه $2*3*5*...*p+1$ نیز اول است

(۳) $ab|(a+b)^n - (a^n + b^n)$

(۴) $28 \equiv 48 \pmod{10} \Rightarrow 7 \equiv 12 \pmod{5}$

۸۰- در رقم سمت راست $\sum_{n=1}^{24} n!$ کدام است؟

- 13(۱) 01(۲) 27(۳) 00(۴)
۸۱- عدد $[-30917]$ به کدام دسته همنهشتی به پیمانه 9 تعلق دارد؟
- 2(۱) 9(۲) 1(۳) 7(۴)
۸۲- باقیمانده $1 + 19^{19}$ بر 10 کدام است؟
- 1(۱) 9(۲) 0(۳) 3(۴)
۸۳- باقیمانده $1 + 51^{32}$ بر 17 کدام است؟
- 1(۱) 2(۲) 5(۳) 0(۴)
۸۴- باقیمانده $1000!$ بر 1996 کدام است؟
- 0(۱) 2(۲) 4(۳) 4!(۴)
۸۵- باقیمانده $1 + 10^{31} + 10^{62}$ بر 111 کدام است؟
- 0(۱) 1(۲) 110(۳) 10(۴)
۸۶- باقیمانده a بر 7 و 6 به ترتیب 5 و 4 است، باقیمانده $3a+17$ بر 42 کدام است؟
- 11(۱) 0(۲) 3(۳) 13(۴)
۸۷- هرگاه a و b و c مضرب 13 نباشند، باقیمانده تقسیم $a^{1380} + b^{1380} + c^{1380}$ بر 13 کدام است؟
- 1(۱) 0(۲) 3(۳) 12(۴)
۸۸- دو عدد طبیعی $3k+5$ و $4k+9$ رقم یکان مساوی دارند، عدد k به کدام رقم ختم می شود؟
- 4(۱) 6(۲) 0(۳) 1(۴)
۸۹- رقم یکان عدد $A = \sum_{k=1}^{1385} (k!)^{k!}$ کدام است؟
- 7(۱) 1(۲) 0(۳) 2(۴)
۹۰- باقیمانده عددی دو رقمی بر 2 و 5 و 7 به ترتیب 1، 2، 3 می باشد، رقم یکان آن عدد کدام است؟
- 2(۱) 5(۲) 3(۳) 7(۴)
۹۱- باقیمانده $5^{100} - 7^{100}$ بر 24 کدام است؟
- 1(۱) 0(۲) 5(۳) 2(۴)
۹۲- عدد $(a+b)^n - a^n - b^n$ که در آن a و b نسبت به هم اولند، همواره بر کدام یک از اعداد زیر بخش پذیر است؟
- $a+b$ (۱) b (۲) a (۳) ab (۴)
۹۳- عدد $1^{88} + 2^{88} + 3^{88} + \dots + 88^{88}$ بر کدام یک از اعداد زیر بخش پذیر است؟
- 3(۱) 22(۲) 88(۳) 89(۴)
۹۴- بیست و هفتم اردیبهشت روز سه شنبه است، سومین شنبه در ماه اردیبهشت، کدام روز این ماه است؟
- 17(۱) 18(۲) 19(۳) 20(۴)
۹۵- اگر پنجم شهریور، دوشنبه، باشد، پنجم اسفند همان سال، چه روزی از هفته خواهد بود؟
- یکشنبه(۱) دوشنبه(۲) پنجشنبه(۳) جمعه(۴)

www.konkur.ir

پاسخ تستهای همنهشتی

$$\begin{cases} 3 \nmid x \Rightarrow (3, x) = 1 \Rightarrow x^2 \equiv 1 \Rightarrow x^4 \equiv 1 \\ 3 \nmid y \Rightarrow (3, y) = 1 \Rightarrow y^2 \equiv 1 \Rightarrow y^4 \equiv 1 \Rightarrow x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2z^2 \equiv 1 + 1 + 1 - 2(1)(1)(1) = 1 \\ 3 \nmid z \Rightarrow (3, z) = 1 \Rightarrow z^2 \equiv 1 \Rightarrow z^4 \equiv 1 \end{cases} \quad (۲) - ۱$$

$$x = y = z = 1 \Rightarrow 1 + 1 + 1 \equiv 1$$

روش دوم: عددگذاری

$$(a, 13) = 1 \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1$$

۲- (۲) طبق فرما داریم:

$$13 \equiv 0 \Rightarrow 13^{12} \equiv 0$$

ضمناً:

$$1^{12} + 2^{12} + \dots + 12^{12} + 13^{12} + \dots + 20^{12} \equiv 1 + 1 + \dots + 1 + 0 + 1 + \dots + 1 = 29 \equiv 6$$

لذا داریم:

$$n \geq 5 \Rightarrow n! \equiv 0$$

۳- (۱) در اینگونه تستها، از فاکتوریلی خاص به بعد، همگی صفر شوند، در اینجا نیز داریم:

$$1! + 2! + 3! + 4! + 5! + 6! + \dots + 100! \equiv 1 + 2 + 6 + 24 + 0 + 0 + 0 + \dots + 0 \equiv 3$$

$$2001 \equiv (1+0) - (1+0) - (2+0) = -1 \Rightarrow 2001^{75} \equiv (-1)^{75} = 1$$

۴- (۲)

$$1978 \equiv (8+9) - (71+1) = 9 \equiv -2 \Rightarrow 1978^{120} \equiv (-2)^{120} = 2^{120} \equiv (2^5)^{24} = (-1)^{24} = 1$$

$$\Rightarrow 2001^{78} + 1978^{120} \equiv -1 + 1 = 0$$

۵- (۲) واضح است که عدد 1801! بر 4 بخشپذیر است لذا طبق قضیه نیوتن داریم:

$$3127^{1801!} \equiv 3127^4 \equiv 7^4 \equiv (7^2)^2 \equiv (-1)^2 = 1$$

$$18 + 3x \equiv 0$$

۶- (۴) باید باقیمانده مجموع ارقامش بر 9، صفر شود لذا باید داشته باشیم:

$$0 + 3x \equiv 0 \Rightarrow 3x \equiv 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } 3 \text{ یا } 6 \text{ یا } 9$$

$$n \geq 5 \Rightarrow n! \equiv 0$$

۷- (۴) یادآوری:

$$S = 1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \dots + 19! \equiv 1 + 2 + 6 + 24 + 0 + 0 + \dots + 0 \equiv 3 \Rightarrow S^2 \equiv 9$$

$$n = 1 \Rightarrow 7^8 + 7^4 = 7^4(7^4 + 1) \equiv (7^2)^2 + 1 \equiv (11)^2((11)^2 + 1) = 121(121 + 1) \equiv 7(7 + 1) = 56 \equiv 18$$

۸- (۳)

روش دیگر: با اینکه $7^3 \equiv 1$ داریم:

$$7^{6n+2} + 7^{3n+1} = (7^3)^{2n} \times 49 + (7^3)^n \times 7 \equiv 1 \times 49 + 1 \times 7 \equiv 56 \equiv 18$$

$$2^{20} + 3^{30} + 4^{40} + 5^{50n} \equiv (-1)^{20} + 0^{30} + 1^{40} + (-1)^{50} = 1 + (-1) = 0$$

۹- (۱)

۱۰- (۴) گزینه های (۱) و (۲) نمی توانند درست، باشند زیرا رقم یکان ۲، هیچگاه، ۵ یا ۰ نمی شود، حتماً $2^{800} \equiv 4$ بر ۲ بخشپذیر است، از این گزینه ۳ و ۴، فقط گزینه ۴ است که بر ۴ بخشپذیر است.

۱۱- (۳): با توجه به اینکه $2^5 \equiv 18$ و $5^3 \equiv 1$ داریم:

$$A = 5^{9n+1} - 7 \times 2^{10n+3} \equiv (5^3)^{3n} \times 5 - 7 \times (2^5)^m \times 2^3 \equiv 1 \times 5 - 7 \times 1 \times 2^3 = -51 \equiv 11$$

$$\begin{cases} \text{او } p \\ p \times a \end{cases} \xrightarrow{\text{طبق فرما}} a^{p-1} \equiv 1 \xrightarrow{\times p} ba^{p-1} \equiv b \Rightarrow a(ba^{p-2}) \equiv b \Rightarrow x = ba^{p-2}$$

۱۲- (۳)

$$(x+2) \in [3]_3 \Rightarrow x+2 \equiv 3 \Rightarrow x+2-3 = 7k \Rightarrow x = 7k+1$$

۱۳- (۲)

$$946142x00 \equiv x00 - 142 + 946 \equiv 0 + 0 + 100x - 12 + 10$$

۱۴- (۲)

$$\equiv 100x - 2 \equiv 9x - 2 \equiv 0 \Rightarrow 9x \equiv 2 \Rightarrow 9x \equiv 2 + 4(13) \Rightarrow 9x \equiv 54 \Rightarrow x \equiv 6 \Rightarrow x = 6$$

$$b + 2a = (5k' - 3) + 2(5 + 2) = 5k' - 3 + 10k = 5(k' + 2k) + 1 = 5k'' + 5 - 4 = 5k''' - 4$$

۱۵- (۱)

$$2^5 = 32 \equiv -9 \Rightarrow (2^5)^{16} \equiv (-9)^{16} \Rightarrow 2^{80} \equiv 81^8 \equiv (-1)^8 = 1 \quad (۳) - ۱۶$$

$$2^{80} \equiv 1 \Rightarrow 2^{81} \equiv 2$$

۱۷- (۲) چون: $9^9 \equiv 1 \Rightarrow 9 \equiv 1$ لذا طبق قضیه نیوتن رقم راست عدد 9^9 ، با رقم سمت راست عدد 9 یعنی 9، برابر است.

$$\left. \begin{aligned} 13n - 14 &= 13(n-1) - 1 \equiv -1 \\ 19n - 20 &= 19(n-1) - 1 \equiv -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (13n-14)^{1000} + (19n-20)^{1001} \equiv (-1)^{1000} + (-1)^{1001} = 0 \quad (۴) - ۱۸$$

راه دیگر: راه عدد گذاری: به جای n ، قرار می دهیم، در این صورت داریم:

$$(13-14)^{1000} + (19-20)^{1001} \equiv (-1)^{1000} + (-1)^{1001} = 0 \quad (۱) - ۱۹$$

$$1375^7 \equiv 3 \Rightarrow 1375^3 \equiv 3^3 \equiv -1 \Rightarrow (1375^3)^{458} \equiv (-1)^{458}$$

$$(1375)^{1374} \equiv 1 \Rightarrow \begin{cases} 1375^{1374} \equiv 1 \\ 1375^7 \equiv 3 \end{cases} \Rightarrow 1375^{1375} \equiv 3$$

$$۲۰- (۲) یادآوری: قضیه ویلسون: $p \Rightarrow (p-1)! \equiv -1$ اول$$

$$r \Rightarrow (7-1)! \equiv -1 \Rightarrow 6! \equiv -1 \Rightarrow 6!^{84} \equiv 1$$

$$2^{93} \equiv (2^3)^{31} \equiv 1^{31} = 1 \Rightarrow 6!^{84} \times 2^{93} \equiv 1 \times 1 = 1$$

۲۱- (۲) طبق قضیه نیوتن می دانیم رقم یکان α با رقم یکان a (که r باقیمانده n بر 4 است و $r \neq 0$) برابر است، ضمناً اگر n بر 4 بخش پذیر باشد، رقم یکان a^n با رقم یکان a^4 برابر است. در بین گزینه ها چون فقط عدد 93 است که باقیمانده اش بر 4 مساوی 1، است، لذا طبق قضیه نیوتن رقم یکان a با رقم یکان a برابر است یعنی: رقم یکان $a^{93} \equiv a \Rightarrow a^{93} - a \equiv 0$

$$\begin{cases} a \equiv -3 \equiv 2 \\ a \equiv 9 \equiv 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 2 \\ a \equiv 2 \end{cases} \Rightarrow a \equiv 2 \Rightarrow a \equiv 2 \Rightarrow a \equiv 2 \quad (۳) - ۲۲$$

۲۳- (۴) هرگاه a عددی طبیعی باشد، رقم سمت راست a^2 ، فقط یکی از ارقام 0، 1، 4، 5، 6 و 9 خواهد بود (به عبارت دیگر مربع هر عدد طبیعی به 2، 3، 7 و 8 ختم نمی شود) و لذا a^4 فقط به یکی از ارقام 0، 1، 5، 6 ختم میشود.

$$a + 2 \equiv b - 1 \Rightarrow 74 + 2 \equiv -7 - 1 \Rightarrow -8 \Rightarrow 57 \equiv 0 \quad (۴) - ۲۴$$

۲۵- (۴) می دانیم مجموعه $\{0, 1, 2, \dots, 6\}$ یک دسته کامل مانده ها در همنهشتی به پیمانه 7 است، اگر به جای a ، عدد 7 را قرار دهیم، تمام دسته ها به صورت $[0]$ در می آیند، اگر به جای a عدد 1 را قرار دهیم، شش دسته، به صورت $[1]$ در

می آیند، اگر به جای a عدد 2 را قرار دهیم، دو دسته $[a]$ و $[a^4]$ به صورت $[2]$ در می آیند، فقط ار به جای a ، عدد 3 را قرار دهیم، تمام دسته های هم ارزی در همنهشتی به پیمانه 7 به دست می آیند، دقت کنید:

$$\{[0], [3], [0], [3^2], [3^4], [3^5], [3^6]\}$$

$$\{[0], [3], [2], [6], [4], [5], [1]\}$$

دقت کنید که برای حماسه های $[3^6]$ لازم نیست 3^6 را حساب کنیم، توجه کنید:

$$[3^6] = [3^3] \times [3^3] = [6] \times [6] = [36] = [1]$$

در مورد توانهای بزرگ دیگر، نیز به همین صورت عمل می کنیم.

۲۶- (۲) کافی است باقیمانده عدد داده شده بر 10 (یا رقم یکان عدد داده شده) را بیابیم

$$333^{555} + 555^{333} \equiv 3^{555} + 5^{333} \equiv (3^2)^{277} \times 3 + 5^{10} \equiv (-1)^{277} \times 5 = -3 + 5 = 2$$

یادآوری: رقم یکان 5^n ، همواره 5 است.

۲۷- (۱) اعداد بین $(2n)!+1$ ، $(2n)!+2$ عبارتند از: $(2n)!+2-1, \dots, (2n)!+2n-1$ هیچکدام از این اعداد او نیستند، زیرا به ترتیب بر 2، بر 3، ... و بر $2n-1$ بخش پذیرند.

۲۸- (۳) چون باقیمانده 5 بر 4 یک است، لذا طبق قضیه نیوتن، رقم یکان a^5 ، با رقم یکان a برابر است، یعنی: $a^5 \equiv a^{10}$ بنابراین رقم یکان هر عدد با رقم یکان توان پنجم آن برابر است.

۲۹- (۲) چون $5^{22} = 25^{11}$ لذا کافی است تعداد عاملهای 5 را در $k!$ بشماریم و برای این مقصود از فرمول استفاده می کنیم. در بین گزینه ها، تنها عدد 95 است که اگر آن را به جای n قرار دهیم

$$\left\lfloor \frac{95}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{95}{25} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{95}{125} \right\rfloor + \dots = 19 + 3 + 0 + \dots = 22$$

۳۰- (۱) $25^n \times 2^{2n+2} \times 10^n = 250^n \times 4^n \times 2^2 = 1000^n \times 4$ هر چه باشد، 1000 به صورت عدد مانند $\underbrace{100\dots0}_{n}$ خواهد بود که اگر در 4 ضرب شود به صورت $\underbrace{4000\dots0}_{n}$ در خواهد آورد، لذا مجموع ارقامش در هر صورت 4 خواهد شد.

۳۱- (۴) گزینه (۱): $n^7 \equiv n$ ، نتیجه قضیه فرماست.

گزینه (۲): بر طبق همنهشتی $(a+b)^n \equiv a^n + b^n$ داریم $(7+5)^n \equiv 7^n + 5^n$ و در نتیجه $7^n + 5^n - 12^n \equiv 0$

گزینه (۳): $17^{100} \equiv 1 \Rightarrow (17^{100})^2 \equiv 1 \Rightarrow 17^{202} \equiv 1$

۳۲- (۱) مجموع m عدد متوالی، یک دسته کامل مانده ها به پیمانه m است چون مجموعه داده شده، مجموعه ای از $m+1$ عدد متوالی است، لذا این مجموعه، یک دسته کامل مانده ها به پیمانه $m+1$ است.

$$999^{888} + 65 + 20! \equiv 0 \Rightarrow 999^{888} + 65 + 20! \equiv 0 \Rightarrow 999^{888} + 65 + 20! \equiv 0 \quad (۱) \quad ۳۳$$

$$\begin{aligned} 20! &\equiv 0 \\ 65 &\equiv 2 \end{aligned}$$

$$127^{313} + 128^{313} + 129^{313} + \dots + 137^{313} \equiv 17^{313} + 18^{313} + 19^{313} + \dots + 26^{313} + 27^{313} \quad (۴) \quad ۳۴$$

$$\equiv (-5)^{313} + (-4)^{313} + (-3)^{313} + (-2)^{313} + (-1)^{313} + 0^{313} + 1^{313} + 2^{313} + 4^{313} + 5^{313} \equiv 0$$

هر دو جمله از طرفین قرینه بوده و لذا حذف میشوند.

۳۵- (۱)

$$2^{65} + 4^{65} + 8^{65} \equiv (2^6)^{10} \times 2^5 + (4^3)^{21} \times 4^2 + (8^2)^{32} \times 8 \equiv (-1)^{10} \times 32 + (-1)^{21} \times 16 + (-1)^{32} \times 8 \equiv 32 - 16 + 8 = 24$$

۳۶- (۲) باقیمانده هر عدد بر ۸ برابر است با باقیمانده سه رقم سمت راست آن عدد بر ۸، البته می توان گفت که باقیمانده

هر عدد بر ۸ برابر است با باقیمانده (رقم یکان + دو برابر دهگان + ۴ برابر صدگان) بر ۸، لذا داریم:

$$x = (3443)^{44} + (4334)^{33} \equiv (3+8+16)^{44} + (4+16+12)^{33} \equiv 3^{44} + (-2)^{33} \equiv (3^2)^{22} + ((-2)^3)^{11} = 1^{22} + (-8)^{11} = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 17, 83, 1021, a, 1000 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 2, 3, 1, ?, 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a \equiv 4 \Rightarrow a =$$

۳۷- (۲)

$$n^{52} - 801n + 4 \equiv 2^{52} - 0n \equiv (2^3)^{17} \times 2 + 4 \equiv (-1)^{17} \times 2 + 4 = 2$$

۳۸- (۴)

$$AB = 2^3 \times 3^7 \times 5^1 \times 7^1 \Rightarrow AB \quad \text{تعداد مقسوم علیه های مثبت} = (3+1)(7+1)(1+1)(1+1) = 128$$

۳۹- (۴)

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1) = \text{عددی زوج} \Rightarrow 4^{10} \equiv 6$$

۴۰- (۲) رقم یکان

۴۱- (۴) چون باقیمانده ۱۰۱ بر ۴، ۱ است لذا طبق قضیه نیوتن رقم یکان a^{101} با رقم یکان a^1 برابر است بنابراین داریم:

$$1^{101} + 2^{101} + 3^{101} + \dots + 10^{101} \equiv 1 + 2 + 3 + \dots + 10 = \frac{10 \times 9}{2} = 55 \equiv 5$$

$$223456 \equiv (6+4+2) - (5+3+2) = 2$$

$$\Rightarrow 223456^{16} - 5 \equiv 2^{16} - 5 \equiv (2^5)^3 \times 2 - 5$$

۴۲- (۳)

$$\equiv (-1)^3 \times 2 - 5 = -2 - 5 = -7 \equiv 4$$

$$2^{18} \equiv 1 \Rightarrow (2^{18})^3 \equiv 1^3 \Rightarrow 2^{54} \equiv 1 \Rightarrow 2^{55} \equiv 2$$

۴۳- (۲) طبق فرما داریم:

$$7 \times 2^{55} - 6 \equiv 7 \times 2 - 6 = 8$$

۴۴- (۱)

$$1^{1385} + 2^{1385} + 3^{1385} + 4^{1385} \equiv 1^{1385} + 2^{1385} + (-2)^{1385} + (-1)^{1385} = 1^{1385} + 2^{1385} - 2^{1385} - 1^{1385} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2^6 = 64 \equiv 1 \\ 5^3 = 125 \equiv -1 \end{array} \right. \Rightarrow 1^{1382} + 2^{1382} + 5^{1382} \equiv 1 + (2^6)^{230} \times 2^2 + (5^3)^{460} \times 5^2$$

۴۵- (۱)

$$\equiv 1 + 4 + 25 \equiv 9$$

$$d = (486, 210) = (2 \times 3^5, 2 \times 3 \times 5 \times 7) =$$

۴۶- (۴)

$$\alpha^{1380} - 8 = 6^{1380} - 8 = (6^{10})^{138} - 8 \equiv 1^{138} - 8 = -7 \equiv 4$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{اول} \\ (6^{11}, 11) = 1 \end{array} \right. \Rightarrow 6^{10} \equiv 1$$

یادآوری: قضیه فرما:

$$x^3 + y^3 + z^3 = (6k)^3 + (6k')^3 + (6k'')^3 \quad (3) - 47$$

$$= 216(k^3 + k'^3 + k''^3) = 72 \times 3 \times q = 72 \text{ مضرب}$$

۴۸- (۲) چون مجموعه $\{a, b, c, d, e, f\}$ 6 عضو دارد لذا $k=6$ و چون $(5,6)=1$ لذا گزینه 2 نیز یک دسته کامل مانده ها در همنهشتی به پیمانه $k=6$ است.

$$(a, m) = 1 \Rightarrow (5, 6) = 1 \quad (3) - 49$$

$$(x_1, x_2) = 1 \Rightarrow (x_1 x_2, x_1 + x_2) = 1 \Rightarrow (p, s) = 1 \quad (1) - 50$$

$$\begin{cases} S = -\frac{b}{a} = \frac{-b}{1} = -b \\ P = \frac{c}{a} = \frac{c}{1} = c \end{cases}$$

P ضرب ریشه ها و S جمع ریشه هاست.

$$\Rightarrow (P, S) = 1 \Rightarrow (c, -b) = 1 \Rightarrow (c, b) = (c, -b) = 1$$

$$8^{100} \times 11^{1001} \equiv 8^4 \times 11^1 = (2^3)^4 \times 1 = 4^6 \times 1 = 4^{6 \div 10} \equiv 4^6 \equiv 6 \quad (3) - 51 \text{ با استفاده از قضیه نیوتن داریم:}$$

$$(8, 11) = 1 \Rightarrow 8^{10} \equiv 1 \Rightarrow 8^{70} \equiv 1 \Rightarrow 8^{71} \equiv 8 \quad (1) - 52 \text{ طبق قضیه فرما داریم:}$$

به همین درمورد بقیه، ضمناً $11 \equiv 0$ لذا $11^{71} \equiv 0$ در نتیجه داریم:

$$8^{71} + 9^{71} + 10^{71} + 11^{71} + 12^{71} \equiv 8 + 9 + 10 + 0 + 12 \equiv -3 - 2 - 1 + 2 = -4 \equiv 7 \quad (1) - 53 \text{ از قضیه نیوتن استفاده می کنیم ابتدا باقیمانده } 513^{726} \text{ بر 4 را می یابیم.}$$

$$513 \equiv 1 \Rightarrow 513^{726} \equiv 1$$

$$\xrightarrow{\text{طبق نیوتن}} 7093^{513^{726}} \equiv 3^1 = 3$$

$$7 \times 5^{16} \equiv 1 \Rightarrow 7 \times 5^{33} - (17^{80} + 9) \equiv a \quad (2) - 54$$

$$7 \times (5^{16})^2 \times 5 - (17^{80} + 9) \equiv a$$

دقت کنید که $17 \equiv 0$ و لذا $17^{80} \equiv 0$

$$35 - 9 \equiv a \Rightarrow 26 \equiv a \Rightarrow a = 9$$

(۲) - 55

$$\begin{cases} a \equiv 9 \\ a \equiv 2 \\ a \equiv 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 9 \\ a \equiv 2 \\ a \equiv 0 \end{cases} \Rightarrow a \equiv 9 = 21 \text{ باقیمانده } a \text{ بر } 21$$

راه دیگر: عددی مانند $\frac{1}{a} = 30$ پیدا می کنیم به طوریکه $\begin{cases} a \equiv 2 \\ a \equiv 3 \\ a \equiv 0 \end{cases}$ ، لذا داریم: $30 = a \equiv 9$

۵۶- (۳) نکته: اگر n فرد باشد،

$$65 = 2^6 + 1^6 \mid 2^n + 1 \Rightarrow$$

n باید مضرب 6 باشد

$$n = 6n' \Rightarrow 2^6 + 1^6 \mid (2^6)^{n'} + (1^6)^{n'}$$

n' باید فرد باشد و

$$\begin{cases} n = 6n' \\ \left[\frac{100}{6} \right] = 16 \text{ فرد } n' \Rightarrow \frac{16}{2} = 8 \end{cases}$$

$$n' = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15$$

این 8 عدد عبارتند از:

$$\begin{cases} a \equiv 2 \pmod{9} \\ a \equiv 3 \pmod{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 9 \pmod{42} \\ (6, 7) = 1 \end{cases} \quad \text{باقیمانده } a \text{ بر } 42$$

(۳) - ۵۷

۵۸- (۴) $582 \equiv 4$ لذا طبق قضیه نیوتن رقم یکان 212^{528} با رقم یکان 212^4 و در نتیجه، طبق همین قضیه نیوتن با رقم یکان 212^{104} برابر است.

$$9^2 \equiv 81 \equiv -19 \Rightarrow 9^4 \equiv 361 \equiv 61 \Rightarrow 9^8 \equiv 3721 \equiv 21 \quad (۱) - ۵۹$$

$$\begin{cases} 9^2 \equiv -19 \Rightarrow 9^{10} \equiv -399 \equiv 1 \Rightarrow 9^{100} \equiv 1 \\ 9^2 \equiv 21 \end{cases}, \quad 9^{10} \equiv -19 \equiv -1 \equiv 9$$

$$9^9 \equiv 9 \Rightarrow 9^9 = 10k + 9 \Rightarrow 9^{9^9} = 9^{10k+9} = 9^{10k} \times 9^9 \equiv 1 \times 9^8 \times 9 \equiv 21 \times 9 = 189 \equiv 89$$

۶۰- (۱) کافی است دو رقم سمت راست 100 را بیابیم. یادآوری می کنیم که:

$$7^{100} \equiv 1 \text{ لذا } 7^{4k} \equiv 1$$

$$9 \equiv 1 \Rightarrow 9^9 \equiv 1 \Rightarrow 9^9 = 4k + 1 \Rightarrow 9^{9^9} \equiv 9^{4k+1} \equiv 1^{4k+1} = 1 \quad (۳) - ۶۱$$

$$9 + 9^9 + 9^{9^9} \equiv 9 + 9^1 + 9^1 + 9^1 = 36 \equiv 6$$

لذا طبق قضیه نیوتن داریم:

$$7! \equiv 2 \Rightarrow 9 \times 8 \times 7! \equiv 9 \times 8 \times 2 \quad (۲) - ۶۲$$

$$9! \equiv 18 \times 8 \equiv 7 \times 8 = 56 \equiv 1$$

۶۳- (۳) a را عدد 3 فرض می کنیم، لذا گزینه 3 درست است.

(۳) - ۶۴

$$4^{n!} + (99999 \times 9^{19}) \equiv 4^{\text{زوج}} \pmod{10} + (9 + 9^3) \equiv 6 + (9 + 9) = 24 \equiv 4$$

$$4^{\text{زوج}} \equiv 6 \text{ و } 9^{19} \equiv 9 \quad (\text{طبق نیوتن})$$

یادآوری :

$$9^{n2-n} = 9^{n(n-1)} = 9^{\text{زوج}} \equiv 1 \quad (۱) - ۶۵$$

$$3^2 \equiv 2^2 \Rightarrow 3 \equiv 2$$

گزینه 2 نادرست است زیرا:

گزینه 3 نادرست است زیرا مجموعه A، کلاً عضو دارد ولی دو عضو آن به پیمانه 7 با یکدیگر همنهشتند، به عبارت

دیگر متعلق به یک دسته همنهشتی هستند، در واقع طبق فرما داریم: $3^6 \equiv 1 \pmod{7}$ گزینه 4 نیز نادرست است: مثال نقض:

$$6 \mid -12, 6 \nmid -12$$

$$a \equiv_{10} a + 10 \quad (۶۶) - (۴)$$

$$A \begin{vmatrix} 2a & 3b \\ 2c & 3d \end{vmatrix} = 6ad - 6bc = 6(ad - bc) \quad (۶۷) - (۳)$$

$$\begin{aligned} \overline{ab} \equiv_7 0 &\Rightarrow b + 7a \equiv_7 0 \Rightarrow b \equiv_7 -3a & \Rightarrow b \equiv_7 -3a \\ \overline{cd} \equiv_7 0 &\Rightarrow d + 7c \equiv_7 0 \Rightarrow d \equiv_7 -3c & \Rightarrow d \equiv_7 -3c \\ \Rightarrow \begin{cases} 3ad \equiv_7 3bc \\ (3, 7) = 1 \end{cases} &\Rightarrow ad \equiv_7 bc \Rightarrow ad - bc = 7k & \begin{matrix} -3c \equiv_7 d \\ -3bc \equiv_7 -3ad \end{matrix} \times \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = 6(ad - bc) = 6 \times 7k = 42k$$

$$\{4k : 3 \leq k \leq 6\} = \{12, 16, 20, 24\} \quad (۶۸) - (۳)$$

چون مجموعه $\{0, 1, 2, 4\}$ ، عدد 3 را ندارد، لذا $A = \{3, 5\}$

$$[2]_7 \cap [5]_3 = [2]_7 \cap [2]_3 = [2]_{21} \quad (۶۹) - (۳)$$

$$[a]_m \cap [a]_n = [a]_c, c[m, n] \quad \text{یادآوری}$$

$$c \mid a - 2 \Rightarrow a \equiv_2^c 2 \quad (۷۰) - (۲)$$

$$c \mid b - 5 \Rightarrow \frac{b \equiv_5^c}{ab \equiv_{10}^c} \times \Rightarrow ab - 8 \equiv_{10}^c 10 - 8 = 2 = c$$

باقیمانده $b - 8$ بر c

راه دیگر: برای a و b و c سه عدد چنان حدس می زنیم که در دو شرط زیر صدق کنند:

$$\begin{cases} c \mid a - 2 \\ c \mid b - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = 10 \\ c = 5 \end{cases} \Rightarrow ab - 8 = 70 - 8 = 62 \equiv_5^5 2$$

$$(۷۱) - (۴) \text{ در یکی از تستهای قبل داریم: } 9^{100} \equiv_1^{100} \text{ لذت داریم:}$$

$$3^{163} = (3^2)^{80} \times 3^3 = 9^{80} \times 3^3 = (9^{10})^8 \times 27 \equiv_{100}^{100} 1^8 \times 27 = 27$$

$$\overline{abc} = c + 10b + 100a \equiv_{21}^{21} c + 10b - 5a \quad (۷۲) - (۴)$$

$$a + 4c \equiv_{21}^{21} 2b \Rightarrow a \equiv_{21}^{21} 2b - 4c$$

اما از فرض داریم:

$$\overline{ab} \equiv_{21}^{21} c + 10b - 5(2b - 4c) = c + 10b - 10b + 20c = 21c \equiv_0^{21} \Rightarrow \text{با جایگزین به جای } a \text{ در رابطه 1 داریم:}$$

$$3 \mid a \Rightarrow a \equiv_{13}^{13} 3k = 31k, \quad a \equiv_{11}^{13} 1 \Rightarrow 3k \equiv_{11}^{13} 1 \equiv_{11}^{13} 24 \quad (۷۳) - (۱)$$

$$3k \equiv_{13}^{13} 24 \xrightarrow{\div 3} k \equiv_{13}^{13} 8 \Rightarrow \frac{a}{3} \equiv_{13}^{13} 8 = 8 \text{ بر } \frac{a}{3} \text{ باقیمانده}$$

(۷۴) - (۱) در هم نشستی ها، اگر نتوانستیم برای 3، توان مناسبی پیدا کنیم، به پیمانه نگاه می کنیم، چون پیمانه مضرب 3 است، پیمانه جدیدی را در نظر می گیریم (به این صورت که پیمانه قبلی برابر 3 تقسیم می کنیم:

$$3^3 \equiv -1 \xrightarrow{\text{به توان 222}} 3^{666} \equiv 1 \Rightarrow 3^{666} = 7k + 1$$

$$\xrightarrow{\times 3} 3^{667} = 21k + 3 \Rightarrow 3^{667} \equiv 3 = 21 \text{ بر } 3^{667} \text{ باقیمانده ی}$$

تذکر: به هنگام پیدا کردن باقیمانده تقسیم عدد a^n بر b مضرب a باشد، باقیمانده معمولاً a خواهد شد، مثلاً در این تست، چون 21 مضرب 3 است، باقیمانده 3 شد.

$$123467^{4n+1} \equiv 1234567^1 \equiv 7$$

۷۵- (۱) طبق قضیه نیوتن داریم:

$$a = 17k + 16 \Rightarrow a \equiv 16 \equiv -1 \Rightarrow a \equiv -1 \Rightarrow a^{17} \equiv -1 \equiv 16 \Rightarrow a = 17k + 16 \quad (۲) - ۷۶$$

۷۷- (۴)

$$16^{n+2} + 4^{2n+1} + 3 = 16^n \times 256 + 16^n \times 4 + 3 = 16^n(260) + 3 = 26(10 \times 16^n) + 3 = 26q + 3 \Rightarrow 3 = \text{باقیمانده 26}$$

راه دیگر: به جای n عدد 1 را قرار داده، سپس باقیمانده ی عدد بدست آمده را بر 26 حساب می کنیم.

$$۷۸- (۲) \text{ چون } 6k+2=2(3k+1) \text{ همواره عددی زوج است و تنها عدد اول زوج } ۲ \text{ است که به ازاء } k=0 \text{ از } 6k+2 \text{ به}$$

دست می آید) لذا مجموعه اعداد اول به صورت $6k+2$ ، مجموعه ای است تک عضوی به صورت $\{2\}$ و لذا مشابهی است.

$$720 \equiv 0 \Rightarrow 2^{720} \equiv 2^4 = 16 \equiv 6$$

۷۹- (۲)

$$ab|(a+b)^n - (a^n + b^n)$$

نکته: همواره داریم:

$$\begin{cases} 28 \equiv 48 \\ (4,10) \end{cases} \Rightarrow \frac{28}{4} \equiv \frac{48}{4} \Rightarrow 7 \equiv 12$$

می دانیم هرگاه به حاصلضرب اعداد اول 2، 3، 5، ...، p ، یک واحد اضافه کنیم، عدد حاصل یا اول است یا عامل اولی به غیر از 2، 3، 5، ...، p (عامل اولی بزرگتر از p) دارد.

۸۰- (۱) نکته: دو رقم سمت راست یک عدد، همان باقیمانده تقسیم عدد بر 100 است.

نکته: تعداد صفرهای سمت راست هر عدد طبیعی مانند n از فرمول زیر به دست بدست می آید:

$$\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{25} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{125} \right\rfloor + \dots$$

حال به ازاء n چون تعداد صفرهای سمت راست $n!$ ، بزرگتر یا مساوی 2 خواهد بود لذا به ازاء $n \geq 10$

$$\sum_{n=1}^{24} 100 \equiv 1!+2!+3!+4!+5!+6!+7!+8!+9!$$

$n!$ بر 100 بخشپذیر است بنابراین داریم:

$$100 \equiv 1 + 2 + 24 + 30 + 20 + 20 + 40 + 80 \equiv 13$$

$$\dots, 7! \equiv 7 \times 20 = 140 \equiv 40 \text{ به همین ترتیب } 6! \equiv 7 \times 20 = 120 \equiv 20, 5! \equiv 120 = 2 \text{ دقت کنید که}$$

$$[-30917]_9 = [-(3+0+9+1+7)]_9 = [-20]_9 = [7]_9 \quad (۴) - ۸۱$$

$$19 \equiv -1 \Rightarrow 19^{19} \equiv 1 \xrightarrow{\text{طبق نیوتن}} 19^{19^{19}} + 1 \equiv 19^1 + 1 \equiv 20 \equiv 0 \quad (۳) - ۸۲$$

$$51 \equiv 0 \Rightarrow 51^{32} \equiv 0 \Rightarrow 51^{32} + 1 \equiv 1 \quad (۱) - ۸۳$$

دقت کنید که اشتباه فاحش زیر را مرتکب نشوید.

$$51^{16} \equiv 1 \Rightarrow (51^{16})^2 \equiv 1 \Rightarrow 51^{32} \equiv 1 \Rightarrow 51^{32} + 1 \equiv 2$$

چرا که 51 و 17 نسبت به هم اول نیستند و لذا نمی توان از قضیه فرما استفاده کرد.

۸۴- (۱) چون $1000! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 998 \times 999 \times 1000$, $1996 = 2 \times 998$ پس باقیمانده اش بر 1996، صفر است.

$$111 = 3 \times 37$$

۸۵- (۱) دقت کنید که :

$$10^3 \equiv 1 \Rightarrow 10^{62} + 10^{31} + 1 \equiv 1^{62} + 1^{31} + 1 = 3 \equiv 0$$

لذا $10^{62} + 10^{31} + 1$ بر 3 بخشپذیر است.

$$10^3 \equiv 1 \Rightarrow 10^{31} + 1 = (10^3)^{20} \times 10^2 + (10^3)^{10} \times 10 + 1 = 10^2 + 10 + 1 = 111 \equiv 0$$

لذا $10^{62} + 10^{31} + 1$ بر 37 نیز بخشپذیر است، چون $(3, 37) = 1$ ، لذا $10^{62} + 10^{31} + 1$ بر $3 \times 37 = 111$ نیز بخشپذیر بوده و بنابراین باقیمانده اش بر 111 صفر است.

$$\begin{aligned} a &\equiv 5 \equiv -2 \\ a &\equiv 4 \equiv -2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} a \equiv -2 \\ a \equiv -2 \Rightarrow a \equiv -2 \\ (6, 7) = 1 \end{cases} \quad \text{۸۶- (۱)}$$

$$\Rightarrow 3a + 17 \equiv -6 + 17 = 11$$

$$a \equiv b, a \equiv b, (m, n) = 1 \Rightarrow a \equiv b \quad \text{یادآوری:}$$

$$\begin{cases} a \equiv -2 \\ a \equiv -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7 \mid a + 2 \\ 6 \mid a + 2 \end{cases} \Rightarrow 6 \times 7 \mid a + 2 \Rightarrow a + 2 \equiv 0 \Rightarrow a \equiv -2$$

$$(a, 13) = 1 \Rightarrow a^{12} \equiv 1 \Rightarrow (a^{12})^{115} \equiv 1 \Rightarrow a^{1380} \equiv 1$$

۸۷- (۳)

$$a^{1380} + b^{1380} + c^{1380} \equiv 1 + 1 + 1 = 3$$

به همین ترتیب در مورد دو تای دیگر، لذا داریم:

$$4k + 9 \equiv 3k + 5 \Rightarrow k \equiv -4 \equiv 6$$

۸۸- (۲)

$$A = (1!)^{1!} + (2!)^{2!} + (3!)^{3!} + (4!)^{4!} + (5!)^{5!} + \dots$$

۸۹- (۱)

$$\equiv 1 + 2^2 + 6 + 24^{24} + 120^{120} + \dots$$

$$\equiv 1 + 4 + 6 + 6 + 0 + 0 + \dots \equiv 17 \equiv 7$$

۹۰- (۴) گزینه 1 نادرست است زیرا اگر رقم یکان عدد، 2 باشد، باقیمانده اش بر 2، صفر می شود، گزینه 2 نیز نادرست است زیرا اگر رقم یکان عدد، 5 باشد، باقیمانده اش بر 5، صفر می شود، گزینه 3 نیز نادرست است زیرا اگر رقم یکان عدد، 3 باشد، باقیمانده اش بر 5، 3 میشود، لذا رقم یکان عدد مورد نظر 7 بوده است البته با کمی دقت می توان فهمید که عدد دو رقمی مورد نظر، 87 بوده است.

۹۱- (۲) یادآوری:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$7^{100} - 5^{100} = (7^2)^{50} - (5^2)^{50} = 49^{50} - 25^{50} = (49 - 25) \left(\frac{49^{50} - 25^{50}}{49 - 25} \right) = 24q$$

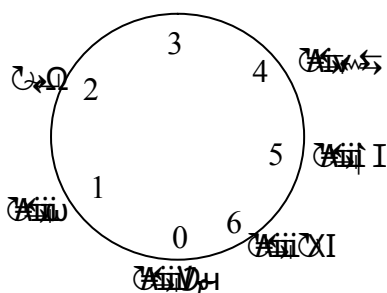
لذا $7^{100} - 5^{100}$ مضرب ۲۴ بوده و بنابراین بر آن بخشپذیر است.

$$(a + b)^n \equiv a^n + b^n \pmod{ab} \Rightarrow (a + b)^n - b^n \equiv 0 \pmod{ab} \quad (۹۲-۴)$$

$$\begin{cases} 89 \equiv 1 \pmod{89} \\ (a, 89) = 1 \end{cases} \xrightarrow{D=1, C=1} a^{89} \equiv 1 \pmod{89} \Rightarrow 1^{89} + 2^{89} + \dots + 88^{89} + 1 \equiv 1 + 1 + \dots + 1 + 1 + 1 = 89 \equiv 0 \pmod{89} \quad (۹۳-۴)$$

۹۴- (۱) اگر روز معینی از سال، معلوم باشد که چه روزی است، برای پیدا کردن روزی از هفته که مربوط به تاریخ دیگری است، از همنهشتی به پیمانه ۷، استفاده می کنیم.

می دانیم ۲۷ اردیبهست روز سه شنبه است، لذا باقیمانده ۲۷ و ابر ۷ پیدا می کنیم تا معلوم شود، روز سه شنبه، با چه عددی به پیمانه ۷ همنهشت است، چون $27 \equiv 6 \pmod{7}$ ، سپس سه شنبه با عدد ۶ به پیمانه ۷ همنهشت است، لذا بقیه روزهای هفته را مطابق با دایره مقابلی، شمارنده گذاری می کنیم، با دقت در دایره فوق معلوم می شود که اولین شنبه ۳ اردیبهشت است، پس سومین شنبه ۱۷ اردیبهشت می باشد زیرا: $3 + 2 \times 7 = 17$



۹۵- (۱) ابتدا در روزها را از پنجم شهریور تا پنجم اسفند حساب می کنیم.

$$27 = 31 - 5 + 1 = \text{تعداد روزها از ۵ شهریور تا مهر}$$

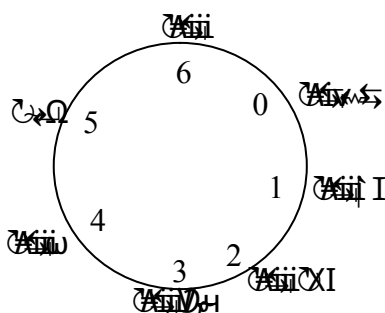
$$182 = 150 + 27 + 5 = 5 \times 30 = 150 \rightarrow \text{تعداد روزها از مهر تا اسفند}$$

$$5 = \text{تعداد روزها از اول اسفند تا پنجم اسفند}$$

حال معلوم می کنیم که ۱۸۲ به پیمانه ۷، با چه عددی همنهشت است: $182 \equiv 0 \pmod{7}$

اکنون توجه کنید که در نمودار مقابل روزدوشنبه یعنی پنجم شهریور را به عنوان مبدأ و مبنا در نظر گرفته و بنابراین روز دوشنبه را با عدد ۱ و بقیه روزها را به ترتیب با ۲ و ۳ و ... نشان داده ایم:

لذا با توجه به همنهشتی $182 \equiv 0 \pmod{7}$ ، معلوم میشود که پنجم اسفند روز یکشنبه است.



سوالات معادله ی سیاله

۱- چه تعداد تا از معادلات زیر در محاسبه Z دارد جواب هستند؟

(الف) $4x+5y=12x-y+9$ (ب) $3x-15y=8$ (ج) $\begin{cases} x+y=6 \\ 10x+5y=7 \end{cases}$ (د) $nx+(n+1)y=9$

(۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

۲- جواب معادله همنهشتی $1376x \equiv 721$ کدام است؟

(۱) $x=11k+3$ (۲) $x=11k+7$ (۳) $x=11k+8$ (۴) $x=11k+4$

۳- جواب معادله همنهشتی $17x^{12} + 5x^7 - 14x^{40} \equiv 6$ کدام است؟

(۱) $x=7k+1$ (۲) $x=7k+2$ (۳) $x=7k-1$ (۴) $x=7k-2$

۴- معادله سیاله خطی $7x+5y=130$ در مجموعه اعداد طبیعی، چند جواب دارد؟

(۱) 5 (۲) 4 (۳) 3 (۴) 2

۵- معادله همنهشتی $72x \equiv 15a$ ، به ازاء کدام مقداری، در Z دارای جواب است؟

(۱) 14 (۲) 32 (۳) 21 (۴) 25

۶- شرط اینکه معادله $ax \equiv b + km$ ، در Z دارای جواب باشد، کدام است؟

(۱) $(a,m)k$ (۲) $(a,b)m$ (۳) $(a,m)b$ (۴) $(a,b+k)m$

۷- ریشه معادله $x^{25} + x^5 + x \equiv 2$ ، کدام است؟

(۱) $x=5k+2$ (۲) $x=5k+1$ (۳) $x=5k+4$ (۴) جواب ندارد

۸- معادله $37x+101y=1000$ در مجموعه اعداد صحیح

(۱) جواب ندارد (۲) فقط دو جواب دارد (۳) فقط یک جواب دارد (۴) بی شمار جواب دارد

۹- جواب معادله همنهشتی $13x \equiv \sum_{n=2}^{100} n!$ کدام است؟

(۱) 7 (۲) 14 (۳) 13 (۴) 1

۱۰- هرگاه $9x+7y=1$ ، در این صورت $x+y$ کدام است؟ $(x,y \in Z)$

(۱) $x+y=10k+1$ (۲) $x+y=5k+14$ (۳) $x+y=2k+10$ (۴) $x+y=9k$

۱۱- اگر معادله $ax + a^2y = bc$ در Z دارای جواب باشد و $ma+nb=1$ ، در این صورت کدام گزینه درست

است؟ $(m,n \in Z, a \in N)$

(۱) $\alpha = ck$ (۲) $c=ak$ (۳) $b=ak$ (۴) $(a,c)=1$

۱۲- اگر $(r,s)=1$ ، معادله سیاله $(r+s)x+(r-s)y=10$ ، همواره در Z :

(۱) دارای جواب است (۲) جواب ندارد (۳) فقط ۱ جواب دارد (۴) فقط ۲ جواب دارد

۱۳- معادله همنهشتی $6x \equiv 2a + 5 \pmod{9}$ در مجموعه اعداد صحیح دارای جواب است، در این صورت، نمایش a برحسب متغیر $k \in \mathbb{Z}$ ، کدام است؟

(۱) $2k+1$ (۲) $3k+2$ (۳) $3k+1$ (۴) $2k$

۱۴- هرگاه x, y دو عدد صحیح بوده که در رابطه $7x-15y=19$ صدق کنند و $(x, y) \neq 1$ ، در این صورت (x, y) کدام است؟

(۱) ۷ (۲) ۵ (۳) ۱۹ (۴) ۱۲

۱۵- به ازاء کدام عدد طبیعی n ، معادله خطی $24x+39y=2n-1$ در مجموعه $\mathbb{Z}$ دارای جواب است؟

(۱) ۲۸ (۲) ۳۳ (۳) ۳۷ (۴) ۴۱

۱۶- هرگاه a یک رقم از ۱ تا ۹ باشد و $(cab)^{1381} \equiv 3 \pmod{10}$ ، در این صورت معادله سیاله $ax+by=7$ ، به ازاء چند مقدار a جواب ندارد؟

(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) بی شمار

۱۷- اعداد صحیح a, b در معادله $15a+23b=12$ صدق می کنند، باقیمانده تقسیم عدد b بر عدد ۱۵ کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۹

۱۸- در معادله $m(x+y)+y=15$ ، مجموعه جواب، برای پارامتر m ، مجموعه جواب، برای پارامتر m کدام باشد، تا معادله در $\mathbb{Z}$ دارای جواب باشد؟

(۱) $\mathbb{Z}$ (۲) $\{1, 35, 15\}$ (۳) $\{1, -1\}$ (۴) $\emptyset$

۱۹- تعداد حالتی که می توان با ۲۵ تومان، تمبرهای ۲ تومانی و ۵ تومانی خرید به طوری که از هر دو تمبر خریداری شود، کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۱

پاسخ تستهای معادله ی سیاله

۱- (۱) در Z جواب ندارد

$$(الف) \Rightarrow 4x + 5y = 12x - y + 9 \Rightarrow -8x + 6y = 9 \Rightarrow (-8, 6) = 2 \times 9$$

در Z جواب ندارد

$$(ب) \Rightarrow 3x - 15y = 8 \Rightarrow (3, -15) = 3 \times 8$$

(ج) معادله ی دومی اش جواب ندارد

$$(د) nx + (n+1)y = 9 \Rightarrow (n, n+1) = 1|9 \Rightarrow \text{ب.م.م دو عدد متوالی}$$

در Z جواب دارد

$$\begin{cases} 1379 \equiv 4 \\ 721 \equiv 6 \end{cases}$$

۲- (۲) می دانیم:

$$\Rightarrow 1379x \equiv 721 \Rightarrow 4x \equiv 6 \Rightarrow 2x \equiv 3 \equiv 14 \Rightarrow 2x \equiv 14 \Rightarrow x \equiv 7 \Rightarrow x = 11k + 7$$

بنابراین داریم:

۳- (۲) واضح است که x مضرب 7 نیست (زیرا در این صورت داریم: $0 + 0 - 0 \equiv 6$ که نادرست است)

$$\Rightarrow 7 \times x \Rightarrow (x, 7) = 1 \Rightarrow x^6 \equiv 1 \Rightarrow$$

$$17x^{12} + 5x^7 - 14x^{40} \equiv 6 \quad 14 \equiv 0.17 \equiv 3$$

$$3(x^6)^2 + 5(x^6) - 0(x^{40}) \equiv 6 \Rightarrow 3 + 5x^7 \equiv 6 \Rightarrow 5x^7 \equiv 3$$

$$-2x^7 \equiv -4 \Rightarrow x^7 \equiv 2 \Rightarrow x = 7k + 2$$

$$\begin{cases} 7x + 5y = 130 \\ 5|130 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + \frac{kb}{d} = 5k > 0 \\ y = y_0 - \frac{ka}{d} = 26 - 7k > 0 \end{cases}$$

۴- (۳)

$$\Rightarrow 0 < k \frac{26}{7} \Rightarrow 1, 2, 3 \Rightarrow$$

برای x و y، سه جواب طبیعی وجود دارد

$$72x \equiv 15x \Rightarrow (72, 9) | 15a \Rightarrow 9 | 15a \Rightarrow 3^2 | 3 \times 5 \times a \Rightarrow 3 | 5a \Rightarrow a = 21$$

۵- (۳)

تنها عددی در گزینه ها که مضرب 3، عدد 21 است

$$\begin{cases} ax \equiv b + km \\ km = m \equiv 0 \end{cases} \Rightarrow ax \equiv b + 0 \Rightarrow ax \equiv b \Rightarrow (a, m) | b$$

۶- (۳)

$$\xrightarrow{\text{DVR}} x^5 \equiv x \Rightarrow (x^5)^5 \equiv x^5 \Rightarrow {}^{25}x^5 \equiv x^5 \Rightarrow x$$

۷- (۳)

$$x^{25} + x^5 + x \equiv 2 \Rightarrow x + x + x^5 \equiv 2 \Rightarrow 2 \equiv -3$$

$$3x \equiv -3 \xrightarrow{+3} x \equiv -1 \equiv 4 \Rightarrow x = 5k + 4$$

$$37x + 101y = 1000 \Rightarrow (37, 101) = 1 \mid 1000$$

-۸ (۴)

پس معادله در Z بی شمار جواب دارد.

$$x \geq 5 \Rightarrow 5! \equiv 0$$

-۹ (۲)

$$13x \equiv 2! + 3! + 4! + 5! + 6! + \dots + \dots! \Rightarrow 13x \equiv 2 + 6 + 24 + 0 + 0 + \dots + 0$$

$$13x \equiv 32 \equiv 2 \Rightarrow -2x \equiv 2 \Rightarrow x \equiv -1 \Rightarrow x = 15k - 1 \Rightarrow x = 14$$

-۱۰ (۲) ابتدا یک جواب معادله را حدس می زنیم:

$$9x + 7y = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 4 \\ y_0 = -5 \end{cases} \Rightarrow x_0 + y_0 = -1 \equiv 15$$

اگر در گزینه ۲ به جای k ، -3 قرار دهیم، $x+y=-1$ می شود از طرفی:

$$x + y = 5k + 15 - 1 = 5k + 15 - 1 = 5k' - 1$$

$$\begin{cases} ax + a^2y = bc \Rightarrow (a, a^2) = a \mid bc \\ ma + nb = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{سم اقلیدوس}} (a, b) = 1 \xrightarrow{\text{سم اقلیدوس}} a \mid c \Rightarrow c = ak$$

-۱۱ (۲)

$$(r, s) = 1 \Rightarrow (r-s, r+s) = 1 \text{ یا } 2$$

-۱۲ (۱) نکته:

$$(r+s)x + (r-s)y = 10 \Rightarrow (r+s, r-s) \mid 10 \Rightarrow 1 \text{ یا } 2 \mid 10$$

$$(6, 9) \mid 2a + 5 \Rightarrow 3 \mid 2a + 5 \Rightarrow 2a + 5 = 3q$$

-۱۳ (۲)

تنها گزینه ای که در این تساوی صدق می کند گزینه (۲) است، دقت کنید:

$$a = 3k + 2 = 2 \Rightarrow 2\alpha + 5 = 6k + 4 + 56k + 9 = 3q$$

$$(x, y) = d \Rightarrow \begin{cases} d \mid x \\ d \mid y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid 7x \\ d \mid 5y \end{cases} \Rightarrow \frac{d \mid 7x - 15y}{d \mid 7x - 15y} \Rightarrow d \mid 19 \Rightarrow \begin{cases} d = 1 \text{ غ ق} \\ d = 19 \end{cases}$$

-۱۴ (۳)

-۱۵ (۴)

با جایگذاری گزینه ها به جای n دیده می شود که گزینه ۴ صحیح است $(24, 39) \mid 2n - 1 \Rightarrow 3 \mid 2n - 1$

$$\begin{cases} \overline{cab}^{1381} \equiv 3 \\ \overline{cab}^{1381} \equiv b \end{cases} \Rightarrow \overline{cab}^{10} \equiv 3 \Rightarrow b \equiv 3 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow ax + 3y = 7 \Rightarrow (a, 3) \mid 7 \Rightarrow a \neq 3, 6, 9$$

-۱۶ (۲)

$$15a + 23b = 12 \Rightarrow 15 \mid 23b - 12 \Rightarrow \begin{cases} 23b \equiv 12 \\ 23 \equiv 8 \end{cases}$$

-۱۷ (۴)

$$8v \equiv 12 \xrightarrow{+4} 2b \equiv 18 \xrightarrow{+2} b \equiv 9 = 15 \text{ بر باقیمانده } b$$

$$m(x + y) + y = 15 \Rightarrow mx + (m + 1)y = 15$$

-۱۸ (۱)

معادله به ازاء هر مقدار $m \in Z$ در Z جواب دارد. $(m, m+1) = 1, 1 \mid 15 \Rightarrow$

۱۹- (۲) فرض می کنیم y, x به ترتیب تعداد تمبرهای 2 تومانی و 5 تومانی باشند لذا باید داشته باشیم:

$$2x+5y=25$$

$$5 \mid 15 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + \frac{kb}{d} = 5k > 0 \\ y = y_0 - \frac{ka}{d} = 5 - 2k > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < k \frac{5}{2} \Rightarrow k = 1 \text{ یا } 2$$

$$\begin{cases} k=1 \Rightarrow (x, y) = (5, 3) \\ k=2 \Rightarrow (x, y) = (0, 1) \end{cases}$$

لذا 1 برای x و y دو جواب طبیعی وجود دارد که عبارتند از

تستهای نظریه ی اعداد (تست های کنکور سراسری و آزاد از ۷۹ تا ۸۵)

۱- اگر به حاصلضرب تمام اعداد اول کوچکتر از 100 یک واحد افزوده شود، تعداد مقسوم علیه های غیر از ۱ و کمتر از 100 عدد حاصل کدام است؟ (سراسری-۷۹)

- 0(۱) 1(۲) 2(۳) 3(۴)

۲- رابطه ای همنشستی، مجموعه Z را به 15 کلاس هم ارزی افراز کرده است و عدد سه رقمی $\overline{6a4}$ در کلاس هم ارزی [9] قرار دارد، تعداد جوابهای a کدام است؟ (سراسری-۷۹)

- 5(۱) 4(۲) 3(۳) 2(۴)

۳- باقیمانده تقسیم عدد a بر 12 و 15 و 32 به ترتیب برابر 5 و 8 و 125 است، مجموع ارقام کوچکترین عدد a کدام است؟ (سراسری-۷۹)

- 12(۱) 13(۲) 14(۳) 15(۴)

۴- از رابطه همنشستی (پیمانه 30) $15a \equiv 20b$ ، کدام نتیجه گیری نادرست است؟ (سراسری-۷۹)

- (۱) $3a \equiv 4b$ (پیمانه 30) (۲) $3a \equiv 4b$ (پیمانه 6)

- (۳) $b \equiv 0$ (پیمانه 3) (۴) $a \equiv 0$ (پیمانه 6)

۵- اگر اعداد صحیح n و m وجود داشته باشند، به طوری که $105n + am = 1$ و $a < 105$ ، چند عدد طبیعی برای a می توان یافت؟ (سراسری نظام جدید-۷۹)

- 45(۱) 47(۲) 52(۳) 48(۴)

۶- اگر $a = 5k + 3$ باشد، باقیمانده تقسیم $a^4 + a^3 + a^2 + a$ بر 5 برابر است با: (آزاد-۷۹)

- 1(۱) 2(۲) 3(۳) 0(۴)

۷- بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد a و $ab+1$ کدام است؟ (a و b مثبت) (آزاد-۷۹)

- a (۱) 1(۲) b (۳) $a+1$ (۴)

۸- بزرگترین رقم یکان برای عدد $2^{n+5} + 3^{n+5}$ به ازاء $???$ مختلف n برابر است با: (آزاد-۷۹) ($n \in N$)

- 7(۱) 3(۲) 5(۳) 9(۴)

۹- اگر $x + x^2 \equiv 2 \pmod{4}$ ، کدام گزینه، یکی از جوابهای معادله است؟ (آزاد-۷۹)

- 4k-1 (۱) 4k+3(۲) 4k-2(۳) 4k(۴)

۱۰- عدد شش رقمی $5a7b24$ بر عدد 44 بخش پذیر است، باقیمانده تقسیم آن دو عدد بر 9 کدام است؟ (سراسری - ۸۰)

۱(۱) $2(۲)$ $3(۳)$ $4(۴)$

۱۱- اگر عدد طبیعی n مضرب 7 نباشد، بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو $n+7, n^2+9n+21$ کدام است؟ (سراسری - ۸۰)

1(۱) $1,3(۲)$ $1,5(۳)$ $7(۴)$

۱۲- معادله سیاله خطی $15x+14y=1050$ در مجموعه اعداد طبیعی چند جواب دارد؟ (سراسری - ۸۰)

2(۱) $3(۲)$ $4(۳)$ $5(۴)$

۱۳- اگر حاصلضرب اعداد اول بین 100 و 200 را با عدد یک جمع کنیم.... (آزاد - ۸۰)

(۱) این عدد یک عامل اول بین 100 و 200 دارد (۲) این عدد به صورت 2^n است.

(۳) این عدد یک عامل اول کوچکتر از 100 دارد (۴) هیچکدام

۱۴- معادله $4x^2 - 16y^2 = 16$ دارای جوابهای صحیح x_1, y_1 ، حاصل $x_1^2 + y_1^2$ چقدر است؟ (آزاد - ۸۰)

4(۱) $16(۲)$ $1(۳)$ (۴) قابل محاسبه نیست

۱۵- باقیمانده تقسیم عدد $(1+2+\dots+1380)^{1380}$ بر 1380 چقدر است؟ (آزاد - ۸۰)

690(۱) $0(۲)$ $1(۳)$ $691(۴)$

۱۶- اگر هر سه عدد x و y و z مضرب 6 باشند، باقیمانده $x^3 + y^3 + z^3$ بر 72 کدام است؟ (آزاد - ۸۰)

0(۱) $2(۲)$ فقط 3 (۳) فقط 2 یا 4 (۴)

۱۷- رقم یکان عدد $(1379)^{1379!} + (1378)^{1378!}$ کدام است؟ (آزاد - ۸۰)

1(۱) $9(۲)$ $5(۳)$ $7(۴)$

۱۸- معادله همنشستی $4x \equiv 2 \pmod{6}$ با کدام معادله، جوابهای یکسان دارد؟ (آزاد - ۸۰)

(۱) $2x \equiv 1 \pmod{3}$ (۲) $2x \equiv 1 \pmod{6}$ (۳) $(4x)^2 \equiv 4 \pmod{36}$ (۴) $4x \times 6 \equiv 2 \times 6 \pmod{6}$

۱۹- چند عدد طبیعی برای b در مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ وجود دارد که معادله سیاله $24x + b^2y = 4$ جوابهای صحیح داشته باشد؟ (آزاد - ۸۰)

58(۱) $50(۲)$ $42(۳)$ $40(۴)$

۲۰- اگر $k!$ کوچکترین عدد صحیح به صورت فاکتوریل باشد که بر 3^{20} بخشپذیر است، در سمت راست $k!$ چند صفر وجود دارد؟ (آزاد - ۸۰)

15(۱) $9(۲)$ $20(۳)$ $10(۴)$

۲۱- در اصل استقراری تعمیم یافته، برای حکم: $m \geq n \Rightarrow (n+1)! \leq 4^n$ ، عدد طبیعی مناسب m کدام است؟ (سراسری - ۸۱)

4(۱) $5(۲)$ $6(۳)$ $7(۴)$

۲۲- در همنشستی به پیمانه m ، سه عدد a و 41 و 132 در یک کلاس هم ارزی قرار دارند، کوچکترین عدد سه رقمی a به طوری که مجموعه Z به تعداد کمتری کلاس هم ارزی افزا شود، کدام است؟ (سراسری - ۸۱)

102(۱) $103(۲)$ $104(۳)$ $106(۴)$

۲۳- عدد $7^5 + a$ مضرب 17 است، کوچکترین عدد طبیعی a کدام است؟ (سراسری - ۸۱)

5(۱)

10(۲)

11(۳)

12(۴)

۲۴- اگر دو عدد a و 90 نسبت به هم اول باشند، بزرگترین عددی که همواره $a^4 - 1$ را می شمارد، کدام است؟ (سراسری - ۸۱)

240(۱)

288(۲)

324(۳)

480(۴)

۲۵- کمترین تعداد تمبر لازم برای بسته ای که نیاز به ۸۵۰ ریال تمبر دارد، تمبرهای ۹۰ و ۵۰ ریالی کدام است؟ (سراسری - ۸۱)

11(۱)

12(۲)

13(۳)

14(۴)

۲۶- باقیمانده تقسیم $(a+1396)^6 + \dots + (a+1382)^2 + (a+1381)^3$ بر ۶ کدام است؟ (آزاد - ۸۱)

(۱) به a بستگی دارد

1(۲)

۳(۳) صفر

3(۴)

۲۷- اگر $d \neq 1$ بزرگترین مقسوم علیه مشترک D و کوچکترین مضرب مشترک دو عدد a و b باشند و رابطه $d+ab=4$ برقرار باشد، آنگاه: (آزاد - ۸۱)

D=4,7(۱)

D=35(۲)

D=70(۳)

D=14(۴)

۲۸- دو رقم سمت راست عدد $2!+4!+\dots+1382!$ کدام است؟ (آزاد - ۸۱)

84(۱)

66(۲)

64(۳)

86(۴)

۲۹- عدد $\overline{1ab562}$ بر ۹۹ بخشپذیر است، باقیمانده ی قسیم این عدد بر ۲۲ کدام است؟ (آزاد - ۸۱)

62(۱)

۲(۲) صفر

74(۳)

120(۴)

۳۰- معادله سیاله خطبی $7x+21y=28$ چند جواب صحیح در بازه $-20 < x, y < 20$ دارد؟ (آزاد - ۸۱)

15(۱)

9(۲)

11(۳)

13(۴)

۳۱- باقیمانده تقسیم عددی بر ۴ و ۶ برابر ۳ است، باقیمانده تقسیم a بر ۱۲ کدام است؟ (آزاد - ۸۱)

(۱) صفر

3(۲)

1(۳)

9(۴)

۳۲- اگر $a=4k+1$ باشد باقیمانده تقسیم $(a+4)^{1381} + (a+3)^{1381} + (a+2)^{1381}$ بر ۸ چقدر است؟ (آزاد - ۸۱)

(۱) صفر

3(۲)

2(۳)

1(۴)

۳۳- اگر $d \neq 1$ بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد a و b و $\frac{ab}{d} = 1800$ با شش اول باد، $(d,6)=1$ ، آنگاه

ماکزیم $a+b$ کدام است؟ (آزاد - ۸۱)

1805(۱)

1825(۲)

365(۳)

1801(۴)

۳۴- رقم سمت راست عدد $(2!+4!+\dots+1380!)+(1!+3!+5!+\dots+1381!)$ چقدر است؟ (آزاد - ۸۱)

(۱) صفر

4(۲)

6(۳)

3(۴)

۳۵- باقیمانده عددی 3^{48} بر ۱۱ کدام است؟ (سراسری - ۸۲)

5(۱)

6(۲)

7(۳)

8(۴)

۳۶- اگر $(abc)_7 = (cba)_8$ ، رقم a کدام است؟ (سراسری - ۸۲)

3(۱)

4(۲)

5(۳)

6(۴)

۳۷- اگر (به پیمانه m) $a^2 - 1 \equiv a^3 - a^2 - a + 1 \equiv (a^2 - 1, m) = 1$ ، آنگاه: (سراسری - ۸۲)

m|a-2(۱)

m|a-1(۲)

m|a+1(۳)

m|a+2(۴)

۳۸- باقیمانده تقسیم $6^{1382} + 7^{1382}$ بر ۴۲ کدام است؟ (آزاد - ۸۲)

6(۱)

7(۲)

13(۳)

1(۴)

۳۹- اگر d بزرگترین مقسوم علیه مشترک و M کوچکترین مضرب مشترک دو عدد a و b باشند و $M^2 - d^2 = 27$ ، حاصلضرب ab کدام است؟ (آزاد- ۸۲)

18(۱)

27(۲)

36(۳)

45(۴)

۴۰- اگر $A = 2! + 3! + \dots + 1381$ و $B = 3! + 4! + \dots + 1382$ باشد، رقم یکان عدد $(B - A)^{A+B}$ چقدر است؟ (آزاد- ۸۲)

4(۱)

2(۲)

8(۳)

6(۴)

۴۱- اگر معادله سیاله $ax + 6y = 1$ جواب صحیح نداشته باشد، کدام معادله قطعاً جواب صحیح دارد؟ (آزاد- ۸۲)

(۱) $(a+1)x + 6y = 1$ (۲) $(2a+1)x + 6y = 1$ (۳) $(3a+1)x + 6y = 1$ (۴) $(6a+1)x + 6y = 1$

۴۲- اگر باقیمانده تقسیم عدد فرد a بر 2 و 4 و 8 یکسان باشد، باقیمانده ی تقسیم عدد $a^2 + 6$ بر 2 و 4 و 8 به ترتیب کدام است؟ (آزاد- ۸۲)

1,1,1(۱)

7,3,1(۲)

5,3,1(۳)

(۴) صفر و صفر و صفر

۴۳- عدد $(211\ 211\ 03)$ در مبنای 16 به صورت $(\overline{mnpq})_{16}$ نوشته شده بزرگترین رقم کدام است؟ (آزاد- ۸۲)

q(۱)

p(۲)

n(۳)

m(۴)

۴۴- اگر a مضرب 7 باشد، باقیمانده تقسیم $(a + 1381)^3 + (2a + 1382)^3 + \dots + (7a + 1387)^3$ بر 7 کدام است؟ (آزاد- ۸۲)

4(۱)

1(۲)

۳ صفر

6(۴)

۴۵- بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد a و b ($a > b$) برابر 3 و کوچکترین مضرب مشترک آنها 91 است، حاصل $a^2 - b^2$ چقدر است؟ (آزاد- ۸۲)

(۱) 48×169 (۲) 6×189 (۳) 6×13 (۴) $7^2 \times 13^2$

۴۶- عدد $(12110)_3$ در مبنای 9 به صورت $(\overline{abc})_9$ نوشته شد $a^2 + b^2 + c^2$ چقدر است؟ (آزاد ۸۲)

25(۱)

60(۲)

58(۳)

59(۴)

۴۷- به ازاء چند مقدار a از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 50\}$ معادله ی سیاله ی $ax + 18y = 3$ دارای جواب است؟ (آزاد- ۸۲)

22(۱)

25(۲)

18(۳)

27(۴)

۴۸- باقیمانده تقسیم a بر 8 برابر 7، است باقیمانده تقسیم $(2a+1)$ بر 4 کدام است؟ (آزاد- ۸۲)

1(۱)

2(۲)

3(۳)

(۴) صفر

۴۹- اگر $A = 1! + 2! + 3! + \dots + 1382!$ و $B = 2! + 3! + 4! + \dots + 1382!$ ، رقم یکان $A^B + B^A$ کدام است؟ (آزاد- ۸۲)

(۱) 7

(۲) 5

(۳) 1

(۴) 3

۵۰- عدد شش رقمی $\overline{a63b29}$ بر عدد ۹۹ بخش پذیر است، رقم a کدام است؟ (سراسری- ۸۳)

(۱) 3

(۲) 4

(۳) 5

(۴) 6

۵۱- دو عدد 24 و 185 در رابطه همنهشتی به پیمانه m در یک دسته هم ارزی قرار گرفته اند، اگر $(m, 7) = 1$ باقیمانده ی عدد m^m بر 7 کدام است؟ (سراسری- ۸۳)

(۱) 1

(۲) 3

(۳) 6

(۴) 4

۵۲- اگر $a^p = 10k + 7$ ، آنگاه رقم یکان عدد a^{p+4} کدام است؟ (سراسری- ۸۳)

1(۱)

3(۲)

6(۳)

3(۴)

۵۳- اگر عدد a مضرب 16 باشد، باقیمانده تقسیم

$$(17a+5)^4 + (17a+4)^4 + (17a+3)^4 + (17a+2)^4 + (17a+1)^4 \text{ بر چهار کدام است؟ (آزاد - ۸۳)}$$

1(۱)

۲(۲) صفر

1(۳)

3(۴)

۵۴- اگر دو عدد a و b نسبت به هم اول نباشند و بین کوچکترین مضرب مشترک آنها (M) و بزرگترین مقسوم علیهمشترک آنها (d) رابطه $M=28d^0+3$ برقرار باشد، آنگاه: (آزاد - ۸۳)

a-b=28(۱)

a-b=87(۲)

a-b=93(۳)

a-b=84(۴)

۵۵- باقیمانده تقسیم عدد $2^{63} + 3^{66}$ بر 72 کدام است؟ (آزاد - ۸۳)

1(۱)

31(۲)

41(۳)

۴(۴) صفر

۵۶- باقیمانده عدد شش رقمی $\overline{358ab6}$ بر 99 برابر 11 است، $a+b$ کدام است؟ (آزاد - ۸۳)

4(۱)

14(۲)

2(۳)

16(۴)

۵۷- معادله $3x+6y=a^2+2$ ، به ازاء چند مقدار $a \in \{1,2,3,\dots,20\}$ جواب دارد؟ (آزاد - ۸۳)

13(۱)

7(۲)

14(۳)

6(۴)

۵۸- بزرگترین رقم یکان $k!+k^k$ ، به ازاء $k>100$ کدام است؟ (آزاد - ۸۳)

8(۱)

7(۲)

9(۳)

6(۴)

۵۹- اگر $a=8n+3$ و $n \in N$ باشد، باقیمانده $a+a^4+a^4+a^4$ بر شانزده کدام است؟ (آزاد - ۸۳)

6(۱)

12(۲)

4(۳)

8(۴)

۶۰- اگر کوچکترین مضرب مشترک دو عدد 0، 9 برابر بزرگترین مقسوم علیه مشترک آنها باشد، $(\frac{M}{d} = 90)$ ، نسبت

دو عدد، کدام نمی تواند باشد؟ (آزاد - ۸۳)

۲(۱) $\frac{2}{5}$ ۲(۲) $\frac{9}{10}$ ۳(۳) $\frac{2}{45}$ ۴(۴) $\frac{5}{18}$ ۶۱- باقیمانده تقسیم عدد a بر 2 و 3 و 5 به ترتیب 1 و 2 و عدد است، باقیمانده تقسیم عدد a بر 15 کدام است؟ (آزاد - ۸۳)

4(۱)

12(۲)

8(۳)

14(۴)

۶۲- مجموع باقیمانده های تقسیم عدد 736521 بر 8 و 9 و 11 چقدر است؟ (آزاد - ۸۳)

13(۱)

15(۲)

16(۳)

12(۴)

۶۳- معادله $9x+11y=1000$ چند زوج جواب در مجموعه اعداد طبیعی دارد؟ (آزاد - ۸۳)

9(۱)

10(۲)

11(۳)

12(۴)

۶۴- بزرگترین رقم یکان $k^{60} + k(k+1)(k+2)\dots(k+6)$ به ازاء $k>1000$ کدام است؟ (آزاد - ۸۳)

6(۱)

7(۲)

8(۳)

9(۴)

۶۵- در تقسیم عدد طبیعی a بر 37، باقیمانده تقسیم از مربع خارج قسمت آن، 2 واحد کمتر است، بزرگترین مقدار α ،

مضرب کدام عدد اس؟ (سراسری - ۸۴)

9(۱)

12(۲)

14(۳)

16(۴)

۶۶- در نمایش عدد طبیعی 67 در مبنای 3، رقم صفر چند مرتبه تکرار شده است؟ (سراسری - ۸۴)

1(۱)

2(۲)

3(۳)

۴(۴) فاقد رقم 0

۶۷- باقیمانده تقسیم عدد $2^{42} - 3^{42}$ بر عدد 35 کدام است؟ (سراسری - ۸۴)

0(۱) 1(۲) 5(۳) 6(۴)

۶۸- چند عدد به صورت $12x3y$ وجود دارد که بر 44 بخشپذیر باشند؟ (آزاد - ۸۴)

4(۱) 1(۲) 3(۳) 2(۴)

۶۹- اگر حاصلضرب سه عدد طبیعی x و y و z زوج باشد، باقیمانده تقسیم $x^2 + y^2 + z^2$ بر چهار کدام عدد نمی تواند باشد؟ (آزاد - ۸۴)

1(۱) صفر 1(۲) 2(۳) 3(۴)

۷۰- باقیمانده تقسیم 3^{1000} بر 56 کدام است؟ (آزاد - ۸۴)

3(۱) 33(۲) 25(۳) 23(۴)

۷۱- اگر $M=9d+11$ و $d \neq 1$ (d بزرگترین مقسوم علیه مشترک و m کوچکترین مضرب مشترک) آنگاه مجموع دو عدد کدام است؟ (آزاد - ۸۴)

50(۱) 165(۲) 33(۳) 66(۴)

۷۲- اگر عدد A در مبنای دو به صورت (10101) باشد، 33A در مبنای دو چند صفر دارد؟ (آزاد - ۸۴)

3(۱) 4(۲) 5(۳) 8(۴)

۷۳- بزرگترین رقم یکان $(1382)^n + (1382)^{n-1} + \dots + (1382)^2 + (1382)$ ، به ازاء مقادیر مختلف n، کدام است؟ (آزاد - ۸۴)

6(۱) 2(۲) 4(۳) 8(۴)

۷۴- مجموع ارقام بزرگترین عدد به صورت $34xy5$ که بر ۳۳ بخشپذیر باشد، کدام است؟ (آزاد - ۸۴)

29(۱) 27(۲) 21(۳) 24(۴)

۷۵- باقیمانده تقسیم $(a+1384)^3 + (a+1383)^3 + (a+1382)^3 + (a+1381)^3$ بر 6، کدام عدد، نمی توان باشد؟ (آزاد - ۸۴)

1(۱) صفر 2(۲) 3(۳) 4(۴)

۷۶- باقیمانده $5^{100} + 3^{100} + 2^{100}$ بر 30 کدام است؟ (آزاد - ۸۴)

1(۱) صفر 2(۲) 28(۳) 4(۴)

۷۷- کوچکترین مضرب مشترک دو عدد a و b از رابطه $M=5a+14$ به دست می آید بیشترین مقدار تفاضل دو عدد کدام است؟ (آزاد - ۸۴)

70(۱) 42(۲) 22(۳) 63(۴)

۷۸- اگر عدد A در مبنای 4 به صورت $\overline{ab32}$ و در مبنای 8 به صورت $\overline{13c}$ باشد، $a+b+c$ ، کدام است؟ (آزاد - ۸۴)

6(۱) 7(۲) 8(۳) 9(۴)

۷۹- رقم یکان $(1383)^{1383!} + (1383)^{3!} + (1383)^{1!} + (1383)^{0!}$ ، کدام است؟ (آزاد - ۸۴)

1(۱) صفر 2(۲) 7(۳) 5(۴)

پاسخ تستهای نظریه ی اعداد (تست های کنکور سراسری و آزاد از ۷۹ تا ۸۵)

۱- (۲) نکته: اگر به حاصلضرب نام اعداد اول کوچکتر از N ، یک واحد اضافه کنیم، عدد حاصل یا اول است یا مقسوم علیه اولی بزرگتر از N دارد لذا داریم:

$$N = (2 \times 3 \times \dots \times 97) + 1$$

این بدان معناست که باقیمانده تقسیم N بر تمام ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۹، ۳۱، ۳۷، ۴۱، ۴۳، ۴۷، ۵۳، ۵۹، ۶۷، ۷۱، ۷۳، ۷۹، ۸۳، ۸۹، ۹۷، ۹۹ برابر است و لذا مقسوم علیه اول کمتر از ۱۰۰ ندارد.

۲- (۳) چون رابطه ی همنشستی مجموعه Z را به 13^3 کلاس هم ارزی افزان کرده است، لذا کلاس هم ارزی [۹] شامل اعدادی است که در تقسیم بر ۱۵ باقیمانده ۹ دارد، بنابراین داریم:

$$\overline{6a4}^{15} \equiv 9 \Rightarrow 4 + 10a + 600 \equiv 9 \Rightarrow 4 + 10\alpha + 0 + 0 \equiv 9$$

$$\overline{10a}^{15} \equiv 5 \xrightarrow{\div 5} \overline{2a}^3 \equiv 1 \equiv 4 \xrightarrow{\div 2} \alpha = 3k + 2 \Rightarrow a = 2 \cdot 5 \cdot 8$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{600}^{15} \equiv 0 \\ \overline{2a}^3 \equiv \end{array} \right. \quad \text{نکته:}$$

$$\left. \begin{array}{l} a = 12q + 5 \Rightarrow \overline{a}^{12} \equiv 5 \Rightarrow a + 7 \equiv 0 \\ a = 15q' + 8 \Rightarrow \overline{a}^{15} \equiv 8 \Rightarrow a + 7 \equiv 0 \\ a = 32q'' + 25 \Rightarrow \overline{a}^{32} \equiv 25 \Rightarrow a + 7 \equiv 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a + 7 \equiv 0 \pmod{[12, 15, 32]}$$

۳- (۳)

$$\Rightarrow a + 7 \equiv 0 \pmod{480} \Rightarrow a + 7 = 480k \xrightarrow{k=1} a + 7 = 480 - 7 = 473 \equiv 14 \pmod{32} \quad \text{مجموع ارقام } = 4 + 7 + 3 = 14$$

۴- (۱) یادآوری:

$$ac \equiv bc \Rightarrow a \equiv b \pmod{d}$$

$$15a \equiv 20b \xrightarrow{\div 5} 3a \equiv 4b$$

۵- (۴) با توجه به اینکه معادله $105n + am = 1$ ، برای m و n جواب دارد، نتیجه میشود که باید $(105, a) = 1$ لذا کافی است؛ استفاده از تابع حسابی ؟؟؟، تعداد کل اعداد کوچکتر از 105 که نسبت به 105 اول است را به دست آوریم:

$$105 = 3 \times 5 \times 7 \Rightarrow q(105) = (3-1)(5-1)(7-1) = 48$$

$$q(pqr) = q(p) \times q(q) \times q(r) \quad \text{آنگاه:}$$

یادآوری: هرگاه p و q سه عدد اول متمایز باشند،

$$a = 5k + 3 \Rightarrow a \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow a^2 \equiv 3^2 \pmod{5} \Rightarrow a^3 \equiv 3^3 \pmod{5} \Rightarrow a^4 \equiv 3^4 \pmod{5} \Rightarrow a^5 \equiv 3^5 \pmod{5} \Rightarrow a^5 \equiv 1 \pmod{5}$$

۶- (۴)

$$\Rightarrow a^4 + a^3 + a^2 + a \equiv 1 + 2 + 4 + 3 \equiv 0 \pmod{5}$$

از جمع رابطه های فوق داریم:

$$(a \cdot ab + 1) = d \Rightarrow \begin{cases} d \mid ab + 1 \\ d \mid a \Rightarrow d \mid ab \end{cases} \Rightarrow \frac{d \mid ab + 1 - ab}{d \mid ab + 1 - ab} \Rightarrow d \mid 1 \Rightarrow d = 1 \quad \text{۷- (۲)}$$

۸- (۲) برای یافتن رقم یکان a ، باید به جای n باقیمانده آزاد بر 4 قرار دارد، البته اگر n بر 4 بخشپذیر بود، خود 4 را قرار دارد لذا اگر باقیمانده $n+5$ بر 4، 1 یا 2 یا 3 شود داریم:

$$R = 1 \Rightarrow 2^{n+2} + 3^{n+5} \equiv 2^1 + 3^1 = 5$$

$$R = 2 \Rightarrow 2^{n+5} + 3^{n+5} \equiv 2^2 + 3^2 = 13$$

$$R = 3 \Rightarrow 2^{n+5} + 3^{n+5} \equiv 2^3 + 3^3 = 35$$

و اگر باقیمانده $n+5$ بر 4 برابر 4 باشد آنگاه داریم:

$$k = 4 \Rightarrow 2^{n+5} + 3^{n+5} \equiv 2^4 + 3^4 = 16 + 81 = 97$$

لذا بزرگتر رقم یکان عدد $2^{n+5} + 3^{n+5}$ ، برابر ۷ است /

$$x + x^2 \equiv 2 \pmod{4} \Rightarrow x^2 + x - 2 \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow (x-1)(x+2) \equiv 0 \pmod{4}$$

۹- (۳) ←

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1 \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow x = 4k+1 \\ x+2 \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow x = 4k-2 \end{cases} \Rightarrow \text{نمی توانیم داشته باشیم}$$

راه دوم، اعداد 0، 1، 2، 3 را در معادله امتحان می کنیم که اگر $x=2$ باشد آنگاه:

$$2 + 2^2 \equiv 2 \pmod{4} \Rightarrow 6 \equiv 2 \pmod{4}$$

$$\Rightarrow x \equiv 2 \pmod{4} \Rightarrow x = 4k + 2$$

۱۰- (۱) عددی بر 44 بخش پذیر است که هم بر 11 و هم بر 4 بخشپذیر باشد، چون دو رقم سمت راست عدد 24 است، لذا عدد داده شده بر 4 بخشپذیر است، اما برای آنکه بر 11 بخشپذیر باشد باید داشته باشیم:

$$\begin{matrix} - & + & - & + & - & + \\ 5 & a & 7 & b & 2 & 4 \end{matrix} \Rightarrow 4 + b + a \equiv 2 + 7 + 5 \pmod{11} \Rightarrow a + b \equiv 10 \pmod{11} \Rightarrow a + b = 10$$

اکنون با توجه به اینکه عددی بر 9 بخشپذیر است که مجموع ارقامش بر 9 بخشپذیر باشد داریم:

$$\begin{matrix} & & 9 & & 9 & & 9 & & 9 \\ 5 & + & a & + & 7 & + & b & + & 2 & + & 4 & \equiv ? \end{matrix} \Rightarrow 18 + a + b \equiv ? \pmod{9} \Rightarrow a + b \equiv 10 \pmod{9} \Rightarrow a + b = 1$$

(۱۱) - (۱)

$$(n+9n+21, n+7) = d \Rightarrow \begin{cases} d \mid n^2 + 9n + 21 \\ d \mid n+7 \Rightarrow d \mid n^2 + 7n \\ \hline d \mid n^2 + 9n + 21 - n^2 - 7n \Rightarrow d \mid 2n + 2 \end{cases}$$

$$(n \quad d \mid 2n+21 \quad d \mid n+7 \Rightarrow \frac{d \mid 2n+4}{d \mid 7 \Rightarrow d=1} \quad 7 \xrightarrow{d \neq 7} d=1$$

(۱۲) - (۳)

$$15x+14y=1050$$

$$15 \mid 1050 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 70 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 70 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 - \frac{kb}{d} \\ y = y_0 + \frac{ka}{d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 70 - 14k > 0 \Rightarrow k < 5 \\ y = 15k > 0 \Rightarrow k > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < k < 5$$

لذا به جای اعداد 1، 2، 3، 4 را قرار می دهیم و برای x و y چهار جواب طبیعی به دست می آید.

۱۳- (۳) اعداد اول بین 100 و 200 همگی فرد هستند و حاصلضرب آنها نیز فرد است (زیرا حاصلضرب چند عدد فرد، چند عدد فرد، فرد می شود) لذا به حاصلضرب آنها، یک واحد اضافه کنیم، عدد حاصل زوج می شود و بر 2 بخشپذیر است، لذا عامل اولی (مانند 2) کوچکتر از 100 دارد.

(۱۴) - (۱)

$$4x^2 - 16y^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{یک جواب معادله} \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = 4$$

راه حل دوم: طرف اول رابطه را به حاصلضرب دو عدد و طرف دوم رابطه را نیز به حاصلضرب دو عدد تجزیه می کنیم. چون غیر صحیح است، غیر قابل قبول است.

$$(x-2y)(x+2y) = 1 \times 4 = 2 \times 2 \Rightarrow \begin{cases} x-2y=1 \\ x+2y=4 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$\begin{cases} x-2y=2 \\ x+2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = 4 + 0 = 4$$

$$A = 1 + 2 + 3 + \dots + 1380 = \frac{1380 \times 1381}{2} = 690 \times 1381 \quad (۱۵) - (۲)$$

$$1381 \equiv 1 \Rightarrow A \equiv 690 \times 1 \Rightarrow A^2 \equiv 690^2$$

$$\Rightarrow A^2 \equiv 690^2 \times 2 \times 345 \Rightarrow A^2 \equiv 0 \xrightarrow{690 \text{ تانبد}} A^{1380} \equiv 0$$

(۱۶) - (۱)

$$\begin{cases} x = 6k_1 \\ y = 6k_2 \\ z = 6k_3 \end{cases} \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 216(k_1^3 + k_2^3 + k_3^3) \stackrel{72}{=} 3 \times 72k \stackrel{72}{=} 0$$

۱۷- (۴) با استفاده از قضیه نیوتن کافی است باقیمانده توان هر یک بر 4 را به دست آورده و به جای آن باقیمانده اش بر 4 را قرار دهیم و سپس رقم یکان عدد را بیابیم، اما هر دو عدد 1378! و 1379! بر 4 بخشپذیرند، لذا باقیمانده هر دو بر 4، صفر است، در این حالت طبق قضیه نیوتن، کافی است.

$$(1378)^4 + (1379)^4 \stackrel{10}{=} 8^4 + 9^4 \stackrel{10}{=} 4 + 9 \stackrel{10}{=} 6 + 1 \stackrel{10}{=} 7$$

توان چهارم دو عدد را در قطر بگیریم:

$$9 \stackrel{10}{\equiv} 1 \text{ و } 4 \stackrel{10}{\equiv} 6$$

یادآوری:

$$4x \stackrel{6}{\equiv} 2 \xrightarrow{+2} 2x \stackrel{3}{\equiv} 1, (4, 6) = 2 \quad (۱) - ۱۸$$

۱۹- (۱) می دانیم مقسود علیه های 24 عبارتند از 1، 2، 3، 4، 6، 8، 12، 24، اگر $b=3$ باشد آنگاه $b^2 = 9$ ، لذا $(24, 9) = 3 \times 4$ و اگر $b=4$ باشد آنگاه $b^2 = 16$ و $(24, 16) = 8 \times 4$ بنابراین b نباید مضرب 3 یا 4 باشد، لذا طبق اصل شمول و عدم شمول، مضارب 3 یا 4 را پیدا می کنیم و آنها از عدد 100 کم می کنیم.

$$|A \cup B| = \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor = 50$$

$$N = 100 - 50 = 50$$

۲۰- (۴)، عدد 45! اولین عددی است که بیست تا عامل 3 دارد، توجه کنید:

$$45! = \left\lfloor \frac{45}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{45}{3^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{45}{3^3} \right\rfloor + \dots = 15 + 5 + 1 + \dots = 20$$

پس $k=20$ است، اکنون برای یافتن تعداد صفرهای سمت راست عدد 45!، کفایت تعداد عاملهای 5 را در 45! بشماریم

$$45! = \left\lfloor \frac{45}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{45}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{45}{5^3} \right\rfloor + \dots = 9 + 1 = 10$$

(۳) - ۲۱

$$\begin{cases} n=1 \Rightarrow 4 < 2! \text{ نادرست} \\ n=2 \Rightarrow 16 < 3! \text{ نادرست} \\ n=3 \Rightarrow 64 < 4! \text{ نادرست} \end{cases} \quad \begin{cases} n=4 \Rightarrow 256 < 5! \text{ نادرست} \\ n=5 \Rightarrow 1024 < 6! = 720 \text{ نادرست} \\ n=6 \Rightarrow 4096 < 7! = 5040 \text{ درست} \end{cases} \Rightarrow m=6$$

۲۲- (۳) یادآوری: تعداد کلاسهای هم ارزی در همنشستی به پیمانه m برابر m است.

$$\left. \begin{matrix} a \equiv b \pmod{m} \\ \text{هرگاه } a \text{ و } b \text{ متعلق به یک کلاس همنشستی باشند، آنگاه} \end{matrix} \right\}$$

چون سه عدد a و 41 و 132 در یک کلاس هم ارزی قرار دارند لذا دوم دو باهم به پیمانه m همنشستند.

$$132 \stackrel{m}{\equiv} 41 \Rightarrow m | 91 \Rightarrow \begin{cases} m=7 \\ m=13 \end{cases} \text{ یا}$$

بالاخص:

اما برای آنکه تعداد و کلاسهای هم ارزی کم باشد، باید m کوچکترین مقدار ممکن را داشته باشد، یعنی: $m=7$

$$a \stackrel{m}{\equiv} 41 \xrightarrow{m=7} a \stackrel{7}{\equiv} 41 \stackrel{m}{\equiv} 6 \Rightarrow a \stackrel{m}{\equiv} 6 \Rightarrow a = 7k + 6 \xrightarrow{k=13} \min(a) = 104$$

$$7^{15} \stackrel{17}{\equiv} 5 \Rightarrow 7^{16} \stackrel{17}{\equiv} 35 \Rightarrow 7^{17} \stackrel{17}{\equiv} 1 \Rightarrow \text{طبق قضیه فرما} \quad (۴) - ۲۳$$

$$7^{15} + a \equiv 5 + a \pmod{17} \Rightarrow 5 + a \equiv 0 \pmod{17} \Rightarrow a = 12$$

کمترین مقدار a :

$$(a, 90) = 1, \quad 90 = 2 \times 3^2 \times 5 \Rightarrow (a, 2) = 1, (a, 3) = 1, (a, 5) = 1$$

(۲) - ۲۴

$$(a, 2) = 1 \Rightarrow a \text{ فرد است} \Rightarrow a^2 = 8k + 1 \Rightarrow a^4 = 16k' + 1 \Rightarrow a^4 - 1 = 16$$

$$(a, 3) = 1 \quad a^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow a^4 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow a^4 - 1 = 3 \text{ مضرب}$$

$$(a, 5) = 1 \quad a^2 \equiv 1 \pmod{5} \quad a^4 - 1 = 5 \text{ مضرب}$$

$$(3, 5) = (5, 16) = (3, 16) = 1 \Rightarrow 5 \times 3 \times 16 \mid a^4 - 1 \Rightarrow 240 \mid a^4 - 1$$

(۳) - ۲۵

$$90x + 50y = 850 \Rightarrow 9x + 5y = 85 \quad x = 0 \Rightarrow y = 17$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 - 5k \\ y = 17 + 9k \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5 \\ y = 8 \end{cases} \Rightarrow x + y = 13$$

(۴) - ۲۶ چون $1381 \equiv 1 \pmod{6}, \dots$ لذا داریم:

$$(a + 1381)^3 + (a + 1382)^3 + \dots + (a + 1386)^3 \equiv (a + 1)^3 + (a + 2)^3 + \dots + (a + 6)^3 = *$$

با توجه به اینکه تعداد پرانتزها، 6، تاست، لذا به تعداد 6 تا a^3 همچنین بقیه جملات هم مضرب 6 می باشند، لذا همگی آنها (به جز اعداد ثابت) به پیمانه 6 با صفر همنشت خواهند بود.

$$* \equiv 1^3 + 2^3 + \dots + 6^3 = \left(\frac{6 \times 7}{2}\right)^2 \equiv 21^2 \equiv 3^3 \equiv 27 \equiv 3$$

$$(a, b) = d \Rightarrow ab = a'b'd^2 \quad (۳) - ۲۷$$

$$d + ab = 497 \Rightarrow d + a'b'd^2 = 497 \Rightarrow d(1 + a'b'd) = 497 = 7 \times 71$$

$$\begin{cases} d = 7 \\ a'b'd + 1 = 71 \Rightarrow a'b'd = 70 \Rightarrow D = \text{م.م.ك} = 70 \end{cases}$$

(۲) - ۲۸

$$\left. \begin{array}{l} 2! \equiv 2 \\ 4! \equiv 24 \\ 6! \equiv 720 \equiv 20 \\ 8! \equiv 8 \times 7 \times 20 \equiv 8 \times 140 \equiv 8 \times 40 \equiv 20 \\ 1382! \equiv 0 \end{array} \right\} 2! + 4! + \dots + 1382! \equiv 2 + 24 + 20 + 20 + 0 + 0 + \dots + 0 \equiv 66$$

نکته: به ازاء $n! \equiv 0, n \geq 10$ (۳) - ۲۹ عدد $\overline{1ab562}$ بر 99 بخشپذیر است لذا حتماً بر 9 و 11 بخشپذیر می باشد لذا داریم:

$$\overline{lab562} \equiv 1 + a + b + 5 + 2 \equiv 0 \rightarrow a + b \equiv -5 \equiv 4$$

$$\overline{lab562} \equiv (2 + 5 + a) - (6 + b + 1) \equiv 0 \Rightarrow a - b \equiv 0 \Rightarrow a \equiv b$$

(چون a و b ارقام عدد $\overline{lab562}$ می باشند، لذا نمی توانند از 9 بیشتر باشند)

$$\begin{cases} a + b \equiv 4 \\ a \equiv b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\overline{lab562} = 122562 \equiv 122000 + 562 \equiv 0 + 74 = 74$$

بنابراین داریم:

(۴) -۳۰

$$7x + 21y = 28 \xrightarrow{\div 7} x + 3y = 4 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_0 - \frac{kb}{d} = 1 - 3k \\ y = y_0 + \frac{ka}{d} = 1 + k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -20 < 1 - 3k < 20 \Rightarrow -21 < 3k < 19 \Rightarrow -7 < k < 6\frac{2}{3} \quad (1) \\ -20 < 1 + k < 20 \Rightarrow -21 < k < 19 \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow -7 < 6\frac{2}{3} \Rightarrow k = -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

لذا برای k ، سیزده جواب پیدا می شود. پس برای معادله 13 جواب وجود دارد.

(۲) -۳۱

$$a \equiv 3 \Rightarrow a[4,6]3 \Rightarrow a \equiv 3 \leftarrow \text{باقیمانده}$$

$$a \equiv 3$$

$\Rightarrow$

-۳۲ (۱) از روش عدد گذاری استفاده می کنیم و با توجه به $a=4k+1$ ، به جای a ، عددی مانند 1، 5، 9، را قرار

می دهیم:

$$a = 1 \Rightarrow (a+2)^{1381} + (a+3)^{1381} + (a+4)^{1381} \equiv 3^{1381} + 4^{1381} + 5^{1381}$$

$$\equiv (3^2)^{690} \times 3 + 4^2 \times 4^{1379} + (5^2)^{690} \times 5$$

$$\equiv 1^{690} \times 3 + 16(4^{1379}) + (1)^{690} \times 5$$

$$\equiv 3 + 8 \text{ مضرب } 5 \equiv 8 \equiv 0$$

$$ab = a'b'd^2 \quad \text{-۳۳ (۲) یادآوری:}$$

$$\frac{ab}{d} = 1800 \Rightarrow \frac{a'b'd^2}{d} = 1800 \Rightarrow a'b'd = 1800 \Rightarrow d \mid 1800 \Rightarrow d \mid 2^3 \times 3^2 \times 5^2$$

چون $(b,6)=1$ ، پس باید $d \mid 25$ ، یعنی d یا $d=5$ یا $d=25$ است، از طرف دیگر مسلم است که $a+b = (a'+b')d$

هنگامی Max میشود که $d=25$ ، پس:

$$25ab' = 1800 \Rightarrow \begin{cases} ab' = 72 \Rightarrow \begin{cases} a' = 1 \\ b' = 72 \end{cases} \Rightarrow a + b = (a' + b')d = 73 \times 25 \\ ab' = 72 \Rightarrow \begin{cases} a = q \\ b' = 8 \end{cases} \Rightarrow a + b = (a' + b')d = 17 \times 25 \end{cases}$$

لذا: $Max(a + b) = 73 \times 25 = 1825$

$$n \geq 5 \Rightarrow n! \equiv 0 \pmod{10}$$

۳۴- (۴) یادآوری:

$$(1! + 3! + 5! + \dots + 1381!) + (2! + 4! + \dots + 1380!) \equiv (1 + 6 + 0 + 0 + \dots + 0) + (2 + 24 + 0 + \dots + 0) \equiv 7 + 6 = 13 \equiv 3 \pmod{10}$$

۳۵- (۱) چون ۱۱ اول است طبق فرما داریم:

$$\begin{aligned} 3^{10} &\equiv 1 \pmod{11} \implies 3^{40} \equiv 1 \pmod{11} \\ 3^2 &\equiv -2 \pmod{11} \implies 3^8 \equiv 16 \equiv 5 \pmod{11} \Rightarrow 3^{40} \times 3^8 \equiv 1 \times 5 \pmod{11} \Rightarrow 3^{48} \equiv 5 \pmod{11} \end{aligned}$$

۳۶- (۲)

$$(abc)_7 = (abc) \Rightarrow c + 7b + 49a = a + 8b + 64c$$

$$48a - 63c = b \Rightarrow b = 3(16a - 21c) \Rightarrow b = 3k \Rightarrow b = 3 \text{ یا } 6$$

$$\begin{aligned} b = 0 &\Rightarrow 3(16a - 21c) = 0 \Rightarrow 16a = 21c \\ b = 3 &\Rightarrow 16a - 21c = 1 \end{aligned} \quad \text{جواب ندارد}$$

اکنون این معادله ی سیاله را با روش همنشستی حل می کنیم:

$$16a - 1 = 21c \Rightarrow 16a \equiv 1 \pmod{21} \Rightarrow 16a \equiv 1 + 3(21) = 64$$

$$\xrightarrow{\div 4} a \equiv 4 \pmod{21} \Rightarrow a = 4 + 21k \xrightarrow{k=0} a = 4$$

$$a^3 - a^2 - a + 1 \equiv a^2 - 1 \pmod{m} \Rightarrow a^3 - 2a^2 - a + 2 \equiv 0 \pmod{m}$$

$$a(a^2 - 1) - 2(a^2 - 1) \equiv 0 \pmod{m} \Rightarrow (a^2 - 1)(a - 2) \equiv 0 \pmod{m}$$

۳۷- (۱)

$$\Rightarrow (a^2 - 1)(a - 2) = mk \Rightarrow \begin{cases} m \mid (a^2 - 1)(a - 2) \\ (a^2 - 1, m) = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{لم اقلیدس}} m \mid a - 2$$

۳۸- (۴) با توجه به تمرین های صفحه ۵۷ کتاب ریاضیات گسسته داریم:

$$\begin{cases} (a + b)^2 \equiv a^2 + b^2 \pmod{ab} \\ (a + b)^n \equiv a^n + b^n \pmod{ab} \end{cases} \Rightarrow 6^{1382} + 7^{1382} \equiv 6 \times 7(6 + 7)^{1382} \equiv 13^{1382} \pmod{42} \quad (1)$$

$$13^2 = 169 \equiv 1 \pmod{42} \xrightarrow{\text{به توان ۶۹۱}} 13^{1382} \equiv 1 \pmod{42} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow 6^{1382} + 7^{1382} \equiv 1 \pmod{42}$$

۳۹- (۱) یادآوری: $[a, b] = a'b'd$

$$M^2 - d^2 = 27 \Rightarrow a'^2 b'^2 d^2 = 27 \Rightarrow d^2 (a'^2 b'^2 - 1) = 27 = 3^2 \times 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = 3 \\ a'^2 b'^2 - 1 = 3 \Rightarrow a'b' = 2 \Rightarrow \begin{cases} a = a'd = 3 \\ a = b'd = 6 \end{cases} \Rightarrow ab = 18 \end{cases}$$

راه دیگر: تنها اعدادی که در تساوی $M^2 - d^2 = 27$ صدق می کنند عبارتند از $d=3, M=6$

$$ab = (a, b)[a, b] = 3 \times 6 = 18$$

۴۰- (۱) یادآوری: $n \geq 5 \Rightarrow n! \equiv 0 \pmod{10}$ (رقم یکان $n!$ به ازاء $n \geq 5$ ، صفر است)

$$\begin{cases} A \equiv 2 + 6 + 24 + 0 + 0 + 0 \pmod{10} \\ B \equiv 66 + 24 + 0 + 0 + 0 \pmod{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \equiv 2 \pmod{10} \\ B \equiv 0 \pmod{10} \end{cases} \Rightarrow B - A \equiv -2 \pmod{10}$$

اکنون باید طبق قضیه نیوتن، باقیمانده ی $A+p$ بر 4 را به دست آورده جایگزین $A+B$ کنیم و پس رقم یکان را حساب کنیم، اما باقیمانده $A+B$ بر 4 برابر 2 است، لذا یکان $(B-A)^{A+B}$ با یکان $(B-A)^2$ برابر است.

$$(B-A)^{A+B} \equiv (B-A)^2 \equiv (-2)^2 = 4 \pmod{10}$$

۴۱- (۴) اگر در هر کدام از گزینه ها، یک ترکیب خطی از ضرایب x و y چنان بیابیم که a در آن حذف شود داریم:

گزینه (۱) $\Rightarrow (a+1)6 - (6)(a) = 6$

گزینه (۲) $\Rightarrow (2a+1)(3) - (6)(a) = 3$

گزینه (۳) $\Rightarrow (3a+1)(2) - (6)(a) = 2$

گزینه (۴) $\Rightarrow (3a+1)(2) - (6)(a) = 1$

از آن جا که ترکیب خطی ضرایب معادله سیاله گزینه 4 برابر 1 شده است پس $(6a+1, 6)=1$ و معادله حتمأ دارای جواب است.

$$ax+6y=1 \Rightarrow (a, 6)=1 \text{ در } z \text{ جواب ندارد}$$

راه حل دوم:

حال اگر a رامثلاً 1 فرض کنیم آنگاه:

گزینه (۱) $(a+1 \text{ و } 6) = (2 \text{ و } 6) = 2 \times 1$

گزینه (۲) $(2a+1 \text{ و } 6) = (3 \text{ و } 6) = 3 \times 1$

گزینه (۳) $(3a+1 \text{ و } 6) = (4 \text{ و } 6) = 2 \times 1$

لذا به ازاء $a=1$ معادلات گزینه های (1)، (2) و (3) جواب ندارد و در نتیجه معادلات گزینه (4)، قطعاً جواب دارد.

۴۲- (۲) چون باقیمانده a بر 2، یک است لذا a فرد است و در نتیجه باقیمانده a بر 4 و 8 نیز یک است.

$$\begin{cases} a \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow a^2 \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow a^2 + 6 \equiv 7 \pmod{2} \\ a \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow a^2 \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow a^2 + 6 \equiv 7 \pmod{4} \\ a \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow a^2 \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow a^2 + 6 \equiv 7 \pmod{8} \end{cases}$$

راه حل دوم: چون a فرد است لذا a را عدد مناسبی مانند 9 اختیار می کنیم که باقیمانده اش بر 2، 4 و 8 یک باشد.

$$a^2 + 6 = 9^2 + 6 = 87 \Rightarrow \begin{cases} 87 \equiv 1^2 \\ 87 \equiv 3^4 \\ 87 \equiv 7^8 \end{cases}$$

۴۳- (۴) یادآوری: اگر بخواهیم عددی د رمبنای b را به مبنای b^m ببریم، کافی است ارقام عدد مورد نظر را از سمت راست به صورت دسته های m تایی، تجزیه کرده و در هر دسته، ارقام موجود را به صورت توانهایی از b به دست آوریم.

$$(211\ 21103)_4 = \begin{array}{cccc} \overbrace{21} & \overbrace{12} & \overbrace{11} & \overbrace{03} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 \times 4^1 + 1 \times 4^0 & 1 \times 4 + 2 \times 4^0 & 1 \times 4 + 1 \times 4 & 0 \times 4^1 + 3 \times 4^0 \\ & & & \\ & & & = (9\ 6\ 5\ 3)_{16} \Rightarrow \text{بزرگترین رقم} = 9 = m \end{array}$$

۴۴- (۳)

$$1381 \overset{7}{\equiv} 2, 1382 \overset{7}{\equiv} 3, 1383 \overset{7}{\equiv} 4 \overset{7}{\equiv} 3$$

$$1384 \overset{7}{\equiv} 5 \overset{7}{\equiv} -2, 1385 \overset{7}{\equiv} 6, 1386 \overset{7}{\equiv} 0, 1387 \overset{7}{\equiv} 1 \overset{7}{\equiv} -6$$

چون a مضرب ۷ می باشد لذا $a \overset{7}{\equiv} 0$ ، لذا داریم:

$$\begin{aligned} (a + 1381)^3 + (2a + 1382)^3 + \dots + (7a + 1378)^3 &\overset{7}{\equiv} (0+2)^3 + (0+3)^3 + (0-3)^3 + (0-2)^3 + (0+6)^3 + (0)^3 + (0-6)^3 \\ &\overset{7}{\equiv} 2^3 + 3^3 - 3^3 - 2^3 + 6^3 + 0^3 - 6^3 \overset{7}{\equiv} 0 \end{aligned}$$

۴۵- (۱) یادآوری: $[a, b] = a'b'd$

$$\begin{cases} d = 13 \\ [a, b] = 91 \Rightarrow a'b'd = 91 \Rightarrow 13a'b' = 91 \Rightarrow a'b' = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a'=1 \\ b'=7 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} a'=7 \\ b'=1 \end{cases} \Rightarrow a^2 - b^2 = (a'd)^2 - (b'd)^2 - d^2(a'^2 - b'^2) = 13^2 \times 48 = 169 \times 48$$

۴۶- (۴)

$$(1\ 2110)_4 = \begin{array}{ccc} \overbrace{1} & \overbrace{21} & \overbrace{10} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 \times 3^0 & 2 \times 3 + 1 \times 3^0 & 1 \times 3 + 0 \times 3^0 \\ & & \\ & & = (173)_9 = (abc)_9 \end{array}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 1 + 49 + 9 = 59$$

۴۷- (۱) برای آنکه معادله سیاله $ax + 18y = 3$ در Z دارای جواب باشد باید $(a, 18) | 3$ یعنی a باید عددی باشد که ب.م.م آن عدد با ۱۸، عدد ۳ را عاد کند، لذا a باید مضرب ۲ و a نباشد برای شمردن تعداد اعضای مجموعه $S = \{1, 2, \dots, 50\}$ که نه مضرب ۲ و نه مضرب ۹ باشند از اصل عدم شمول به صورت زیر استفاده می کنیم.

$$|A \cup B| = \left\lceil \frac{50}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{50}{9} \right\rceil - \left\lceil \frac{50}{18} \right\rceil = 25 + 5 - 228$$

$$|\overline{A \cup B}| = 50 - 28 = 22$$

$$a \equiv_8 7 \Rightarrow a = 8k + 7 \Rightarrow a \equiv_4 7 \Rightarrow a \equiv_3 3$$

راه اول: ۴۸- (۳)

$$2a \equiv_4 6 \Rightarrow 2a + 1 \equiv_4 7 \equiv_3 3 \Rightarrow R = 3$$

راه دوم:

$$a = 8k + 7 \Rightarrow 2a + 1 = 16k + 5 = 16k + 12 + 3$$

$$2a + 1 = 4(\underbrace{4k+3}_q) + 3 \Rightarrow 2a + 1 = 4q + 3 \Rightarrow R = 3$$

$$n \geq 5 \Rightarrow n! \equiv_{10} 0$$

۴۹- (۴) یادآوری:

$$A \equiv_{10} 1 + 2 + 6 + 24 + 0 \dots + 0 = 33 \equiv_3 3$$

$$B \equiv_{10} 2 + 6 + 24 + 0 + \dots + 0 = 32 \equiv_2 2$$

اکنون طبق قضیه نیوتن باید باقیمانده A و B بر 4 را بیابیم:

$$A \equiv_4 1 + 2 + 6 + 0 + \dots + 0 \equiv_4 9 \equiv_4 1$$

$$B \equiv_4 2 + 6 + 0 + \dots + 0 \equiv_4 8 \equiv_4 0$$

لذا داریم:

$$1 = 1 \text{ یکان} = 81 = 3^4 \text{ یکان} = A^4 \text{ یکان} = A^B$$

$$2 = 2^1 \text{ یکان} = B^1 \text{ یکان} = B^A$$

$$A^B + B^A \equiv_{10} A^4 + B^1 \equiv_{10} 3^4 + 2 = 83 \equiv_3 3$$

یا

$$\overline{a63b29} \equiv_{11} 9 - 2 + b - 3 + 6 - a \equiv_{11} 0 \Rightarrow b \equiv_{11} a + 1 \quad (1) \Rightarrow$$

۵۰- (۱) a و b دو عدد متوالی هستند

$$\overline{a63b29} \equiv_9 a + 6 + 3 + b + 2 + \equiv_9 0 \Rightarrow a + b + 2 \equiv_9 0 \quad (2) \Rightarrow (1), (2) \Rightarrow a = 3, b = 4$$

یادآوری کنیم که عددی بر 99 بخشپذیر است که بر 9 و 11 بخشپذیر باشد.

۵۱ (۴)

$$185 \equiv_m 24 \Rightarrow 161 \equiv_m 0 \Rightarrow 7 \times 23 \equiv_m 0 \Rightarrow m = 23$$

$$m^m = 23^{23} \equiv_7 2^{23} = (2^3)^7 \times 2^2 \equiv_7 1^7 \times 4 = 4$$

۵۲- (۴)

$$a^p = 10k + 7 \Rightarrow \begin{cases} a^p \equiv_{10} 7 \\ a^{p+4} \equiv_{10} a^p \end{cases} \Rightarrow a^{p+4} \equiv_{10} 7$$

۵۳- (۴)

$$a = 16k \Rightarrow 17a = 17 \times 16k \equiv_4 0 \Rightarrow 17a \equiv_4 0 \Rightarrow$$

$$(17a+1)^2 + (17a+2)^4 + (17a+3)^4 + (17a+5)^4 \equiv_4 1^4 + 2^4 + 3^4 + 5^4 \equiv_4 1 + 0 + 1 + 0 + 1 \equiv_3 3$$

۵۴- (۴)

$$M = 28d + 3 \Rightarrow a'b'd = 28d + 3 \Rightarrow (a'b' - 28) \times d = 3$$

$$\Rightarrow a - b = a'd = b'd = (a' - b')d = (29 - 1) \times 3 = 84$$

-۵۵ (۳)

$$A = 2^{65} + 3^{66} = (2^3)^{21} \times 2^2 + (3^2)^{33} \equiv (0)^{21} \times 4 + 1^{33} \Rightarrow A \equiv 1 \Rightarrow A = 8k + 1, (1)$$

$$A = (2^3)^{21} \times 2^2 + (3^2)^{33} \equiv (-1)^{21} \times 4 + 0^{33} \Rightarrow A \equiv -4$$

$$\Rightarrow A = 9k' - 4 \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow A = 8k + 1 \xrightarrow{\times 9} 9A = 72k + 9 \quad (3)$$

$$(2) \Rightarrow A = 9k' + 5 \xrightarrow{\times 8} 8A = 72k' + 40 \quad (4)$$

$$-A = 72(\underbrace{k - k'}_{k''}) - 31 \Rightarrow A = 72k'' - 41$$

$$A = 72k'' - 72 + 72 - 31 \Rightarrow A = 72k'' + 41 \Rightarrow R = 41$$

-۵۶ (۴) یادآوری: عددی بر 99 بخشپذیر است که بر 9 و 11 بخشپذیر باشد.

$$\overline{258ab6} \equiv 11 \Rightarrow \overline{358ab6} \text{ بر } 99, 11 \text{ است}$$

$$\Rightarrow \overline{258ab6} \equiv 2 \Rightarrow 3 + 5 + 8 + a + b + 6 \equiv 2$$

$$\Rightarrow a + b \equiv -20 \equiv 7 \Rightarrow a + b \equiv 7 \Rightarrow a + b = 9k + 7 \xrightarrow{k=1} a + b = 16$$

-۵۷ (۳) یادآوری معادله $ax + by = c$ در Z جواب دارد اگر و فقط اگر $(a, b) | c$

$$3x + 6y = a^2 + 2 \Rightarrow (3, 6) | a^2 + 2 \Rightarrow 3 | a^2 + 2 \Rightarrow a^2 + 2 \equiv 0$$

می دانیم در رابطه همنشستگی به پیمانه 3، فقط سه دسته هم ارزی داریم که عبارتند از $[0]$ ، $[1]$ ، $[2]$ چون 0 (که نماینده دسته $[0]$ است) در معادله

$$a^2 + 2 \equiv 0 \quad (۳) \quad a^2 + 2 \equiv 3 \text{ صدق نمی کند، لذا تمام اعداد این دسته (یعنی تمام اعدادی که به صورت } a=3k \text{ نیز در معادله}$$

صدق نمی کنند اما اعداد 2 در معادله صدق می کنند لذا جوابهای معادله صدق عبارتند از: $a \in Z$ و $a \neq 3k$ ، بنابراین مجموعه جواب معادله فوق عبارتست از $\{1, 2, 4, 5, 7, 8, \dots, 17, 19, 20\}$ یعنی تعداد مقادیر a عبارتست

$$\text{از } 20 - \left\lfloor \frac{20}{3} \right\rfloor = 14$$

$$k > 100 \Rightarrow k! \equiv 0 \quad (۳) \text{ نکته}$$

لذا برای یافتن بزرگترین رقم یکان عبارت $k! + k^k$ ، کافی است بزرگترین رقم یکان عدد k را بیابیم و برای این منظور به جای k ، عدد (مثلاً 109 را) که از 100 بزرگتر است و رقم یکانش 9 است انتخاب می کنیم، در این صورت داریم:

$$\text{Max}(k^k) \equiv (109)^{109} \equiv 9^{109} \equiv 9$$

-۵۹ (۴) چون $a = 8n + 3$ ، لذا کافی است a را برابر 3 اختیار کنیم در این صورت داریم:

$$a + a^2 + a^3 + a^4 = 3 + 9 + 27 + 81 \equiv 3 + 9 + 11 + 1 \equiv 8$$

-۶۰ (۱)

$$[a, b] = 90(a, b) \Rightarrow \frac{[a, b]}{(a, b)} = 90 \Rightarrow \frac{a'b'd}{d} = 90$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a'b' = 90 \\ (a', b') = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a' = 2, b' = 45 \rightarrow \frac{a'}{b'} = \frac{2}{45} \\ a' = 5, b' = 18 \rightarrow \frac{a'}{b'} = \frac{5}{18} \\ a' = 9, b' = 10 \rightarrow \frac{a'}{b'} = \frac{9}{10} \end{cases}$$

لذا با توجه به گزینه ها نسبت $\frac{a'}{b'}$ ، $\frac{2}{5}$ نمی تواند باشد.

۶۱- (۴)

$$\begin{cases} a = 2k + 1 \\ a = 3k' + 2 \\ a = 5k'' + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 1 \pmod{2} \\ a \equiv 2 \pmod{3} \\ a \equiv 4 \pmod{5} \end{cases} \xrightarrow{[2,3,5]} a \equiv 1 \pmod{30} \Rightarrow a = 30k' - 1 \xrightarrow{k'=1} a = 29 \equiv 14 \pmod{15}$$

تذکر: البته اگر در بین گزینه ها، جستجو کرده، دنبال عددی بگردیم که باقیمانده اش بر ۲ و ۳ و ۵ به ترتیب ۱ و ۲ و ۴ باشد، این عدد، عددی جز ۱۴ نخواهد بود.

$$736 \ 521 \equiv 521 \equiv 1 \pmod{8} \quad 736 \ 521 \equiv 7+3+6+5+2+1 \equiv 6 \pmod{9} \Rightarrow \text{جواب} = 1+6+5 = 12$$

۶۲- (۴)

$$736 \ 521 \equiv 7+3+6+5+2+1 \equiv 6 \pmod{9} \Rightarrow \text{جواب} = 1+6+5 = 12$$

$$736 \ 521 \equiv (1+5+3) - (2+6+7) \equiv 5 \pmod{11}$$

۶۳- (۲)

$$9x + 11y = 1000 \Rightarrow 1000 - 11y = 9x \Rightarrow 9 \mid 1000 - 11y$$

$$\Rightarrow 11y \equiv 1000 \pmod{9} \Rightarrow 2y \equiv 1 \pmod{9} \xrightarrow{+2} y \equiv 1 \pmod{9}$$

$$\Rightarrow y = 9k + 5 \Rightarrow 9(x + 11(9k + 5)) = 1000$$

$$9x = 1000 - 99k - 55 \Rightarrow x = \frac{-99k + 945}{9} = -11k + 105$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -11k + 105 > 0 \Rightarrow 11k < 105 \Rightarrow k < \frac{105}{11} = 9 \\ y = 9k + 5 > 0 \Rightarrow 9k > -5 \Rightarrow k > \frac{-5}{9} \end{cases} \quad \text{خورده ای } 9 < k \leq 9$$

(برای اینکه x و y طبیعی باشند باید مثبت باشند)

پس برای x و y 10 جواب طبیعی وجود دارد $\Rightarrow k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$

۶۴- (۱) می دانیم عبارت $k(k+2)(k+4) \dots (k+6)$ حاصلضرب 7 عدد متوالی بوده و لذا بر 7! و در نتیجه بر 10 بخشپذیر

است، به عبارت دیگر باقیمانده اش بر 10، صفر است، لذا کافی است بزرگترین رقم یکان عبارت k^{60} را به ازاء $k > 100$

بیابیم، چون باقیمانده 60 بر 4 برابر صفر است لذا طبق قضیه نیوتن، رقم یکان k با رقم یکان k برابر است بنابراین

داریم:

$$\text{Max}(k^{60}) \equiv_{10} \text{Max}(k^4) \equiv_{10} 6$$

دقت کنید که اگر به جای $k (k > 100)$ اعداد از 101، 102، ...، 109 را امتحان کنیم (به عبارت دیگر اعداد 1، 2، ...، 9 را امتحان کنیم، بزرگترین رقم یکان 60 خواهد شد.

$$a = 37q + \underbrace{q^2 - 2}_{-65 \text{ (4)}}$$

می دانیم باقیمانده هر عدد بر 37، از 37 کوچکتر است لذا داریم:

$$q^2 - 2 < 37 \Rightarrow q^2 < 39 \Rightarrow \text{Max}(q) = 6 \Rightarrow \text{Max}(a) = 37 \times 6 + 6^2 - 2 = 256$$

$$256 = 16^2$$

و می دانیم 256 مضرب 16 است،

$$-66 \text{ (4)} \text{ با تقسیمات متوالی داریم: } (67)_{10} = (2111)_3$$

$$3^{42} - 2^{42} = (3^6)^7 - (2^6)^7 = 729^7 - 64^7 = (729 - 64)(\dots) = (35 \times 19 \times (\dots)) \equiv_{35} 0 \quad -67 \text{ (1)}$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad \text{یادآوری:}$$

راه دیگر:

$$3^{42} - 2^{42} \equiv_{35} (3^3)^{14} - (2^3)^{14} = 27^{14} - 8^{14} \equiv_{35} (-8)^{14} - 8^{14} = 8^{14} - 8^{14} = 0$$

$$-68 \text{ (4)}$$

$$\overline{12x3y}^{44} \equiv 0 \Rightarrow \begin{cases} \overline{12x3y}^4 \equiv 0 \\ \overline{12x3y}^{11} \equiv 0 \Rightarrow y + x + 1 - (3 + 2) \equiv 0 \end{cases}$$

عددی بر 4 بخشپذیر است که دو رقم سمت راست آن بر 4 بخشپذیر باشد، لذا y برابر است با 2 یا 6

$$y = 2 \Rightarrow 2 + x + 1 - (3 + 2) \equiv 0 \Rightarrow x \equiv 2 \Rightarrow x = 2$$

$$y = 6 \Rightarrow 6 + x + 1 - (3 + 2) \equiv 0 \Rightarrow x \equiv -2 \equiv 9 \Rightarrow x = 9$$

پس دو عدد باشد شرایط داده شده وجود دارند که عبارتند از 12936، 12232

-69 (4) زمانی حاصلضرب سه عدد، زوج است که حداقل یکی از آنها زوج باشد، مثلاً x زوج باشد پس $x^2 \equiv 0$ ، حال به اینکه y و z زوج یا فرد باشند، y^2 و z^2 در همنشستی به پیمانه 4 یا صفر هستند یا یک، لذا:

$$x^2 + y^2 + z^2 \not\equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow (1 \text{ یا } 0) + (1 \text{ یا } 0) \equiv 0$$

و در نتیجه باقیمانده تقسیم $x^2 + y^2 + z^2$ بر 4، 3 نمی تواند باشد.

-70 (3) ابتدا باقیمانده 3^{1000} را بر 7 پیدا می کنیم، سپس در بین گزینه ها عددی را که باقیمانده اش بر 7 باقیمانده بدست آورده یکی است را انتخاب می کنیم

$$3^{1000} \equiv_{56} ? \quad 3^{1000} = (3^3)^{333} \times 3^7 \equiv (-1)^{333} \times 3 = -3 \equiv_{56} 53 \Rightarrow 3^{1000} \equiv_{56} 53$$

در بین گزینه ها فقط 25 است که باقیمانده اش بر 7، برابر 4 است.

$$-71 \text{ (3)}$$

$$5M = 9d + 11 \Rightarrow 5a'b'd = 9d + 11 \Rightarrow (a'b' - 9)d = 1 \times 11$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d=11 \\ 5a'b'-9=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=11 \\ a'b'=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a'=2 \\ b'=1 \end{cases} \Rightarrow a+b=(a'+b')d=33$$

$$A=(10101)_2 \Rightarrow A=1+1 \times 2^2 + 1 \times 2^4 = 21$$

-۷۲ (۳)

$$33A=33 \times 21=693=(110001001)_2 \Rightarrow$$

5 صفر دارد

-۷۳ (۱)

$$A=1382^1+1382^2+\dots+1382^n \equiv \begin{cases} 2 & , (n=1) \\ 2+2^2=6 & , (n=2) \\ 2+2^2+2^3=4 & , (n=3) \\ 2+2^2+2^3+2^4=0 & , (n=4) \end{cases} \Rightarrow \text{بزرگترین رقم یکان} = 6$$

-۷۴ (۳)

$$\overline{34xy5}^{33} \equiv 0 \Rightarrow \overline{34xy5}^3 \equiv 0 \Rightarrow 3+4+x+y+5 \equiv 0 \Rightarrow x+y \equiv 0$$

$$\overline{34xy5}^{11} \equiv 0 \Rightarrow (5+x+3)-(y+4) \equiv 0 \Rightarrow x-y \equiv 7$$

برای اینکه عدد $\overline{34xy5}$ بزرگ شود باید $x=8$ گرفت و $y=1$ (دقت کنید که اگر $x=9$ باشد، y به دست نمی آید)

بنابراین بیشترین مقدار جمع ارقام عدد $\overline{34xy5}$ برابر است با: $3+4+8+1+5=21$

-۷۵ (۳) به جای a ، سه مقدار 0 و 1 و 2 را قرار می دهیم:

$$A \equiv \begin{cases} 1^3+2^3+3^3+4^3 \equiv 4 & , (a=0) \\ 2^3+3^3+4^3+5^3 \equiv 2 & , (a=1) \\ 3^3+4^3+5^3+6^3 \equiv 0 & , (a=2) \end{cases}$$

لذا باقیمانده عدد داده شده بر 6 ، 3 نمی تواند باشد.

$$M=2^{100}+3^{100}+5^{100} \equiv ?^{30}$$

-۷۶ (۲)

چون نمی توانیم توان مناسبی برای 2 و 3 و 5 بیابیم، به پیمانه نگاه می کنیم، چون پیمانه مضرب 2 و 3 و 5 است پیمانه جدیدی را در نظر می گیریم، در اینجا پیمانه را 3 در نظر می گیریم.

$$M \equiv (-1)^{100} + 0^{100} + (-1)^{100} \equiv 2^3$$

در بین 4 گزینه، گزینه ای قابل قبول است که باقیمانده اش بر 3 برابر 2 شود و لذا گزینه 2 صحیح است.

$$M=5a+14$$

-۷۷ (۱)

$$a'b'd=5a'd+14 \Rightarrow d(a'b'-5a')=14 \Rightarrow \begin{cases} d=14 \\ a'b'-5a'=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a'b'-5)=1 \Rightarrow \begin{cases} a'=1 \\ bb'=6 \end{cases} \Rightarrow b-a=(b'-a')d=5 \times 14=70$$

(۳) -۷۸

$$(\overline{ab32})_4 = (\overline{13c})_8 \Rightarrow 2 + 12 + 16b + 64a = c + 24 + 64$$

$$64a + 16b = c + 74$$

چون سمت چپ تساوی اخیر، مضرب 16 است، لذا سمت راست نیز باید مضرب 16 باشد بنابراین $C=6$ و از آنجا داریم:

$$64a + 16b = 6 + 74 = 80 \xrightarrow{\div 16} 4a + b = 5 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \Rightarrow a + b + c = 8 \\ b = 1 \end{cases}$$

۷۹- (۲) چون $1! \equiv 1$ و $3! \equiv 2$ و به ازاء $n > 5$ (فرد n)، $n! \equiv 0$ ، لذا طبق قضیه نیوتن داریم:

$$(1383)^{11} + (1383)^{31} + (1383)^{51} + \dots + (1383)^{1383} \equiv 3^1 + 3^2 + 3^4 + 3^4 + \dots + 3^4 \equiv 3 + 9 + \underbrace{1 + \dots + 1}_{690} \equiv 2 + 0 \equiv 2$$

۱- اگر $A \cup B' = B'$ باشد، کدام نادرست است؟

$$A \cap B' = A \quad (\epsilon) \quad B' \subset A \quad (\gamma) \quad A \subset B' \quad (\gamma) \quad A' \cap B = B \quad (\gamma)$$

۲- مجموعه توانی مجموعه $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ کدام است؟

$$\{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}, A\} \quad (\gamma) \quad \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}, A\} \quad (\gamma)$$

$$\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}\} \quad (\epsilon) \quad \{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}, \emptyset, \{A\}\} \quad (\gamma)$$

۳- اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند، کدام رابطه زیر نادرست است؟

$$A - B = A - (A \cap B) \quad (\gamma) \quad (A \cup B) - B = A - B \quad (\gamma)$$

$$A - B = B' - A' \quad (\epsilon) \quad (A - B) \cup (B - A) = A \cup B \quad (\gamma)$$

۴- اگر $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ ، کدام رابطه نادرست است؟

$$A \Delta U = A \quad (\epsilon) \quad A \Delta A = \emptyset \quad (\gamma) \quad A \Delta \emptyset = A' \quad (\gamma) \quad A \Delta A' = U \quad (\gamma)$$

۵- اگر $A_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ حاصل $\bigcap_{i=1}^n A_i$ کدام است؟

$$U \quad (\epsilon) \quad A_1 \quad (\gamma) \quad A_n \quad (\gamma) \quad \emptyset \quad (\gamma)$$

۶- هرگاه $A \subset B$ باشد، در این صورت حاصل $A \cup (A' \cap B)$ برابر است با:

$$U \quad (\epsilon) \quad A' \quad (\gamma) \quad B \quad (\gamma) \quad A \quad (\gamma)$$

۷- کدامیک از روابط زیر، برای هر دو مجموعه دلخواه A و B درست است؟

$$(A \Delta B)' = A \cap B \quad (\gamma) \quad A \subset (A - B) \cup (B - A) \quad (\gamma)$$

$$A \cap B \subset (A \Delta B)' \quad (\epsilon) \quad (A \cap B) \subset (A \cup B) - (A \cap B) \quad (\gamma)$$

۸- اگر $A = \{x, y, z\}$ و $(A - B) \cup (B - A) = \{x, t\}$ باشد، مجموعه B کدام است؟

$$\{x, y, z, t\} \quad (\epsilon) \quad \{x, t\} \quad (\gamma) \quad \{x\} \quad (\gamma) \quad \{y, z, t\} \quad (\gamma)$$

۹- هرگاه A و B دو مجموعه متناهی باشند، کدامیک از گزینه‌های زیر همواره صحیح است؟

$$A \subset A \times A \quad (\gamma) \quad A \times B = B \times A \quad (\gamma)$$

$$A \times A \subset A \quad (\epsilon) \quad (A \times B)^{-1} = B \times A \quad (\gamma)$$

۱۰- هرگاه R و S دو رابطه روی مجموعه A باشند، کدام نادرست است؟

$$(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1} \quad (\gamma) \quad (R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1} \quad (\gamma)$$

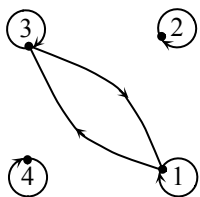
$$ROS = SOR \quad (\epsilon) \quad (R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1} \quad (\gamma)$$

۱۱- رابطه R روی مجموعه اعداد حقیقی به صورت $xRy \Leftrightarrow 3x - 2y = 10$ تعریف شده است، این رابطه کدام خاصیت

زیر را دارد؟

$$(1) \text{ بازتابی} \quad (2) \text{ تقارنی} \quad (3) \text{ پادتقارنی} \quad (4) \text{ تعدی}$$

۱۲- رابطه R روی مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ با گراف جهتدار زیر تعریف شده است، دسته هم‌ارزی ۱، $\{[1]\}$ کدام است؟



(۱) $\{1, 2, 4\}$ (۲) $\{1\}$ (۳) $\{1, 2, 3, 4\}$ (۴) $\{1, 3\}$

۱۳- اگر A و B دو مجموعه ناتهی باشند به طوری که رابطه $A \times B$ ، دارای خاصیت تقارنی باشد آنگاه:

(۱) $A \neq B$ (۲) $A = B$ (۳) $A \neq B, A \subset B$ (۴) $A \neq B, B \subset A$

۱۴- اگر $A = \{1, 2, 3\}$ ، حاصل $(\emptyset \times A)'$ چیست؟

(۱) A (۲) $A \times A$ (۳) $\emptyset$ (۴) هیچکدام

۱۵- حاصلجمع اعضای مجموعه $A = \left\{ \frac{x+1}{2} : 2x+1 \in \{-1, 1, 3, 5\} \right\}$ چیست؟

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۶- چند جواب برای ماتریس X داریم به طوریکه:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} << X << \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(۱) ۸ (۲) ۱۶ (۳) ۳۲ (۴) ۶۴

۱۷- روی مجموعه نقاط صفحه مختصات، رابطه هم‌ارزی $(x, y)R(z, t) \Leftrightarrow x + t = y + z$ تعریف شده است، نمودار دسته‌های هم‌ارزی کدام است؟

(۱) خطوط موازی نیمساز ناحیه اول (۲) خطوط موازی نیمساز ناحیه دوم

(۳) خطوط عمود بر محور OX (۴) خطوط عمود بر محور OY

۱۸- اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{3, 4, 5\}$ ، آنگاه $(A \times B) - B^2$ چند عضو دارد؟

(۱) ۸ (۲) ۴ (۳) ۱۰ (۴) ۶

۱۹- کدامیک از رابطه‌های زیر روی مجموعه اعداد حقیقی، یک رابطه هم‌ارزی نمی‌باشد؟

(۱) $x R y \Leftrightarrow x^3 = y^3$ (۲) $x R y \Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 y = 1$

(۳) $x R y \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9$ (۴) $x R y \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2xy$

۲۰- اگر M ماتریس متناظر با گراف جهتدار زیر باشد، چند ماتریس 4×4 مانند N وجود دارد که $N \wedge M << I_n$

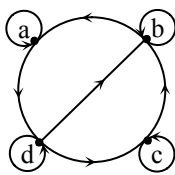
(۱) 2^7 (۲) 2^{11} (۳) 2^9 (۴) 2^{10}

۲۱- کدام نادرست است؟

(۱) رابطه زیرمجموعه بودن « $\subset$ » در خانواده مجموعه‌ها، دارای خاصیت تراگذاری است.

(۲) رابطه کوچکتر یا مساوی بودن « $\leq$ » در مجموعه اعداد حقیقی، پادمتقارن است.

(۳) رابطه عمود بودن در مجموعه خطوط یک صفحه دارای خاصیت ترایی است.



۴) رابطه تشابه در مجموعه اشکال هندسی، یک رابطه هم‌ارزی است.

۲۲- هرگاه $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3, p\}$, $C = \{p, q, 1\}$ مجموعه $(A \times B) - (A \times C)$ چند عضو دارد؟

۸ (۱) ۴ (۲) ۱۲ (۳) ۱۶ (۴)

۲۳- چند رابطه پادمتقارن و بازتابی روی مجموعه $\{a, b, c, d\}$ وجود دارد که فاقد زوجهای (a, c) و (b, a) بوده و شامل زوجهای (a, d) و (b, c) باشند؟

۱۴۴ (۱) ۳۶ (۲) 2^8 (۳) $2^4 \times 3^2$ (۴)

۲۴- کدام نادرست است؟

(۱) $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$ (۲) $(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cap C)$

(۳) $A - B = B' - A'$ (۴) $A \subset B \Rightarrow A - B = \emptyset$

۲۵- دو مجموعه A و B روی هم، ۱۴ عضو دارند، اگر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه A و ۱۶ برابر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه B باشد، در این صورت تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه A ، چند واحد از تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه B بیشتر است؟

۶^۴ (۱) 25×2^4 (۲) 15×2^5 (۳) ۱۲۸ (۴)

۲۶- کدامیک از ماتریسهای زیر مربوط به رابطه‌ای است که فقط بازتابی می‌باشد؟

(۱) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

۲۷- اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 5, 6, 7\}$ تعداد اعضای $A^2 \cup B^2$ کدام است؟

۴۱ (۱) ۴۵ (۲) ۳۷ (۳) ۴۹ (۴)

۲۸- کدام نادرست است؟

(۱) اگر n عددی صحیح و n^2 فرد باشد، آنگاه n نیز فرد است.

(۲) اگر n^2 مضربی از ۱۰ باشد، آنگاه n نیز مضربی از ۱۰ است.

(۳) اگر n^2 مضربی از ۹ باشد، آنگاه n نیز مضربی از ۹ است.

(۴) اگر n^2 مضربی از ۳ باشد، آنگاه n نیز مضربی از ۳ است.

۲۹- اگر x گویا و y گنگ باشد، چند مورد از موارد زیر درست می‌باشد؟

الف) xy گنگ است (ب) $x - \sqrt{2}y$ گویا است (ج) $x + 3y$ گنگ است (د) $\frac{x}{y}$ گنگ است

هـ) y^x گویا است (و) ممکن است گویا باشد ممکن است گنگ باشد

۳۰- کدام نادرست است؟

(۱) ۱۳ نفر در یک مهمانی حضور دارند، حداقل ۲ نفر از آنها وجود دارند که در یک ماه از سال متولد شده‌اند.

(۲) S یک زیرمجموعه 70 عضوی از اعداد طبیعی است، حداقل سه عضو از S وجود دارند که در تقسیم آنها بر 25، دارای باقیمانده یکسانی می‌باشند.

(۳) پنج نقطه داخل مربعی به ضلع 1 مفروضند، حداقل دو نقطه وجود دارند که فاصله آنها از یکدیگر، کمتر از $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است.

(۴) هر زیرمجموعه‌ای از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ که دارای 5 عضو باشد، حداقل دو عضو دارد که مجموع آنها برابر 10 است..

۳۱- کدام یک از گزاره‌های زیر «قضیه دو شرطی» نیست؟

(۱) $x = y$ اگر و فقط اگر $x^5 = y^5$

(۲) $\sin x = \sin y$ اگر و فقط اگر $x = y$

(۳) $x > 0$ اگر و فقط اگر $x^3 > 0$

(۴) $x + y$ فرد است اگر و فقط اگر x و y زوج و دیگری فرد باشد

۳۲- هرگاه تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی، 96 زیرمجموعه بیش از تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $(n - 2)$ عضوی باشد، n کدام است؟

(۱) 8 (۲) 6 (۳) 7 (۴) 5

۳۳- ارزش کدام گزاره نادرست است؟

(۱) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$ (۲) $\exists x \in \mathbb{Z} : x^8 + x^2 + 1 = 0$

(۳) $\exists x \in \mathbb{N} : x^2 - 12 = 0$ (۴) $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} : x + y = y$

۳۴- هرگاه $A = \{1, 2, 3\}$ ، $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ مجموعه $(A \times B) \cap (B \times A)$ چند عضو دارد؟

(۱) 2 (۲) 3 (۳) 4 (۴) 6

۳۵- کدام رابطه زیر یک رابطه هم‌ارزی نمی‌باشد؟

(۱) $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x + y = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$

(۲) $R = \{(x, y) : \sin^2 x + \cos^2 y = 1, x, y \in \mathbb{R}\}$

(۳) $(x, y) R (z, t) \Leftrightarrow y - x^2 = t - z^2$ ، (R^2 است).

(۴) $R = \{(x, y) : |x| - |y| \leq 0, x, y \in \mathbb{R}\}$

۳۶- رابطه R روی $(\mathbb{Z} - \{0\})^2$ به صورت مقابل تعریف شده است : $(x, y) R (z, t) \Leftrightarrow \frac{x}{y^3} = \frac{z}{t^3}$ اگر این رابطه یک

رابطه هم‌ارزی باشد، کلاس هم‌ارزی $(5, -3)$ کدام است؟

(۱) $x^3 = \frac{-5}{27} y$ (۲) $y^3 = \frac{-5}{27} x$ (۳) $x^3 = \frac{-27}{5} y$ (۴) $y^3 = \frac{-27}{5} x$

۳۷- هرگاه $B = \{\{2, \{2\}\}, \{5\}, \{10, \{10\}\}, \{\{7\}\}\}$ یک افزاین برای مجموعه A باشد، A کدام است؟

(۱) $\{2, 5, 7, 10\}$ (۲) $\{\{2\}, 5, 10, \{7\}\}$

$$\{2, 5, 10, \{7\}\} \quad \{2, 5, 10, \{2\}, \{7\}, \{10\}\} \quad (\epsilon) \quad (\epsilon)$$

۳۸- کدام نادرست است؟

(۱) یک مجموعه 100 عضوی، 2^{99} زیرمجموعه بیشتر از یک مجموعه 99 عضوی دارد.

(۲) تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه 20 عضوی 8 برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه 17 عضوی است.

(۳) اگر یک عضو به تعداد اعضای یک مجموعه اضافه کنیم، به تعداد زیرمجموعه‌هایش 2 واحد اضافه می‌شود.

(۴) مجموعه‌ای وجود ندارد که تعداد زیرمجموعه‌هایش 127 زیرمجموعه باشد.

۳۹- کدام نادرست است؟

$$A \Delta A' = U \quad (۱) \quad \text{اگر } A \subset B, A' \subset B, \text{ آنگاه } A = \emptyset \quad (۲)$$

$$(A - B) - (A \cap B) = A \cap B' \quad (۳) \quad (A \cap B' \cap C') \cup [A \cap (B \cup C)] = U \quad (۴)$$

۴۰- کدام نادرست است؟

$$\emptyset \subset \{\emptyset\} \quad (۱) \quad \emptyset \in \{\emptyset\} \quad (۲) \quad \emptyset \in \{\{\emptyset\}\} \quad (۳) \quad \emptyset \in \{\emptyset\} \quad (۴)$$

۴۱- تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $(K+2)$ عضوی چند برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $(K-2)$ عضوی است؟

$$16 \quad (۱) \quad 32 \quad (۲) \quad 8 \quad (۳) \quad 4 \quad (۴)$$

۴۲- اگر $A \cap B = \emptyset$ باشد، حاصل $(A \Delta B)'$ کدام است؟

$$A \cap B \quad (۱) \quad A' \cap B' \quad (۲) \quad M \quad (۳) \quad \emptyset \quad (۴)$$

۴۳- اگر مجموعه A ، K عضو داشته باشد، تعداد زیرمجموعه‌های $P(A)$ کدام است؟

$$2^{k^2} \quad (۱) \quad 2^{2k} \quad (۲) \quad 4^k \quad (۳) \quad 2^k \quad (۴)$$

۴۴- اگر Δ تفاضل متقارن باشد، حاصل $(A - B) \Delta (A - B')$ کدام است؟

$$A \cup B \quad (۱) \quad A \cap B \quad (۲) \quad A \quad (۳) \quad B \quad (۴)$$

۴۵- رابطه $R = \{(x, y) : x^3 + y^2 - 2y = 0\}$ در مجموعه اعداد حقیقی تعریف شده است، دامنه این رابطه کدام است؟

$$[1, +\infty] \quad (۱) \quad (-\infty, 2] \quad (۲) \quad (-\infty, 1] \quad (۳) \quad (1, +\infty) \quad (۴)$$

۴۶- مجموعه A ، دارای m عضو و مجموعه B دارای n عضو می‌باشد، حداکثر چند رابطه از A در B وجود دارد؟

$$m+n \quad (۱) \quad 2^{m+n} \quad (۲) \quad mn \quad (۳) \quad 2^{mn} \quad (۴)$$

۴۷- رابطه $R = \{(a, b)\}$ در مجموعه $A = \{a, b\}$ چه نوع رابطه‌ای است؟

$$\text{هم‌ارزی} \quad (۱) \quad \text{متقارن} \quad (۲) \quad \text{تعدی} \quad (۳) \quad \text{ترتیب} \quad (۴)$$

۴۸- کدامیک از روابط زیر در مجموعه بازتابی و ترایایی است؟

$$R = \{(2, 3)\} \quad (۱) \quad R = \{(2, 2), (1, 1), (3, 3), (1, 3)\} \quad (۲)$$

$$R = \{(1, 1), (2, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 2)\} \quad (۳) \quad R = \{(1, 2), (2, 1), (1, 1)\} \quad (۴)$$

۴۹- رابطه R در مجموعه اعداد حقیقی به صورت $x R y \Leftrightarrow x^2 + y^2 < 9$ تعریف شده است، این رابطه دارای خاصیت: است؟

- (۱) بازتابی (۲) تقارنی (۳) ترایایی (۴) ضدتقارن

۵۰- رابطه R در R^2 به صورت $(x, y) R (a, b) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ تعریف شده است، این رابطه کدام خاصیت زیر را ندارد؟

- (۱) بازتابی (۲) تقارنی (۳) ترایایی (۴) پادمتقارن

۵۱- روابط R_1 و R_2 در مجموعه A تعریف شده‌اند، هرگاه هر دو بازتابی باشند، کدام حکم نادرست است؟

- (۱) $R_1 \cap R_2$ بازتابی است (۲) $R_1 \cup R_2$ بازتابی است

- (۳) R_1^{-1} بازتابی است (۴) $R_1 - R_2$ بازتابی است

۵۲- روابط R_1 و R_2 در مجموعه A تعریف شده‌اند، هرگاه هر دو ترایایی باشند، کدام نادرست است؟

- (۱) $R_1 \cap R_2$ ترایایی است (۲) $R_1 \cup R_2$ ترایایی است

- (۳) R_1^{-1} ترایایی است (۴) هیچکدام

۵۳- به شرط بازتابی بودن R_1 و R_2 روی A ، چندتا از روابط زیر روی A بازتابی هستند؟

- الف) $R_1^{-1} \cap R_2'$ (ب) $R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$ (ج) $R_1 \cup R_2^{-1}$ (د) $R_1^{-1} - R_2^{-1}$

- (۱) 0 (۲) 1 (۳) 2 (۴) 3

۵۴- بر مجموعه 4 عضوی A ، چند رابطه می‌توان نوشت که تقارنی یا بازتابی باشد؟

- (۱) 2^{10} (۲) 79×2^6 (۳) 2^{12} (۴) 5×2^{10}

۵۵- بر روی مجموعه 5 عضوی A ، چند رابطه می‌توان نوشت که بازتابی باشد ولی تقارنی نباشد؟

- (۱) 31×2^{15} (۲) 2^5 (۳) $2^{20} - 2^{10}$ (۴) $2^{25} - 2^5$

۵۶- بر روی مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ چند رابطه می‌توان نوشت که پادتقارنی نباشند؟

- (۱) $2^{12} - 2^6 \times 3^4$ (۲) $2^4(4^6 - 3^6)$ (۳) $2^{16} - 3^6$ (۴) هیچکدام

۵۷- هرگاه R یک رابطه روی مجموعه A باشد و M ماتریس متناظر آن باشد، آنگاه کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) R بازتابی است اگر و فقط اگر که $I_n \ll M$ (۲) R متقارن است اگر و فقط اگر که $M = M^T$

- (۳) R ترایاست اگر و فقط اگر که $M \ll M^{(2)}$ (۴) R پادمتقارن است اگر و فقط اگر که $M \wedge M^T \ll I_n$

۵۸- تعداد روابطی روی مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ که بازتابی می‌باشند و شامل (3, 1) نیز باشند برابر است با:

- (۱) 2^7 (۲) 2^6 (۳) 2^5 (۴) 2^4

۵۹- تعداد ماتریسهای صفر و یک 4×4 که $M = M^T$ ، برابر است با:

- (۱) 2^{10} (۲) 2^8 (۳) 2^{12} (۴) 2^6

۶۰- ماتریس رابطه R به صورت $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ است، R کدام یک از خواص زیر را دارد؟

(۱) بازتابی و پادمتقارن (۲) بازتابی و ترایایی (۳) متقارن و ترایایی (۴) پادمتقارن و ترایایی

۶۱- اگر M ماتریس متناظر رابطه R و $M \wedge M^T = [1]$ ، آنگاه رابطه R کدام خاصیت را ندارد؟

(۱) پادتقارنی (۲) تقارنی (۳) ترایایی (۴) بازتابی

۶۲- تعداد همه رابطه‌های روی مجموعه A برابر با ۱۶ رابطه است، چند رابطه هم‌ارزی می‌توان روی A تعریف کرد؟

(۱) ۵ (۲) ۵۲ (۳) ۱۵ (۴) ۳

۶۳- اگر رابطه هم‌ارزی R ، مجموعه $A = \{a, b, c, d\}$ را به صورت $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$ افراز کند، تعداد اعضای R برابر است با:

(۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۰

۶۴- تعداد رابطه‌هایی روی یک مجموعه n عضوی که هم بازتابی و هم تقارنی می‌باشند برابر است با:

(۱) 2^{n^2-n} (۲) $2^{\frac{n^2-n}{2}}$ (۳) $2^{\frac{n^2+n}{2}}$ (۴) 2^{n^2+n}

۶۵- کدام یک از روابط زیر روی مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ فقط خاصیت بازتابی را دارد؟

(۱) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ (۲) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)\}$

(۳) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3), (3, 2)\}$ (۴) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3), (2, 1), (3, 2)\}$

۶۶- اگر افراز مجموعه به صورت $\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, \{6\}$ باشد، رابطه هم‌ارزی متناظر با آن چند زوج مرتب دارد؟

(۱) ۱۰ (۲) ۱۳ (۳) ۶ (۴) ۱۴

۶۷- رابطه R در مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ به صورت زیر تعریف شده است،

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 5)\}$$

حداقل چند زوج به R اضافه کنیم تا این رابطه روی A رابطه‌ای هم‌ارزی شود؟

(۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۵

۶۸- مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ چند افراز ۲ عضوی دارد؟

(۱) ۱۰ (۲) ۱۵ (۳) ۲۰ (۴) ۲۵

۶۹- اگر $A = \{1, \{1\}, \{\{1\}\}\}$ ، آنگاه تعداد زیرمجموعه‌های A - $P(A)$ کدام است؟

(۱) ۳۲ (۲) ۶۴ (۳) ۱۲۸ (۴) ۲۵۶

۷۰- فرض کنید R رابطه‌ای روی مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ باشد و M ماتریس متناظر با آن باشد، در کدام مورد

$M^{(2)} < M$ نیست؟

(۱) $R = \{(1, 2), (1, 3)\}$ (۲) $R = \{(1, 2), (3, 4)\}$

$$R = \{(1, 4), (2, 3)\} \quad (\epsilon)$$

$$R = \{(1, 2), (2, 1), (1, 1)\} \quad (\epsilon)$$

۷۱- اگر R یک رابطه روی مجموعه $A = \{x, y, z\}$ باشد، ماتریس مجاورت آن $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، در این صورت رابطه ROR کدام خواص زیر را دارد؟

(۱) بازتابی و تقارنی (۲) بازتابی و ترایایی (۳) تقارنی و ترایایی (۴) پادتقارنی و ترایایی

۷۲- رابطه هم‌ارزی R روی مجموعه $\{a, b, c, d, e\}$ آن را به دو دسته هم‌ارزی ۲ و ۳ عضوی افراز کرده است، گراف متناظر، به ترتیب چند طوقه و چند یال است؟

(۱) ۴ و ۹ (۲) ۵ و ۸ (۳) ۶ و ۷ (۴) ۲ و ۳

۷۳- دسته هم‌ارزی $[(1, 2)]$ در رابطه هم‌ارزی $(a, b) R (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$ کدام است؟

(۱) $\{(x, y) \mid y = 2x + 1\}$ (۲) $\{(x, y) \mid x = 2y + 1\}$

(۳) $\{(x, y) \mid y = 2x\}$ (۴) $\{(x, y) \mid x = 2y\}$

۷۴- اگر R متقارن باشد، کدام نادرست است؟

(۱) $R \cap R^{-1}$ متقارن است (۲) $R \cup R^{-1}$ متقارن است

(۳) $R \cap R^{-1} = R \cup R^{-1}$ (۴) $R - R^{-1}$ متقارن نیست

۷۵- کدام رابطه زیر روی اعداد حقیقی پادمتقارن است؟

(۱) $x R y \Leftrightarrow 2x = 1 - 2y$ (۲) $x R y \Leftrightarrow 5x - 3y = 1$

(۳) $x R y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0$ (۴) $x R y \Leftrightarrow 3x + 3y = 1$

۷۶- کدام رابطه زیر روی اعداد حقیقی پادمتقارن است؟

(۱) $x R y \Leftrightarrow |x - y| > 0$ (۲) $x R y \Leftrightarrow x^2 + y^2 - xy = 10$

(۳) $x R y \Leftrightarrow |x| - |y| = 10$ (۴) $x R y \Leftrightarrow 5x + 5y - |0| = 0$

۷۷- اگر $A \subset B$ باشد، $A \Delta B$ کدام است؟

(۱) $A \cup B$ (۲) $A' \cap B$ (۳) $A' \cup B$ (۴) $B' \cap A$

۷۸- مجموعه تهی چند زیرمجموعه محض دارد؟

(۱) یک (۲) دو (۳) هیچ (۴) سه

۷۹- اگر مجموعه A دارای n عضو باشد، مجموعه $P(A)$ دارای چند زیرمجموعه است؟ $P(A)$ مجموعه توانی A می‌باشد، یعنی مجموعه همه زیرمجموعه‌های A

(۱) 2^{2n} (۲) 2^{n^2} (۳) 2^{2n} (۴) 2^n

۸۰- اگر مجموعه A از مجموعه B ، یک عضو بیشتر داشته باشد و اختلاف تعداد زیرمجموعه‌های آنها ۳۲ باشد، مجموعه B چند عضو دارد؟

(۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) هیچکدام

۸۱- اگر $A = \{5, 6, 7, 8\}$ و $B = \{5, 6, 7\}$ باشد $|A^2 \cup B^2|$ برابر است با :

- (۱) 15 (۲) 16 (۳) 17 (۴) 25

۸۲- هرگاه $A \cap B = \{a, b\}$ ، $A - B = \{c, d\}$ و $B - A = \{e, f, g\}$ باشد، $A \cup B$ کدام است؟

- (۱) $\{a, b, c, d\}$ (۲) $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ (۳) $\{c, d, e, f, g\}$ (۴) هیچکدام

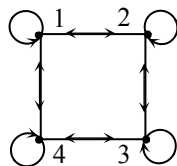
۸۳- اگر $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $M \wedge M^T$ ، کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

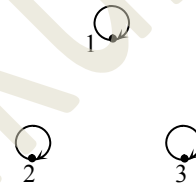
۸۴- رابطه $R = \{(x, y) \mid x \mid y\}$ روی مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ چند عضو دارد؟

- (۱) 6 (۲) 12 (۳) 18 (۴) 9

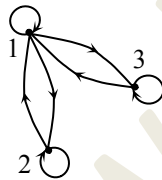
۸۵- کدامیک از گرافهای زیر، رابطه هم‌ارزی است؟



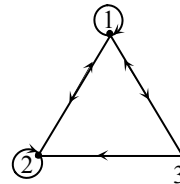
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

۸۶- تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی و ۴ عضوی مجموعه‌ای مانند A برابر هم می‌باشند، تعداد روابط بازتابی و متقارن روی A کدام است؟

- (۱) 2^7 (۲) 2^{21} (۳) 2^{28} (۴) 2^{11}

۸۷- تعداد رابطه‌های بازتابی و متقارن روی مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ که $(1, 3)$ را دارند اما $(2, 3)$ را ندارند برابر است با :

- (۱) 2^8 (۲) 2^{11} (۳) 2^9 (۴) 2^{10}

۸۸- هرگاه A مجموعه‌ای با بیش از یک عضو باشد، آنگاه A^2 :

- (۱) تریایی نیست (۲) تقارنی نیست (۳) بازتابی نیست (۴) پادتقارنی نیست

۸۹- کدام یک از رابطه‌های زیر روی مجموعه اعداد طبیعی متقارن است؟

(۱) $x R y \Leftrightarrow 3x = 15 - 3y$ (۲) $x R y \Leftrightarrow x \mid y$

(۳) $x R y \Leftrightarrow x \leq y$ (۴) $x R y \Leftrightarrow x < y$

۹۰- اگر بدانیم $B \cap C = \emptyset$ ، حاصل $(A - B) \cup (A - C) \cup (A - D)$ کدام است؟

$$A \cup B \cup C \cup D \quad (\epsilon) \quad A \quad (3) \quad M \quad (2) \quad \emptyset \quad (1)$$

۹۱- اگر $A' \cup B' = \emptyset$ باشد، کدام گزاره، نادرست است؟

$$A' = B' \quad (\epsilon) \quad A' \cap B = A \quad (3) \quad A' = A \cap M' \quad (2) \quad A = B = \emptyset \quad (1)$$

۹۲- چند مجموعه مانند A وجود دارد به طوریکه: $\{a, b\} \subset A \subset \{a, b, c, d, e, f\}$ ؟

$$32 \quad (\epsilon) \quad 16 \quad (3) \quad 8 \quad (2) \quad 4 \quad (1)$$

۹۳- به ازای کدام مقادیر و دو زوج مرتب $(14, x + y^2)$ و $(x^2 + y, 28)$ با هم مساویند؟

$$\begin{cases} x=4 \\ y=12 \end{cases} \quad (\epsilon) \quad \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases} \quad (3) \quad \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases} \quad (1)$$

۹۴- اگر رابطه $\{(1, 2), (2, x), (2, 1), (1, 1)\}$ بر مجموعه $A = \{1, -1, 2, -2\}$ تراگذار باشد، x کدام است؟

$$-1 \quad (\epsilon) \quad 1 \quad (3) \quad -2 \quad (2) \quad 2 \quad (1)$$

۹۵- رابطه R روی $\mathbb{R}^2$ چنین تعریف شده است: $(x, y) R (z, t) \Leftrightarrow y - x^2 = t - z^2$ ، در این حالت دسته هم‌ارزی $(1, 2)$ به کدام صورت است؟

$$\text{بیضی} \quad (1) \quad \text{سه‌می} \quad (2) \quad \text{دایره} \quad (3) \quad \text{هذلولی} \quad (\epsilon)$$

۹۶- رابطه R در مجموعه $A = \{3, 6, 9\}$ به صورت $R = \{(3, 9), (3, 3), (6, 6), (9, 9)\}$ تعریف شده است. R ،

(۱) هم‌ارزی است (۲) یک تابع از A به A است

(۳) تقارنی است (۴) ترتیب است

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{که } E < F \text{ با شرط } E < F \text{ با } F \text{ یک ماتریسهای صفر و یک} \quad \text{۹۷- تعداد ماتریسهای صفر و یک}$$

$$32 \quad (\epsilon) \quad 256 \quad (3) \quad 128 \quad (2) \quad 512 \quad (1)$$

۹۸- اگر $A = \{a, b, c\}$ باشد، تعداد رابطه‌هایی که می‌توان در A نوشت، برابر است با:

$$9^2 \quad (\epsilon) \quad 3^2 \quad (3) \quad 2^9 \quad (2) \quad 2^3 \quad (1)$$

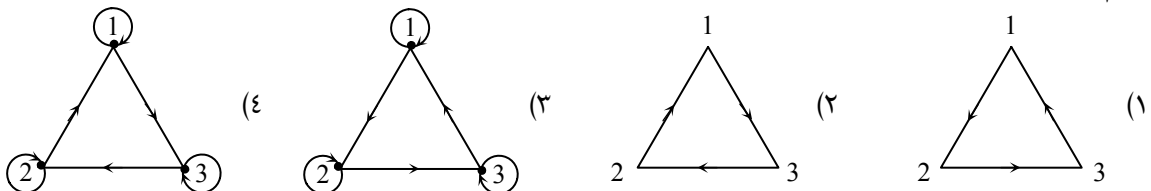
۹۹- چه تعداد از رابطه‌های زیر روی مجموعه اعداد طبیعی متقارن هستند؟

$$x R y \Leftrightarrow x \leq y \quad (\text{الف}) \quad x R y \Leftrightarrow x + y < 100 \quad (\text{ب}) \quad x R y \Leftrightarrow x | y \quad (\text{ج})$$

$$x R y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \quad (\text{هـ}) \quad x R y \Leftrightarrow 3x - 4y = 7 \quad (\text{د})$$

$$1 \quad (\epsilon) \quad 3 \quad (3) \quad 2 \quad (2) \quad 4 \quad (1)$$

۱۰۰- فرض می‌کنیم $A = \{1, 2, 3\}$ و R روی A به صورت $1 R 2$ ، $2 R 3$ ، $3 R 1$ تعریف شده باشد، نمودار ROR، کدام است؟



۱۰۱- رابطه R روی $\mathbb{N}$ به صورت $x R y \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 16$ تعریف شده است، گراف جهتدار متناظر رابطه R ، چند یال دارد؟

- (۱) 7 (۲) 9 (۳) 8 (۴) 6

۱۰۲- تعداد رابطه‌های هم‌ارزی روی یک مجموعه 4 عضوی برابر است با :

- (۱) 5 (۲) 15 (۳) 52 (۴) 18

۱۰۳- رابطه $x R y \Leftrightarrow xy > 0$ روی کدام مجموعه زیر، خاصیت بازتابی دارد؟

- (۱) $\mathbb{Z}$ (۲) $\mathbb{N}$ (۳) $\mathbb{Z} - \{0\}$ (۴) گزینه‌های (2) و (3)

۱۰۴- فرض کنید R یک رابطه پادمتقارن روی A و I_A رابطه همانی روی A باشد، کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟ $I_A = \{(x, y) : x \in A\}$

- (۱) $R = R^{-1}$ (۲) $R \cup R^{-1} = I_A$ (۳) $R \cap R^{-1} = I_A$ (۴) $R \cap R^{-1} \subset I_A$

۱۰۵- چند رابطه روی یک مجموعه 3 عضوی می‌توان تعریف کرد به طوریکه متقارن باشند، اما پادمتقارن نباشند؟

- (۱) 56 (۲) 56×2^3 (۳) 48 (۴) 8

۱۰۶- اگر ماتریس متناظر با رابطه R به صورت $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ داده شده باشد، رابطه $R \circ R$ چند عضوی است؟

- (۱) 5 (۲) 6 (۳) 7 (۴) 4

۱۰۷- رابطه R روی مجموعه اعداد حقیقی به این صورت تعریف شده است : $x R y \Leftrightarrow x - y < 2$ این رابطه چند مورد از ویژگیهای بازتابی، تقارنی، پادمتقارنی و ترایی را دارد؟

- (۱) 3 (۲) 2 (۳) 4 (۴) 1

۱۰۸- کدام نادرست است؟

(۱) R متقارن است اگر و تنها اگر که $R = R^{-1}$

(۲) اگر R_1 و R_2 روی A ترایا باشند، $R_1 \cup R_2$ نیز روی A ترایا است

(۳) هرگاه R رابطه‌ای دلخواه روی A باشد، $R \cap R^{-1}$ همواره روی A متقارن است

(۴) $\emptyset$ همواره تقارنی است.

۱۰۹- اگر $S = \{(5, 5), (5, 8), (5, 2)\}$ و $R = \{(6, 5), (6, 9), (2, 20)\}$ ، در این صورت کدام یک از زوجهای مرتب زیر عضو ROS است؟

- (۱) (2, 8) (۲) (2, 9) (۳) (5, 20) (۴) (5, 9)

۱۱۰- چند رابطه بازتابی می‌توان روی مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ نوشت؟

- (۱) 4069 (۲) 4096 (۳) 1024 (۴) 6049

۱۱۱- رابطه R روی $A = \{1, 2, 3, 4\}$ به صورت $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 4)\}$ مفروض است، ROR کدام است؟

$$\{ (1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 4) \} (۱)$$

$$\{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4) \} (۲)$$

$$\{ (1, 1), (2, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 3) \} (۳)$$

$$\{ (1, 1), (2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 2), (3, 3), (4, 3) \} (۴)$$

۱۱۲- رابطه متناظر با گراف مقابل چگونه است؟

(۱) بازتابی و متقارن است

(۲) متقارن و پادمتقارن است

(۳) بازتابی نیست ولی ترایی است

(۴) هیچ کدام از چهار ویژگی بازتابی، تقارنی، ترایی و پادتقارنی را ندارد.

۱۱۳- کدامیک از ماتریسهای زیر، مربوط به یک رابطه پادمتقارن است؟

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} (۴)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (۳)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (۲)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (۱)$$

۱۱۴- تعداد روابط با خواص «بازتابی، متقارن و پادمتقارن» روی یک مجموعه n عضوی برابر است با :

$$2^{n^2} (۴)$$

$$1 (۳)$$

$$0 (۲)$$

$$2^n (۱)$$

۱۱۵- کدام گزینه نادرست است؟

(۱) $\emptyset$ ترایا است.

(۲) هر رابطه به صورت $\{(a, b), (a \neq b)\}$ پادمتقارن است.

(۳) هر رابطه به صورت $\{(a, b)\}$ تقارنی، پادتقارنی و ترایی است.

(۴) رابطه $x R y \Leftrightarrow x + y = 5$ در اعداد طبیعی بازتابی است.

۱۱۶- تعداد رابطه‌های روی مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ که بازتابی نیستند، اما زوج مرتب $(2, 2)$ را دارند، کدام است؟

$$192 (۴)$$

$$184 (۳)$$

$$214 (۲)$$

$$160 (۱)$$

۱۱۷- کدام یک از رابطه‌های زیر نه متقارن است و نه پادمتقارن؟

$$\{(1, 1), (2, 2)\} (۲)$$

$$\{(1, 2), (2, 1), (3, 1)\} (۱)$$

$$\{(1, 2)\} (۴)$$

$$\{(6, 5), (5, 6), (2, 2)\} (۳)$$

۱۱۸- اگر رابطه R روی مجموعه‌ای مانند $A = \{1, 2, 3, 4\}$ تعریف شده باشد و آن را فقط به یک دسته هم‌ارزی افزاز

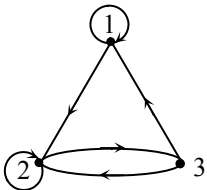
کند، تعداد یالهای جهتدار گراف متناظر رابطه R کدام است؟

$$16 (۴)$$

$$4 (۳)$$

$$14 (۲)$$

$$4! (۱)$$



۱۱۹- اگر $A = \{1, 2, \dots, 20\}$ و $B = \{1, 2, 13, \dots, 30\}$ آنگاه $(A \times B) \cup (B \times A)$ چند عضو دارد؟

(۱) 639 (۲) 482 (۳) 679 (۴) 529

۱۲۰- چند رابطه پادتقارنی روی مجموعه 4 عضوی $A = \{1, 2, 3, 4\}$ می‌توان نوشت که شامل (1,2) باشند و شامل (3,4) نباشند؟

(۱) $3^5 \times 2^4$ (۲) $2^5 \times 3^4$ (۳) $2^4 \times 3^4$ (۴) 2^{12}

۱۲۱- چند رابطه بازتابی روی مجموعه 4 عضوی A می‌توان نوشت که بازتابی باشند ولی پادتقارنی نباشند؟

(۱) $2^{14} - 3^4$ (۲) $2^{10} - 3^8$ (۳) $2^{12} - 3^6$ (۴) $2^{16} - 2^2 \times 3^4$

۱۲۲- چند رابطه بازتابی یا تقارنی روی مجموعه 4 عضوی A می‌توان نوشت؟

(۱) 2^6 (۲) $2^{12} + 2^8 - 2^6$ (۳) $2^{12} - 2^{10}$ (۴) 79×2^6

۱۲۳- چند رابطه روی مجموعه 4 عضوی A می‌توان نوشت که نه بازتابی باشند و نه تقارنی؟

(۱) $2^{12} - 2^6$ (۲) $64(2^{10} - 79)$ (۳) $32(2^{12} - 81)$ (۴) $2^{16} - 2^6$

۱۲۴- چند رابطه روی مجموعه 4 عضوی $A = \{1, 2, 3, 4\}$ می‌توان نوشت که متقارن باشند و شامل (1,2) و (3,2) بوده و (1,4) را نداشته باشند؟

(۱) 2^7 (۲) 2^5 (۳) 2^6 (۴) 2^{12}

۱۲۵- اگر $A \times B = C \times D$ ، آنگاه :

(۱) $A \times C = B \times D$ (۲) $B \times A = D \times C$ (۳) $C \times A = D \times B$ (۴) $C \times D = B \times A$

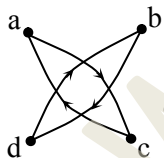
۱۲۶- هرگاه A و B دو مجموعه دلخواه باشند، مجموعه $A - (A - B)$ برابر است با :

(۱) $A \cup B$ (۲) $A \cap B$ (۳) B (۴) $\emptyset$

۱۲۷- فرض می‌کنیم نمودار R به صورت باشد، ROR چند تا از خواص بازتابی-تقارنی، پادتقارنی و ترایی را دارد؟

(۱) 2 (۲) 3

(۳) 1 (۴) 4



۱۲۸- ماتریس $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ نظیر رابطه‌ای R است، رابطه R کدام ویژگیها را دارد؟

(۱) فقط تقارنی (۲) فقط پادتقارن (۳) فقط بازتابی (۴) ترتیب

۱۲۹- اگر در گراف جهت‌داری، فقط یک رأس طوقه نداشته باشد، رابطه نظیر آن گراف جهت‌دار :

(۱) متقارن است ولی بازتابی نیست

(۲) متقارن نیست ولی بازتابی است

(۳) نه متقارن است و نه بازتابی

(۴) ممکن است متقارن باشد ولی قطعاً بازتابی نیست

۱۳۰- یکی از شرایط لازم برای آنکه رابطه R روی مجموعه A ، یک رابطه هم‌ارزی باشد، آنست که:

$$(1) M \ll M^T \quad (2) M \ll I_n \quad (3) M^{(2)} \ll M^T \quad (4) M^{(2)} \ll I_n$$

۱۳۱- R دارای کدام خاصیت باشد تا ROR خاصیت بازتابی داشته باشد؟

(۱) تقارنی (۲) ترایی (۳) پادمتقارنی (۴) بازتابی

۱۳۲- تعداد ماتریسهای صفر و یک مانند M از مرتبه‌های 4×4 که در شرط $M^T \wedge M \ll I_n \ll Mb$ صدق می‌کنند، عبارتست از:

$$(1) 3^{12} \quad (2) 3^{11} \quad (3) 3^{10} \quad (4) 3^9$$

۱۳۳- تعداد رابطه‌های روی یک مجموعه ۵ عضوی که پادتقارن نیستند کدام است؟

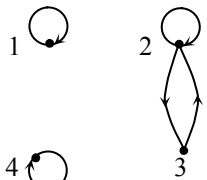
$$(1) 2^4(2^{12} - 3^6) \quad (2) 2^{16} - 3^8 \quad (3) 2^4(2^8 - 3^6) \quad (4) 2^{12} - 2^4 \times 3^6$$

۱۳۴- هرگاه $A = \{x, y, z\}$ و $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ماتریس نظیر رابطه R روی مجموعه A باشد، کدام درست است؟

(۱) R ترتیب است $R = A \times A$ (۲)

(۳) $R = \emptyset$ (۴) R هم متقارن و هم پادمتقارن است

۱۳۵- گراف جهتدار یک رابطه مانند R روی مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ در شکل زیر رسم شده است، این رابطه، کدام خاصیت زیر را دارد؟



(۱) پادتقارنی و ترایی (۲) تقارنی و بازتابی

(۳) ترایی و پادمتقارنی (۴) پادمتقارن و بازتابی نیست

۱۳۶- می‌دانیم رابطه R روی مجموعه $A = \{1, 2\}$ دارای خاصیت بازتابی است، این رابطه چه تعداد از خواص بازتابی، تقارنی، تعدی، پادتقارنی را دارد؟

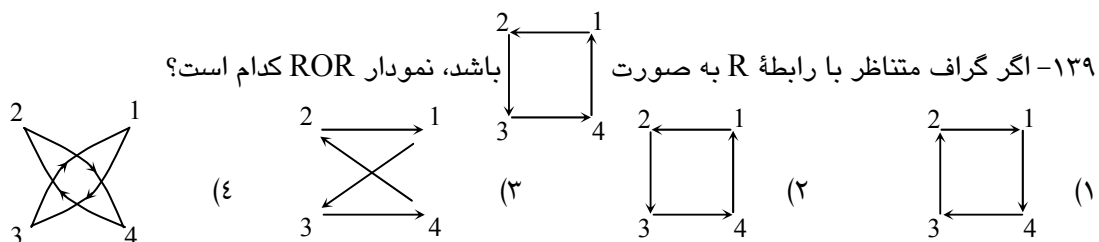
(۱) چهار (۲) یک (۳) حداقل دو (۴) حداقل سه

۱۳۷- اگر $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 2)\}$ در این صورت، ماتریس رابطه R^{-1} کدام است؟

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

۱۳۸- اگر به مجموعه‌ای، ۲ عضو بیفزاییم، تعداد ۹۶ زیرمجموعه به زیرمجموعه‌هایش اضافه می‌شود، تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی این مجموعه چیست؟

(۱) ۶ (۲) ۱۰ (۳) ۱۵ (۴) ۲۰



۱۴۰- کدام درست است؟

(۱) رابطه برادر بودن روی مجموعه انسانها، متقارن است

(۲) رابطه پدر بودن روی مجموعه انسانها، ترایا است

(۳) رابطه مادر بودن روی مجموعه انسانها، منعکس است

(۴) هیچکدام

۱۴۱- رابطه xRy با ضابطه $y = x + 2$ در مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ تعریف شده است، دامنه R کدام است؟

(۴) $\{2, 3\}$

(۳) A

(۲) $\{1, 2\}$

(۱) $\{3, 4\}$

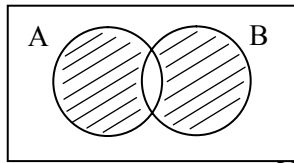
(۳) -۱

$$A \cup B' = B' \Rightarrow A \subset B' \Rightarrow B \subset A'$$

یادآوری: $A \cup B = B \Rightarrow A \subset B$

۲- (۱) مجموعه توانی یک مجموعه، مجموعه همه زیرمجموعه‌های آن مجموعه است.

$$A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) \quad \text{۳- (۳) توجه کنید که}$$



U

$$\Delta U = (A \cup U) - (A \cap U) = U - A = A'$$

(۴) -۴

$$\left. \begin{array}{l} A_1 = \{1\} \\ A_2 = \{1, 2\} \\ A_3 = \{1, 2, 3\} \\ \vdots \\ A_n = \{1, 2, 3, \dots, n\} \end{array} \right\} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i = \{1\} = A_1$$

(۳) -۵

$$A \cup (A' \cap B) = (A \cup A') \cap (A \cup B) = U \cap (A \cup B) = A \cup B = B$$

(۲) -۶

توجه کنید که چون $A \subset B$ است، لذا $A \cup B = B$

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cap B)'$$

(۴) -۷

$$(A \Delta B)' = [(A \cup B) \cap (A \cap B)']' = (A \cup B)' \cup (A \cap B) \Rightarrow A \cap B \subset A \Delta B$$

یادآوری: $(A \cap B)' = A' \cup B'$

$$(A - B) \cup (B - A) = \{x, t\} \Rightarrow A \Delta B \Rightarrow (A \cup B) - (A \cap B) = \{x, t\}$$

(۱) -۸

$$\Rightarrow \begin{cases} x, t \in A \cup B \\ x, t \notin A \cap B \\ t \notin A \\ x, y, z \in A \end{cases} \Rightarrow t \in B, x \notin B, y, z \in B \Rightarrow B = \{x, y, t\}$$

$$(x, y) \in (A \times B)^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in A \times B \Leftrightarrow (x, y) \in B \times A \Rightarrow (A \times B)^{-1} = B \times A$$

(۳) -۹

(۴) -۱۰

$$\begin{array}{l} R = \{(1, 2)\} \\ S = \{(2, 3)\} \end{array} \rightarrow \begin{cases} ROS = \{\} \\ SOR = \{(1, 3)\} \end{cases} \Rightarrow ROS \neq SOR$$

مثال نقض:

دقت کنید که گزینه های (۱) و (۲) را با قوانین دمورگان قاطی نکنید

۱۱- نکته: هرگاه رابطه ی R روی مجموعه ی اعداد حقیقی به صورت زیر تعریف نشده باشد $XRY \Leftrightarrow ax + by = c$ آنگاه:

الف) اگر $a = b$ باشد، R تقارنی است.ب) اگر $a \neq b$ باشد، R پاد تقارنی است.

ج) چه $a = b$ باشد و چه $a \neq b$ ، آنگاه R نه بازتابی بوده نه ترایی

لذا طبق نکته فوق، گزینه ی 3 صحیح است، دقت کنید:

$$\begin{cases} xRy \Leftrightarrow 3x - 2y = 10 \\ yRx \Leftrightarrow 3y - 2x = 10 \end{cases} \Rightarrow 3x - 2y = 3y - 2x \Rightarrow 5x = 5y \Rightarrow x = y$$

پس R پاد متقارن است.

$$[1] = \{x \in A : xR1\} = \{1, 3\} \quad (12)-(4) \quad \text{دقت کنید که } 1, \text{ فقط با خودش و } 3 \text{ رابطه دارد.}$$

$$(x, y) \in A \times B \Rightarrow (y, x) \in A \times B \quad (13)-(2) \quad \text{چون } A \times B \text{ متقارن است لذا داریم:}$$

$$(x, y) \in A \times B \Rightarrow (y, x) \in A \times B \Rightarrow (x, y) \in (B \times A) \quad \text{در نتیجه:}$$

$$B \times A \subset A \times B, \quad (2) \quad \text{پس: } A \times B \subset B \times A, \quad \text{چون روابط فوق برگشت پذیرند لذا:}$$

$$(1), (2) \Rightarrow A \times B = B \times A \Rightarrow A = B$$

$$A \times B \Leftrightarrow A = B \quad \Leftrightarrow A = B$$

یادآوری:

$$\phi \times A = \phi \quad (14)-(2) \quad \text{نکته:}$$

$$(\phi \times A)' = \phi' = A \times A \quad \text{لذا داریم:}$$

دقت کنید که در اینجا اشتباهاً ϕ' را برابر U فرض نکنید، زیرا در اینجا $A \times A$ نقش مجموعه ی مرجع را بازی می کند.

$$\left. \begin{aligned} 2x+1=-1 &\Rightarrow x=-1 \Rightarrow \frac{x+1}{2}=0 \in A \\ 2x+1=1 &\Rightarrow x=0 \Rightarrow \frac{x+1}{2}=\frac{1}{2} \in A \\ 2x+1=3 &\Rightarrow x=1 \Rightarrow \frac{x+1}{2}=1 \in A \\ 2x+1=5 &\Rightarrow x=2 \Rightarrow \frac{x+1}{2}=\frac{3}{2} \in A \end{aligned} \right\} 0 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 3 \quad (15)-(3)$$

$$(16)-(2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ll \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \square \\ 1 & \square & 1 & \square \\ \square & \square & 1 & 1 \\ 1 & \square & \square & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

از یک طرف باید داشته باشیم:

$$\begin{bmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & 0 & \square & \square \\ 0 & \square & \square & \square \\ \square & \square & 0 & \square \end{bmatrix} \ll \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

از طرف دیگر باید داشته باشیم:

با توجه به (1) و (2) ماتریس X باید به صورت زیر باشد:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در واقع مربعهای مشترک را نگه می‌داریم :

هر مربع را به دو طریق می‌توان پرکرد (0 یا 1) لذا تعداد ماتریسهای X برابر است با : $2^4 = 16$

۱۷- (۱) کافی است دو دسته هم‌ارزی را به طور دلخواه بیابیم لذا داریم :

$$\begin{cases} (x, y) R (1, 2) \Rightarrow x + 2 = y + 1 \Rightarrow y = x + 1 \\ (x, y) R (3, -1) \Rightarrow x - 1 = y + 3 \Rightarrow y = x - 4 \end{cases}$$

همانطور که دیده می‌شود، نمودار دسته‌های هم‌ارزی خطوط موازی نیمساز ناحیه اول می‌باشند

$$(A \times B) - B^2 = (A \times B) - (B \times B) = (A - B) \times B$$

$$= \{1, 2\} \times \{3, 4, 5\} \rightarrow 2 \times 3 = 6$$

۱۸- (۴)

$$(A \times B) - (B \times B) = (A - C) \times B$$

یادآوری:

$$A \times B = \left\{ (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5) \right\}$$

$$B^2 = \{ (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 3), (5, 4), (5, 5) \}$$

روش دیگر:

$$(A \times B) - B^2 = \{ (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5) \}$$

۶ عضو دارد

۱۹- (۳) رابطه این گزینه خواص بازتابی و ترایی را ندارد به عنوان مثال دقت کنید که $(1, 1) \notin R$ زیرا $1^2 + 1^2 \neq 9$ ،

3 رابطه دیگر، هرسه ، رابطه هم‌ارزی می‌باشند.

۲۰- (۲) ابتدا ماتریس متناظر با گراف جهتدار داده شده را به صورت زیر مشخص می‌کنیم :

$$M(R) = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

اکنون ماتریس 4×4 N را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$N = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} & n_{24} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} & n_{34} \\ n_{41} & n_{42} & n_{43} & n_{44} \end{bmatrix}$$

$$N \wedge M = \begin{bmatrix} n_{11} & 0 & 0 & n_{14} \\ n_{21} & n_{22} & 0 & 0 \\ 0 & n_{32} & n_{33} & 0 \\ 0 & n_{42} & n_{43} & n_{44} \end{bmatrix}$$

لذا طبق ضرب مؤلفه در مؤلفه (8) داریم :

لذا عبارت $N \wedge M \ll I_n$ معادل است با :

$$N \wedge M = \begin{bmatrix} n_{11} & 0 & 0 & n_{14} \\ n_{21} & n_{22} & 0 & 0 \\ 0 & n_{32} & n_{33} & 0 \\ 0 & n_{42} & n_{43} & n_{44} \end{bmatrix} \ll \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

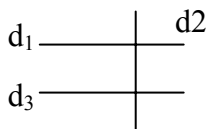
که نتیجه میدهد: $n_{14} = n_{21} = n_{32} = n_{42} = n_{43} = 0$ لذا ماتریس N به صورت

$$\begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} & 0 \\ 0 & n_{22} & n_{23} & n_{24} \\ n_{31} & 0 & n_{33} & n_{34} \\ n_{41} & 0 & 0 & n_{44} \end{bmatrix}$$

در می آید،

بنابراین از 16 درایه ی N ، 11 درایه باقی می ماند که می توانند 0 یا 1 باشند لذا 2^{11} ماتریس N با خاصیت مورد نظر وجود دارد.

۲۱- (۳) با توجه به شکل مقابل، دیده میشود که هرگاه d_1 بر d_3 عمود نخواهد بود، بلکه با آن موازی خواهد شد، درواقع دو خط عمود بر یک خط، با یکدیگر موازیند



$$(A \times B) - (A \times C) = A \times (B - C)$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$2 = 8 \text{ عضو} \times \text{عضو}$$

۲۲- (۱)

۲۲- (۲) با توجه به داده های تست، صورت اولیه ی ماتریس رابطه ی موردنظر به شکل زیر خواهد بود:

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & \square & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \bigcirc \\ \square & \square & 1 & \bigcirc \\ \square & \bigcirc & \bigcirc & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

چون رابطه ی موردنظر بازتابی است لذا درایه های روی قطر اصلی، همگی 1 می باشند.

و چون فاقد (a,c) و (b,a) می باشد، پس این دو درایه صفرند و چون شامل (a,d) و (b,c) می باشد، پس این دو درایه هر دو یک می باشند، اما چون R پا متقارن است و (a,c) و (b,a) را ندارد، لذا (a,b) و (c,a) را می تواند داشته باشد می تواند نداشته باشد، لذا هر یک از دو مستطیل به 2 طریق پر میشوند (0 یا 1)، از طرفی چون R پاد متقارن است و (a,d) و (b,c) را دارد پس دیگر نباید (d,a) و (c,b) را داشته باشد، لذا این دو درایه، اجباراً باید صفر باشند و تحت اختیار ما نیستند بنابراین دو مربع هر دو با صفر پر می شوند لذا باقی می ماند، درایه های درون دو دایره و دو بیضی که طبق پاد متقارن بودن R ، دو دایره به 3 طریق و دو بیضی هم به 3 طریق پر میشوند $((0,0), (1,0), (0,1))$ لذا ماتریس مطلوب کلامی تواند به $2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$ حالت مختلف باشد، یعنی 36 رابطه با خواص مطلوب روی مجموعه ی $\{a,b,c,d\}$ وجود دارد.

۲۴- (۱) مثال نقض : فرض می‌کنیم :

$$\begin{cases} A = \{1, 2\} \\ B = \{1\} \\ C = \{2\} \end{cases}$$

لذا تساوی $A \cup B = A \cup C$ برقرار است ولی $B \neq C$

۲۵- (۳) فرض می‌کنیم A و B به ترتیب دارای m, n عضو باشند، به طوری که $n+m=14$

از طرف دیگر طبق فرض داریم :

$$2^n = 16 \times 2^m \text{ لذا :}$$

$$2^n = 2^{4+m} \Rightarrow n = 4 + m$$

$$\begin{cases} n + m = 14 \\ n - m = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 9 \\ m = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |A| = 9 \\ |B| = 5 \end{cases}$$

$$A \text{ تعداد زیرمجموعه‌های } 2^9 \rightarrow 2^9 - 2^5 = 2^5 (2^4 - 1) = 15 \times 2^5$$

$$B \text{ تعداد زیرمجموعه‌های } 2^5$$

۲۶- (۲) گزینه‌ی ۱، بازتابی، پاد تقارنی و تراییی است، گزینه‌ی ۳، بازتابی، تقارنی و تراییی است گزینه‌ی ۴، هر ۴ ویژگی را دارد، اما گزینه‌ی ۲، فقط بازتابی است.

$$\begin{aligned} |A^2 \cup B^2| &= |A^2| + |B^2| - |A^2 \cap B^2| \\ &= |A|^2 + |B|^2 - |A \cap B|^2 = |6 + 25 - 4| = 27 \end{aligned} \quad (۳) \text{ ۲۷-}$$

۲۸- (۳) اگر $n=3$ باشد، $n^2=9$ مضرب ۹ بوده ولی n مضرب ۹ نیست.

$$xy = 0 \times \sqrt{2} = 0 \text{ گویا} \quad (۳) \text{ ۲۹- (الف) نادرست است مثال نقض :}$$

$$x - \sqrt{2}y = 0 - \sqrt{2} \times \sqrt{3} = -\sqrt{6} \text{ اهم} \quad (ب) \text{ نادرست است مثال نقض :}$$

(ج) درست است

$$\frac{x}{y} = \frac{0}{\sqrt{5}} = 0 \text{ گویا} \quad (د) \text{ نادرست است مثال نقض :}$$

$$y^x = (\sqrt{2})^3 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ اهم} \quad (ه) \text{ نادرست است مثال نقض :}$$

$$\begin{cases} y^2 = (\sqrt{2})^3 = 7 \\ y^2 = (\sqrt[3]{7})^2 = \sqrt[3]{49} \end{cases} \quad (و) \text{ درست است مثال :}$$

۳۰- (۴) مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ زیرمجموعه‌ای 5 عضوی از مجموعه‌ی داده شده می‌باشد که مجموع هیچ دو عضوی از آن برابر 10 نمی‌باشد، 3 گزینه‌ی دیگر طریق اصل لانه‌ی کبوتری صحیح می‌باشند.

۳۱- (۲) اگر $x=y$ باشد آنگاه $\sin x = \sin y$ خواهد بود، اما عکس این مطلب در حالت کلی نادرست است، به عنوان مثال $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ$ ولی $150^\circ \neq 30^\circ$ یادآوری می‌کنیم که قضیه دو شرطی، یک ترکیب شرطی همواره درست است.

$$2^n = 2^{n-2} + 96 \Rightarrow 2^n = \frac{2^n}{4} + 96 \Rightarrow 4(2^n) - 2^n = 4 \times 96 \quad (۳) - ۳۲$$

$$3(2^n) = 4 \times 96 \Rightarrow 2^n = 4 \times 32 \Rightarrow 2^n = 2^7 \Rightarrow n = 7$$

۳۳- (۱) اگر $x=0$ باشد آنگاه $x^2=0$ میشود

$$|(A \times B) \cap (B \times A)| = |A \cap B| \quad (۳) - ۳۴ \quad \text{نکته : می‌دانیم}$$

$$|(A \times B) \cap (B \times A)| = 2^2 = 4 \quad \text{لذا با توجه به اینکه } A \cap B = \{2, 3\} \text{ داریم :}$$

۳۵- (۴) رابطه‌ی گزینه‌ی 4 خاصیت تقارنی را ندارد دقت کنید که $(2, 3) \in R$ ولی $(3, 2) \notin R$

$$\begin{aligned} [(5, -3)] &= \{(x, y) \in (\mathbb{Z} - \{0\})^2 : (x, y) R (5, -3)\} \\ &= \{(x, y) \in (\mathbb{Z} - \{0\})^2 : \frac{x}{y^3} = \frac{5}{-27}\} \quad (۴) - ۳۶ \end{aligned}$$

$$= \{(x, y) \in (\mathbb{Z} - \{0\})^2 : y^3 = \frac{-27}{5}x\} \rightarrow$$

۳۷- (۳) کافی است آکولادهای دو طرف اعضای B را برداریم تا اعضای A مشخص شوند.

$$\left\{ \begin{array}{l} \{2, \{2\}\} \rightarrow 2, \{2\} \\ \{5\} \rightarrow 5 \\ \{10, \{10\}\} \rightarrow 10, \{10\} \\ \{\{7\}\} \rightarrow \{7\} \end{array} \right\} \Rightarrow A = \{2, 5, 10, \{2\}, \{7\}, \{10\}\}$$

۳۸- (۳) نکته : اگر یک عضو به تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه (مثلاً n عضوی)، اضافه کنیم، به تعداد زیرمجموعه‌هایش 2^n عضو اضافه میشود، دقت کنید که : $2^{n+1} = 2(2^n) = 2^n + 2^n$ مثلاً همان طور که در گزینه‌ی (1) آمده است، یک مجموعه 100 عضوی، 2^{99} زیرمجموعه بیشتر از یک مجموعه‌ی 99 عضوی دارد.

$$\begin{aligned} (A \cap B' \cap C') \cup [A \cap (B \cup C)] &= [A \cap (B \cup C')] \cup [A \cap (B \cup C)] \\ &= A \cap [(B \cup C)' \cup (B \cup C)] = A \cap U = A \end{aligned} \quad (۴) - ۳۹$$

۴۰- (۲) می‌دانیم $\emptyset$ زیرمجموعه‌ای می‌باشد، لذا گزینه‌های (1)، (3) درست می‌باشند، درستی گزینه‌ی 4، بدیهی است. گزینه‌ی 2 نادرست است، $\emptyset$ عضو این مجموعه نمی‌باشد، مجموعه‌ی $\{\{\emptyset\}\}$ فقط یک عضو دارد و آن هم $\{\emptyset\}$ است.

$$2^{k+2} = x \times 2^{k-2} \Rightarrow \frac{2^{k+2}}{2^{k-2}} = x \Rightarrow$$

(۱) - ۴۱

$$\frac{2^k \times 2^2}{2^k \times 2^{-2}} = x \Rightarrow x = 2^4 = 16$$

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) \quad \text{۴۲- (۲) می دانیم:}$$

حال اگر $A \cap B = \emptyset$ باشد داریم: $A \Delta B = A \cup B$ ، لذا داریم:

$$(A \Delta B)' = (A \cup B)' = A' \cap B'$$

۴۳- (۲) مجموعه‌ی $p(A_0)$ ، مجموعه‌ی توانی A است، یعنی مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی A ، لذا: اگر A ، K عضو داشته باشد، $P(A)$ ، 2^K عضو دارد (زیرا A ، 2^K زیرمجموعه دارد)، لذا $P(A)$ ، 2^{2^K} زیرمجموعه دارد.

$$\begin{cases} A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) \\ A - B = A \cap B' \end{cases} \quad \text{۴۴- (۳) یادآوری:}$$

$$\begin{aligned} (A - B) \Delta (A - B') &= (A \cap B') \Delta (A \cap B) \\ &= [(A \cap B') \cup (A \cap B)] - [(A \cap B') \cap (A \cap B)] \\ &= [A \cap (B' \cup B)] - \emptyset = A \cap U = A \end{aligned}$$

اکنون داریم:

$$x^3 + y^2 - 2y = 0 \Rightarrow x^3 + y^2 - 2y + 1 = 1 \Rightarrow x^3 + (y - 1)^2 = 1 \quad \text{۴۵- (۳)}$$

$$x^3 - 1 = (y - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^3 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^3 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow D_R = (-\infty, 1] \quad \text{۴۵- (۱)}$$

۴۶- (۴) چون A ، m عضو و B ، n عضو دارد، لذا $A \times B$ ، mn عضو داشته و بنابراین 2^{mn} رابطه از A در B وجود دارد، یادآوری می‌کنیم که هر رابطه از مجموعه‌ی A در مجموعه‌ی B ، زیرمجموعه است از $A \times B$ ، لذا تعداد رابطه‌هایی که از A به B وجود دارد، برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $A \times B$.

۴۷- (۳) این رابطه فقط متعدی است.

۴۸- (۲)، گزینه ۱ تراییی است ولی بازتابی نیست، گزینه‌ی (۳)، (۴) نه بازتابی‌اند و نه تراییی.

۴۹- (۲) چون رابطه نسبت به y, x متقارن است پس متقارن است دقت کنید که اگر جای y, x را عوض کنیم هیچ تاثیری ندارد در واقع داریم:

$$xRy \Rightarrow x^2 + y^2 < 9 \Rightarrow y^2 + x^2 < 9 \Rightarrow yRx$$

۵۰- (۴) این رابطه فقط پاد متقارن نیست زیرا $(2, 1)R(1, 2)$ ، ولی $(1, 2) \neq (2, 1)$ ، دقت کنید که سه خاصیت دیگر را دارد.

۵۱- (۴) $R_1 - R_2$ بازتابی نیست : زیرا اگر فرض کنیم :

$$A = \{1, 2\}$$

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(1, 1), (2, 2), (1, 2)\} \quad \text{بازتابی هست} \\ R_2 &= \{(1, 1), (2, 2)\} \quad \text{بازتابی هست} \end{aligned} \Rightarrow R_1 - R_2 = \{(1, 2)\} \quad \text{بازتابی نیست}$$

۵۲- (۲) $R_1 \cup R_2$ ممکن است تراییی نباشد، زیرا اگر فرض کنیم :

$$A = \{1, 2\}$$

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(1, 2)\} \quad \text{بازتابی نیست} \\ R_2 &= \{(2, 1)\} \quad \text{تراییی هست} \end{aligned} \Rightarrow R_1 \cup R_2 = \{(1, 2), (2, 1)\} \quad \text{تراییی نیست}$$

۵۳- (۳) یادآوری : هرگاه R_2, R_1 بازتابی باشند R_2^{-1}, R_1^{-1} نیز بازتابی اند اما R_2, R_1 حتماً بازتابی نیستند. لذا (ب) و (ج) بازتابی اند اما (الف) و (د) بازتابی نیستند. در قسمت (الف) ، R_1^{-1} بازتابی است ولی R_2 بازتابی نیست ، لذا اشتراکشان بازتابی نخواهد بود.

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ | \text{بازتابی و تقارنی} | - | \text{تقارنی} | + | \text{بازتابی} | &= | \text{بازتابی یا تقارنی} | \end{aligned}$$

$$= 2^{12} + 2^{10} - 2^6 = 2^6(2^6 + 2^4 - 1)79 \times 2^6$$

$$\text{یادآوری :} \quad \text{تعداد بازتابی و} \quad 2^{n-n} = 2^{\frac{n2+n}{2}} = \text{تعداد تقارنی}$$

۵۵- (۱)

$$\begin{aligned} |A - B| &= |A| - |A \cap B| \\ | \text{بازتابی و تقارنی} | - | \text{تقارنی} | &= | \text{بازتابی} | \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |R'| &= |A^2| - |R| \\ | \text{بازتابی و تقارنی} | - | \text{تقارنی} | &= 2^{16} - (2^4 \times 3^6) = 2^4(2^{12} - 3^6) \\ &= 2^4((2^2)^6 - 3^6) = 2^4 - (4^6 - 3^6) \end{aligned}$$

۵۷- (۳) R تراییست اگر و فقط اگر $M^{(2)} \ll M$

$$\begin{array}{ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \cup 0 & 1 \\ 1 \cup 0 & 1 & 1 \cup 0 \\ 1 \cup 0 & 1 \cup 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

۵۸- (۳)

۵۹- نکته : R متقارن است اگر و فقط اگر که $M = M^T$ (M ماتریس متناظر R است) لذا کافی است تعداد روابط متقارن

$$2^{\frac{n2+n}{2}} = 2^{\frac{20}{2}} = 2^{10}$$

روی یک مجموعه‌ی 4 عضوی را بیابیم که برابر است با :

۶۰- (۴) چون روی قطر اصلی، درایه‌ی صفر داریم ، لذا R بازتابی نیست، بنابراین گزینه‌های 1 و 2 نادرست‌اند، ضمناً ماتریس نسبت به قطر اصلی متقارن نیست، پس گزینه‌ی 3 نیز درست است.

$$N \wedge M^T = [1] \Rightarrow M = [1] \Rightarrow R = A \times A \Rightarrow \text{پاد متقارن نیست} \quad (۱) - ۶۱$$

نکته : اگر $|A| > 1$ ، آنگاه $A \times A$ بازتابی، تقارنی و تراییی بوده ولی پاد متقارن نخواهد بود.

۶۲- (۳) نکته : اگر n, A عضو داشته باشد، در این صورت روی A ، 2^{n^2} رابطه وجود دارد.

$$2^{16} = 2^{n^2} \Rightarrow n^2 = 16 \Rightarrow n = 4 \Rightarrow 15 = \text{تعداد افزارها} = \text{تعداد رابطه‌های هم ارزی}$$

یادآوری می کنیم که یک مجموعه 4 عضوی ، 15 افزاز دارد.

۶۳- (۳) نکته : هرگاه رابطه‌ی هم ارزی R، مجموعه‌ی A را به صورت $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ افزاز کند، در این صورت تعداد اعضای R برابر است با :

$$|A_1|^2 + |A_2|^2 + \dots + |A_n|^2$$

$$2^2 + 2^2 = 8$$

لذا تعداد اعضای R برابر است با :

نکته : یادآوری می کنیم که متناظر هر افزاز یک رابطه‌ی هم ارزی و متناظر هر رابطه‌ی هم ارزی ، یک افزاز داریم رابطه‌ی هم ارزی متناظر با افزاز $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$ به صورت زیر است :

$$R = \left\{ \underbrace{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)}_{\text{متناظر } \{a, b\}}, \underbrace{(c, c), (c, d), (d, c), (d, d)}_{\text{متناظر } \{c, d\}} \right\}$$

همانطوریکه دیده می شود ، R دارای 8 عضو می باشد.

$$2^{\frac{n^2-n}{2}} \quad (۲) - ۶۴ \quad \text{نکته : تعداد روابط بازتابی و تقارنی روی یک مجموعه‌ی } n \text{ عضوی برابر است با :}$$

۶۵- (۳) واضح است که رابطه‌ی گزینه‌ی 3، خاصیت بازتابی را دارد ولی سه خاصیت دیگر را ندارد چون (1,2) را دارد ولی (2,1) را ندارد پس تقارنی نیست، چون (2,3) و (3,2) را دارد لذا پاد تقارنی هم نیست، و بالاخره چون (1,2) و (2,3) را دارد ولی (1,3) را ندارد پس ترایی نمی‌باشد.

۶۶- (۴) نکته : هرگاه رابطه‌ی هم ارزی مجموعه‌ی A را به صورت $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ افزاز کرده باشد، آن گاه تعداد اعضای رابطه R برابر است با :

$$|R| = |A_1|^2 + |A_2|^2 + \dots + |A_n|^2$$

$$|R| = 2^2 + 3^2 + 1^2 = 14 \quad \text{لذا داریم:}$$

۶۷- (۲) برای بازتابی بودن، لازم است دو عضو (3,3) و (4,4) را داشته باشد، برای تقارنی بودن چون (1,2) و (3,5) را دارد لذا باید (2,1) و (5,3) را نیز داشته باشد، ضمناً چون (4,3) و (3,5) را دارد، طبق ترایی بودن باید (4,5) و در نتیجه تقارنی بودن باید (5,4) را نیز داشته باشد، لذا زوج باید به R اضافه کرد تا R روی A، رابطه‌ای هم‌ارزی شود.

روش دیگر: اگر R بخواهد روی A، رابطه‌ای هم‌ارزی باشد، بایستی A را افراز نماید (زیرا متناظر با هر افراز یک رابطه‌ای هم‌ارزی و متناظر هم رابطه‌ای هم‌ارزی، یک افراز داریم) اما با توجه به ظاهر R معلوم میشود که افراز متناظر R باید به صورت $\{\{1,2\}, \{3,4,5\}\}$ باشد، لذا تعداد اعضای R برای آنکه رابطه‌ای هم‌ارزی شود برابر است با: $|R| = 2^2 + 3^2 = 13$ چون هم اکنون 6 زوج دارد، لذا 7 زوج دیگر باید به R اضافه کرد تا رابطه‌ای هم‌ارزی روی A شود.

۶۸- هر افراز 2 عضوی $A = \{1,2,3,4,5\}$ یا به صورت $\{\{1,2,3\}, \{4,5\}\}$ بوده یا به صورت $\{\{1,2,3,4\}, \{5\}\}$ ، اما تعداد افرازهایی به صورت اول برابر $10 = \binom{5}{2} = \binom{5}{3}$ افراز بوده و تعداد افرازهایی به صورت دوم برابر $5 = \binom{5}{1} = \binom{5}{4}$ می‌باشد لذا داریم: $10 + 5 = 15$

۶۹- می‌دانیم $P(A)$ مجموعه‌ای توانی A است، یعنی مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های A، لذا داریم:

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{1\}\}, \{\{\{1\}\}\}, \{1, \{\{1\}\}\}, \{\{1\}, \{\{1\}\}\}, A\}$$

لذا $P(A) = 2^{|A|} = 2^6 = 64$ ، زیرا A در $\{\{1\}\}, \{1\}$ نیز هستند بنابراین $P(A) - A = 64 - 2 = 62$ زیرمجموعه دارد.

۷۰- (۳) نکته: R روی A ترایی است اگر و فقط اگر که $M^{(2)} \ll M$ لذا کافی است در بین گزینه‌ها، دنبال رابطه‌ای بگردیم که ترایا نباشد اما رابطه گزینه 3 ترایا نمی‌باشد، چرا که (2,1) و (1,2) را دارد ولی (2,2) را ندارد.

$$M(R \circ R) = (M(R))^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (۷۱-۲)$$

با توجه به $M(R \circ R)$ دیده میشود که ROR خاصیت تقارنی و پاتقارنی را ندارد و فقط خواص بازتابی و ترایی را دارد.

۷۲- (۲) نکته: هرگاه رابطه‌ای هم‌ارزی R، مجموعه‌ای A را به صورت $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ افراز کند، آنگاه تعداد اعضای R برابر است با:

$$|R| = |A_1|^2 + |A_2|^2 + \dots + |A_n|^2$$

$$|R| = 2^2 + 3^2 = 13 \quad \text{لذا در اینجا داریم:}$$

لذا گراف متناظر R ، 13 یال دارد که از این تعداد 5 یال، طوقه بوده و 8 تای دیگر یال می باشند.

۷۳- (۳)

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow ad = bc$$

$$\Rightarrow (x, y)R(1, 2) \Rightarrow 2x = y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [(1, 2)] = \{(x, y) : y = 2x\} \Rightarrow$$

۷۴- نکته : هرگاه R متقارن باشد، آنگاه $R=R^{-1}$ لذا داریم : $R \Rightarrow R=R^{-1} \Rightarrow R-R^{-1} = R-R = \emptyset$ متقارن

می دانیم $\emptyset$ متقارن است، لذا $R-R^{-1}$ نیز متقارن است.

روش دیگر : چون R متقارن است لذا R^{-1} نیز متقارن است و در نتیجه $R-R^{-1}$ نیز متقارن است. (دقت کنید که تفاضل دو رابطه متقارن، متقارن است.)

۷۵- نکته : هرگاه R رابطه ای به صورت $XY \Leftrightarrow ax + by = c$ روی اعداد حقیقی باشد، در این صورت R ، پاد متقارن است اگر و فقط اگر که $a \neq b$ ، و R متقارن است اگر و فقط اگر که $a=b$ ، لذا گزینه ی 2 صحیح است، توجه کنید :

$$\begin{cases} xRy \\ yRx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x-3y=1 \\ 5y-3x=1 \end{cases} \Rightarrow 5x-3y=5y-3x \Rightarrow 8x=8y \Rightarrow x=y$$

ضمناً گزینه های 1 و 4 هر دو متقارند، رابطه ی گزینه ی 4 نیز پاد متقارن نیست، توجه کنید :

مثال نقض : در این رابطه $(-2, 2) \in R, (2, -2) \in R$ ولی $-2 \neq 2$

۷۶- (۳) نکته : رابطه R متقارن است هرگاه اگر جای y, x را عوض کنیم، رابطه باز هم برقرار باشد با توجه به نکته فوق دیده میشود که گزینه های (1)، (2)، (4) متقارند ولی گزینه 3 متقارن نیست، دقت کنید که $(12, 2) \in R$ ولی $(2, 12) \notin R$

۷۷- (۲) نکته :

$$A=B \Rightarrow \begin{cases} A \cup B = B \\ A \cap B = A \end{cases}$$

$$\Rightarrow A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = B - A = B \cap A'$$

۷۸- (۳) نکته : تعداد زیرمجموعه های محض هر مجموعه، برابر است با : $2^n - 1$ یادآوری می کنیم که هر زیرمجموعه ی یک مجموعه، غیر از خودش را، زیرمجموعه ی محض آن مجموعه می گویند لذا تعداد زیرمجموعه های محض $\emptyset$ برابر است با : $2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ ، به عنوان نکته به خاطر بسپارید که تهی تنها مجموعه ای است که زیرمجموعه ی محض ندارد.

۷۹- (۳) نکته : می دانیم اگر مجموعه ی A ، n عضو داشته باشد آنگاه 2^n زیرمجموعه دارد لذا در واقع $P(A)$ ، 2^n عضو

دارد و در نتیجه، تعداد زیرمجموعه‌های $P(A)$ برابر است با: 2^{2^n} ، دقت کنید که 2^{2^n} با $2^{2^n} = (2^2)^n$ فرق دارد:

$$2^8 = 2^{2^3} = 2^6 \text{ ولی } (2^2)^3 = 2^6$$

۸۰- (۱) فرض می‌کنیم A دارای n عضو باشد، لذا B ، $n+1$ عضو دارد، بنابراین داریم:

$$2^{n+1} - 2^n = 32 \Rightarrow 2(2^n) - 2^n = 32$$

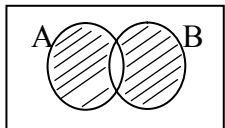
$$\Rightarrow 2^n = 32 \Rightarrow n = 5$$

$$B \subset A \Rightarrow B \times B \subset A \times A \Rightarrow B^2 \subset A^2 \Rightarrow A^2 \cup B^2 = A^2 \quad \text{۸۱- (۲)}$$

$$\Rightarrow |A^2 \cup B^2| = |A^2| = |A|^2 = 4^2 = 16$$

$$|A^2 \cup B^2| = |A^2| + |B^2| - |A|^2 + |B|^2 - |A \cap B|^2 = 16 + 9 - 9 = 16$$

راه دیگر:



$$\Rightarrow A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = \{c, d, a, b, e, f, y\} \quad \text{۸۲- (۲)}$$

$$M \wedge M^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{۸۳- (۴)}$$

دقت کنید که این ضرب با ضرب معمولی ماتریسها و حتی با ضرب لولی ماتریسها فرق دارد، در اینجا هر درایه در نظیرش ضرب می‌شود.

۸۴- (۳) عدد ۱، هر ۶ عضو را می‌شمارد، پس ۶ زوج با مولفه‌های اول ۱ دارد، $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ به همین ترتیب، ۴ عضو با مولفه‌های اول ۲، ۳ عضو با مولفه‌های اول ۳، ۲ عضو با مولفه‌های اول ۴، ۲ عضو با مولفه‌های اول ۶ و بالاخره یک عضو با مولفه‌ی اول ۱۲ داریم، بنابراین مجموعه‌ی R $1+2+2+3+4+6=18$ عضو دارد.

۸۵- (۱) در گزینه‌ی (۱) داریم: $R = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$ که یک رابطه هم‌ارزی است. گزینه‌ی (۳)، بازتابی نیست، زیرا $(3,3)$ را ندارد، گزینه (۲) تراپا نیست زیرا $(1,2)$ و $(2,3)$ را دارد ولی $(1,3)$ را ندارد، گزینه‌ی (۴)، نیز تراپا نیست زیرا $(2,1)$ و $(1,3)$ را دارد ولی $(2,3)$ را ندارد دقت کنید که نداشتن حتی یک خاصیت، دلیل کافی برای هم‌ارزی نبودن رابطه است.

$$\binom{n}{3} = \binom{n}{4} \Rightarrow n = 3 + 4 = 7 \quad \text{تعداد روابط بازتابی و متقارن} = 2^{\frac{n^2-n}{2}} = 2^{21} \quad \text{۸۶- (۲)}$$

$$(p \neq q), \binom{n}{p} = \binom{n}{q} \Rightarrow n = p + q \quad \text{یا} \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \text{یادآوری:}$$

۸۷- (۴) داخل هر مربع می‌تواند دو حالت داشته باشد 0 یا 1 لذا تعداد رابطه‌های مطلوب برابر است با: 2^{10}

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow M = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & \square & 1 & \square \\ \square & 1 & 0 & \square \\ \square & \square & 1 & \square \\ \square & \square & \square & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

۸۸- (۴) نکته: هرگاه A مجموعه‌ای با بیش از 1 عضو باشد، آنگاه A^2 دارای خواص بازتابی، تقارنی و ترایی بوده ولی خاصیت پاد متقارن را ندارد، به عنوان مثال اگر $A = \{1, 2\}$ ، آنگاه $A^2 = A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$ همان طور که می‌بینیم A^2 ویژگی پاد متقارنی را ندارد زیرا $(1, 2), (2, 1)$ را دارد ولی $1 \neq 2$

۸۹- نکته: هرگاه R رابطه‌ای به صورت $xRy \Leftrightarrow ax + by = c$ باشد، آنگاه R متقارن است اگر و فقط اگر که $a=b$ باشد، لذا گزینه‌ی (1) متقارن است، دقت کنید:

$$xRy \Rightarrow 3x = 15 - 3y \Rightarrow 3x + 3y = 15 \Rightarrow 3y + 3x = 15 \Rightarrow 3y = 15 - 3x \Rightarrow yRx$$

برای تقارنی نبودن سه گزینه دیگر، خودتان مثال نقض بیاورید.

$$\begin{aligned} (A - B) \cup (A - C) \cup (A - D) &= (A \cap B') \cup (A \cap D') = A \cap [B' \cup C' \cup D'] \\ &= A \cap [(B' \cup C') \cup D'] = A \cap [(B \cap C)' \cup D'] = A \cap [\emptyset' \cup D'] \\ &= A \cap (U \cup D') = A \cap U = A \end{aligned} \quad (۳) - ۹۰$$

$$A' \cup B' = \emptyset' \Rightarrow A' \cup B' = M \Rightarrow A' = B' = M \Rightarrow A = B = \emptyset' \quad (۱) - ۹۱$$

۹۲- (۳) طبق $\{a, b\} \subset A$ اجباراً باید a, b را داشته باشد و اما طبق $A \subset \{a, b, c, d, e, f\}$ می‌تواند c, d, e و f را داشته باشد یا نداشته باشد، بنابراین $2^4 = 16$ مجموعه مانند A با شرایط بیان شده وجود دارد.

۹۳- (۳) نکته: دو زوج مرتب (a, b) و (c, d) مساویند اگر و فقط اگر که $\begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$ باشد.

$$(x^2 + y, 28) = (14, x + y^2) \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y = 14 = 3^2 + 5 \\ x + y^2 = 28 = 3 + 5^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$(1, 1) \in R, (1, 2) \in R \xrightarrow{\text{تراپاست}} \begin{cases} (2, 2) \in R \\ (2, x) \in R \end{cases} \Rightarrow x = 2 \quad (۱) - ۹۴$$

$$\begin{aligned} [(1, 2)] &= \{(x, y) : (x, y)R(1, 2)\} = \{(x, y) : y - x^2 = 2 - 1\} \\ &= \{(x, y) : y = x^2 + A\} \Rightarrow \end{aligned} \quad (۲) - ۹۵$$

۹۶- (۴) واضح است که R هر سه ویژگی بازتابی، پادقارنی و ترایی را دارد و لذا از یک رابطه ترتیب است

$$E \ll F \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ll \begin{bmatrix} 1 & \square & 1 & \square \\ \square & 1 & \square & 1 \\ 1 & \square & 1 & 1 \\ \square & 1 & \square & 1 \end{bmatrix} \quad (۹۷-۲)$$

درایه داخل هر مربع می‌تواند 0 یا 1 باشد لذا تعداد ماتریسهای F با شرط $E \ll F$ برابر $2^7 = 128$ خواهد بود.

۹۸- (۲) نکته: تعداد رابطه‌هایی که می‌توان در مجموعه‌ی n عضوی A نوشت برابر است با: 2^n

لذا تعداد رابطه‌هایی که در مجموعه‌ی سه عضوی $\{a, b, c\}$ می‌توان نوشت برابر است با: $2^3 = 2^9$

۹۹- (۲) نکته: هرگاه یک رابطه، نسبت به y, x متقارن باشد (یعنی با تعویض y, x، شکل رابطه تغییر نکند)، در این صورت آن رابطه متقارن است.

لذا (ب) و (ه) متقارنند اما (الف)، (ج) و (د) نامتقارنند، به عنوان مثال در گزینه‌ی (ب) داریم:

$$xRy \Rightarrow x + y < 100 \Rightarrow y + x < 100 \Rightarrow yRx$$

$$xRy \Rightarrow x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow y^2 - x^2 = 0 \Rightarrow yRx$$

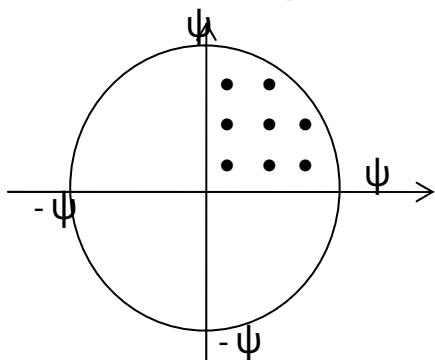
و در گزینه‌ی (د) داریم:

اما در گزینه‌ی (الف) داریم: $2 \leq 6 \Rightarrow 2R6$ ولی $6 \not\leq 2$ لذا $6 \not R 2$ ، در مورد گزینه‌های (ج) و (د) نیز مثال نقض وجود دارد.

$$1R2, 2R3, 3R1 \Rightarrow R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\} \quad (۱۰۰-)$$

$$\left. \begin{array}{l} (1, 2) \in R, (2, 3) \in R \Rightarrow (1, 3) \in ROR \\ (2, 3) \in R, (3, 1) \in R \Rightarrow (2, 1) \in ROR \\ (3, 1) \in R, (1, 2) \in R \Rightarrow (3, 2) \in ROR \end{array} \right\} \Rightarrow ROR = \{(1, 3), (2, 1), (3, 2)\}$$

۱۰۱- (۳) چون R روی $\mathbb{N}$ تعریف شده است، زوج مرتب‌هایی را در نظر می‌گیریم که مولفه‌های اول و دوم شان عدد طبیعی بوده، در ضمن مجموع مربعاتشان کوچکتر یا مساوی 16 باشد (به عبارت دیگر نقاط درون دایره‌ای به مرکز مبدا و به شعاع 4 که در ربع اول قرار می‌گیرد را پیدا می‌کنیم)



$$\Rightarrow R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$$

لذا گراف جهت دار متناظر رابطه‌ی R ، 8 یال دارد، دقت کنید که هر طوقه نیز، یک یال محسوب میشود.

۱۰۲- (۲) نکته : تعداد رابطه‌های هم‌ارزی روی یک مجموعه مانند A برابر است با تعداد افرازهای آن مجموعه

$$1 = \text{تعداد افرازهای یک عضوی} \Rightarrow \{\{x\}, \{y\}, \{z\}, \{t\}\} = \text{افزار یک عضوی}$$

$$\text{تعداد افرازهای دو عضوی} = \frac{\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{2} + \binom{4}{3}\binom{1}{1} = 7 \Rightarrow \{\{x, y\}, \{z, t\}\}, \{\{x, y, z\}, \{t\}\}, \dots = \text{افزار دو عضوی}$$

دقت کنید که از t, z, y, x دو حرف را انتخاب می‌کنیم و سپس دو حرف دیگر را در یک مجموعه‌ی دیگر می‌نویسیم، اما وقتی $\{x, y\}$ را انتخاب می‌کنیم، قطعاً عضو دیگر خانواده $\{z, t\}$ خواهد بود و بالعکس اگر $\{z, t\}$ را انتخاب کنیم، قطعاً عضو دیگر خانواده $\{x, y\}$ خواهد بود، لذا باید این تکرار در نظر گرفته شود، به همین جهت تعداد انتخاب $\binom{4}{2}\binom{2}{2}$ را بر ۲ تقسیم می‌کنیم

$$\text{تعداد افزارهای نه عضوی} = \frac{\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{2!} = 6 \Rightarrow \{\{x, y\}, \{z\}, \{t\}\}, \{\{x, z\}, \{y\}, \{t\}\}, \dots = \text{افزار سه عضوی}$$

$$1 = \text{تعداد افزارهای 4 عضوی} \Rightarrow \{\{x\}, \{y\}, \{z\}, \{t\}\} = \text{افزار چهار عضوی}$$

$$15 = 1 + 7 + 6 + 1 = \text{تعداد روابط هم‌ارزی}$$

$$xRx \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{N} \text{ یا } x \in \mathbb{Z} - \{0\} \quad (۱۰۳- (۴))$$

$$(x, y) \in R \cap R^{-1} \Rightarrow \begin{cases} (x, y) \in R \\ (x, y) \in R^{-1} \end{cases} \xrightarrow{x=y} \begin{cases} (x, y) \in R \\ (y, x) \in R \end{cases} \Rightarrow x = y \quad (۱۰۴- (۴))$$

$$\Rightarrow (x, y) = (x, x) \in I_A$$

$$105- (۱) |A - B| = |A| - |A \cap B| = \text{تعداد روابط متقارن روی } A \text{ که روی } A \text{ پاد متقارن نیستند}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \text{تعداد رابطه‌های متقارن روی مجموعه‌ای } n \text{ عضوی} &= |A| = 2^{\frac{n^2+n}{2}} = 2^6 \\ \text{تعداد رابطه‌های متقارن و پادمتقارن روی مجموعه‌ای } n \text{ عضوی} &= |B| = 2^n = 2^3 \end{aligned} \right\}$$

$$|A - B| = |A| - |A \cap B| = \text{تعداد روابط متقارن روی } A \text{ که روی } A \text{ پادمتقارن نیستند}$$

$$\Rightarrow |A - B| = 2^6 - 2^3 = 2^3(2^3 - 1) = 7 \times 2^3 = 56$$

$$M(R) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M(R \circ R) = M^2(R) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (۱۰۶- (۳))$$

در نتیجه ROR، 7 عضو دارد، (در واقع به تعداد یکهای ماتریس M^2R)

روش دیگر :

$a \quad b \quad c$

$$M(R) = \begin{matrix} & a & b & c \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \Rightarrow R = \{(a,b), (a,c), (b,b), (c,c)\}$$

$$\begin{cases} (a,b) \in R, (b,b) \in R \Rightarrow (a,b) \in ROR \\ (a,c) \in R, (c,a) \in R \Rightarrow (a,a) \in ROR \\ (a,c) \in R, (c,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in ROR \Rightarrow 7 \text{ عضو دارد } ROR \\ (c,a) \in R, (a,b) \in R \Rightarrow (c,b) \in ROR \\ (c,a) \in R, (a,c) \in R \Rightarrow (c,c) \in ROR \\ (b,b) \in R, (b,b) \in R \Rightarrow (b,b) \in ROR \\ (c,c) \in R, (c,a) \in R \Rightarrow (c,c) \in ROR \end{cases}$$

$$xRx \Rightarrow x - x < 2 \Rightarrow 0 < 2 \Rightarrow \text{بازتابی را دارد :} \quad (۱۰۷-۴)$$

تقارنی را ندارد، زیرا اگر جای y, x را عوض کنیم رابطه‌ی $x - y < 2$ به صورت $y - x < 2$ در می‌آید که ممکن است برقرار نباشد : دقت کنید که $(3, 7) \in R$ ولی $(7, 3) \notin R$ خاصیت پاد تقارنی را نیز ندارد زیرا $(2, 1) \in R, (1, 2) \in R$ ولی $1 \neq 2$ ، خاصیت ترایی را نیز ندارد زیرا $(5, 4) \in R, (4, 3) \in R$ ولی $(5, 3) \notin R$

(۱۰۸-۲) مثال نقض فرض می‌کنیم :

$$\begin{cases} A = \{1, 2, 3\} \\ R_1 = \{(1, 2)\} \\ R_2 = \{(2, 3)\} \end{cases}$$

R_1 و R_2 هر دو روی A ترایا هستند اما $R_1 \cup R_2 = \{(1, 2), (2, 3)\}$ روی A ترایا نیست

$$\begin{aligned} S &= \{(5, 5), (5, 8), (5, 2)\} \\ R &= \{(6, 5), (6, 9), (2, 20)\} \end{aligned} \quad (۱۰۹-۳)$$

برای به دست آوردن اعضای ROS، زوج مرتبی مانند (x, y) در S اختیار می‌کنیم، اگر زوج مرتبی به صورت (y, z) در R باشد، آنگاه زوج مرتب (x, z) عضوی از ROR است. $(5, 2) \in S, (2, 20) \in R \Rightarrow (5, 20) \in R$

$$(۱۱۰-۲) \text{ نکته : تعداد رابطه‌های بازتابی روی یک مجموعه‌ی } n \text{ عضوی برابر است با : } 2^{n^2} - n$$

$$\text{لذا تعداد رابطه‌های بازتابی روی مجموعه‌ی 4 عضوی برابر است با : } 2^{16-4} = 2^{12} = 4096$$

۱۱۱- (۲)

$$\begin{aligned}
 (1,1) \in R, (1,1) \in R &\Rightarrow (1,1) \in ROR \\
 (3,3) \in R, (3,3) \in R &\Rightarrow (3,3) \in ROR \\
 (1,1) \in R, (1,2) \in R &\Rightarrow (1,2) \in ROR \\
 (1,2) \in R, (2,3) \in R &\Rightarrow (1,3) \in ROR \\
 (2,3) \in R, (3,3) \in R &\Rightarrow (2,3) \in ROR \\
 (2,3) \in R, (3,4) \in R &\Rightarrow (2,4) \in ROR \\
 (3,3) \in R, (3,4) \in R &\Rightarrow (3,4) \in ROR \\
 \Rightarrow ROR = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4)\}
 \end{aligned}$$

۱۱۲- (۴) بازتابی نیست زیرا $(3,3) \notin R$ ، تقارنی هم نیست زیرا از 1 به 2 یال داریم ولی از 2 به 1 یالی نداریم پادتقارن نیست زیرا از 2 به 3 و از 3 به 2 یال داریم، ترایی هم نیست زیرا از 2 به 3 یال داریم، از 3 به 1 نیز یال داریم، اما از 2 به 1 یالی نداریم.

۱۱۳- (۴) نکته: ماتریسی می‌تواند ماتریس مربوط به یک رابطه‌ی پاد متقارن باشد که درایه‌های متناظر در دو طرف قطر اصلی، هر دو 1 نباشند، به عبارت دیگر 1 رودرروی 1 قرار نگرفته باشد، لذا گزینه‌ی 4 درست است.

۱۱۴- (۳) نکته: تعداد روابط با خواص «بازتابی، تقارنی و پادتقارنی» روی یک مجموعه‌ی n عضوی برابر یک می‌باشد.

۱۱۵- (۴) مثال نقض: چون $3+3 \neq 5$ ، لذا $(3,3) \notin R$ ، در نتیجه R روی $\mathbb{N}$ بازتابی نیست متذکر می‌شویم که رابطه $\emptyset$ به انتفاء مقدم، ترایی است، هر رابطه تک عضوی به صورت $\{(a,b)\}$ ، $(a \neq b)$ به $\{(a,b)\}$ به انتفاء مقدم همه ترایی است و هم پادتقارنی

۱۱۶- می‌دانیم برای اینکه رابطه R روی مجموعه‌ی $A=\{1,2,3\}$ بازتابی باشد باید هر سه زوج $(1,1)$ ، $(2,2)$ و $(3,3)$ را داشته باشد، لذا برای بازتابی بودن R ، کافی است حداقل یکی از این سه زوج عضو R نباشد، اما چون در صورت تست گفته شده که بازتابی نباشد ولی شامل زوج مرتب $(2,2)$ باشد، لذا رابطه باید از بین دو زوج مرتب $(1,1)$ و $(3,3)$ ، حداقل یکی را داشته باشد (که می‌شود 3 حالت، یعنی یا $(1,1)$ را داشته باشد، $(3,3)$ را نداشته باشد یا $(3,3)$ را داشته باشد، $(1,1)$ را نداشته باشد و یا هر دو را نداشته باشد) اما 6 درایه‌ی باقیمانده می‌توانند در R وجود داشته باشند و یا وجود نداشته باشند (که کلاً $2^6 = 64$ حالت را تشکیل می‌دهند) لذا تعداد کل رابطه‌های غیر بازتابی روی یک مجموعه‌ی سه عضوی مانند $A=\{1,2,3\}$ که زوج مرتب $(2,2)$ را حتماً داشته باشند، برابر است با: $3 \times 64 = 192$

روش دیگر: ابتدا کل رابطه‌های شامل $(2,2)$ را حساب می‌کنیم و سپس تعداد کل روابط بازتابی را محاسبه و از آن کم می‌کنیم، لذا داریم:

$$\left. \begin{aligned}
 \text{تعداد روابط بازتابی} &= 2^{n^2-1} = 2^8 \\
 \text{تعداد روابط غیر بازتابی} &= 2^{n^2-n} = 2^6
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2^8 - 2^6 = 2^6(2^2 - 1) = 64 \times 3 = 192$$

۱۱۷- (۱) رابطه‌ی گزینه‌ی 1 متقارن نیست زیرا $(3,1)$ را دارد ولی $(1,3)$ را ندارد و پادمتقارن نیست زیرا هم $(1,2)$ را دارد و هم $(2,1)$ را.

۱۱۸- (۴) می‌دانیم زمانی یک رابطه مانند R مجموعه‌ی مرجع A را فقط به یک دسته‌ی هم‌ارزی افزایش می‌کند که همه اعضا علاوه بر اینکه با خودش رابطه دارند، با بقیه اعضا نیز در ارتباط باشند، به عبارت دیگر R شامل تمام زوجهای مرتب باشد یعنی $R=A \times A$ باشد، لذا تعداد زوجهای مرتب R برابر با $4^2 = 16$ عضو خواهد بود، پس تعداد یالهای جهتدار گراف متناظرش نیز برابر 16 یال خواهد بود.

$$|(A \times B) \cup (B \times A)| = 2|A||B| - |A \cap B|^2$$

۱۱۹- (۳) نکته :

$$= 2(20)(19) - 9^2 = 679$$

۱۲۰- (۲) چون شامل $(1,2)$ می‌باشد، لذا نباید شامل $(2,1)$ باشد، لذا این درایه در ماتریس متناظر، به ترتیب 1 و 0 می‌باشند و لذا از اختیار ما خارج می‌باشند از طرفی چون شامل $(3,4)$ نمی‌باشد لذا می‌تواند شامل $(4,3)$ باشد و یا نباشد، لذا داخل لوزی موجود در ماتریس 2 حالت می‌تواند داشته باشد، از طرفی دو بیضی دارای 3 حالت، دو مثلث دارای 3 حالت، دو دایره دارای 3 حالت، دو مستطیل نیز دارای 3 حالت بوده، ضمناً هر یک از مربعها نیز 2 حالت دارند لذا تعداد روابط موردنظر برابر است با :

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} \square & 1 & \bigcirc & \triangle \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \square & 1 & \bigcirc & \triangle \\ 0 & \square & \bigcirc & \square \\ \bigcirc & \square & \square & 0 \\ \triangle & \square & \diamond & \square \end{bmatrix} \end{matrix} \Rightarrow 2 \times 3^4 \times 2^4 = 2^5 \times 3^4$$

۱۲۱- (۳) تعداد روابطی که بازتابی و تقارنی هستند - تعداد روابطی که بازتابی هستند = تعداد روابطی که بازتابی هستند ولی پاد تقارنی نیستند

$$|A - B| = |A| - |A \cap B| = 2^{n^2-n} - 3^{\frac{n^2-n}{2}} = 2^{12} - 3^6$$

۱۲۲- (۴)

$$\text{تعداد روابط بازتابی} = |A| = 2^{n^2-n} = 2^{12}$$

$$\text{تعداد روابط تقارنی} = |B| = 2^{\frac{n^2+n}{2}} = 2^{10}$$

$$\text{تعداد روابط بازتابی و تقارنی} = |A \cap B| = 2^{\frac{n^2-n}{2}} = 2^6$$

$$\text{تعداد روابط بازتابی یا تقارنی} = |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 2^{12} + 2^{10} - 2^6 = 2^6(2^6 + 2^4 - 1) = 79 \times 2^6$$

$$|A' \cap B'| = |(A \cup B)'| = |S| - |A \cup B| = |S| - (|A| + |B| - |A \cap B|)$$

۱۲۳- (۳)

در نتیجه داریم :

تعداد روابط بازتابی یا تقارنی - تعداد کل روابط = تعداد روابط نه بازتابی و نه تقارنی

$$\begin{aligned}
 &= 2^{n^2} - \left(2^{n^2-n} + 2^{\frac{n^2+n}{2}} - 2^{\frac{n^2-n}{2}} \right) \\
 &= 2^{16} - (2^{12} + 2^{10} - 2^6) \\
 &= 2^6(2^{10} - 2^6 - 2^4 + 1) = 64(2^{10} - 79)
 \end{aligned}$$

۱۲۴- (۱) چون شامل (1,2) و (3,2) می باشد لذا طبق تقارنی بودن باید شامل (2,1) و (2,3) نیز باشد و چون (1,4) را ندارد لذا طبق تقارنی بودن باید (4,1) را نیز نداشته باشد لذا از 16 درایه، 6 درایه مشخص شده، 10 درایه ی دیگر باقی می ماند، 4 درایه ی روی قطر اصلی را به 2^4 و 6 درایه ی دیگر دو طرف قطر اصلی را به دلیل تقارنی بودن به 2^3 طریق می توان پر کرد لذا تعداد روابط مورد نظر برابر است با: $2^3 \times 2^4 = 2^7$

$$\begin{array}{c}
 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\
 1 \begin{bmatrix} \circ & 1 & \circ & 0 \end{bmatrix} \\
 2 \begin{bmatrix} 1 & \circ & 1 & \circ \end{bmatrix} \\
 3 \begin{bmatrix} \circ & 1 & \circ & \circ \end{bmatrix} \\
 4 \begin{bmatrix} 0 & \circ & \circ & \circ \end{bmatrix}
 \end{array}$$

۱۲۵- (۲) نکته: هرگاه $A \times B = C \times D$ آنگاه $A = C$ و $B = D$ لذا داریم:

$$A \times B = C \times D \Rightarrow \begin{cases} A = C \\ B = D \end{cases} \Rightarrow B \times A = D \times C$$

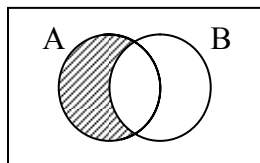
۱۲۶- (۲) نکته: $A - B = A \cap B'$

$$A - (A - B) = A - (A \cap B') = A \cap (A \cap B')'$$

لذا داریم:

$$= A \cap (A' \cup B) = (A \cap A') \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B$$

روش دیگر: با استفاده از نمودار ون، پاسخ به سادگی به دست می آید، توجه کنید:



چرا که اگر قسمت ها شورخورده، یعنی $A - B$ برداریم، $A \cap B$ باقی می ماند.

۱۲۷- (۴) با توجه به نمودار گراف، داریم:

$$\begin{aligned}
 M(R) &= \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 1 \\ c & 1 & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow M(ROR) = M^{(2)}(R) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow M(ROR) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_n \Rightarrow ROR = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d)\}
 \end{aligned}$$

با توجه به اینکه ROR رابطه همانی شد، نتیجه می گیریم که ROR هر چهار خاصیت را دارد.

روش دوم: با توجه به نمودار گراف، داریم: $R = \{(a,c), (c,a), (b,d), (d,b)\}$

$$\begin{cases} (a,c) \in R, (c,a) \in R \Rightarrow (a,a) \in ROR \\ (c,a) \in R, (a,c) \in R \Rightarrow (c,c) \in ROR \\ (b,d) \in R, (d,b) \in R \Rightarrow (b,b) \in ROR \\ (d,b) \in R, (b,d) \in R \Rightarrow (d,d) \in ROR \end{cases} \Rightarrow ROR = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d)\}$$

لذا ROR هر چهار خاصیت را دارد.

۱۲۸- (۴) بازتابی را دارد، زیرا همه درایه‌های قطر اصلی M ، 1 می باشند، تقارنی نیست زیرا ماتریس نسبت به قطر اصلی متقارن نیست، پاد تقارنی می باشد زیرا 1 رودرروی 1 (نسبت به قطر اصلی) نیست، لذا گزینه ی 4 صحیح می باشد.

۱۲۹- (۴) وقتی فقط یک راس طوقه نداشته باشد صددرصد رابطه‌ی نظیر، بازتابی نبوده، اما ممکن است متقارن باشد.

۱۳۰- (۳) می دانیم R ، همه ارزی است اگر و فقط اگر که هر سه ویژگی بازتابی تقارنی و ترایی را داشته باشد و می دانیم R ترا یا است هرگاه $M^{(2)} \ll M$ ، لذا گزینه ی 3 صحیح است.

$$\begin{aligned} R \Rightarrow \forall a \in A : (a,a) \in R \\ \forall a \in A : (a,a) \in R, (a,a) \in R \Rightarrow (a,a) \in ROR \end{aligned} \quad (۴) \quad ۱۳۱$$

۱۳۲- (۳) برای اینه ماتریس M بزرگتر یا مساوی I گردد $(I_n \ll M)$ باید رابطه‌ی متناظر M بازتابی باشد، به عبارت معادله درایه‌های روی قطر اصلی M ، همی یک باشند و برای اینکه شرط $M^T \wedge M \leq I_n$ برقرار باشد، لازم است که درایه‌های بیرون قطر اصلی $M^T \wedge M$ همگی صفر باشند (یعنی $m_{ji} \times m_{ij}$ باید صفر باشد) که سه حالت $0 \times 0, 0 \times 1, 1 \times 0$ وجود دارد، لذا بیرون قطر اصلی را به 3 طریق می توان پر کرد، پس داریم :

$$3 = 3^{\frac{n^2-n}{2}} = 3^{10} \quad \text{تعداد ماتریس‌های صفر و یک}$$

$$۱۳۳- (۱) \text{ نکته : تعداد روابط پاد تقارنی روی یک مجموعه‌ی } n \text{ عضوی برابر است با : } 2^n \times 3^{\frac{n^2-n}{2}}$$

لذا داریم :

$$\text{تعداد روابط پاد متقارن} - \text{تعداد کل روابط} = \text{تعداد روابط غیر پاد متقارن روی یک مجموعه‌ی } 4 \text{ عضوی}$$

$$۱۳۴- (۲) \text{ چون تمام درایه‌های } M(R) \text{، عدد } 1 \text{ هستند، پس } R = A \times A$$

۱۳۵- (۴) R بازتابی نیست زیرا 3 طوقه ندارد به عبارت دیگر $(3,3) \notin R$ ، همچنین R پاد متقارن نیست زیرا $(3,2), (2,3)$ را دارد

۱۳۶- (۴) می دانیم تعداد روابط بازتابی روی یک مجموعه‌ی n عضوی برابر است با : 2^{n^2-n} لذا تعداد روابط بازتابی روی مجموعه‌ی دو عضوی $A = \{1,2\}$ برابر است با : $2^2 = 4$ ، از طرفی می دانیم یک رابطه بازتابی روی مجموعه‌ی A باید شامل $(2,2), (1,1)$ باشد، لذا R می تواند به یکی از چهار صورت زیر باشد :

$R_1 = \{(1,1), (2,2)\} \rightarrow R_1$ هر چهار خاصیت را دارد.

$R_2 = \{(1,1), (2,2), (1,2)\} \rightarrow R_2$ فقط تقارنی را ندارد.

$R_3 = \{(1,1), (2,2), (2,1)\} \rightarrow R_3$ فقط تقارنی را ندارد.

$R_4 = \{(1,1), (2,2), (1,2), (2,1)\} \rightarrow R_4$ فقط پاد تقارنی را ندارد.

لذا ملاحظه میشود که در هر حال حداقل 3 خاصیت از 4 خاصیت را دارد.

(۱۳۷) - (۴)

$$R = \{(1,1), (1,3), (2,3), (3,2)\} \rightarrow M(R) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow M(R^{-1}) = (M(R))^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

روش دیگر: ابتدا اعضای R^{-1} را می‌نویسیم، سپس ماتریس آنرا مشخص می‌کنیم:

$$R^{-1} = \{(1,1), (3,1), (3,2), (2,3)\} \rightarrow M(R^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2^{n+2} = 2^n + 96 \Rightarrow 2^2(2^n) - 2^n = 96 \Rightarrow 4(2^n) - 2^n = 96$$

$$3(2^n) = 96 \Rightarrow 2^n = 32 = 2^5 \Rightarrow n = 5 \Rightarrow \binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10 \quad (۱۳۸) - (۲)$$

۱۳۹- با توجه به نمودار گراف متناظر با رابطه‌ی R داریم:

$$R = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,1)\}$$

$$(1,2) \in R, (2,3) \in R \Rightarrow (1,3) \in R \circ R$$

$$(2,3) \in R, (3,4) \in R \Rightarrow (2,4) \in R \circ R$$

$$(3,4) \in R, (4,1) \in R \Rightarrow (3,1) \in R \circ R$$

$$(4,1) \in R, (1,2) \in R \Rightarrow (4,2) \in R \circ R \Rightarrow$$

$$R \circ R = \{(1,3), (2,4), (3,1), (4,2)\} \Rightarrow$$

لذا گزینه 4 صحیح است.

۱۴۰- (۴) گزینه‌ی 1 نادرست است چرا که ممکن است من برادر تو باشم ولی تو برادر من نباشی (خواهر من باشی)

گزینه 2 نیز نادرست است چرا که اگر من پدر تو باشم و تو هم پدر او باشی ن دیگر پدر او نیستم (پدربزرگش هستم)

گزینه 3 نیز نادرست است چرا که هیچکس مادر خودش نمی باشد. لذا گزینه 4 درست است.

۱۴۱- (۲)

چون رابطه‌ی R روی A تعریف شده است لذا هر دوی x و y عضو A هستند، بنابراین :

$$\begin{cases} x=1 \Rightarrow y=1+2=3 \in A \\ x=2 \Rightarrow y=2+2=4 \in A \\ x=3 \Rightarrow y=3+3=5 \notin A \\ x=4 \Rightarrow y=4+2=6 \notin A \end{cases} \Rightarrow R = \{(1,3), (2,4)\} \Rightarrow D_R = \{1,2\}$$

«تستهای کنکور سراسری و آزاد از ۷۹ تا ۸۵»

(۱) اگر $S = \{(x, y) : |y - x| \leq 2, |x| \leq 2\}$ ، زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ باشد فاصله‌ی دورترین نقطه‌ی مجموعه نقاط S از مبدا مختصات کدام است؟ (سراسری - ۷۹)

(۱) 5 (۲) 4 (۳) $4\sqrt{3}$ (۴) $2\sqrt{5}$

۲- تعداد رابطه‌های روی مجموعه‌ی $\{a, b, c, d\}$ با ویژگی‌های بازتابی و تقارنی و شامل $(a, c), (a, b)$ کدام است؟ (سراسری - ۷۹)

(۱a) 8 (۲) 12 (۳) 16 (۴) 32

۳- رابطه‌ی $(|x| - |y|)(|x| - 1) = 0$ که در مجموعه‌ی اعداد حقیقی تعریف شده : (آزاد - ۷۹)

(۱) انعکاسی است و تقارنی نیست (۲) انعکاسی و تقارنی است

(۳) تقارنی است و انعکاسی نیست (۴) نه انعکاسی و نه تقارنی است

۴- رابطه‌ی متناظر با کدام گراف، زیرروی مجموعه $A = \{a, b, c, d\}$ ترایی است ولی متقارن نیست؟ (سراسری - ۸۰)



۵- در رابطه‌ی هم‌ارزی $R = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{Z}, 7 | x - y\}$ ، عدد 39 با کدام عدد داده شده در یک کلاس هم‌ارزی قرار دارند؟ (سراسری - ۸۰)

(۱) 95 (۲) 96 (۳) 97 (۴) 98

۶- رابطه $\sin y = \sin x$: (آزاد - ۸۰)

(۱) انعکاسی - تعدی - تقارنی است (۲) انعکاسی است و تقارنی و متعدی نیست

(۳) انعکاسی و تقارنی است ولی متعدی نیست (۴) انعکاسی و متعدی است ولی تقارنی نیست

۷- شکل ماتریسی یک رابطه، یک ماتریس 4×4 است، اگر این ماتریس فقط یازده عضو 1 داشته باشد : (آزاد - ۸۰)

(۱) رابطه می‌تواند متقارن و پاد متقارن باشد (۲) رابطه می‌تواند پاد متقارن باشد و قطعاً متقارن نیست

(۳) رابطه قطعاً متقارن و پاد متقارن نیست (۴) رابطه می‌تواند متقارن باشد ولی قطعاً پاد متقارن نیست

۸- رابطه‌ی R در مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ تعریف شده و دارای خواص تقارنی و پاد تقارنی است و فقط دارای دو عضو است، چند عضو دیگر به آن اضافه کنیم تا تقارنی و پاد تقارنی و انعکاسی باشد؟ (آزاد ریاضی - ۸۱)

(۱) 8 (۲) 23 (۳) 3 (۴) 8

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۹- نمایش ماتریسی رابطه ی R به صورت است، بدون هیچ عضو یک، حداقل چند عضو یک اضافه کنیم تا این رابطه هم‌ارزی گردد؟ (آزاد ریاضی - ۸۱)

۱ (۱) 4 (۲) 3 (۳) 6 (۴)

۱۰- از 51 دانش‌آموز یک دبیرستان، 35 نفر در کلاس ادبیات و 31 نفر در کلاس عربی و 23 نفر در هر دو کلاس شرکت کرده‌اند. چند نفر در هیچ یک از دو کلاس، شرکت ننموده‌اند؟ (سراسری ریاضی - ۸۲)

۱ (۱) 5 (۲) 6 (۳) 7 (۴) 8 (۵)

۱۱- مجموعه ی $\{a, b, \{a\}, \{b\}\}$ دارای چند زیرمجموعه‌ی شامل عضو a می باشد؟ (سراسری ریاضی - ۸۲)

۱ (۱) 4 (۲) 8 (۳) 10 (۴) 12 (۵)

۱۲- بر روی مجموعه ی $A = \{1, 2, 3\}$ چند رابطه ی متقارن و انعکاسی شامل زوج مرتب (1,2) می‌توان نوشت؟ (آزاد ریاضی - ۸۲)

۱ (۱) 2 (۲) 4 (۳) 8 (۴) 16 (۵)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۱۳- نمایش ماتریس یک رابطه به صورت تقارنی است و پاد تقارنی نیست، مینیمم $a+b+c+d$ کدام است؟ (آزاد - ۸۲)

۱ (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4 (۵)

۱۴- اگر A, B دو مجموعه‌ی غیر تهی با مجموعه‌ی جهانی U باشند، مجموعه‌ی $A' \Delta B'$ برابر کدام است؟ (سراسری - ۸۳)

۱ (۱) $A \cap B$ (۲) $A \cup B$ (۳) $A \Delta B$ (۴) U

۱۵- در یک کلاس 54 نفری، دست کم چند نفر دارای ماه تولد یکسان هستند؟ (سراسری - ۸۳)

۱ (۱) 3 (۲) 4 (۳) 5 (۴) 6 (۵)

۱۶- اگر $A \cap B = \{2, 3\}$, $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ و مجموعه‌ی $(A-B) \times (B-A)$ ، دارای 6 عضو است، تعداد عضوهای مجموعه‌ی B کدام است؟ (سراسری - ۸۳)

۱ (۱) 3 (۲) 4 (۳) 5 (۴) 6 (۵)

۱۷- چند رابطه‌ی پاد متقارن و انعکاسی روی مجموعه‌ی $\{1,2,3\}$ می‌توان نوشت به شرط آنکه شامل عضو $(1,2)$ نباشد؟ (آزاد - ۸۳)

- (۱) 9 (۲) 18 (۳) 4 (۴) 8

۱۸- رابطه R روی مجموعه‌ی $\{1,2,3,4\}$ نوشته شده انعکاسی نیست ولی پاد متقارن است این رابطه حداکثر چند عضو دارد؟ (آزاد - ۸۳)

- (۱) 6 (۲) 10 (۳) 9 (۴) 12

۱۹- اگر n عددی طبیعی و An بازه‌ی $(-1)^n, 2n)$ باشد، چند عدد صحیح به $\bigcup_{n=1}^4 An$ تعلق دارد؟ (سراسری - ۸۴)

- (۱) 8 (۲) 9 (۳) 10 (۴) 11

۲۰- مجموعه‌ی اعداد طبیعی را به سه مجموعه A, B, C افراز کرده‌ایم، اگر $A = \{n : n = 6k + 1, k \in \mathbb{N}\}$ و $B = \{n : n = 6k - 1, k \in \mathbb{N}\}$ ، کدام عدد طبیعی به مجموعه C تعلق دارد؟ (سراسری - ۸۴)

- (۱) 11 (۲) 29 (۳) 33 (۴) 45

۲۱- تعداد نقاطی از صفحه‌ی مختصات، که درون دایره به معادله‌ی $x^2 + y^2 = 16$ قرار داشته و هر دو مختص آن نقاط، عدس صحیح باشند، کدام است؟ (سراسری - ۸۴)

- (۱) 41 (۲) 42 (۳) 44 (۴) 45

۲۲- چند رابطه روی مجموعه‌ی $\{1,2,3,4\}$ می‌توان نوشت که پاد متقارن باشند ولی انعکاسی نباشند؟ (آزاد - ۸۴)

- (۱) 3^6 (۲) 5×3^7 (۳) 4×3^6 (۴) $2^{16} - 1$

۲۳- رابطه‌ای که روی $\{1,2,3,4,5\}$ نوشته شده انعکاسی است و دارای ۱۷ عضو است در مورد تقارنی و پاد تقارنی بودن این رابطه کدام درست است؟ (آزاد - ۸۴)

- (۱) قطعاً تقارنی است و پاد تقارنی نیست (۲) قطعاً پاد تقارنی نیست ولی ممکن است تقارنی باشد

- (۳) قطعاً تقارنی و پاد تقارنی است (۴) ممکن است تقارنی و پاد تقارنی باشد

«پاسخ‌تستهای کنکور سراسری و آزاد از ۷۹ تا ۸۵»

۱- (۴) نمودار نامعادلات $|Y-x| \leq 2, |x| \leq 2$ را رسم می‌کنیم:

$$|x| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

$$|y-x| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq y-x \leq 2$$

$$y-x=2 \Rightarrow \left| \begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix} \right| - 2$$

$$y-x=-2 \Rightarrow \left| \begin{matrix} 0 \\ -2 \end{matrix} \right| 2$$

همانطور که مشاهده میشود، نقاط $B(-2,-4), A(2,4)$

در محدوده جواب، دورترین فاصله را نسبت به مبدا مختصات دارا می‌باشند فاصله یکی از این نقاط را تا مبدا مختصات به دست آورید؟

$$OA = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$2 - (3) \quad \text{تعداد رابطه‌های متقارن و بازتابی} = 2^{\frac{n^2-n}{2}} = 2^{\frac{16-4}{2}} = 2^6$$

اما چون رابطه، شامل دو زوج $(a,b), (a,c)$ می‌باشد، لذا بایستی از توان عدد فوق، دو واحد کم کنیم پس خواهیم داشت:

$$2^{6-2} = 2^4 = 16$$

$$3 - (1) \quad \Rightarrow xRx \Rightarrow (|x| - |x|)(|x| - 1) = 0$$

$$xRx \Rightarrow yRx \quad \text{تقارنی}$$

$$xRy \Rightarrow (|x| - |y|)(|x| - 1) = 0 \Rightarrow (|y| - |x|)(|y| - 1) = 0$$

این رابطه تقارنی نیست، زیرا اگر $|x| - 1$ صفر شود، معلوم نیست که $|y| - 1$ نیز صفر میشود، به عنوان مثال نقض:

$$1R2 \Rightarrow (1-2)(1-1) = 0$$

$$2 \not R 1 \Rightarrow (2-1)(2-1) \neq 0$$

۴ - (۲)

گزینه ی (۱) ترایا نیست زیرا: $a \not R c$ aRb, bRc

گزینه ی (۳) ترایایی نیست زیرا: $a \not R c$ aRb, bRc

گزینه ی (۴) ترایایی نیست زیرا: $b \not R c$ bRc, cRa

۵ - (۱) زمانی دو عدد y, x در تقسیم بر ۷، متعلق به یک کلاس هستند که باقیمانده‌ی هر دوی آنها بر ۷ یکسان باشد به

عبارت دیگر، تفاضل آنها مضرب 7 باشد، اما باقیمانده‌ی 39 بر 7، 4 است و در بین گزینه‌ها، پاسخ عدد 95 عدد است که باقیمانده‌اش بر 7 برابر 4 است، لذا اعداد 39 و 95 در تقسیم بر 7 متعلق به یک کلاس هم‌ارزی می‌باشند.

۶- (۱) رابطه ی $\sin y = \sin x$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی است زیرا :

بازتابی $\forall x : \sin x = \sin x \Rightarrow xRx$

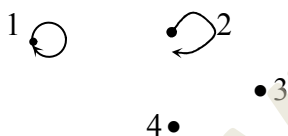
تقارنی $\forall x, y : xRy \Rightarrow \sin x = \sin y \Rightarrow \sin y = \sin x \Rightarrow yRx$

ترایی $\forall x, y, z : \begin{cases} xRy \\ yRz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \sin y \\ \sin y = \sin z \end{cases} \Rightarrow \sin x = \sin z \Rightarrow xRz$

۷- (۴) چون گزینه‌ها روی دو خاصیت تقارنی و پاد تقارنی بودن رابطه بحث می‌کند، لذا ما نیز روی همین دو خاصیت بحث می‌کنیم، مشاهده می‌شود که ماتریس $M(R)$ ، 16 درایه دارد که درایه‌ی آن روی قطر اصلی است، اگر هر چهار درایه‌ی روی قطر اصلی، 1 باشند، برای خارج از قطر اصلی 7 تا 1 می‌ماند، چون درایه‌های دو طرف قطر اصلی هر یک 6 تا هستند، بنابراین اگر این 7 تا را خانه‌های دو طرف قطر پخش کنیم، صد در صد در دو درایه متناظر با هم، 1 رودرروی 1 قرار می‌گیرد، بنابراین رابطه ی R حتماً پاد تقارنی نخواهد بود، اما در مورد تقارنی بودن، اگر فقط یکی از درایه‌های روی قطر 1 باشد، 10 تا 1 باقیمانده را چنان می‌توان در خارج از قطر اصلی، که؟؟ مقابل هم و صفرها نیز مقابل هم قرار گیرند پس R می‌تواند تقارنی باشد و لذا گزینه ی 4 صحیح است.

۸- (۳) چون R ، فقط دو عضو دارد، لذا گراف متناظرش فقط دو یال دارد از طرفی چون R هم تقارنی و هم پاد تقارنی است لذا این دو یال، دو طوقه هستند، (به عنوان مثال طوقه‌هایی روی رئوس 1 و 2)

یعنی در رابطه ی R ، زوج مرتب‌هایی مانند $(1,1), (2,2)$ وجود دارد، لذا برای بازتابی بودن، باید سه طوقه دیگر به گراف افزوده شود تا رابطه‌ی R به صورت $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$ درآید.



۹- (۲) می‌دانیم رابطه‌ای هم‌ارزی است که خاصیت بازتابی، تقارنی و ترایی را داشته باشد، اما برای بازتابی بودن R ، باید تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن 1 باشند (یعنی باید درایه‌ی سطر سوم و ستون سوم، 1 گذاشته شود $a_{33}=1$)، همچنین برای تقارنی بودن R ، باید درایه‌های ماتریس A ، نسبت به قطر اصلی متقارن باشند (یعنی بالای قطر اصلی هر عددی بود، متناظرش نسبت به قطر در پایین قطر اصلی نیز باید همان عدد باشد)، پس باید $a_{14} = a_{41} = 1, a_{34} = a_{43} = 1, a_{31} = a_{13} = 1$ پس باید چهار درایه 1 به جای صفر گذاشته شوند، البته با گذاشتن این چهار درایه، ماتریس ترایا نیز میشود.

۱۰- (۴)

$$\left. \begin{array}{l} S : \text{کل افراد مدرسه} \\ A : \text{افرادی که در کلاس ادبیات هستند} \\ B : \text{افرادی که در کلاس عربی هستند} \\ A \cap B : \text{افرادی که در هر دو کلاس هستند} \end{array} \right\} \Rightarrow |\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B| = |S| - (|A| + |B| - |A \cap B|)$$

$$= 51 - (35 + 31 - 23) = 51 - 43 = 8$$

۱۱- (۲) ابتدا a را از مجموعه کنار گذاشته، تعداد همه‌ی زیر مجموعه‌های مجموعه‌ی سه عضوی

$\{b, \{a\}, \{b\}\}$ را حساب کرده که میشود، $2^3 = 8$ سپس عضو a را به هر کدامشان اضافه می‌کنیم.

۱۲- (۲) به خاطر انعکاسی بودن رابطه موردنظر، تمام درایه‌های قطر اصلی باید 1 باشند، از طرفی برای هر جفت از درایه‌های روبروی هم (نسبت به قطر اصلی)، کلاً 2 حالت وجود دارد، اما چون شامل (1,2) است، به دلیل تقارنی بودنش باید شامل (2,1) نیز باشد لذا تعداد حالات برابر است با: $2^2 = 4$ (دو مربع 2 حالت دارند یا هر دو صفردند یا هر دو یک، دو دایره نیز دو حالت دارند یا هر دو صفردند، یا هر دو یک)

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & \square \\ 1 & 1 & \bigcirc \\ \square & \bigcirc & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

۱۳- (۲) ماتریس یک رابطه، زمانی تقارنی است که درایه‌های ماتریس، نسبت به قطر اصلی متقارن باشند یعنی بالای قطر اصلی هر عددی بود (0 یا 1)، متناظرش در پائین قطر اصلی، همان عدد باشد و زمانی پاد تقارنی است که در ماتریس آن، 1 رودرروی 1 قرار نگیرد، یعنی دو درایه‌ی متناظر نسبت به قطر اصلی، هر دو 1 نباشند (یا هر دو صفر باشند یا یکی صفر باشد و دیگری یکی باشد و دیگری صفر)، بنابراین برای اینکه تقارنی باشد باید $a=c, b=d$ و برای اینکه پاد تقارنی نباشد باید c, a هر دو 1 باشند و یا d, b هر دو 1 باشند، هم c, a 1 باشند و هم d, b است، چون می‌خواهیم $a+b+c+d$ مینیمم شود، کافی است فقط یک جفت از عددهای c, a یا d, b 1 باشند مثلاً:

$$a=c=1, b=d=0 \Rightarrow \text{Min}(a+b+c+d)=2$$

$$A' \Delta B' = (A' - B') \cup (B' - A') = (B - A) \cup (A - B) = A \Delta B \quad (۳) - ۱۴$$

$$A' - B' = B - A$$

$$\left\lceil \frac{54}{12} \right\rceil + 1 = 5 \quad (۳) - ۱۵ \quad \text{طبق اصل لانه‌ی کبوتری داریم:}$$

$$(۲) - ۱۶$$

$$|(A - B) \times (B - A)| = 6 \Rightarrow |A - B| \times |B - A| = 6$$

$$3 \times |B - A| = 6 \Rightarrow |B - A| = 2, \quad A - B = \{4, 5, 6\}$$

$$\Rightarrow B = (B - A) \cup (A \cap B) \Rightarrow |B| = 2 + 2 = 4$$

۱۷- (۲) برای اینکه R انعکاسی، باشد باید درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس متناظرش (که ماتریسی 3×3 است)، همگی یک باشند چون شامل $(1,2)$ نیست لذا برای اینکه پاد متقارن باشد، می‌تواند شامل $(2,1)$ باشد بنابراین طبق ماتریس مقابل مربع، ۲ حالت می‌تواند داشته باشد (۰ یا ۱)، دو دایره ۳ حالت می‌توانند داشته باشند $((0,0), (0,1), (1,0))$ و دو مستطیل نیز ۳ حالت می‌تواند داشته باشند، لذا طبق اصل ضرب داریم: $2 \times 3 \times 3 = 18$

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \bigcirc \\ \square & 1 & \square \\ \bigcirc & \square & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

۱۸- (۳) برای اینکه رابطه ی R پادمتقارن باشد و حداکثر عضو را داشته باشد باید حداکثر عناصر روی قطر و بالای قطر ماتریس 4×4 یک باشند از طرفی چون می‌خواهیم انعکاسی نباشد، کافی است یک عنصر روی قطر اصلی را صفر در نظر بگیریم، لذا حداکثر تعداد یک‌های ماتریس برابر ۹ تاست یعنی به صورت زیر است:

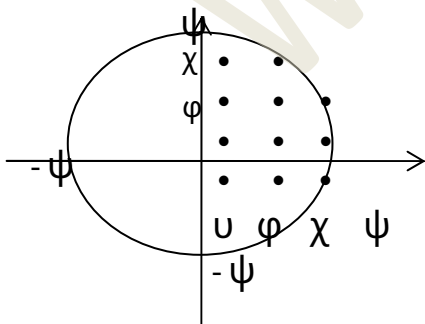
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bigcup_{n=1}^4 A_n = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = (-1,2) \cup (2,4) \cup (-3,6) \cup (4,8) = (-3,8) \quad (۳) - ۱۹$$

و اما تعداد ۱ عدد صحیح بازه‌ی $(-3,8)$ عبارتست از: ۱۰ عدد که عبارتند از: $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

۲۰- (۳) A مجموعه‌ی مضارب طبیعی ۶، بعلاوه یک است لذا عدد ۳۷ عضو A است، B مجموعه‌ی مضارب طبیعی عدد ۶، منهای یک است لذا اعداد ۱۱ و ۲۹ عضو B هستند، باقی می‌ماند عدد ۳۳ که نه مضرب ۶ بعلاوه یک است و نه مضرب ۶ منهای یک و لذا نه عضو A است و نه عضو B ، پس طبق تعریف افزاز، باید عضو C باشد.

۲۱- در ربع اول ۸ نقطه با مختصات صحیح درون دایره قرار می‌گیرند، ضمناً سه نقطه روی محور X ها در ابتدای این ناحیه قابل قبول است بنابراین در هر ربع ۱۱ نقطه و لذا در چهار ربع $4 \times 11 = 44$ نقطه درون دایره قرار می‌گیرند با مبدا مختصات، تعداد نقاط ۴۵ تا میشوند.



$$(۲) - ۲۲ \quad |A| - |A \cap B| = \text{تعداد روابط پاد متقارن و انعکاسی} - \text{تعداد روابط پاد متقارن} = \text{تعداد روابط مورد نظر}$$

$$= 3^6 \times 2^4 - 3^6 = 3^6(2^4 - 1) = 15 \times 3^6 = 5 \times 3^7$$

(۲) - ۲۳ چون ماتریس نظیر رابطه، ماتریسی 5×5 است، لذا طبق انعکاسی بودن، 5 عنصر قطر اصلی یک است، 12 تا یک دیگر در ماتریس وجود دارد، چون بالای قطر اصلی 10 عنصر است پس حداقل دو درایه مانند $m_{ji}, m_{ij} (i \neq j)$ وجود دارند که هر دو یک هستند لذا قطعاً پاد متقارن نیست، البته ممکن است متقارن باشد.

نکته: به طور کلی اگر A مجموعه‌ای n عضو می باشد، چنانچه تعداد اعضای رابطه‌ی R که روی A تعریف میشود بیشتر از $\frac{n(n+1)}{2}$ باشد، حتماً پاد متقارن نیست.

تست های آنالیز ترکیبی و ترکیبیات

۱a. ساده شده ی کسر $\frac{(n+2)! \times 120n}{4!(n-1)!(n^2+n)}$ کدام است؟

(۱) $5n^2 + 10$ (۲) $5n + 10$ (۳) $5n^2 + 10n$ (۴) $5n + 5$

۲c. تعداد اعداد کوچکتر یا مساوی 60 که نسبت به 60 اول اند برابر است با :

(۱) 12 (۲) 16 (۳) 18 (۴) 20

۳b. تعداد اعداد طبیعی دو رقمی که مضرب 2 یا 5 باشند برابر است با :

(۱) 36 (۲) 63 (۳) 45 (۴) 54

۴a. با حروف کلمه ی «جمهوری» به چند طریق می توان کلمات 3 حرفی بدون تکرار حروف ساخت که حرف اول آنها ، حرف نقطه دار نباشد؟

(۱) 100 (۲) 120 (۳) 60 (۴) 80

۵a. به چند طریق 5 پسر و 5 دختر می توانند در یک صف کنار هم بایستند ، مشروط بر آنکه دختر ها همواره کنار هم بایستند؟

(۱) $5! \times 6!$ (۲) $5! \times 7!$ (۳) $(5!)^2$ (۴) $5! \times 5! \times 2!$

۶a. در تست قبل ، تعداد طرق ممکن ، مشروط بر آنکه یکی در میان بایستند ، برابر است با :

(۱) $5! \times 6!$ (۲) $5! \times 5! \times 2!$ (۳) $5! \times 5!$ (۴) $\frac{5! \times 5!}{2}$

۷c. با اعداد 3 و 5 و 7 چند عدد سه رقمی می توان ساخت ، که در هر کدام ، حداقل یک رقم تکراری وجود داشته باشد؟

(۱) ۶۴ (۲) 27 (۳) 21 (۴) 6

۸a. شخصی می خواهد از میان 3 نوع برنج ، 2 نوع خورشید ، 5 نوع سالاد و 2 نوع نوشیدنی یک دست غذا شامل یک نوع برنج و یک نوع خورشید و یک نوع سالاد و یک نوع نوشیدنی انتخاب کند ، این کار به چند طریق ممکن است؟

(۱) 60 (۲) 120 (۳) 400 (۴) 240

۹c. به چند طریق می توان 12 مسافر را در 2 اتاق سه تخته و 3 اتاق 2 تخته جای داد؟

(۱) $\frac{12!}{3!3!6!}$ (۲) $\frac{12!}{9!6!}$ (۳) $\frac{12!}{2(3!) \times 3(2!)}$ (۴) $\frac{12!}{3!3!2!2!2!}$

۱۰b. با ارقام 3 ، 4 ، 5 ، 6 و 7 چند عدد پنج رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت ، به طوری که ارقام زوج در کنار هم قرار نگیرند؟

(۱) $\frac{5!}{2!}$ (۲) $3 \times 4!$ (۳) $5! \times 2!$ (۴) $5^5 \times 2!$

۱۱a. اگر تعداد زیر مجموعه های 4 عضوی و 7 عضوی یک مجموعه ی n عضوی برابر باشند ، این مجموعه چند زیر مجموعه ی 6 عضوی دارد؟

(۱) 482 (۲) 442 (۳) 462 (۴) 924

۱۲a. تعداد زیر مجموعه های 5 یا 3 عضوی یک مجموعه ی 7 عضوی چقدر است؟

(۱) 56 (۲) 35 (۳) 21 (۴) 64

۱۳a. از میان 8 دانشجو و 3 استاد ، به چند طریق می توان یک گروه سه نفری تشکیل داد که شامل حداکثر 2 دانشجو باشد؟

(۱) 109 (۲) 84 (۳) 108 (۴) 96

۱۴a. با ارقام 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6 چند عدد سه رقمی بدون تکرار می توان نوشت که زوج بوده و به رقم صفر ختم نشود؟

(۱) 84 (۲) 126 (۳) 90 (۴) 75

۱۵a. از بین 49 دبیر، 18 نفر هندسه و 16 نفر گسسته تدریس می کنند، ضمناً 20 نفر نیز هیچ یک از این دو درس را تدریس نمی کنند، چند دبیر هم هندسه و هم گسسته تدریس می کنند؟

(۱) 5 (۲) 7 (۳) 6 (۴) 8

۱۶a. هرگاه x ریشه ی معادله ی $x^2 - 7x - 30 = 0$ باشد، مقدار n از رابطه ی $\binom{n}{3} = x$ کدام است؟

(۱) 5 (۲) 4 (۳) 6 (۴) 10

۱۷a. چند عدد 4 رقمی می توان یافت که رقم های آن زوج و بدون تکرار باشند؟

(۱) 24 (۲) 96 (۳) 48 (۴) 120

۱۸c. به چند طریق می توان 12 جایزه را بین 5 نفر چنان تقسیم کرد که به کوچکترین فرد، 4 جایزه و به بقیه هر یک 2 جایزه برسد؟

(۱) $\frac{12!}{4!8!}$ (۲) $4! \times 2! \times 2! \times 2! \times 2!$

(۳) $\frac{12!}{4! \times 2! \times 2!}$ (۴) $\frac{12!}{4!2!2!2!2!}$

۱۹c. کتاب فروشی دارای 5 نوع کتاب داستان است، می خواهیم از او نه کتاب جهت هدیه دادن بخریم، به چند طریق این امر امکان پذیر است؟

(۱) $\binom{9}{5}$ (۲) $\frac{9!}{5!}$ (۳) $\binom{13}{9}$ (۴) $\binom{13}{5}$

۲۰b. به چند طریق می توان از میان 12 نفر که دو نفر آنها برادر هستند، 4 نفر انتخاب کرد به طوری که دو برادر با هم جزء انتخاب شده ها نباشند؟

(۱) 210 (۲) 360 (۳) 450 (۴) 120

۲۱a. با ارقام 0، 1، 2، 3، 4 و 5 چند عدد زوج 3 رقمی می توان ساخت؟ (تکرار مجاز است)

(۱) 90 (۲) 75 (۳) 120 (۴) 105

۲۲b. با ارقام 8، 5، 3، 1 چند عدد سه رقمی می توان ساخت که بر 3 بخش پذیر است؟ (بدون تکرار ارقام)

(۱) 6 (۲) 12 (۳) 16 (۴) 18

۲۳b. اگر $P(n, 2) - C(n, 2) = 36$ باشد، $C(n, 6)$ کدام است؟

(۱) 72 (۲) 84 (۳) 96 (۴) 108

۲۴b. 5 کتاب ریاضی، 3 کتاب انگلیسی و 4 کتاب شیمی را به چند طریق می توان در قفسه ای قرار داد به طوری که کتاب های هر درسی پهلوی هم باشند؟

(۱) $5! \times 3! \times 3! \times 4!$ (۲) $5! \times 3! \times 4!$ (۳) $\frac{12!}{5! \times 3! \times 4!}$ (۴) $5! \times 3! \times 4! \times 2!$

۲۵b. 11 نفر به چند طریق می توانند دور یک میز گرد بنشینند؟

(۱) 11! (۲) $\frac{10!}{2!}$ (۳) 10! (۴) $\frac{11!}{2!}$

۲۶c. تعداد تبدیلات n شیء n_1 شیء مثل هم و n_2 شیء دیگر نیز مثل هم باشند و $n = n_1 + n_2$ برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times 2!} \quad (\epsilon) \quad n! \times n_1! \times n_2! \quad (\gamma) \quad \frac{n!}{n_1! n_2!} \quad (\gamma) \quad n! \quad (\alpha)$$

۲۷b. چند عدد طبیعی، بیشتر از 1200 وجود دارند که حداقل بر یکی از اعداد 3 یا 5 بخش پذیر باشد؟

$$560 \quad (\epsilon) \quad 640 \quad (\gamma) \quad 720 \quad (\gamma) \quad 480 \quad (\alpha)$$

۲۸b. چند عدد n رقمی با ارقام 1، 2، 3 می توان نوشت؟

$$3^n - 3 \quad (\epsilon) \quad 3n \quad (\gamma) \quad n^3 \quad (\gamma) \quad 3^n \quad (\alpha)$$

۲۹c. چند عدد چهار رقمی وجود دارند که هم بر 6 و هم بر 9 بخش پذیر نباشند؟

$$4960 \quad (\epsilon) \quad 7000 \quad (\gamma) \quad 6800 \quad (\gamma) \quad 5900 \quad (\alpha)$$

۳۰c. شماره گذاری اتومبیل ها در یک شهر با حروف الفبای فارسی و اعداد دو رقمی بدون صفر می باشد، اگر شروع شماره گذاری از «الف - 11» و به طور صعودی باشد، شماره ی هزارمین اتومبیلی که شماره گذاری می شود، کدام است؟

$$39 - \text{ز} \quad (\epsilon) \quad 41 - \text{ز} \quad (\gamma) \quad 39 - \text{ر} \quad (\gamma) \quad 41 - \text{د} \quad (\alpha)$$

۳۱b. n نفر به چند طریق می توانند در یک صف کنار هم بایستند، به طوری که k نفر خاص، همواره کنار هم باشند؟

$$k! \quad (\alpha) \quad (n-k)! \quad (\gamma) \quad k! \times (n-k)! \quad (\gamma) \quad k! (n-k+1)! \quad (\epsilon)$$

۳۲b. n نفر به چند طریق می توانند در یک صف کنار هم بایستند، به طوری که 2 نفر خاص، همواره کنار هم نباشند؟

$$n! - 2! \quad (\alpha) \quad (n-2) \times (n-1)! \quad (\gamma) \quad (n-2)! \times 2! \quad (\gamma) \quad n! - (2!)(n-2)! \quad (\epsilon)$$

۳۳a. به چند طریق می توان 3 مهره از درون ظرفی که حاوی 4 مهره ی زرد، 5 مهره ی آبی و 2 مهره ی قرمز است بیرون آورد مشروط بر آن که مهره ها هم رنگ باشند؟

$$\binom{9}{3} \quad (\alpha) \quad \binom{5}{3} \binom{4}{3} \quad (\gamma) \quad \binom{5}{3} + \binom{4}{3} \quad (\gamma) \quad \text{هیچ کدام} \quad (\epsilon)$$

۳۴b. تعداد جایگشت های بدون تکرار 9 رقمی (9 تایی) ارقام 1، 2، ...، 9 که با 5 شروع و یا به 8 ختم می شوند، کدام است؟

$$8! - 7! \quad (\alpha) \quad 8! - 2 \times 7! \quad (\gamma) \quad 7! - 8! \quad (\gamma) \quad 2 \times 8! - 7! \quad (\epsilon)$$

۳۵b. با ارقام 0، 1، 2، 3، 4، 5، 7 چند عدد زوج سه رقمی بزرگتر از 400 می توان ساخت؟ (بدون تکرار)

$$60 \quad (\alpha) \quad 45 \quad (\gamma) \quad 35 \quad (\gamma) \quad 75 \quad (\epsilon)$$

۳۶c. در یک کاغذ شطرنجی مربع شکل، در هر طرف آن 8 مربع وجود دارد (صفحه ی شطرنجی معمولی) در کل چند مربع موجود است؟

$$240 \quad (\alpha) \quad 204 \quad (\gamma) \quad 196 \quad (\gamma) \quad 169 \quad (\epsilon)$$

۳۷a. چند عدد پنج رقمی یافت می شود که رقم اول آن 2 و رقم آخر آن 4 (رقم یکان آن 4) باشد و هیچ یک از ارقام آن تکراری نباشند؟

$$512 \quad (\alpha) \quad 504 \quad (\gamma) \quad 336 \quad (\gamma) \quad 216 \quad (\epsilon)$$

۳۸c. می خواهیم برای 4 درس ریاضی، فیزیک، شیمی و انگلیسی یک برنامه ی امتحانی بنویسیم به طوری که امتحان فیزیک بلافاصله بعد از امتحان ریاضی باشد، تعداد برنامه های ممکن برابر است با:

$$6 \quad (\alpha) \quad 9 \quad (\gamma) \quad 10 \quad (\gamma) \quad 18 \quad (\epsilon)$$

۳۹a. 4 نفر وارد شهری می شوند که در آن شهر 5 هتل وجود دارد ، به چند طریق ، می توانند در این هتل ها اقامت کنند؟

- (۱) $4!$ (۲) $5!$ (۳) 4^5 (۴) 5^4

۴۰a. چند کلمه ی 3 حرفی با استفاده از حروف کلمه ی «دانشجو» می توان نوشت ، به طوری که هر کلمه با حروف نقطه دار شروع نشود؟ (تکرار حروف مجاز نیست)

- (۱) 60 (۲) 80 (۳) 90 (۴) 120

۴۱a. با استفاده از اعضای مجموعه ی $\{a, b, c, d, e\}$ چند زوج مرتب می توان نوشت؟

- (۱) 20 (۲) 25 (۳) $5!$ (۴) 30

۴۲c. یک قفل رمزی ، دارای یک رمز سه رقمی فرد با ارقام 1 ، 2 ، ... ، 9 می باشد ، اگر رمز این قفل را ندانیم و امتحان کردن هر رمز ، 2 دقیقه طول بکشد ، حداکثر چند ساعت طول می کشد تا قفل باز شود؟

- (۱) 12 (۲) $12/5$ (۳) 13 (۴) $13/5$

۴۳a. مقدار عبارت $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ کدام است؟

- (۱) $n(n+1)$ (۲) $n(n-1)$ (۳) $\frac{n+1}{n-1}$ (۴) $\frac{n(n+1)}{2}$

۴۴a. اگر $84 = 2\binom{n}{2} + \binom{n}{5}$ باشد ، چقدر است؟

- (۱) 45 (۲) 15 (۳) 21 (۴) 28

۴۵c. چند عدد طبیعی نا بیشتر از 210 وجود دارد که نه بر 6 و نه بر 10 و نه بر 5 بخش پذیرند؟

- (۱) 156 (۲) 142 (۳) 154 (۴) 128

۴۶c. چند مجموعه ی متفاوت از اعداد طبیعی یک رقمی می توان ساخت که هر کدام حاوی همه ی اعداد اول یک رقمی باشند؟

- (۱) 126 (۲) 32 (۳) 64 (۴) 24

۴۷c. سکه ای را آنقدر می اندازیم تا برای سومین بار رو بیاید ، تعداد حالاتی که می توان در 10 پرتاب یک سکه به این منظور رسید ، کدام است؟

- (۱) 3 (۲) 8 (۳) 36 (۴) 120

۴۸c. 4 گوی سبز و قرمز و زرد و نارنجی را درون 4 جعبه به همین رنگ ها ، به چند طریق می توان جا داد به طوری که هیچ گویی در جعبه ی هم رنگش قرار نگیرد؟

- (۱) 13 (۲) 11 (۳) 9 (۴) 8

۴۹c. با اعداد 2 ، 2 ، 2 ، 0 ، 0 ، 1 ، 4 ، 3 چند عدد هشت رقمی می توان نوشت؟

- (۱) $8!$ (۲) $\frac{7!}{2!}$ (۳) $\frac{8!}{3! \times 3!}$ (۴) $\frac{7!}{2! \times 3!}$

۵۰c. چند عدد دو رقمی در مبنای 10 وجود دارد که مجموع ارقامشان 11 شود؟

- (۱) 9 (۲) 8 (۳) 11 (۴) 10

۵۱b. به چند طریق می توان 7 ماشین متمایز را در یک ردیف کنار هم پارک کرد به طوری که 3 ماشین خاص همیشه ، کنار هم قرار گیرند؟

- (۱) $3! \times 4!$ (۲) $3! \times 3! \times 2!$ (۳) $3! \times 5!$ (۴) $5!$

۵۲c. با ارقام 1، 1، 1، 2، 2، 9 چند عدد شش رقمی می توان ساخت؟

- (۱) 60 (۲) 56 (۳) 6! (۴) $6 \times 3! \times 2!$

۵۳c. 4 توپ مشابه را به چند طریق می توان بین 10 نفر به طور دلخواه تقسیم کرد؟

- (۱) 10^4 (۲) 4^{10} (۳) $\binom{13}{3}$ (۴) $\binom{12}{2}$

۵۴c. 4 توپ متمایز را به چند طریق می توان بین 10 نفر به طور دلخواه تقسیم کرد؟

- (۱) $\binom{13}{3}$ (۲) 4^{10} (۳) 10^4 (۴) $\binom{12}{2}$

۵۵c. 4 توپ یکسان را به چند طریق می توان بین 10 نفر، چنان تقسیم کرد که به هر نفر حداقل یک توپ برسد؟

- (۱) $\binom{9}{3}$ (۲) 0 (۳) $\binom{13}{3}$ (۴) $\frac{10!}{4!}$

۵۶c. 10 توپ یکسان را به چند طریق می توان بین 4 نفر، چنان تقسیم کرد که به هر نفر حداقل یک توپ برسد؟

- (۱) $\binom{13}{3}$ (۲) $\binom{9}{3}$ (۳) 4^{10} (۴) $\frac{10!}{4!}$

۵۷c. 4 توپ متمایز را به چند طریق می توان بین 10 نفر چنان تقسیم کرد که به هر نفر حداقل یک توپ برسد؟

- (۱) 4! (۲) 10! (۳) $\frac{10!}{6!}$ (۴) $\frac{10!}{6!4!}$

۵۸c. 10 خودکار و 8 دفتر را به چند طریق می توان بین 4 نفر توزیع کرد به طوری که به هر شخص لااقل یک خودکار و

یک دفتر برسد؟

- (۱) $\binom{18}{3}$ (۲) $\binom{9}{3}\binom{7}{3}$ (۳) $\binom{16}{3}$ (۴) $\binom{13}{3}\binom{11}{3}$

۵۹c. در جعبه ای 2 مهره ی آبی، 3 مهره ی زرد و 2 مهره ی نارنجی داریم که طرف نظر از رنگ، یکسان هستند، از این

جعبه شش مهره با هم به تصادف بیرون می آوریم، تعداد حالت هایی که مهره های هم رنگ مساوی باشند کدام است؟

- (۱) 3 (۲) 12 (۳) 9 (۴) 6

۶۰a. 2 دختر و 3 پسر به تصادف در یک صف می ایستند، تعداد حالت هایی که دخترها در دو سر صف بایستند،

چقدر است؟

- (۱) 7 (۲) 4 (۳) 12 (۴) 6

۶۱b. قفل رمزی یک کیف دستی کدی است 3 رقمی که از ارقام صفر الی 9 تشکیل شده است، به چند طریق می توان

برای این قفل، رمز انتخاب کرد؟

- (۱) 1000 (۲) 900 (۳) 648 (۴) 729

۶۲a. تعداد حالت هایی که می توان از شهر A به شهر C با عبور از شهر B، رفت و برگشت، به طوری که راه رفت با

راه برگشت یکی نباشد، در صورتی که از A به B سه مسیر و از B به C چهار مسیر وجود داشته باشد، چقدر است؟

- (۱) 72 (۲) 144 (۳) 108 (۴) 132

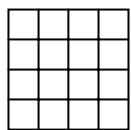
۶۳b. 3 مشهدی و 4 شیرازی و 5 آبادانی به چند طریق می توانند دور یک میز بنشینند مشروط بر آنکه همشهری ها

همواره کنار هم بنشینند؟

- (۱) $2! \times 3! \times 4!$ (۲) $2! \times 3! \times 4! \times 5!$ (۳) 11! (۴) $3! \times 4! \times 5!$

۶۴b. چند عدد 5 رقمی وجود دارد که شامل ارقام 2 و 4 بوده و فاقد 0 باشند؟ (بدون تکرار)

- (۱) 2980 (۲) 3600 (۳) 3000 (۴) 2800



۶۵c. تعداد کل مستطیل هایی که طول و عرض شان با هم برابر نیست در شکل زیر برابر است با:

- (۱) 45 (۲) 70 (۳) 55 (۴) 60

۶۶a. از بین 7 نفر به چند طریق می توان گروه های 5 نفره یا بیشتر انتخاب کرد؟

- (۱) 27 (۲) 28 (۳) 29 (۴) 30

۶۷c. مقدار n از رابطه ی $P(n, 2) + 50 = P(2n, 2)$ کدام است؟

- (۱) 5 (۲) 6 (۳) 25 (۴) 15

۶۸c. چند تابع $(1-1)$ و پوشا روی یک مجموعه ی 4 عضوی می توان نوشت؟ (دامنه ی همه ی توابع را A بگیرید)

- (۱) 4^3 (۲) $4!$ (۳) 4^4 (۴) 3^4

۶۹c. چند تابع پوشا از یک مجموعه ی 4 عضوی به یک مجموعه ی 4 عضوی می توان نوشت؟

- (۱) 256 (۲) 36 (۳) 24 (۴) 81

۷۰c. چند تابع یک به یک از مجموعه ی $A = \{a, b, c, d\}$ به مجموعه ی $B = \{1, 2, 3\}$ وجود دارد؟ (دامنه ی همه ی توابع را A بگیرید)

- (۱) 45 (۲) 36 (۳) 24 (۴) 0

۷۱c. چند تابع یک به یک از مجموعه ی $A = \{a, b, c, d\}$ به مجموعه ی $B = \{1, 2, 3\}$ وجود دارد؟

- (۱) 81 (۲) 45 (۳) 36 (۴) 24

۷۲c. چند عضو مجموعه ی $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 770\}$ نه بر 5 بخش پذیرند و نه بر 7؟

- (۱) 518 (۲) 528 (۳) 538 (۴) 548

۷۳c. چند تابع پوشا از مجموعه ی $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ به روی مجموعه ی $B = \{a, b\}$ وجود دارد؟ (دامنه ی همه ی توابع A باشد)

- (۱) 30 (۲) 32 (۳) 62 (۴) 15

۷۴c. چند تابع یک به یک و پوشا از مجموعه ی $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ به روی A وجود دارد؟ (دامنه ی همه ی توابع A می باشد)

- (۱) n^n (۲) n^{n-1} (۳) $(n-1)!$ (۴) $n!$

۷۵c. چند ماتریس 4×4 با درایه های 0 و 1 وجود دارد؟

- (۱) 2^9 (۲) 2^{16} (۳) 2^{12} (۴) 2^8

۷۶c. حاصل $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} + \binom{n+1}{k+1}$ کدام است؟

- (۱) $\binom{n+2}{k+1}$ (۲) $\binom{n+1}{k+1}$ (۳) $\binom{n+2}{k}$ (۴) $\binom{n+2}{k+2}$

۷۷a. حاصل $\binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5}$ کدام است؟

- (۱) 66 (۲) 64 (۳) 62 (۴) 60

۷۸c. حاصل $\binom{10}{0} + \binom{10}{2} + \binom{10}{4} + \binom{10}{8} + \binom{10}{10}$ کدام است؟

- (۱) 511 (۲) 1024 (۳) 512 (۴) 302

۷۹a. یک مجموعه ی 7 عضوی چند زیر مجموعه دارد که حداقل 2 عضوی باشند؟

- (۱) 124 (۲) 128 (۳) 120 (۴) 99

۸۰c. حاصل $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$ کدام است؟

- (۱) $n 2^{n-1}$ (۲) $n 2^n$ (۳) $k 2^{n-1}$ (۴) $k 2^n$

۸۱a. مجموعه ی $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ چند زیر مجموعه ی 6 عضوی شامل f دارد؟

- (۱) $\binom{6}{2}$ (۲) 6 (۳) $\binom{7}{5}$ (۴) $6!$

۸۲a. مجموعه ی $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ مفروض است این مجموعه چند زیر مجموعه ی 5 عضوی دارد که شامل 3 و 7 نباشند؟ (شامل 3 نباشند و شامل 7 نیز نباشند)

- (۱) $\binom{10}{5} - 2$ (۲) $\binom{8}{3}$ (۳) $\binom{10}{5}$ (۴) $\binom{10}{3}$

۸۳c. چند تابع از مجموعه ی $A = \{a, b, c, d, e\}$ به مجموعه ی $B = \{a, b, c, d\}$ وجود دارد که شامل زوج (c, d) بوده و فاقد زوج های یا مولفه های برابر باشد؟

- (۱) 3^4 (۲) 4^3 (۳) $3^4 - 1$ (۴) $5^4 - 1$

۸۴c. تعداد توابع غیر یک به یک روی یک مجموعه ی n عضوی کدام است؟

- (۱) $n!$ (۲) $n^n - n!$ (۳) $n! - n$ (۴) $n! - 2$

۸۵a. مجموعه ای دارای 10 عضو می باشد، تعداد زیر مجموعه هایی از آن که حداکثر 3 عضوی باشند برابر است با:

- (۱) 176 (۲) 175 (۳) 177 (۴) 174

۸۶c. چند عدد بزرگتر از 10^6 می توان یافت که ارقام آن 3، 0، 3، 4، 2، 3 باشند؟ (بدون تکرار)

- (۱) 630 (۲) 4320 (۳) 3420 (۴) 360

۸۷a. دانش آموزی باید به 8 سوال از 15 سوال یک امتحان جواب بدهد، اگر قرار باشد به 3 سوال اول الزاما پاسخ دهد، در این صورت به چند طریق می تواند به 8 سوال پاسخ دهد؟

- (۱) $\binom{15}{5}$ (۲) $\binom{12}{7}$ (۳) $3 \times \binom{12}{5}$ (۴) $3! \times \binom{12}{5}$

۸۸c. معادله ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 27$ چند جواب صحیح با شرط $x_i \geq 4$ دارد؟

- (۱) $\binom{25}{3}$ (۲) $\binom{26}{3}$ (۳) $\binom{26}{5}$ (۴) $\binom{25}{5}$

۸۹c. معادله ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7$ چند جواب طبیعی دارد؟

- (۱) $\binom{11}{4}$ (۲) 6 (۳) 30 (۴) 15

۹۰c. معادله ی $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ چند جواب صحیح و نا منفی با شرط $x_1 \geq 1$ و $x_2 \geq 3$ دارد؟

- (۱) $\binom{9}{7}$ (۲) $\binom{5}{2}$ (۳) $\binom{7}{5}$ (۴) $\binom{10}{2}$

۹۱c. بسط $(a+b+c+d)^3$ چند جمله‌ی متمایز دارد؟

- (۱) 20 (۲) 16 (۳) 24 (۴) 18

۹۲c. در بسط $(a+b+c+d+e)^{15}$ ، ضریب $a^4b^3c^2d^6$ کدام است؟

- (۱) $\frac{15!}{5!}$ (۲) $\frac{15!}{4! \times 6!}$ (۳) $\frac{15!}{12 \times 4! \times 6!}$ (۴) $\frac{15!}{2 \times 3! \times 6!}$

۹۳c. بسط $(a+b)^n$ چند جمله‌ی متمایز دارد؟

- (۱) n (۲) n+1 (۳) 2n+1 (۴) n-1

۹۴c. معادله‌ی $a+b=10$ ، چند جواب طبیعی دارد؟

- (۱) 8 (۲) 9 (۳) 10 (۴) 11

۹۵c. معادله‌ی $5x+2y=30$ چند جواب طبیعی دارد؟

- (۱) 3 (۲) 0 (۳) 2 (۴) 1

۹۶c. نا معادله‌ی $x_1+x_2+x_3 \leq 10$ چند جواب صحیح نا منفی دارد؟

- (۱) $\binom{12}{3}$ (۲) $\binom{14}{11}$ (۳) $\binom{13}{3}$ (۴) $\binom{12}{2}$

۹۷c. اگر تعداد جملات بسط $(a+b+c)^n$ برابر 21 باشد، n کدام است؟

- (۱) 5 (۲) 4 (۳) 6 (۴) 7

۹۸c. به چند طریق می‌توان 15 جایزه را بین 3 نفر توزیع کرد به طوری که به هر نفر حداقل 4 جایزه برسد؟

- (۱) 21 (۲) 10 (۳) 6 (۴) 28

۹۹c. معادله‌ی $x_1^2+x_2+x_3=7$ چند جواب صحیح نا منفی دارد؟

- (۱) 12 (۲) 18 (۳) 15 (۴) 10

۱۰۰c. دستگاه $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=9 \\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=16 \end{cases}$ چند جواب طبیعی دارد؟

- (۱) 72 (۲) 144 (۳) 136 (۴) 196

۱۰۱c. معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4=21$ با شرط $x_1>0$ و $x_i>2$ ($i=2,3,4$) چند جواب صحیح دارد؟

- (۱) $\binom{14}{11}$ (۲) $\binom{18}{14}$ (۳) $\binom{18}{3}$ (۴) $\binom{15}{4}$

۱۰۲c. تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $x_1+x_2+x_3=15$ با شرط $1 \leq x_i \leq 7$ ($i=1,2,3$) کدام است؟

- (۱) 28 (۲) 21 (۳) 14 (۴) 18

۱۰۳c. معادله‌ی $x_1+x_2+x_3=10$ چند جواب صحیح با شرط $x_i \geq i$ ($i=1,2,3$) دارد؟

- (۱) 12 (۲) 20 (۳) 18 (۴) 15

۱۰۴c. تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4=-3$ با شرط $x_i>-3$ ($i=1,2,3,4$) کدام است؟

- (۱) 42 (۲) 72 (۳) 56 (۴) 30

۱۰۵c. معادله‌ی $x+y+z+t=14$ چند جواب صحیح نا منفی با شرط $x>0$ ، $y>1$ ، $z>2$ و $t>3$ دارد؟

- (۱) $\binom{10}{3}$ (۲) $\binom{7}{3}$ (۳) $\binom{11}{3}$ (۴) $\binom{12}{3}$

۱۰۶c. در بسط $(a + b + c)^6$ ، ضریب a^3b^2c برابر است با :

- 60 (۱
- 42 (۲
- 56 (۳
- 28 (۴

۱۰۷c. چند جواب طبیعی برای نا معادله ی $8 < x + y + z < 5$ وجود دارد؟

- 5 (۱
- 40 (۲
- 150 (۳
- 25 (۴

۱۰۸c. معادله ی $\sum_{i=1}^5 x_i = 18$ چند جواب صحیح در فاصله ی $(2, +\infty)$ ، دارد؟

- $\begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix}$ (۱
- $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ (۲
- $\begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix}$ (۳
- $\begin{pmatrix} 20 \\ 4 \end{pmatrix}$ (۴

پاسخ تست های آنالیز ترکیبی و ترکیبیات

$$\frac{(n+2)! \times 120n}{4! \times (n-1)! (n^2+n)} = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)! \times 120n}{24(n-1)! n(n+1)} \quad ۱- (۳)$$

۲- (۲) نکته : هرگاه $n = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_k^{\alpha_k}$ آنگاه تعداد اعداد کوچکتر یا مساوی n که نسبت به n اول اند برابر است با :

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{P_1}\right) \left(1 - \frac{1}{P_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{P_k}\right)$$

لذا داریم :

$$60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1 \Rightarrow \varphi(60) = 60 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 60 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = 16$$

۳- (۴) عددی مضرب 2 یا 5 است که رقم یکانش 0 یا 2 یا 4 یا 6 یا 8 یا 5 باشد ، لذا داریم :

$$\square \quad \square$$

$$9 \times 6 = 54$$

۴- (۴) حروف کلمه ی «جمهوری» عبارتند از : {ج ، م ، ه ، و ، ر ، ی} می دانیم اگر حرف «ی» اول کلمه واقع شود ، آنگاه نقطه دار خواهد بود پس در خانه ی اول «ی» و «ج» را نمی توان قرار داد ، لذا داریم :

$$\square \quad \square \quad \square$$

$$4 \times 5 \times 4 = 80$$

$$5! \times (5+1)! = 5! \times 6! \quad ۵- (۱)$$

۶- (۲) اگر پسر را با «پ» و دختر را با «د» نشان دهیم دو حالت زیر وجود دارد :

$$\text{پ د پ د پ د پ د پ د} \quad \text{یا} \quad \text{د پ د پ د پ د پ د پ د}$$

لذا $5! \times 5!$ را در $2!$ باید ضرب کنیم بنابراین جواب برابر است با : $5! \times 5! \times 2!$

۷- (۳) ابتدا حالتی را پیدا می کنیم که تمام اعداد تکراری باشند که برابر است با : $N_1 = 3 \times 3 \times 3 = 27$

اکنون تعداد حالاتی که تکراری نمی باشند را پیدا می کنیم و سپس از کل کم می کنیم.

$$N_2 = 3 \times 2 \times 1 = 6 \Rightarrow N = N_1 - N_2 = 27 - 6 = 21$$

$$\binom{3}{1} \binom{2}{1} \binom{5}{1} \binom{2}{1} = 3 \times 2 \times 5 \times 2 = 60 \quad ۸- (۱)$$

$$\binom{n}{1} = n \quad \text{یاد آوری :}$$

۹- (۴) طبق تبدیل با تکرار داریم :

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!} = \frac{12!}{3! \times 3! \times 2! \times 2! \times 2!}$$

۱۰- (۲) تعداد کل اعداد 5 رقمی بدون تکرار با ارقام 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 برابر است با $5!$ از طرفی تعداد اعداد 5 رقمی بدون

تکرار با ارقام فوق به طوری که ارقام زوج کنار هم قرار بگیرند $(6,4)$ برابر است با :

$$2! \times (3+1)! = 2! \times 4!$$

لذا تعداد اعداد پنج رقمی بدون تکرار با ارقام فوق به طوری که ارقام زوج کنار هم قرار نگیرند برابر است با :

$$5! - 2! \times 4! = 4! (35 - 2) = 3 \times 4!$$

۱۱- (۳) نکته: تعداد زیر مجموعه های k عضوی یک مجموعه n عضوی برابر است با: $\binom{n}{k}$

نکته: هرگاه $\binom{n}{n_1} = \binom{n}{n_2}$ آنگاه یا $n_1 = n_2$ است یا $n_1 + n_2 = n$

لذا داریم:

$$\binom{n}{4} = \binom{n}{7} \Rightarrow n = 4 + 7 = 11 \Rightarrow \text{تعداد زیر مجموعه های 6 عضوی} = \binom{11}{6} = 462$$

۱۲- (۱)

$$\begin{aligned} \text{تعداد زیر مجموعه های 3 عضوی یک مجموعه 7 عضوی} &= \binom{7}{3} \\ \text{تعداد زیر مجموعه های 5 عضوی یک مجموعه 7 عضوی} &= \binom{7}{5} \end{aligned} \rightarrow$$

$$= \binom{7}{3} + \binom{7}{5} = 35 + 21 = 56$$

۱۳- (۱) حداکثر 2 دانشجو یعنی یا 2 دانشجو یا کمتر (یا 1 دانشجو یا 0 دانشجو) لذا داریم:

$$\binom{8}{2}\binom{3}{1} + \binom{8}{1}\binom{3}{2} + \binom{8}{0}\binom{3}{3} = \frac{8 \times 7}{2} \times 3 + 8 \times 3 + 1 \times 1 = 109$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

۱۴- (۴) رقم یکان عدد می تواند 2 یا 4 یا 6 باشد، لذا داریم:

$$\square \times \square \times \square$$

$$5 \times 5 \times 3 = 75$$

تعداد افرادی که هندسه یا کسسته تدریس می کنند

۱۵- (۱)

$$49 - 20 = 29$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \Rightarrow 29 = 18 + 16 - |A \cap B| \Rightarrow |A \cap B| = 34 - 29 = 5$$

$$x^2 7x - 30 = 0 \Rightarrow (x-10)(x+3) = 0 \Rightarrow x = 10$$

۱۶- (۱)

$$\binom{n}{3} = x \Rightarrow \binom{n}{3} = 10 \Rightarrow \frac{n!}{3!(n-3)!} = 10 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 10$$

$$\Rightarrow n(n-1)(n-2) = 5 \times 4 \times 3 \Rightarrow n = 5$$

$$\square \times \square \times \square \times \square$$

$$4 \times 4 \times 3 \times 2 = 96$$

۱۷- (۲) ارقام زوج عبارتند از: 0، 2، 4، 6، 8

۱۸- (۴)

$$\binom{12}{4}\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2} = \frac{12!}{4!8!} \times \frac{8!}{2!6!} \times \frac{6!}{2!4!} \times \frac{4!}{2!2!} = \frac{12!}{4!2!2!2!2!}$$

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!} = \frac{12!}{4! \times 2! \times 2! \times 2! \times 2!}$$

روش دیگر: با استفاده از فرمول تبدیل با تکرار داریم:

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{9+5-1}{5-1} = \binom{13}{4} = \binom{13}{9}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \text{۱۹- (۳) یاد آوری:}$$

(۳) - ۲۰

$$\binom{\text{دو برادر}}{1} \times \binom{\text{بقیه}}{3} + \binom{\text{بقیه}}{4} = \binom{2}{1} \binom{10}{3} + \binom{10}{4} = 2 \times 120 + 210 = 450$$

(۱) - ۲۱

$$\boxed{} \times \boxed{} \times \boxed{0} = 30$$

$$\Rightarrow 30 + 60 = 90$$

$$\boxed{} \times \boxed{} \times \boxed{2 \text{ یا } 4} = 60$$

۲۲- (۲) یاد آوری : عددی بر 3 بخش پذیر است که مجموع ارقامش بر 3 بخش پذیر باشد ، لذا ابتدا دسته هایی 3 تایی از مجموعه ی $\{1, 3, 5, 8\}$ انتخاب می کنیم که مجموع آنها ، بر 3 بخش پذیر باشد . این دسته ها عبارتند از: $\{3, 5\}$ ، $\{1, 3, 8\}$ اکنون جایگشت های سه تایی این دو مجموعه را حساب می کنیم :

$3! + 3! = 12$ ، این 12 عدد عبارتند از :

$$135 - 153 - 351 - 315 - 513 - 531 - 138 - 183 - 318 - 381 - 813 - 831$$

۲۳- (۲) یاد آوری :

$$C(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad , \quad P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$P(n, 2) - C(n, 2) = 36 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!} - \frac{n!}{2!(n-2)!} = 36$$

$$n(n-1) - \frac{n(n-1)}{2} = 36 \Rightarrow 2n(n-1) - n(n-1) = 72$$

$$n(n-1) = 9 \times 8 \Rightarrow n = 9 \Rightarrow C(n, 6) = C(9, 6) = \frac{9!}{6!3!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2} = 84$$

$$5! \times 3! \times 4! \times 3! \quad (۱) - ۲۴$$

$$(n-1)! = (11-1)! = 10! \quad (۳) - ۲۵$$

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2!} \quad (۲) - ۲۶$$

$$\Rightarrow |A| = \left\lfloor \frac{1200}{3} \right\rfloor = 400 \quad (۴) - ۲۷$$

A :

$$\Rightarrow |B| = \left\lfloor \frac{1200}{5} \right\rfloor = 240$$

$$\Rightarrow |A \cap B| = \left\lfloor \frac{1200}{15} \right\rfloor = 80$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 400 + 240 - 80 = 560$$

$$\boxed{} \times \boxed{} \times \dots \times \boxed{} = 3^n \quad (۱) - ۲۸$$

۲۹-

A

$$= \Rightarrow |A| = 9999 - 1000 + 1 = 9000 \Rightarrow \text{مجموعه اعداد چهار رقمی} =$$

B = 6 مجموعه ی اعداد چهار رقمی مضرب 6

$$\Rightarrow 1000 \leq 6k \leq 9999 \Rightarrow 167 \leq k \leq 1666 \Rightarrow |B| = 1666 - 167 + 1 = 1500$$

C = 9 مجموعه ی اعداد چهار رقمی مضرب 9

$$\Rightarrow 1000 \leq 9k \leq 9999 \Rightarrow 112 \leq k \leq 1111 \Rightarrow |C| = 1111 - 112 + 1 = 1000$$

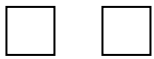
$B \cap C = 9$ مجموعه ی اعداد چهار رقمی مضرب 6 و 9

$$\Rightarrow 1000 \leq 56k \leq 9999 \Rightarrow 56 \leq k \leq 555 \Rightarrow |B \cap C| = 555 - 56 + 1 = 500$$

اکنون بر طبق اصل شمول و عدم شمول داریم:

$$|B \cup C| = |B| + |C| - |B \cap C| = 1500 + 1000 - 500 = 2000$$

$$|\overline{B \cup C}| = 9000 - 2000 = 7000$$



۳۰- (۳)

تعداد اعداد دو رقمی بدون صفر $9 \times 9 = 81$

شماره ها به ترتیب عبارت خواهند بود از «الف - 11»، «الف - 12»، ...، «بف - 77»، «ب - 11»، «ب - 12» و ...، هر 81 شماره، یکی از حروف الفبا عوض می شود، هشتادومین اتومبیل، شماره اش «ب - 11» خواهد بود، پس برای پیدا کردن شماره ی هزارمین اتومبیل، کافی است باقی مانده ی 1000 بر 81 را بیابیم تا حرف الفبای مورد نظر و در نتیجه شماره ی اتومبیل مشخص شود:

$$1000 \left| \begin{array}{l} 81 \\ 12 \end{array} \right.$$

$$R = 28$$

بنابراین با توجه به اینکه، دوازدهمین حرف الفبای فارسی «ر» می باشد، بایستی 28 اتومبیل دیگر را با قانون فوق شماره گذاری کنیم تا به هزارمین شماره برسیم، چون از «ز - 11» شروع می شود، پس $28 + 11 = 39$ اما 20 و 30، چون صفر دارند حذف می شود پس $39 + 2 = 41$ ، یعنی شماره ی هزارمین اتومبیل «ز - 41» می باشد.

$$k! \times (n - k + 1)! \quad (۳۱) - (۴)$$

$$n! - 2! \times (n - 2 + 1)! = n! - 2! \times (n - 1)! = (n - 1)! (n - 2) \quad (۳۲) - (۲)$$

$$\binom{4}{3} + \binom{5}{3} = \binom{4}{3} + \binom{5}{3} \quad (۳۳) - (۳)$$

$$\binom{4}{3} + \binom{5}{3} = \binom{4}{3} + \binom{5}{3}$$

۳۴- (۴)

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 5 & & & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

تعداد جایگشتهایی که با 5 شروع می شود = 8! $\Rightarrow$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & & & & 8 \\ \hline \end{array}$$

تعداد جایگشتهایی که با 8 ختم می شود = 8! $\Rightarrow$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 5 & & & & & & & & 8 \\ \hline \end{array}$$

تعداد جایگشتهایی که با 5 شروع و به 8 ختم می شود = 7! $\Rightarrow$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 8! + 8! - 7! = 2 \times 8! - 7!$$

(۲) - ۳۵

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 7 \text{ یا } 5 \text{ یا } 4 & & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 7 \text{ یا } 5 \text{ یا } 4 & & 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 7 \text{ یا } 5 & & 4 \\ \hline \end{array}$$

$$3 \times 5 \times 1 = 15 \quad 3 \times 5 \times 1 = 15 \quad 2 \times 5 \times 1 = 10$$

$$\Rightarrow 15 + 15 + 10 = 45$$

۳۶- (۲) تعداد مربع های کوچک $8^2 = 64$ تا می باشد ، تعداد مربع هایی که هر ضلع آن از دو ضلع مربع های کوچک تشکیل شده ، $7^2 = 49$ تا می باشد ، تعداد مربع هایی که هر ضلع آنها از سه ضلع مربع های کوچک تشکیل شده ، $6^2 = 36$ تا می باشد و به همین ترتیب الی آخر ، لذا طبق فرمول داریم :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$8^2 + 7^2 + 6^2 + \dots + 2^2 + 1^2 = \frac{8 \times 9 \times 17}{6} = 204$$

۳۷- (۱) خانه های اول و آخر به یک طریق پر می شوند و چون ارقام تکراری نمی باشند ، خانه های بعدی به ۸ ، ۷ و ۶ طریق پرمی شوند.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 2 & & & & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$1 \times 8 \times 7 \times 6 \times 1 = 336$$

(۱) - ۳۸

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & \text{فیزیک} & \text{ریاضی} \\ \hline \end{array}$$

$$1 \times 2 \times 1 \times 1 = 2$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \text{فیزیک} & \text{ریاضی} & \\ \hline \end{array} \rightarrow 2 + 2 + 2 + 2 = 6$$

$$2 \times 1 \times 1 \times 1 = 2$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{فیزیک} & \text{ریاضی} & & \\ \hline \end{array}$$

$$1 \times 1 \times 2 \times 1 = 2$$

روش دیگر : « ریاضی - فیزیک » را یکی گرفته ، با دو درس سیمی و انجیسی ، ۳ تا می شود ، لذا تعداد جایگاههای تایی این ۳ شی برابر می شود با : $3! = 6$

۳۹- (۴) نفر اول در هر یک از ۵ هتل می تواند اقامت گزیند ، نفر دوم نیز به ۵ طریق می تواند در ۵ هتل اقامت گزیند و ... لذا طبق اصل ضرب داریم : $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$

(۱) - ۴۰

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \text{11 یا 8} \\ \hline \end{array}$$

$$4 \times 5 \times 3 = 60$$

د - ا - ن - ش - ج - و

۴۱- (۲) توجه کنید که زوج های مرتب (a, b) و (b, a) یکی نیستند.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array}$$

$$5 \times 5 = 25$$

۴۲- (۴) ارقام فرد عبارتند از : 1, 3, 5, 7, 9



$$9 \times 9 \times 5 = 405 \Rightarrow 405 \times 2 = 810 \quad \text{دقیقه} \Rightarrow \frac{810}{60} = 13/5 \text{ ساعت}$$

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)(n)(n-1)!}{(n-1)!} = (n+1)n = n(n+1) \quad \text{۴۳- (۱)}$$

$$(n)_k = P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{۴۴- (۳) یاد آوری :}$$

$$(n)_2 + 2 \binom{n}{2} = 84 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!} + 2 \frac{n!}{2!(n-2)!} = 84$$

$$\Rightarrow n(n-1) + n(n-1) = 84 \Rightarrow 2n(n-1) = 84 \Rightarrow n(n-1) = 42$$

$$n(n-1) = 7 \times 6 \Rightarrow n = 7 \Rightarrow \binom{7}{5} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

۴۵- (۳) فرض می کنیم :

مجموعه ی اعداد طبیعی نا بیشتر از 210 : S

مجموعه ی اعدادی از S که بر 6 بخش پذیرند : A

مجموعه ی اعدادی از S که بر 10 بخش پذیرند : B

مجموعه ی اعدادی از S که بر 15 بخش پذیرند : C

$$|\overline{A \cup B \cup C}| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$= \left\lfloor \frac{210}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{210}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{210}{15} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{210}{[6,10]} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{210}{[6,15]} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{210}{[9,15]} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{210}{[9,10,15]} \right\rfloor$$

$$= 35 + 21 + 14 - 7 - 7 - 7 + 7 = 56$$

$$|\overline{A \cup B \cup C}| = |S| - |A \cup B \cup C| = 210 - 56 = 154$$

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \text{اعداد طبیعی یک رقمی} \quad \text{۴۶- (۲)}$$

$$\{2, 3, 5, 7\} = \text{اعداد اول یک رقمی}$$

اگر از مجموعه ی اعداد طبیعی یک رقمی ، اعداد اول رقمی را کسر کنیم ، آنگاه مجموعه ی $\{1, 4, 6, 8, 9\}$ ، بدست می آید ، اکنون تمام زیر مجموعه های این مجموعه را می نویسیم و به هر یک از آنها ، اعداد اول یک رقمی را اضافه می کنیم ، چون فرمول تعداد زیر مجموعه ها 2^n است ، پس جواب تست ، $2^5 = 32$ می باشد.

۴۷- (۳) چون برای سومین بار در پرتاب دهم ، سکه «رو» آمده است ، پس در 9 پرتاب قبلی ، دقیقاً 2 بار «رو» آمده

$$\binom{9}{2} = \frac{9!}{2!7!} = 36 \quad \text{است ، لذا داریم :}$$

۴۸- (۳) بر طبق فرمول تعداد پرسش ها داریم :

$$n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots \right) = 4! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \right)$$

$$= 4! - 4! + 4 \times 3 - 4 + 1 = 9$$

۴۹- (۲) این تست تبدیل با تکرار می باشد، که از فرمول $N = \frac{n!}{n_1! \times n_2!}$ استفاده می شود، برای حل، ابتدا رقم سمت چپ را ۲ در نظر می گیریم و بار دیگر رقم سمت چپ را ۱ یا ۳ یا ۴ در نظر می گیریم، (چون رقم سمت چپ صفر نمی تواند باشد)، در این صورت ۷ رقم دیگر به شکل زیر محاسبه می شوند:

$$n_1 = \frac{7!}{2!2!} \quad \text{صفر ۲ بار و ۲ نیز ۲ بار تکرار شده}$$

$$n_2 = 3 \times \frac{7!}{2! \times 3!} \quad \text{صفر ۲ بار و ۲، ۳ بار تکرار شده} \quad \Rightarrow N = n_1 + n_2$$

$$N = \frac{7!}{2!2!} + \frac{3 \times 7!}{2!3!} = \frac{5 \times 7! + 3 \times 7!}{2!3!} = \frac{5 \times 7!}{6 \times 2!} = \frac{7!}{2!}$$

۵۰- (۱) اگر عدد طبیعی دو رقمی مورد نظر را با $\overline{ab}$ نشان دهیم، تعداد اعداد دو رقمی مورد نظر، برابر است با تعداد جواب های طبیعی معادله ی $a + b = 11$ لذا داریم:

$$\binom{n-1}{k-1} = \binom{11-1}{3-1} = \binom{10}{1} = 9$$

نکته: تعداد جواب های طبیعی معادله ی $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر است با: $\binom{n-1}{k-1}$

$$3! \times (4+1)! = 3! \times 5! \quad \text{۵۱- (۳)}$$

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times n_3! \times \dots} = \frac{6!}{3! \times 2! \times 1!} = 60 \quad \text{۵۲- (۱) طبق تبدیل با تکرار داریم:}$$

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{4+10-1}{10-1} = \binom{13}{9} = \binom{13}{3} \quad \text{۵۳- (۳)}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \text{یاد آوری:}$$

۵۴- (۳) توپ اول را به ۱۰ طریق می توان بین ۱۰ نفر تقسیم کرد، توپ دوم را نیز به ۱۰ و توپ سوم و چهارم را هم همین طور، لذا جواب برابر است با: 10^4

۵۵- (۲) چون تعداد توپ ها، کمتر از تعداد افراد است و قرار است به هر نفر، حداقل یک توپ برسد، چنین کاری غیر ممکن است، لذا تعداد طرق ممکن برابر صفر است.

۵۶- (۲) کافی است تعداد جواب های طبیعی معادله ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ را بیابیم که برابر است با:

$$\binom{n-1}{k-1} = \binom{10-1}{4-1} = \binom{9}{3}$$

۵۷- (۳) توپ اول را به ۱۰ طریق، توپ دوم را به ۹ طریق، توپ سوم را به ۸ طریق و بالاخره توپ چهارم را به ۷ طریق می توان بین ۱۰ نفر توزیع کرد لذا طبق اصل شمارش داریم:

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!} = \frac{10!}{6!}$$

$$\binom{10-1}{4-1} \times \binom{8-1}{4-1} = \binom{9}{3} \binom{7}{3} \quad \text{۵۸- (۲) از فرمول} \binom{n-1}{k-1} \text{ و اصل ضرب استفاده می کنیم:}$$

نفر با استفاده از فرمول $\binom{n+k+1}{k-1}$ تقسیم می کنیم ، لذا طبق اصل ضرب داریم :

$$\binom{6+4-1}{4-1} \times \binom{4+4-1}{4-1} = \binom{9}{3} \binom{7}{3}$$

$$\binom{2}{2}\binom{3}{2}\binom{2}{2}=1\times 3\times 1=3$$

یاد آوری: $\binom{n}{n-1} = n$, $\binom{n}{n} = 1$

۶۰- (۳) طبق اصل ضرب داریم :

(1) - 61

$$10 \times 10 \times 10 = 1000$$

11 طریق می توان برگشت ، بنابراین طبق اصل ضرب داریم : $11 \times 12 = 132$

$$3! \times 4! \times 5! \times (n-1)! = 3! \times 4! \times 5! \times (3-1)! = 2! \times 3! \times 4! \times 5! \quad (2) - 63$$

۶۴- (۳) ابتدا از میان ۷ رقم دیگر (۱, ۳, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹) ، ۳ رقم را انتخاب کرده و سپس در جایگشت ۵ رقم ضرب می کنیم لذا داریم :

$$\binom{7}{3} \times 5! = 35 \times 120 = 4200$$

(۲) - ۶۵

نکته: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ = تعداد مربع های صفحه ی

$n \times n$ شطرنجی

دقت کنید که هر مستطیل از برخورد 2 خط افقی با 2 خط عمودی تشکیل می شود.

$$m \times n \text{ شطرنجی های صفحه ی } = \binom{m+1}{2} \binom{n+1}{2}$$

$$\text{تعداد مربع ها} - \text{تعداد کل مستطیل ها} = \text{تعداد مستطیل های با طول و عرض} = \binom{5}{2} \binom{5}{2} - \frac{4 \times 5 \times 9}{6} = 100 - 30 = 70$$

نایب راہ

$$\binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = \binom{7}{2} + 7 + 1 = \frac{7 \times 6}{2} + 8 = 29 \quad (r) - 11$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \binom{n}{n-1} = n, \quad \binom{n}{n} = 1$$

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad \text{۶۷- (۱) یاد آوری :}$$

$$2P(n, 2) + 50 = P(2n, 2) \Rightarrow 2 \times \frac{n!}{(n-2)!} + 50 = \frac{(2n)!}{(2n-2)!}$$

$$2n(n-1) + 50 = (2n)(2n-1) \Rightarrow n(n-1) + 25 = n(2n-1)$$

$$n^2 - n + 25 = 2n^2 - n \Rightarrow n^2 = 25 \Rightarrow n = 5$$

۶۸- (۲) نکته : تعداد توابع یک به یک و پوشا روی یک مجموعه ی n عضوی برابر است با : $n!$

۶۹- (۳) نکته : تعداد توابع پوشا روی مجموعه ی n عضوی A برابر است با : $n!$ لذا تعداد توابع پوشا روی مجموعه ای ۴ عضوی برابر است با : $4!$ (دقت کنید که اگر تعداد اعضای دامنه و هم دامنه با هم برابر باشند ، هر تابعی که بخواهد پوشا باشد ، ناچاراً یک به یک نیز خواهد بود ، لذا در چنین شرایطی برای شمردن تعداد توابع پوشا ، کافی است تعداد توابع $(1-1)$ را که برابر با $n!$ است ، بشماریم.

راه حل کلی : تعداد توابع پوشا از مجموعه ی m عضوی A به مجموعه ی n عضوی B با شرط $n \leq m$ با توجه به اصل شمول و عدم شمول برابر است با :

$$\text{تعداد توابع پوشا} = n^m - \binom{n}{1}(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} 1^m$$

لذا داریم :

$$4^4 - \binom{4}{1}(4-1)^4 + \binom{4}{2}(4-2)^4 + \binom{4}{3}(4-3)^4$$

$$= 256 - 4 \times 81 + 6 \times 16 - 4 = 256 - 232 = 24 = 4!$$

۷۰- (۴) نکته : تعداد توابع یک به یک از مجموعه ی m عضوی A (دامنه ی توابع A باشد) به مجموعه ی n عضوی B ، با شرط $m > n$ برابر صفر است.

۷۱- (۴) نکته : تعداد توابع یک به یک از مجموعه ی m عضوی A به مجموعه ی n عضوی B برابر است با :

$$P(m, n) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

لذا تعداد توابع یک به یک از مجموعه ی ۴ عضوی A به مجموعه ی ۳ عضوی B برابر است با :

$$P(4, 3) = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$$

$$A_1 = \{n \in A : n \text{ مضرب } 5 \text{ باشد}\} \Rightarrow |A_1| = \left\lfloor \frac{770}{5} \right\rfloor = 154 \quad \text{۷۲- (۲)}$$

$$A_2 = \{n \in A : n \text{ مضرب } 7 \text{ باشد}\} \Rightarrow |A_2| = \left\lfloor \frac{770}{7} \right\rfloor = 110$$

$$A_1 \cap A_2 = \{n \in A : n \text{ مضرب } 5 \text{ و } 7 \text{ باشد}\} = \{n \in A : n \text{ مضرب } 35 \text{ باشد}\} \Rightarrow |A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \frac{770}{35} \right\rfloor = 22$$

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| = 154 + 110 - 22 = 242$$

$$|A_1 \cup A_2| = |S| - |A_1 \cup A_2| = 770 - 242 = 528$$

۷۳- (۳) نکته : تعداد توابع پوشا از مجموعه ای n عضوی به مجموعه ای ۲ عضوی برابر است با : $n^2 - 2$

$$\text{لذا داریم : } 6^2 - 2 = 62$$

۷۴- (۴) نکته: تعداد توابع یک به یک و پوشا روی مجموعه ی n عضوی A برابر است با: $n!$

دقت کنید که هر تابع یک به یک از A به A ، یک تابع پوشا نیز هست، پس بایستی تعداد توابع یک به یک را شمرده که برابر است با: $n!$

۷۵- (۲) یک ماتریس 4×4 ، 16 درایه دارد و چون هر درایه 0 یا 1 است (2 حالت دارد) لذا تعداد ماتریس های 4×4 صفر برابر است با: 2^{16}

۷۶- (۱) یاد آوری:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{k+1} \quad \text{«اتحاد پاسکال»}$$

لذا داریم:

$$\underbrace{\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}}_{\binom{n+1}{k}} + \binom{n+1}{k+1} = \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{k+1} = \binom{n+2}{k+1}$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n \quad \text{۷۷- (۳) یاد آوری:}$$

$$\binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} = 2^6 - \left(\binom{6}{0} + \binom{6}{6} \right) = 64 - 2 = 62$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{یاد آوری:}$$

$$\text{۷۸- (۴) نکته:} \quad \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = 2^{n-1} \quad \text{لذا داریم:}$$

$$\binom{10}{0} + \binom{10}{2} + \binom{10}{4} + \binom{10}{8} + \binom{10}{10} = 2^9 - \binom{10}{6} = 512 - 210 = 302$$

۷۹- (۳) نکته: تعداد زیر مجموعه های k عضوی مجموعه ای n عضوی برابر است با $\binom{n}{k}$ لذا داریم:

$$\binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = 2^7 - \left(\binom{7}{0} + \binom{7}{1} \right) = 128 - 8 = 120$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{0} = 1 \quad \text{یاد آوری:}$$

۸۰- (۱)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^n k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = \sum_{k=1}^n n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} \\ &= \sum_{k=1}^n n \times \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = n \left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \dots + \binom{n-1}{n-1} \right] \\ &= n \times 2^{n-1} \end{aligned}$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n \quad \text{یاد آوری:}$$

۸۱- (۲) یاد آوری: تعداد زیر مجموعه های k عضوی یک مجموعه n عضوی برابر است با: $\binom{n}{k}$

در اینجا کافی است ابتدا 5 عضو را از میان بقیه ی اعضای A یعنی $\{a, b, c, d, e, g\}$ انتخاب کرده سپس f را به هر یک اضافه کنیم، لذا کافی است تعداد زیر مجموعه های 5 عضوی مجموعه ی $\{a, b, c, d, e, g\}$ را بیابیم که طبق

$$\binom{6}{5} = 6 \text{ یاد آوری فوق برابر است با:}$$

$$\binom{n}{n-1} = n \text{ یاد آوری:}$$

۸۲- کافی است 3 و 7 را کنار گذاشته، تعداد زیر مجموعه های 5 عضوی مجموعه ی 8

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 10\} \text{ را بیابیم که برابر است با: } \binom{8}{5} \text{ یا } \binom{8}{3}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \text{ یاد آوری:}$$

۸۳- (۱) عضو a از مجموعه ی A را می توان به 3 عضو b, c و d (غیر از خودش) نظیر کرد که شامل 3 حالت می شود، برای عضو b از مجموعه A نیز سه انتخاب a, b, c از مجموعه ی دوم وجود دارد که شامل 3 حالت می شود، اما برای عضو c از A تنها یک انتخاب و آن هم d از B وجود دارد که شامل 1 حالت می شود، عنصر d از A را نیز می توان به هر عنصری غیر از d نظیر کرد که شامل 3 حالت می شود و بالاخره برای عنصر e از A نیز به همین ترتیب 3 انتخاب وجود دارد لذا طبق اصل ضرب (اصل شمارش) تعداد توابع از A به B با خصوصیات خواسته شده برابر است با: $3 \times 3 \times 1 \times 3 \times 3 = 81$

۸۴- (۲) نکته: تعداد توابع $(1-1)$ روی یک مجموعه ی n عضوی برابر است با: $n!$

نکته: تعداد کل توابع موجود روی یک مجموعه ی n عضوی برابر است با: n^n

لذا داریم:

$$n^n - n! = \text{تعداد توابع } (1-1) - \text{تعداد کل توابع} = \text{تعداد توابع غیر یک به یک}$$

$$\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} = 1 + 10 + \frac{10 \times 9}{2} + \frac{10!}{3!7!} = 11 + 45 + 120 = 176 \quad \text{۸۵- (۱)}$$

۸۶- (۴) طبق تبدیل با تکرار داریم:

$$\square \square \square \square \square \square \square$$

$$6 \quad 6 \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 = 6 \times 6!$$

اما طبق تبدیل با تکرار چون رقم 2، دو بار و رقم 3، سه بار تکرار شده، لذا تعداد اعداد مورد نظر برابر است با:

$$\frac{6 \times 6!}{3! \times 2!} = 360$$

۸۷- (۲) چون پاسخ به 3 سوال اول اجباری است، لذا این دانش آموز باید 5 سوال دیگر را از بین 12 سوال باقی مانده

$$\binom{12}{5} = \binom{12}{7} \text{ طریق امکان پذیر است، از طرفی:}$$

۸۸- (۱) نکته: تعداد جواب های صحیح معادله ی $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ که در شرایط $x_1 \geq c_1, x_2 \geq c_2, \dots$

$$x_k \geq c_k \text{ صدق کند، برابر است با: } \binom{n - c_1 - c_2 - \dots - c_k + k - 1}{k - 1}$$

لذا داریم:

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ x_4 \geq 4 \Rightarrow x_4 \geq 5 \end{cases} \Rightarrow \binom{27-5+4-1}{4-1} = \binom{25}{3}$$

۸۹- (۴) نکته: تعداد جواب های طبیعی معادله ی $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر است با: $\binom{n-1}{k-1}$

لذا داریم:

$$\binom{7-1}{5-1} = \binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

$$\text{نکته: } \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

۹۰- (۳)

$$\begin{cases} x_1 \geq 1 \Rightarrow x_1 \geq 2 \\ x_2 \geq 3 \Rightarrow x_2 \geq 4 \\ x_3 \geq 0 \Rightarrow x_3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \binom{n-c_1-c_2-c_3+k-1}{k-1} = \binom{11-2-4+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = \binom{7}{5}$$

۹۱- (۱) نکته: تعداد جملات متمایز بسط $(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n$ برابر است با: $\binom{n+k-1}{k-1}$

لذا داریم:

$$\binom{3+4-1}{4-1} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3!} = 20$$

۹۲- (۳) نکته: در بسط $(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n$ ضریب جمله ی $a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_k^{n_k}$ به شرط $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$$

لذا داریم:

$$a^4 b^3 c^2 e^6 \text{ ضریب جمله ی } = \frac{15!}{4!3!2!6!} = \frac{15!}{12 \times 4! \times 6!}$$

$$(a+b)^n \text{ تعداد جملات متمایز } = \binom{n+2-1}{2-1} = \binom{n+1}{1} = n+1 \quad ۹۳- (۲)$$

نکته: بسط دو جمله ی $(a+b)^n$ ، همیشه $n+1$ جمله دارد (یعنی یکی بیشتر از توان) به عنوان مثال $(a+b)^3$ ، ۴،

جمله دارد، دقت کنید: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$\binom{n-1}{k-1} \text{ (۲) نکته: تعداد جواب های طبیعی معادله ی } x_1 + x_2 + \dots + x_k = n \text{ برابر است با:}$$

لذا داریم:

$$a+b=10 \text{ تعداد جواب های طبیعی } = \binom{10-1}{2-1} = \binom{9}{1} = 9$$

این ۹ جواب عبارتند از:

$$(1,9), (9,1), (2,8), (8,2), (3,7), (7,3), (4,6), (6,4), (5,5)$$

۹۵- (۴) ابتدا یک جواب معادله را حدس می زنیم و سپس از فرمول کلی جواب های معادله ی سیاله استفاده می کنیم :

$$\begin{cases} 5x + 4y = 30 \\ 5 \mid 30 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow 5x = 30 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 6 \\ y_0 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + k \frac{b}{d} = 6 + 4k \rangle 0 \Rightarrow k \rangle \frac{-3}{2} \\ y = y_0 - k \frac{a}{b} = -5k \rangle 0 \Rightarrow k \langle 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{-3}{2} \langle k \langle 0 \Rightarrow k = -1 \Rightarrow \text{پس معادله فقط یک جواب طبیعی دارد} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 + (-4) = 2 \\ y = -5(-1) = 5 \end{cases}$$

۹۶- (۳) نکته: تعداد جواب های صحیح و نا منفی نا معادله ی $x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq n$ برابر است با:

$$\binom{n+k}{k} \text{ یا } \binom{n+k}{n}$$

لذا داریم:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \Rightarrow \binom{10+3}{3} = \binom{13}{3}$$

دقت کنید که چون $x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$ لذا عددی مانند z وجود دارد به طوری که: $x_1 + x_2 + x_3 + z = 10$ بنابراین

$$\binom{10+4-1}{4-1} = \binom{13}{3} \text{ تعداد جواب های صحیح نا منفی این معادله برابر است با:}$$

$$\binom{n+k-1}{k-1} \text{ (۱) نکته: تعداد جملات بسط } (a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n \text{ برابر است با:}$$

لذا داریم:

$$(a+b+c)^n \Rightarrow \text{تعداد جملات} = \binom{n+3-1}{3-1} = \binom{n+2}{2} = 21$$

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2} = 21 \Rightarrow (n+2)(n+1) = 7 \times 6 \Rightarrow n+1 = 6 \Rightarrow n = 5$$

۹۸- (۲) کافی است تعداد جواب های صحیح نا منفی معادله ی $x_1 + x_2 + x_3 = 15$ را با شرط $x_1 \geq 4$ ، $x_2 \geq 4$

و $x_3 \geq 4$ بیابیم، که برابر است با:

$$\binom{15-4-4-4+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

روش دیگر: ابتدا به هر یک از سه نفر، 4 جایزه داده، سه جایزه ی دیگر باقی می ماند که باید بین 3 نفر توزیع شود،

لذا داریم:

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10$$

۹۹- (۳) چون طرف دوم معادله 7 است، پس $x_1 = 0$ یا $x_1 = 1$ (یعنی x_1 نمی تواند بزرگتر از 2 باشد، زیرا در این

صورت $2^3 = 8$ ، در حالی که طرف دوم 7 است) لذا داریم:

$$x_1 = 0 \Rightarrow 0 + x_2 + x_3 = 7 \Rightarrow x_2 + x_3 = 7 \Rightarrow \binom{7+2-1}{2-1} = \binom{8}{1} = 8$$

$$x_1 = 1 \Rightarrow 1 + x_2 + x_3 = 7 \Rightarrow x_2 + x_3 = 6 \Rightarrow \binom{6+2-1}{2-1} = \binom{7}{1} = 7$$

لذا معادله جمعا 15 جواب صحیح نا منفی دارد.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9 \Rightarrow \text{تعداد جواب های طبیعی} = \binom{n-1}{k-1} = \binom{9-1}{3-1} = \binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28 \quad (۱۰۰-۴)$$

با جای گذاری عدد 9 در معادله ی دوم ، داریم :

$$\underbrace{x_1 + x_2 + x_3}_9 + x_4 + x_5 = 16 \Rightarrow 9 + x_4 + x_5 = 16 \Rightarrow x_4 + x_5 = 7$$

$$\binom{7-1}{2-1} = \binom{6}{1} = 6$$

تعداد جواب های این معادله برابر است با :

$$28 \times 7 = 196$$

لذا طبق اصل شمارش تعداد جواب های طبیعی دستگاه برابر است با :

۱۰۱- (۱) نکته : تعداد جواب هاس صحیح نا منفی معادله ی $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ با شرط $x_1 \geq c_1, x_2 \geq c_2, \dots$ و ...

$$x_k \geq c_k, \quad \binom{n - c_1 - c_2 - \dots - c_k + k - 1}{k - 1}$$

لذا داریم :

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \geq 2 \\ x_2 \geq 2 \Rightarrow x_2 \geq 4 \\ x_3 \geq 2 \Rightarrow x_3 \geq 0 \\ x_4 \geq 2 \Rightarrow x_4 \geq 3 \end{cases} \Rightarrow \binom{21-1-3-3-3+4-1}{4-1} = \binom{14}{3} = \binom{14}{11}$$

۱۰۲- (۱) شمول :

تعداد کل جواب های طبیعی معادله = تعداد کل جواب های صحیح معادله با شرط $|S| = 1 \leq x_i$

$$= \binom{n-1}{k-1} = \binom{15-1}{3-1} = \binom{14}{2} = 91$$

اکنون طبق اصل عدم شمول ، تعداد جواب های معادله با شرط $x_i \geq 7$ را حساب کرده از کل جواب ها کم می کنیم، اکنون فرض می کنیم :

$A_1 = \{x_3 \geq 1, x_2 \geq 1, x \geq 7\}$ جواب هایی از معادله که

$$\Rightarrow x_1 \geq 8 \Rightarrow |A_1| = \binom{15-8-1-1+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21$$

به همین ترتیب با فرض :

$A_2 = \{x_3 \geq 1, x_1 \geq 1, x_2 \geq 7\}$ جواب هایی از معادله که

$A_3 = \{x_2 \geq 1, x_1 \geq 1, x_3 \geq 7\}$ جواب هایی از معادله که

$$|A_2| = |A_3| = 21$$

به طور مشابه داریم :

اما به دلیل اینکه دو متغیر نمی توانند توأماً بزرگتر از 7 و یا بزرگتر مساوی 8 باشند ، زیرا جمع هر سه متغیر x_1 و x_2 و x_3 ، 15 است ، بنابراین داریم :

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

لذا داریم:

$$\begin{aligned}
 |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\
 &= 21 + 21 + 21 - 0 - 0 - 0 + 0 \\
 &= 63
 \end{aligned}$$

لذا جواب های معادله برابر است با:

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 91 - 63 = 28$$

۱۰۳- (۴) نکته: تعداد جواب های صحیح معادله ی $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ ، با شرط $x_1 \geq c_1$ ، $x_2 \geq c_2$ و ...

$$x_k \geq c_k \text{، برابر است با: } \binom{n - c_1 - c_2 - \dots - c_k + k - 1}{k - 1}$$

لذا داریم:

$$x_i \geq i \Rightarrow \begin{cases} x_1 \geq 1 \\ x_2 \geq 2 \\ x_3 \geq 3 \end{cases} \Rightarrow \binom{10 - 1 - 2 - 3 + 3 - 1}{3 - 1} = \binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \text{ یاد آوری:}$$

۱۰۴- (۳) شرط $x_i > -3$ معادل است با $x_i \geq -2$ ، اکنون با تغییر متغیر داریم:

$$x_i \geq -2 \Rightarrow x_i + 2 \geq 0, \quad x_i + 2 = y_i \Rightarrow \begin{cases} y_i \geq 0 \\ x_i = y_i - 2 \end{cases}$$

با اعمال این تغییر متغیر در معادله داریم:

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -3 &\Rightarrow y_1 - 2 + y_2 - 2 + y_3 - 2 + y_4 - 2 = -3 \\
 &\Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 5
 \end{aligned}$$

تعداد جواب های صحیح نا منفی این معادله برابر است با:

$$\binom{5+4-1}{4-1} = \binom{8}{3} = 56$$

یعنی 56 جواب برای y_i ها داریم، اما به دلیل اینکه $x_i = y_i - 2$ ، لذا به همین اندازه جواب برای x_i ها داریم (البته هر جواب برای x_i ها، 2 واحد از جواب متناظرش برای y_i ها کمتر است).۱۰۵- (۲) نکته: تعداد جواب های صحیح نا منفی معادله ی $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ با شرط $x_1 \geq c_1$ ، $x_2 \geq c_2$ و ...

$$x_k \geq c_k \text{، برابر است با: } \binom{n - c_1 - c_2 - \dots - c_k + k - 1}{k - 1}$$

لذا داریم:

$$\begin{cases} x > 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ y > 1 \Rightarrow y \geq 2 \\ z > 2 \Rightarrow z \geq 3 \\ t > 3 \Rightarrow t \geq 4 \end{cases} \Rightarrow \binom{14 - 1 - 2 - 3 - 4 + 4 - 1}{4 - 1} = \binom{7}{3}$$

۱۰۶- (۱) نکته: در بسط $(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n$ ، ضریب جمله ی $a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_k^{n_k}$ به شرط $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!} \text{ (} n_i \text{ ها صحیح نا منفی اند) برابر است با:}$$

لذا داریم :

$$(a+b+c)^6 \Rightarrow a^3b^2c \text{ ضریب} = \frac{6!}{3!2!1!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{2} = 60$$

$$5 \leq x+y+z \leq 8 \Rightarrow 6 \leq x+y+z \leq 7, \quad x, y, z \geq 1$$

(۱۰۷) - (۴)

$$x+y+z=7 \rightarrow \text{تعداد جواب های طبیعی} = \binom{7-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 15$$

$$x+y+z=6 \rightarrow \text{تعداد جواب های طبیعی} = \binom{6-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10$$

در نتیجه واضح است که بین 6 و 7 هیچ عدد طبیعی وجود ندارد ، لذا معادله جمعا $15+10=25$ جواب دارد که این تعداد جواب ، مربوط به حالت تساوی در نا معادله ی فوق می باشند.

۱۰۸ - (۲) نکته : تعداد جواب های صحیح معادله ی $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ با شرط $x_i \geq c$ ($i=1,2,\dots,k$) برابر

$$\binom{n-kc+k-1}{k-1} \text{ است با:}$$

$$\left. \begin{aligned} x_i \in (2, +\infty) &\Rightarrow x_i \geq 2 \Rightarrow x_i \geq 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 18 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \binom{18-5(3)+5-1}{5-1} = \binom{7}{4}$$

تستهای کنکور سراسری و آزاد «از سال ۷۹ تا ۸۴»

۱. با ارقام ۶، ۶، ۴، ۴، ۲، ۲ چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟ (آزاد - ۷۹)

- (۱) ۱۵ (۲) ۲۴ (۳) ۹ (۴) ۱۲

۲. حاصل $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ برابر است با: (آزاد تجربی - ۷۹)

- (۱) $\binom{n+1}{k-1}$ (۲) $\binom{n+1}{k+1}$ (۳) $\binom{n}{k+1}$ (۴) $\binom{n+1}{k}$

۳. چند دسته ی سه تایی گل از ۵ نوع گل مختلف می توان ساخت؟ (تکرار مجاز است) (سراسری - ۸۰)

- (۱) ۲۴ (۲) ۳۲ (۳) ۳۵ (۴) ۴۲

۴. با ارقام ۰، ۰، ۰، ۰، ۳، ۳، ۳، ۳ چند عدد زوج هشت رقمی می توان نوشت؟ (آزاد - ۸۰)

- (۱) $\frac{8!}{4!4!}$ (۲) ۶ (۳) ۱۰ (۴) ۲۰

۵. معادله ی $x_1^4 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$ ، با شرط $x_i \in \mathbb{Z}$ و $x_i \geq 0$ چند جواب دارد؟ (آزاد - ۸۰)

- (۱) $\binom{9}{6}$ (۲) $\binom{8}{5} + \binom{7}{5}$ (۳) $\binom{9}{6} + \binom{8}{5}$ (۴) $\binom{10}{6} + \binom{9}{5}$

۶. معادله ی $x_1 + x_2 + 10x_3 = 20$ ، چند جواب صحیح غیر منفی دارد؟ (آزاد ریاضی - ۸۰)

- (۱) ۳۰ (۲) ۳۱ (۳) ۳۳ (۴) ۴۱

۷. چند عدد صحیح مثبت کوچکتر از ۳۰۱ وجود دارد که نسبت به اعداد ۷۵ و ۶۰ اول باشند؟ (آزاد ریاضی - ۸۱)

- (۱) ۱۶۰ (۲) ۴۰ (۳) ۸۰ (۴) ۱۸۰

۸. چند عدد سه رقمی وجود دارد که نه بر ۵ تقسیم پذیر باشند و نه بر ۶؟ (سراسری ریاضی - ۸۲)

- (۱) ۵۴۰ (۲) ۵۷۰ (۳) ۶۰۰ (۴) ۶۳۰

۹. اگر تعداد اعداد طبیعی که نسبت به عدد $3^3 \times 5^2$ اول اند و از آن کوچکترند، k تا باشد، تعداد اعداد طبیعی که نسبتبه عدد $2^2 \times 3^4 \times 5^2$ اول اند و از آن کوچکترند، کدام است؟ (آزاد ریاضی - ۸۲)

- (۱) $12k$ (۲) k (۳) $3k$ (۴) $6k$

۱۰. معادله ی $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{10}{x_3}$ ، چند جواب صحیح غیر منفی دارد؟ (آزاد ریاضی - ۸۲)

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۳ (۳) ۱۴ (۴) ۹

۱۱. هفت کبوتر به چند طریق می توانند در سه لانه ی متمایز قرار گیرند به طوری که هیچ لانه ای خالی نماند؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۵ (۳) ۱۶ (۴) ۲۰

۱۲. چند تابع پوشا از مجموعه ی $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ به مجموعه ی $B = \{1, 2\}$ وجود دارد؟ (آزاد - ۸۴)

- (۱) ۲۴ (۲) ۲۳ (۳) ۳۱ (۴) ۳۰

۱۳. چند تابع پوشا از مجموعه ی $A = \{a, b, c\}$ به مجموعه ی $B = \{1, 2, 3\}$ وجود دارد؟ (آزاد - ۸۴)

- (۱) ۹ (۲) ۲۷ (۳) ۶ (۴) صفر

«پاسخ تستهای کنکور سراسری و آزاد از ۷۹ تا ۸۵»

۱- (۲) الف) اگر هر سه رقم متمایز باشند، داریم: $3! = 6$

ب) اگر دو رقم مثل هم باشند، مانند $(2, 2, 4)$ ، داریم: $\frac{3!}{2!} = 3$

اما پنج حالت دیگر مشابه حالت (ب) وجود دارد که عبارتند از:

$$(6, 6, 4), (6, 6, 2), (4, 4, 6), (4, 4, 2), (2, 2, 6)$$

لذا تعداد طریق ممکن برابر است با: $6 + 6 \times 3 = 24$

$$۲- (۴) یاد آوری: \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

۳- (۳) در واقع باید از ۵ گلدان مختلف، سه شاخه ی گل برداریم، لذا اگر تعداد گل های انتخابی از نوع اول را با x_1 ، تعداد گل های انتخابی از نوع دوم را با x_2 و ... نشان دهیم، کافی است تعداد جواب های صحیح نا منفی معادله ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3$ را پیدا کنیم که برابر است با:

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{3+5-1}{5-1} = \binom{7}{4} = 35$$

۴- (۴) چون عدد زوج است، بایستی رقم یکان آن صفر باشد، از طرفی چون صفر نمی تواند رقم اول قرار گیرد، لذا رقم اول آن باید ۳ باشد، یعنی عدد باید به صورت زیر باشد:

$$\underbrace{\square \square \square \square \square \square}_{\text{شش رقم}}.$$

پس در وسط شش رقم داریم که یا ۰ هستند یا ۳، لذا طبق فرمول تبدیل با تکرار داریم:

$$N = \frac{6!}{3! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{6} = 20$$

۵- (۲) چون طرف دوم معادله، ۶ می باشد، پس $x_1 = 0$ یا $x_1 = 1$ (زیرا اگر به جای x_1 ، عددی بزرگتر از ۱ را قرار دهیم، توان چهارم آن از ۶ بیشتر می شود)، لذا دو حالت زیر را داریم:

$$x_1 = 0 \Rightarrow 0 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \Rightarrow \underbrace{x_2 + x_3 + x_4}_{3 \text{ مجهول}} = 6 \Rightarrow N_1 = \binom{6+3-1}{3-1} = \binom{8}{2} = \binom{8}{6}$$

$$x_1 = 1 \Rightarrow 1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \Rightarrow x_2 + x_3 + x_4 = 5 \Rightarrow N_2 = \binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = \binom{7}{5}$$

$$\Rightarrow N = N_1 + N_2 = \binom{8}{6} + \binom{7}{5}$$

۶- (۳) چون سمت راست معادله ۲۰ است و ضریب x_3 ، ۱۰ است، لذا x_3 می تواند فقط یکی از سه مقدار ۰ یا ۱ یا ۲ را اختیار کند، بنابراین سه حالت وجود دارد:

$$x_3 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 20 \Rightarrow N_1 = \binom{20+2-1}{2-1} = \binom{21}{1} = 21$$

$$x_3 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + 10 = 20 \Rightarrow x_1 + x_2 = 10 \Rightarrow N_2 = \binom{10+2-1}{2-1} = \binom{11}{1} = 11$$

$$x_3 = 2 \Rightarrow x_1 + x_2 + 20 = 20 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0$$

$$\Rightarrow N_3 = \binom{0+2-1}{2-1} = \binom{1}{1} = 1, (x_1 = x_2 = 0)$$

$$\Rightarrow N = N_1 + N_2 + N_3 = 21 + 11 + 1 = 33$$

۷- (۳) ابتدا ک. م. م دو عدد 75 و 30 را محاسبه می کنیم:

$$75 = 3 \times 25 = 3 \times 5^2 \Rightarrow [75, 60] = 2^2 \times 3 \times 5^2 = 300$$

$$60 = 6 \times 10 = 2 \times 3 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$$

اکنون گوییم اگر عددی بخواهد نسبت به 75 اول باشد باید مضرب 3 و مضرب 5 نباشد، همچنین اگر عددی بخواهد نسبت به 60 اول باشد، باید مضرب 2 و مضرب 3 و مضرب 5 نباشد، بنابراین باید تمام اعدادی که کوچکتر یا مساوی ک. م. م 75 و 60، یعنی 300 هستند را شمرد که برابرند با:

$$\phi(300) = \phi(2^2 \times 5^2 \times 3) = 300 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 80$$

$$n \Rightarrow 9 \times 10^{n-1} = 9 \times 10^2 = 900 \quad \text{تعداد اعداد سه رقمی} \quad \text{۸- (۳)}$$

رقمی

اکنون از اصل شمول و عدم شمول استفاده می کنیم:

$$|A| = \left\lfloor \frac{900}{5} \right\rfloor = 180$$

$$|B| = \left\lfloor \frac{900}{6} \right\rfloor = 150 \Rightarrow |\overline{A \cup B}| = 900 - (180 + 150 - 30) = 600$$

$$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{900}{30} \right\rfloor = 30$$

$$\phi(3^3 \times 5^2) = 3^3 \times 5^2 \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 360 = K \quad \text{۹- (۴)}$$

$$\phi(2^2 \times 3^4 \times 5^2) = 2^2 \times 3^4 \times 5^2 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 4 = 6 \times 360 = 6K$$

۱۰- (۳) چون سمت چپ معادله، مجموع سه عدد صحیح است (و لذا حاصلش نیز صحیح است)، لذا سمت راست معادله

نیز باید عددی صحیح باشد، لذا x_3 مقسوم علیه مثبت 10 باشد لذا حالات زیر وجود دارد:

$$x_3 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + 1 = 10 \Rightarrow x_1 + x_2 = 9 \Rightarrow N_1 = \binom{9+2-1}{2-1} = \binom{10}{1} = 10$$

$$x_3 = 2 \Rightarrow x_1 + x_2 + 2 = \frac{10}{2} \Rightarrow x_1 + x_2 = 3 \Rightarrow N_2 = \binom{3+2-1}{2-1} = \binom{4}{1} = 4$$

$$x_3 = 5 \Rightarrow x_1 + x_2 + 5 = \frac{10}{5} \Rightarrow x_1 + x_2 = -3 \Rightarrow \text{جواب صحیح نا منفی ندارد}$$

$$x_3 = 10 \Rightarrow x_1 + x_2 + 10 = \frac{10}{10} \Rightarrow x_1 + x_2 = -9 \Rightarrow \text{جواب صحیح نا منفی ندارد}$$

$$\text{تعداد کل جواب ها} = 10 + 4 = 14$$

۱۱- (۲) کافی است تعداد جواب های طبیعی معادله ی $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ را بیابیم که برابر است با :

$$\binom{7-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 15$$

۱۲- (۴)

تعداد توابعی که 1 یا 2 را نپوشانند- تعداد کل توابع = توابعی که پوشا نیستند- تعداد کل توابع = تعداد توابع پوشا
 $= 2^5 - (1^5 + 1^5 - 0^5) = 32 - 2 = 30$

نکته : تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ی n عضوی به یک مجموعه ی 2 عضوی برابر است با :

$$2^n - 2 = 2^5 - 2 = 30$$

$$f = \{(a, ?), (b, ?), (c, ?)\}$$

۱۳- (۳)

$$3^3 - \left[\binom{3}{1} 2^3 - \binom{3}{2} 1^3 + \binom{3}{3} 0^3 \right] = 6$$

تعداد توابع غیر پوشا- تعداد کل توابع = تعداد توابع پوشا

سوالات تستی بخش احتمال

۱- اگر x یک عدد سه رقمی باشد با احتمال اینکه $\log_5 x$ یک عدد صحیح باشد چیست ؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{100}$ (۳) $\frac{1}{450}$ (۴) $\frac{1}{300}$

۲- از بین سه دانش آموز سال اول و چهار دانش آموز سال دوم سه نفر به تصادف انتخاب می کنیم احتمال اینکه هر سه نفر همکلاسی باشند برابر است با :

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{2}{35}$ (۴) $\frac{21}{147}$

۳- ضرایب معادله درجه دوم $x^2+bx+c=0$ بر اساس دو تاس همگن تعیین می شوند (b عدد روی تاس اول و c عدد روی تاس دوم است) احتمال اینکه ریشه های این معادله حقیقی باشند چقدر است ؟

- (۱) $\frac{17}{36}$ (۲) $\frac{19}{36}$ (۳) $\frac{23}{26}$ (۴) $\frac{13}{26}$

۴- کیسه ای حاوی دو مهره سفید و سه مهره سیاه است مهره ای را تصادفی خارج کرده و دوباره به کیسه بر می گردانیم و پنج بار این عمل را تکرار می کنیم احتمال اینکه حداقل چهار بار مهره سفید بیرون آمده باشد کدام است ؟

- (۱) $\frac{504}{3125}$ (۲) $\frac{272}{3125}$ (۳) $\frac{11}{625}$ (۴) $\frac{1}{625}$

۵- احتمال اینکه یک عدد سه رقمی مربع کامل باشد چقدر است ؟

- (۱) $\frac{11}{450}$ (۲) $\frac{17}{220}$ (۳) $\frac{13}{160}$ (۴) $\frac{5}{197}$

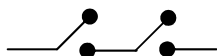
۶- در جعبه ای a مهره سفید و b مهره سیاه قرار دارد یک مهره از جعبه بیرون آورده و کنار می گذاریم سپس مهره دومی را بیرون می کشیم احتمال سفید بودن مهره دوم کدام است ؟

- (۱) $\frac{a-b}{a+b}$ (۲) $\frac{b}{a+b}$ (۳) $\frac{a}{a+b}$ (۴) $\frac{b}{2a+b}$

۷- پنجاه نفر به تصادف در یک ردیف قرار گرفته اند احتمال آنکه دو نفر خاص در کنار هم قرار گیرند چقدر است ؟

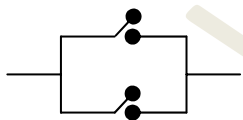
- (۱) $\frac{1}{50}$ (۲) $\frac{49}{50}$ (۳) $\frac{2! \times 48!}{50!}$ (۴) $\frac{1}{25}$

۸- اگر بدانیم احتمال سالم کار کردن کلیدی ۹۰٪ است احتمال آنکه مدار زیر درست کار کند چقدر است ؟



- (۱) ۰/۹ (۲) ۰/۸۱ (۳) ۰/۰۰۸۱ (۴) ۰/۰۱

۹- در تست قبل احتمال آنکه مدار زیر کار کند چقدر است ؟



- (۱) ۰/۹۹ (۲) ۰/۹ (۳) ۰/۸۱ (۴) ۰/۰۱

۱۰- در پرتاب دو تاس اگر مجموع برآمدها لااقل هفت باشد احتمال آنکه مجموع برآمدها لااقل ۱۰ باشد کدام است ؟

- (۱) $\frac{1}{7}$ (۲) $\frac{2}{7}$ (۳) $\frac{3}{7}$ (۴) $\frac{5}{7}$

۱۱- عدد n را به طور تصادفی از مجموعه ی اعداد طبیعی $N_{100} = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ انتخاب می کنیم احتمال آنکه $(n, 36) = 1$ کدام است ؟

- (۱) $\frac{19}{100}$ (۲) $\frac{17}{100}$ (۳) $\frac{23}{100}$ (۴) $\frac{13}{100}$

۱۲- چهار تاس همگن را با هم پرتاب می کنیم احتمال اینکه حداکثر یک 3 ظاهر شود چقدر است ؟

$$(1) \left(\frac{5}{6}\right)^3 \times \frac{1}{6} \quad (2) 4 \times \left(\frac{1}{6}\right) \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 \quad (3) \frac{5^3}{6^4} \quad (4) \left(\frac{5}{6}\right)^4 \times 4 \times \left(\frac{5^3}{6^4}\right)$$

۱۳- دو تاس همگن با هم پرتاب می کنیم احتمال اینکه تاس اول عدد 4 و تاس دوم عدد فرد بیاید چقدر است ؟

$$(1) \frac{1}{3} \quad (2) \frac{1}{6} \quad (3) \frac{1}{12} \quad (4) \frac{1}{9}$$

۱۴- در جعبه ای 16 لامپ وجود دارد که پنج تای آنها معیوبند دو لامپ را یکی پس از دیگری و بدون جایگذاری از این جعبه بر می داریم احتمال اینکه هر دو سالم باشند چقدر است ؟

$$(1) \frac{55}{128} \quad (2) \frac{13}{24} \quad (3) \frac{11}{24} \quad (4) \frac{121}{256}$$

۱۵- اگر A و B مستقل از هم باشند $P(A-B)$ کدام است ؟

$$(1) P(A) \quad (2) P(B) \quad (3) P(A)P(B') \quad (4) P(B)P(A')$$

۱۶- از بین چهار نفر دوست احتمال آنکه حداقل 2 نفر از آنها در یک روز هفته متولد شده باشند چقدر است ؟

$$(1) \frac{223}{343} \quad (2) \frac{3}{7} \quad (3) \frac{120}{343} \quad (4) \frac{211}{343}$$

۱۷- از بین اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی 30 دو عدد انتخاب می کنیم احتمال آنکه حداقل یکی از آنها مضرب 3 یا 5 باشد چقدر است ؟

$$(1) \frac{57}{435} \quad (2) \frac{59}{435} \quad (3) \frac{58}{435} \quad (4) \frac{53}{435}$$

۱۸- یک جمله به تصادف از بسط عبارت $(X+Y+Z)^6$ انتخاب می کنیم احتمال آنکه توان Y برابر با 2 باشد چقدر است ؟

$$(1) \frac{3}{28} \quad (2) \frac{1}{7} \quad (3) \frac{5}{28} \quad (4) \frac{2}{7}$$

۱۹- هر مشتری که در طی یک روز به دفتر پست مراجعه می کند با احتمال $\frac{1}{3}$ زن و با احتمال $\frac{2}{3}$ مرد است از بین 100 مشتری که در طول یک روز به این دفتر پست می آیند احتمال اینکه 40 نفر زن باشند چقدر است ؟

$$(1) \binom{100}{60} \left(\frac{1}{3}\right)^{60} \left(\frac{2}{3}\right)^{40} \quad (2) \binom{100}{60} \left(\frac{1}{3}\right)^{40} \left(\frac{2}{3}\right)^{60}$$

$$(3) \binom{100}{40} \frac{3^{40}}{2^{100}} \quad (4) \binom{100}{60} \frac{2^{40}}{3^{60}}$$

۲۰- چهار نفر اسامی خود را روی اوراق جداگانه ای می نویسند و در داخل جعبه ای می اندازند سپس هر یک از چهار نفر ورقه ای بیرون می کشند احتمال اینکه همه نام خود را از جعبه بیرون بیاورند برابر است با :

$$(1) \frac{1}{4} \quad (2) \frac{1}{12} \quad (3) \frac{1}{24} \quad (4) \frac{1}{32}$$

۲۱- تیراندازی نصف تیرهایش به هدف می خورد احتمال آنکه در سه پرتاب آیا 3 تیر او به هدف بخورد کدام است ؟

$$(1) \frac{1}{8} \quad (2) \frac{3}{8} \quad (3) \frac{7}{8} \quad (4) 1$$

۲۲- یک تاس سالم را آنقدر پرتاب میکنیم تا 2 بیاید احتمال آنکه کمتر از 4 پرتاب برای اولین 2 آمدن لازم باشد چقدر است ؟

$$(1) \frac{91}{216} \quad (2) \frac{38}{216} \quad (3) \frac{152}{243} \quad (4) \frac{703}{1296}$$

۲۳- عددی را به تصادف از مجموعه اعداد طبیعی $\{1,2,3,\dots,100\}$ انتخاب می کنیم اگر این عدد فرد باشد احتمال اینکه عدد انتخابی بر 3 بخش پذیر باشد چقدر است ؟

$$(۱) \frac{191}{500} \quad (۲) \frac{53}{250} \quad (۳) \frac{89}{250} \quad (۴) \frac{167}{500}$$

۲۴- در کیسه ای 6 مهره آسمانی و 4 مهره فسفری رنگ وجود دارد دو مهره متوالیا و بدون جایگذاری به تصادف از کیسه بیرون می آوریم احتما آنکه اولی آسمانی و دومی فسفری باشد برابر است با :

$$(۱) \frac{4}{15} \quad (۲) \frac{2}{15} \quad (۳) \frac{6}{25} \quad (۴) \frac{1}{3}$$

۲۵- فضای نمونه ای آزمایشی تصادفی عبارتست از $S=\{a,b,c,d,e\}$ اگر پیشامدهای $\{a,b,c\}$ و $\{c,d,e\}$ مستقل باشند و داشته باشیم : $p(\{a,b,c\})=p(\{c,d,e\})=p(\{c\})$ مقدار $p(\{c\})$ کدام است ؟

$$(۱) \frac{2}{15} \quad (۲) \frac{1}{15} \quad (۳) \frac{11}{15} \quad (۴) \frac{13}{15}$$

۲۶- سکه سالمی را پرتاب می کنیم اگر شیر بیاید یکی از اعضای مجموعه $\{1,2,3,4,5,6\}$ و اگر خط بیاید عضوی از مجموعه $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ را به تصادف انتخاب می کنیم با چه احتمالی عدد انتخاب شده زوج است ؟

$$(۱) \frac{31}{70} \quad (۲) \frac{29}{35} \quad (۳) \frac{29}{70} \quad (۴) \frac{5}{35}$$

۲۷- احتمال قبولی سه دانشجو در مسابقات المپیاد دانشجویی به ترتیب $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{5}$ است احتمال اینکه فقط یکی از آنها قبول شود چقدر است ؟

$$(۱) \frac{29}{60} \quad (۲) \frac{17}{30} \quad (۳) \frac{23}{60} \quad (۴) \frac{13}{30}$$

۲۸- حاصل $p(A-B | A)$ کدام است ؟

$$(۱) P(B|A) \quad (۲) 1 - P(A|B) \quad (۳) 1 - P(B|A) \quad (۴) P(A \cap B|A)$$

۲۹- اگر A و B مستقل از هم باشند حاصل $P(A|B) \times P(B|A)$ برابر با کدام است ؟

$$(۱) P(A) \quad (۲) P(B) \quad (۳) P(A \cap B) \quad (۴) 1$$

۳۰- در آزمایش پرتاب سه تاس احتمال آنکه مجموع آنها کمتر از 11 باشد چقدر است ؟

$$(۱) \frac{1}{2} \quad (۲) \frac{1}{3} \quad (۳) \frac{2}{3} \quad (۴) \frac{30}{63}$$

۳۱- کیسه ای شامل 10 عدد مهره زرد و 5 مهره سبز و 10 مهره نارنجی است یک مهره به تصادف از این کیسه بیرون می کشیم و مشاهده می کنیم که نارنجی نیست احتمال اینکه این مهره سبز باشد چقدر است ؟

$$(۱) \frac{1}{3} \quad (۲) \frac{1}{15} \quad (۳) \frac{2}{3} \quad (۴) \frac{5}{12}$$

۳۲- در کیسه ای 5 مهره نارنجی و 9 مهره آبی وجود دارد مهره ای به تصادف از این کیسه بیرون می کشیم و به جای این مهره 4 مهره هم رنگ با آن را در کیسه قرار می دهیم مجددا مهره دیگری از کیسه بیرون می آوریم با احتمال اینکه مهره دوم نارنجی باشد چقدر است ؟

$$(۱) \frac{3}{71} \quad (۲) \frac{5}{14} \quad (۳) \frac{9}{14 \times 17} \quad (۴) \frac{61}{14 \times 17}$$

۳۳- در یک فضای نمونه ای که 10 برآمد هم شانس دارد چند پیشامد وجود دارد که احتمال وقوع آنها $\frac{1}{5}$ باشد ؟

- (۱) 28 (۲) 90 (۳) 36 (۴) 45

۳۴- در کیسه ای 3 مهره بنفش و 4 مهره سبز وجود دارد یک مهره به تصادف خارج کرده و به رنگ آن نگاه می کنیم و مهره را به کیسه برگردانده و سپس مجدداً یک مهره از کیسه خارج می کنیم با احتمال اینکه فقط یک بار مهره بنفش در آورده باشد کدام است ؟

- (۱) $\frac{3}{7}$ (۲) $\frac{12}{49}$ (۳) $\frac{24}{49}$ (۴) $\frac{3}{49}$

۳۵- ده درصد از کالاهای تولیدی در یک کارگاه تولیدی معیوب می باشند حداقل چند کالا باید از این کارگاه خریداری کنیم تا با احتمال بیش از 50 درصد اقلاً یکی از کالاها خریداری شده معیوب می باشد ؟

- (۱) 4 (۲) 5 (۳) 7 (۴) 6

۳۶- اگر n سکه سالم را با هم پرتاب کنیم احتمال آمدن k بار پشت کدام است ؟

- (۱) $\frac{k}{n}$ (۲) $\frac{(k^n)}{2^n}$ (۳) $\frac{(k^n)}{n^k}$ (۴) $\frac{(k^n)}{2^k}$

۳۷- فرض کنید A, B, C سه پیشامد از یک فضای نمونه ای باشند به طوری که $P(A \cap B|C) = \frac{3}{8}, P(B|C) = \frac{1}{4}, P(A|C) = \frac{5}{8}$ ،

در این صورت $P(A \Delta B|C)$ کدام است ؟

- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{5}{8}$

۳۸- 5 نفر زن و 6 نفر مرد برای شغلی تقاضا کرده اند با این حال امکان استخدام تنها برای 5 نفر از آنها وجود دارد احتمال انتخاب 5 نفر از میان افراد فوق به طوریکه لااقل 4 مرد انتخاب شوند چقدر است ؟

- (۱) $\frac{83}{(5^n)}$ (۲) $\frac{75}{(5^n 462)}$ (۳) $\frac{6}{(5^n)}$ (۴) $\frac{81}{(6^n)}$

۳۹- تاسی به گونه ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد اول 3 برابر احتمال وقوع هر عدد غیر اول است اگر در یک پرتاب این تاس $P(A)$ کدام است ؟

- (۱) $\frac{2}{9}$ (۲) $\frac{4}{9}$ (۳) $\frac{5}{9}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۴۰- تاسی را یک بار پرتاب می کنیم فرض می کنیم A پیشامد آن باشد که عدد برآمد اول باشد و B پیشامد آن باشد که عدد برآمده کوچکتر از 3 باشد در این صورت این دو پیشامد :

- (۱) ناسازگارند (۲) مستقلند (۳) وابسته اند (۴) $\triangle A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

۴۱- اعداد درو شده از پرتاب دو تاس را در معادله سیاله $ax + by = 8$ به جای a, b قرار می دهیم احتمال اینکه معادله دارای جواب باشد کدام است ؟

- (۱) $\frac{7}{9}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{8}{9}$ (۴) $\frac{31}{36}$

۴۲- چند تا از تساوی زیر صحیح می باشند ؟

الف) اگر A, B مستقل باشند آنگاه $P(A \cup B) = P(A) + P(A) + P(B) - P(A)P(B)$

ب) $P(A - B|B) = 0$ (ج) $P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$

د) $A = B = P(B') \leq P(A')$ (ه) $P(B - A|B) = 1$

- (۱) 3 (۲) 2 (۳) 4 (۴) 5

۴۳- اگر سه عدد به تصادف از بین اعداد $1, 2, \dots, 20$ انتخاب کنیم احتمال اینکه این سه عدد تشکیل تصاعد حسابی بدهند چقدر است ؟

$$(۱) \frac{3}{38} \quad (۲) \frac{7}{20} \quad (۳) \frac{1}{13} \quad (۴) \frac{1}{4}$$

۴۴- دو رقم به تصادف از میان ارقام $1 \leq x \leq 9$ انتخاب می کنیم اگر بدانیم مجموع دو رقم زوج است احتمال آنکه هر دو رقم فرد باشند چقدر است ؟

$$(۱) \frac{2}{9} \quad (۲) \frac{5}{8} \quad (۳) \frac{1}{2} \quad (۴) \frac{3}{10}$$

۴۵- N توپ را به تصادف می دهیم احتمال اینکه در هر جعبه دقیقا یک توپ قرار گیرد چقدر است ؟

$$(۱) \frac{1}{n!} \quad (۲) \frac{(n-1)!}{n^n} \quad (۳) \frac{n!}{n^n} \quad (۴) \frac{1}{(n-1)!}$$

۴۶- برای دو پیشامد مستقل از هم B, A کدام درست است ؟

$$(۱) P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (۲) P(A \cup B) = P(A).P(B') + P(B)$$

$$(۳) P(A \cap B) = 0 \quad (۴) A \cap B = \phi$$

۴۷- در کیسه ای کلا a مهره سفید و $a+2$ مهره سیاه وجود دارد دو مهره با هم از کیسه انتخاب می کنیم اگر احتمال اینکه دو مهره هم رنگ باشند برابر $\frac{13}{28}$ باشد در کیسه مزبور چند مهره وجود دارد ؟

$$(۱) 8 \quad (۲) 20 \quad (۳) 7 \quad (۴) 12$$

۴۸- سکه ای را آنقدر پرتاب می کنیم تا خط بیاید اگر بدانیم که سکه را بیش از 7 بار انداخته ایم احتمال آنکه بیش از 12 بار انداخته باشیم چقدر است ؟

$$(۱) \frac{1}{8} \quad (۲) \frac{1}{16} \quad (۳) \frac{1}{32} \quad (۴) \frac{1}{64}$$

۴۹- سه نفر به نامهای A, B, C به طرف هدفی شلیک می کنند احتمال برخورد تیر هر یک از آنها به ترتیب $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$ می باشد اگر تنها تیر یکی از آنها به هدف اصابت کند احتمال آنکه تیر B به هدف برخورد چقدر است ؟

$$(۱) \frac{2}{9} \quad (۲) \frac{3}{13} \quad (۳) \frac{7}{19} \quad (۴) \frac{2}{5}$$

۵۰- تابعی روی یک مجموعه سه عضوی به تصادف تعریف کرده ایم احتمالا آنکه این تابع یک به یک و پوشا باشد برابر است با :

$$(۱) \frac{2}{9} \quad (۲) \frac{1}{3} \quad (۳) \frac{4}{27} \quad (۴) \frac{2}{3}$$

۵۱- در جعبه ای 4 مهره سفید ، 6 مهره سیاه و 3 مهره قرمز موجود است از این جعبه 3 مهره همزمان خارج می کنیم تعداد اعضای پیشامد « حداقل دو مهره سفید باشد » چند عضو دارد ؟

$$(۱) 282 \quad (۲) 198 \quad (۳) 58 \quad (۴) 138$$

۵۲- به وسیله ارقام $1, 3, 5, 7, 9$ یک عدد چهار رقمی کمتر از 5000 ساخته ایم احتمال اینکه این عدد بر 5 بخش پذیر باشد چقدر است ؟ (تکرار ارقام مجاز است)

$$(۱) \frac{2}{5} \quad (۲) \frac{1}{5} \quad (۳) \frac{3}{5} \quad (۴) \frac{1}{10}$$

۵۳- یک تاس را حداقل چند بار پرتاب کنیم تا احتمال آنکه لااقل یک عدد ۶ ظاهر شود بیش از $\frac{1}{2}$ باشد ؟

- (۱) 2 (۲) 3 (۳) 4 (۴) 5

۵۴- عددی به تصادف از میان اعداد بیشتر از 100 انتخاب کرده ایم اگر بدانیم این عدد مضرب 6 است احتما آنکه مضرب 8 نباشد چیست ؟

- (۱) $\frac{3}{7}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۵۵- در یک کیسه 5 مهره بنفش ، 3 مهره زرد و 4 مهره نارنجی وجود دارد ، سه مهره با هم به تصادف از کیسه استخراج می کنیم احتمال آنکه رنگ مهره ها متمایز باشد برابر است با :

- (۱) $\frac{5}{11}$ (۲) $\frac{5}{22}$ (۳) $\frac{3}{11}$ (۴) $\frac{3}{22}$

۵۶- تاسی را پرتاب می کنیم اگر عدد زوج بیاید 2 سکه بعد از آن پرتاب می کنیم ، احتمال اینکه لااقل یک شیر ظاهر شود چقدر است ؟

- (۱) $\frac{3}{8}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{4}{9}$

۵۷- احتمال وجود TV تلویزیون در خانه ای 0/6 و احتمال وجود Ra رادیو 0/7 می باشد اگر احتمال وجود لااقل یکی از آنها در این خانه 0/9 باشد احتمال آنکه در این خانه TV باشد و Ra نباشد چقدر است ؟

- (۱) 0/1 (۲) 0/2 (۳) 0/3 (۴) 0/4

۵۸- حاصل $P(A|B)$ کدام است ؟

- (۱) $P(A|B)$ (۲) $1 - P(A|B)$ (۳) $P(A|B')$ (۴) دو گزینه 2 و 3 صحیح است

۵۹- هرگاه $B \subset A$ باشد کدام درست است ؟

- (۱) $P(B') \leq P(A')$ (۲) $P(A') \leq P(B')$ (۳) $P(A) \leq P(B')$ (۴) $P(B) \leq P(A')$

۶۰- دو عدد پی در پی و بدون جایگذاری از میان اعداد طبیعی از 2 تا 10 انتخاب می کنیم احتمال آنکه عدد دوم 3 باشد چقدر است ؟

- (۱) $\frac{1}{10}$ (۲) $\frac{2}{90}$ (۳) $\frac{3}{7}$ (۴) $\frac{4}{45}$

۶۱- در یک کلاس ریاضی در دانشکده ای 5 متاهل ، 30 مجرد و 20 خانم مجرد وجود دارند از متاهلها 5 نفر و از مردان مجرد نیز 5 نفر و از خانم های مجرد 2 نفر ، نمره 20 گرفته اند یک نفر به تصادف انتخاب می کنیم مشاهده می کنیم که نمره او بیست است احتمال اینکه او متاهل باشد چقدر است ؟

- (۱) $\frac{5}{11}$ (۲) $\frac{3}{12}$ (۳) $\frac{24}{25}$ (۴) $\frac{5}{12}$

۶۲- در چهار تولد پی در پی ، امید ریاضی به دنیا آمدن حداقل یک پسر کدام است ؟

- (۱) 1 (۲) $\frac{15}{16}$ (۳) 2 (۴) $\frac{31}{16}$

۶۳- در پرتاب سه تاس با هم احتمال آنکه عددهای رو شده ، تشکیل تصاعد حسابی با قدر نسبت 1 بدهند کدام است ؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{4}{216}$ (۳) $\frac{1}{9}$ (۴) $\frac{1}{36}$

۶۴- اگر A و B دو پیشامد از یک فضای نمونه ای باشند به طوری که $P(A \cap B) = P(A)P(B') + P(B)$ در این صورت A و B

- (۱) ناسازگارند (۲) سازگارند (۳) وابسته اند (۴) مستقلند

۶۵- در جعبه ای ۱۰ لامپ قرار دارد که چهار تای آنها بدون هیچگونه علائم ظاهری خراب هستند ۳ لامپ یکی پس از دیگری از میان ۱۰ لامپ مزبور به تصادف انتخاب می کنیم احتمال اینکه هر سه لامپ انتخاب شده سالم باشند ، چقدر است ؟

- (۱) $\frac{1}{55}$ (۲) $\frac{3}{55}$ (۳) $\frac{5}{6}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۶۶- در خانواده ای که دارای سه فرزند است ، بزرگترین فرزند خانواده پسر است احتمال اینکه هر سه فرزند این خانواده پسر باشند ، چقدر است ؟

- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{3}{8}$

۶۷- یک عدد به تصادف از مجموعه اعداد طبیعی $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ انتخاب می کنیم احتمال اینکه این عدد نه بر ۳ و نه بر ۵ بخش پذیر باشد چقدر است ؟

- (۱) $\frac{47}{100}$ (۲) $\frac{53}{100}$ (۳) $\frac{13}{25}$ (۴) $\frac{12}{25}$

۶۸- ۱۰ توپ را در ۴ جعبه توزیع می کنیم احتمال آنکه در جعبه اول ۳ توپ قرار گرفته باشد چقدر است ؟

- (۱) $\frac{\binom{9}{7}}{\binom{14}{3}}$ (۲) $\frac{\binom{9}{2}}{\binom{13}{3}}$ (۳) $\frac{\binom{10}{7}}{\binom{14}{3}}$ (۴) $\frac{\binom{9}{2}}{\binom{14}{3}}$

۶۹- احتمال آنکه در یک سال غیر کبیسه ۵۳ جعبه موجود باشد ، چقدر است ؟

- (۱) $\frac{51}{53}$ (۲) $\frac{1}{7}$ (۳) $\frac{2}{21}$ (۴) $\frac{3}{13}$

۷۰- پنج قطعه چوب به طولهای ۱, ۳, ۵, ۷, ۹ واحد وجود دارند ، سه تا از آنها را به تصادف انتخاب می کنیم ، احتمال اینکه این با با سه قطعه بتوانیم یک مثلث بسازیم چقدر است ؟

- (۱) $\frac{3}{10}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{30}$ (۴) $\frac{3}{5}$

۷۱- روی یک مجموعه ۳ عضوی مانند A رابطه ای مانند R به تصادف انتخاب می شود ، احتمال اینکه این رابطه بازتابی و تقارنی باشد ، کدام است ؟

- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{32}$ (۳) $\frac{1}{64}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۷۲- فرض کنید A و B دو پیشامد با احتمالهای مثبت (مخالف صفر) باشند کدام یک از گزاره های زیر درست است ؟

- (۱) اگر $\hat{=}$ ناسازگار باشند ، آنگاه مستقلند (۲) اگر $\hat{=}$ مستقل باشند آنگاه ناسازگارند

(۳) اگر $\hat{=}$ مستقل باشند آنگاه سازگارند (۴) اگر $\hat{=}$ مستقل باشند آنگاه A, B' سازگارند

۷۳- اگر $P(A) = \frac{1}{4}$ ، $P(B-A) = \frac{1}{3}$ ، مقدار $P(B|A')$ کدام است ؟

- (۱) $\frac{1}{12}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{4}{9}$ (۴) $\frac{7}{12}$

۷۴- در پرتاب دو تاس ، اگر بدانیم لااقل یکی از دو تاس 6 است ، احتمال آنکه دیگری نیز 6 باشد چقدر است ؟

$$(۱) \frac{5}{6} \quad (۲) \frac{1}{11} \quad (۳) \frac{1}{6} \quad (۴) \frac{1}{12}$$

۷۵- یک تاس همگن را 6 بار پرتاب می کنیم احتمال اینکه دقیقاً دوبار 6 ظاهر شود برابر است با :

$$(۱) \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^4 \quad (۲) 3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^5 \quad (۳) \frac{\binom{6}{2}}{6^6} \quad (۴) \binom{6}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^4$$

۷۶- احتمال اینکه شخصی ناراحتی کلیه داشته باشد ، $0/23$ و ناراحتی قلبی داشته باشد $0/24$ و دست کم یکی از دو

بیماری را داشته باشد $0/38$ است ، احتمال اینکه هر دو بیماری را دارا باشد ، چقدر است ؟

$$(۱) 0/23 \times 0/24 \quad (۲) 0/62 \quad (۳) 0/9 \quad (۴) 0/09$$

۷۷- یک بسکتبالیست معمولاً 60% پرتابهای خود را وارد سبد می کند ، احتمال اینکه او از 5 پرتاب خود ، 3 تا را وارد

سبد کند ، کدام است ؟

$$(۱) 34/56\% \quad (۲) 35/2\% \quad (۳) 35/46\% \quad (۴) 35/5\%$$

۷۸- یک ماتریس 3×3 با زاویه ای صفر و یک مانند A به تصادف انتخاب می کنیم ، احتمال آنکه شرط I $\gg A$ برقرار

باشد چقدر است ؟

$$(۱) \frac{1}{8} \quad (۲) \frac{3}{4} \quad (۳) \frac{1}{4} \quad (۴) \frac{1}{9}$$

۷۹- سه تیر انداز a, b, c در یک مسابقه تیراندازی شرکت می کنند فرض می کنیم که احتمال برد a نصف احتمال برد b و

احتمال برد b یک سوم احتمال برد c باشد ، احتمال اینکه تیراندازی برنده نشود چقدر است ؟

$$(۱) \frac{7}{8} \quad (۲) \frac{8}{9} \quad (۳) \frac{7}{9} \quad (۴) \frac{1}{8}$$

۸۰- فرض می کنیم $S = \{a, b, c, d\}$ فضای نمونه ای یک تجربه تصادفی باشد به طوریکه $P(\{b, c\}) = \frac{2}{3}$ و $P(\{c, d\}) = \frac{1}{2}$

$P(\{a\})$ و $P(\{b\})$ کدام است ؟

$$(۱) \frac{2}{7} \quad (۲) \frac{5}{6} \quad (۳) \frac{1}{6} \quad (۴) \frac{1}{4}$$

۸۱- سکه ای را آنقدر پرتاب می کنیم تا خط بیاید ، احتمال اینکه تعداد دفعات پرتاب سکه ، عددی فرد باشد ، چقدر است ؟

$$(۱) \frac{3}{7} \quad (۲) \frac{1}{3} \quad (۳) \frac{1}{3} \quad (۴) \frac{2}{3}$$

۸۲- چهار نفر به نامهای احمد و ونوس و شهنشاه به ترتیب سکه ای را پرتاب می کنند و قرار می گذارند که

اولین فردی که خط بیاورد یک جایزه بگیرد احتمال آنکه احمد جایزه بگیرد ، چقدر است ؟

$$(۱) \frac{1}{4} \quad (۲) \frac{8}{15} \quad (۳) \frac{3}{7} \quad (۴) \frac{31}{64}$$

۸۳- دو کیسه موجود است ، کیسه اول 4 مهره آبی و 3 مهره قرمز و در کیسه دوم 2 مهره آبی و 4 مهره قرمز موجود

است ، از کیسه اول دو مهره و از کیسه دوم 1 مهره انتخاب کرده و در کیسه ای جدید قرار می دهیم ، اگر از کیسه جدید

مهره ای خارج کنیم ، احتمال اینکه این مهره آبی باشد ، چقدر است ؟

$$(۱) \frac{29}{63} \quad (۲) \frac{30}{63} \quad (۳) \frac{31}{63} \quad (۴) \frac{26}{63}$$

۸۴- یک فضای نمونه ای متشکل از 5 برآمد e, d, c, b, a است به شرط آنکه $P(\{a, b, c\}) = \frac{1}{2}$ و $P(\{a\}) = \frac{1}{4}$ مقدار $P(\{c, b, d\})$ چقدر است ؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۸۵- تعداد دانش آموزان دوره پیش دانشگاهی در سال قبل در یک شهر 1200 نفر بوده است که از این تعداد 400 نفر دختر بوده اند اگر 40% پسران و 30% دختران در کنکور سراسری پذیرفته شده باشند اگر یک تو به تصادف از بین این دانش آموزان انتخاب کرده باشیم که در کنکور سراسری قبول شده باشد ، به چه احتمالی این دانش آموز پسر بوده است ؟

- (۱) $\frac{8}{11}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{5}{11}$ (۴) $\frac{2}{5}$

۸۶- اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S بوده و کدام است ؟

- (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) $\frac{1}{5}$

۸۷- برای استخدام در یک شرکت 100 نفر داوطلب شده اند که 60 نفر آنها مرد هستند ، این شرکت 20 درصد از زنان داوطلب و 30 درصد از مردان داوطلب را استخدام خواهد کرد ، اگر فردی به تصادف انتخاب کنیم احتمال اینکه ، این فرد در شرکت استخدام شود چقدر است ؟

- (۱) $\frac{17}{50}$ (۲) $\frac{13}{50}$ (۳) $\frac{23}{50}$ (۴) $\frac{17}{25}$

۸۸- در تست قبل اگر بدانیم فرد انتخاب شده استخدام می شود ، احتمال اینکه مرد باشد ، چقدر است ؟

- (۱) $\frac{6}{13}$ (۲) $\frac{9}{50}$ (۳) $\frac{13}{50}$ (۴) $\frac{9}{13}$

۸۹- احتمال قبولی شخصی در درس شیمی $\frac{2}{3}$ و در درس ریاضی $\frac{1}{4}$ و در هر دو درس $\frac{1}{6}$ می باشد ، احتمال اینکه وی فقط در درس ریاضی قبول شود چقدر است ؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{1}{12}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۹۰- تاسی را سه بار پرتاب می کنیم اگر مجموع سه عدد درو شده ، 15 باشد احتمال اینکه هر سه عدد رد شده یکسان باشند ، چقدر است ؟

- (۱) $\frac{1}{7}$ (۲) $\frac{1}{10}$ (۳) $\frac{1}{9}$ (۴) $\frac{1}{8}$

۹۱- درون کیسه ای سه مهره سفید و 4 مهره سیاه وجود دارد ، از این کیسه 2 مهره به تصادف بیرون می آوریم اگر یکی از مهره ها سیاه باشد ، احتمال آنکه مهره دیگر سفید باشد کدام است ؟ (انتخاب مهره ها پی در پی بدون جایگذاری است)

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۹۲- اگر A و B دو پیشامد باشند به طوری که $P(A) = \frac{1}{2}$ و $P(B) = \frac{1}{3}$ و $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$

- (۱) $\frac{5}{12}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{5}{8}$ (۴) $\frac{5}{6}$

۹۳- در کیسه ای 3 مهره سفید و 4 مهره سیاه وجود دارد ، مهره ها را یکی پس از دیگری از کیسه بیرون آورده و کنار هم در یک ردیف می چینیم ، احتمال آنکه مهره ها یکی در میان سفید و سیاه باشند چقدر است ؟

$$(۱) \frac{1}{35} \quad (۲) \frac{1}{12} \quad (۳) \frac{1}{70} \quad (۴) \frac{1}{81}$$

۹۴- اگر شانس وقوع پیشامد A و عدم وقوع پیشامد B $0/2$ و شانس وقوع A یا B ، $0/8$ باشد ، شانس عدم وقوع B کدام است ؟

$$(۱) \frac{4}{5} \quad (۲) \frac{2}{3} \quad (۳) \frac{2}{5} \quad (۴) \frac{3}{5}$$

۹۵- سه توپ زرد و سه توپ قرمز همسان داریم ، احتمال آنکه چشم بسته رنگ گوی ها را درست حدس بزنیم ، چقدر است ؟

$$(۱) \frac{1}{20} \quad (۲) \frac{1}{30} \quad (۳) \frac{3}{10} \quad (۴) \frac{5}{20}$$

۹۶- یک عدد به تصادف از بین اعداد طبیعی $1, 2, 3, \dots, 100$ انتخاب می کنیم احتمال اینکه این عدد شامل رقم 5 باشد برابر است با :

$$(۱) \frac{17}{100} \quad (۲) \frac{19}{100} \quad (۳) \frac{23}{100} \quad (۴) \frac{29}{100}$$

۹۷- در کدام مورد زیر ، دو پیشامد A و B حتما سازگارند ؟

$$(۱) \begin{cases} P(A) = 0/9 \\ P(B) = 0/1 \end{cases} \quad (۲) \begin{cases} P(A) = 0/7 \\ P(B) = 0/2 \end{cases} \quad (۳) \begin{cases} P(A) = 0/5 \\ P(B) = 0/5 \end{cases} \quad (۴) \begin{cases} P(A) = 0/5 \\ P(B) = 0/6 \end{cases}$$

۹۸- منظور از پیشامد $[C - (A \cup B)] \cup [B - (A \cup C)] \cup [A - (B \cup C)]$ کدام زیر می باشد ؟

(۱) فقط A رخ دهد (۲) فقط یکی از سه پیشامد A, B, C رخ دهد

(۳) لااقل یکی از پیشامد A, B, C رخ دهد (۴) هر سه پیشامد A, B, C رخ دهند

۹۹- دو تاس همگن را با هم پرتاب می کنیم احتمال اینکه حاصلضرب اعداد روشن زوج باشد چقدر است ؟

$$(۱) \frac{4}{5} \quad (۲) \frac{3}{5} \quad (۳) \frac{2}{3} \quad (۴) \frac{3}{4}$$

۱۰۰- یک تاس را پرتاب می کنیم و عدد حاصل را در معادله $x_1 + x_2 + x_3 = a$ به جای a قرار می دهیم احتمال اینکه معادله در مجموعه اعداد صحیح نامنفی حداقل دارای 10 جواب باشد ، چقدر است ؟

$$(۱) \frac{2}{3} \quad (۲) \frac{1}{2} \quad (۳) \frac{1}{5} \quad (۴) \frac{1}{3}$$

۱۰۱- یک رابطه روی مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ می نویسیم ، احتمال آنکه ماتریس مجاورت این رابطه یعنی M نامساوی $M \ll I \ll M^8$ صدق کند ، چقدر است ؟

$$(۱) \frac{9}{512} \quad (۲) \frac{27}{512} \quad (۳) \frac{3}{512} \quad (۴) \frac{1}{512}$$

۱۰۲- احتمال اصابت گلوله به هدف در یک شلیک $0/8$ است حداقل چند گلوله باید شلیک کرد تا احتمال آنکه حتی یک گلوله هم به خطا نرود کمتر از $0/4$ باشد ؟

$$(۱) 4 \quad (۲) 5 \quad (۳) 6 \quad (۴) 7$$

۱۰۳- فرض کنید $P(A_1|B) = 0/7$ و $P(A_2|B) = 0/4$ و $P(A_1 \cap A_2|B) = 0/3$ اگر پیشامد B رخ داده باشد احتمال آنکه A_1 یا A_2 رخ دهند چقدر است ؟

$$(۱) 0/6 \quad (۲) 0/5 \quad (۳) 0/8 \quad (۴) 0/65$$

۱۰۴- در تست قبل احتمال اینکه فقط یکی از دو پیشامد A_1 یا A_2 رخ دهند چقدر است ؟

- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۱۰۵- عددی به تصادف از میان اعداد سه رقمی انتخاب می کنیم ، احتمال آنکه مضرب 4 و 6 باشد چقدر است ؟

- (۱) $\frac{67}{900}$ (۲) $\frac{77}{900}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{69}{900}$

۱۰۶- یک جفت تاس را 10 بار پرتاب می کنیم احتمال اینکه سه بار مجموع 6 ، دو بار مجموع 4 بیاید چقدر است ؟

- (۱) $\left(\frac{10}{5}\right)\left(\frac{10}{3}\right)\left(\frac{5}{36}\right)^5\left(\frac{3}{36}\right)^2\left(\frac{28}{36}\right)^5$ (۲) $\left(\frac{10}{5}\right)\left(\frac{10}{3}\right)\left(\frac{5}{36}\right)^5\left(\frac{3}{36}\right)^3$

- (۳) $\frac{10!}{3!2!5!}\left(\frac{5}{36}\right)^5\left(\frac{3}{36}\right)^2\left(\frac{28}{36}\right)^2$ (۴) $\frac{10!}{3!2!5!}\left(\frac{5}{36}\right)^3\left(\frac{3}{36}\right)^2\left(\frac{28}{36}\right)^5$

پاسخ تستهای احتمال

۱- (۳) اگر $x = 125$ یا 625 باشد، آنگاه $\log_5 x$ ، عددی صحیح می شود، لذا داریم :

$$P(A) = \frac{2}{900} = \frac{1}{450}$$

۲- (۴)

$$\frac{\binom{3}{3} + \binom{4}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{1+4}{35} = \frac{1}{7} = \frac{21}{147}$$

۳- (۲) واضح است که $S=62=36$ و پیشامد مطلوب عبارتست از :

$$A = \{ (b,c) : b,c=1, 2, \dots, 6, b^2 - 4c \geq 0 \}$$

$$A = \{ (2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{36}$$

۴- (۲) از توزیع برنوسی استفاده می کنیم، می دانیم :

$$P(x=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\begin{cases} P = \frac{2}{5} \\ x = 4,5 \\ n = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} &= P(x \geq 4) = P(x=4) + P(x=5) \\ &= \binom{5}{4} \left(\frac{2}{5}\right)^4 \left(\frac{3}{5}\right) + \binom{5}{5} \left(\frac{2}{5}\right)^5 \left(\frac{3}{5}\right)^0 \\ &= \frac{48}{625} + \frac{32}{3125} = \frac{272}{3125} \end{aligned}$$

۵- عدد مورد نظر را که مرجع کامل است به صورت a^2 در نظر می گیریم :

$$100 \leq a^2 < 1000 \Rightarrow \text{جذر } 10 \leq a < 31 \Rightarrow \text{خورده ای } 10 \leq a \leq 31$$

$$\Rightarrow \text{تعداد} = 31 - 10 + 1 = 22 \Rightarrow$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{22}{900} = \frac{11}{450}$$

۶- (۳) چون مهره اول می تواند سفید یا سیاه باشد، پس :

$$P(\text{مهره دوم سفید}) = P(\text{مهره دوم سفید و مهره اول سفید}) + P(\text{مهره دوم سفید مهره اول سیاه})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{a}{a+b} \times \frac{a-1}{a+b-1} + \frac{b}{a+b} \times \frac{a}{a+b-1} = \frac{ab + a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)} \\ &= \frac{a(a+b-1)}{(a+b)(a+b-1)} = \frac{a}{a+b} \end{aligned}$$

۷- (۴) 50 نفر به 50 طریق می توانند در یک ردیف کنار هم قرار گیرند، اگر قرار باشد 2 نفر خاص کنار هم قرار گیرند، تعداد حالات برابر است با :

$$2! \times 49!$$

$$P(A) = \frac{2! \times 49!}{50!} = \frac{2}{50} = \frac{1}{25}$$

بنابراین:

۸- (۲) چون کلیدها به صورت سری در مدار قرار گرفته اند، لذا زمانی جریان از مدار عبور می کند که هر دو کلید

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0/9 \times 0/9 = 0/81$$

بسته باشند بنابراین داریم :

۹- چون کلیدها به صورت موازی در مدار قرار گرفته اند، لذا زمانی جریانی از مدار عبور می کند که حداقل یکی از دو کلید بسته باشند بنابراین داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0/9 + 0/9 - 0/81 = 0/99$$

۱۰- (۲)

$$A = 7 \text{ پیشامد مجموع حداقل } = \{(1,6), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

$$A = 10 \text{ پیشامد مجموع حداقل } = \{(4,6), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

۱۱- (۲) با توجه به اینکه در تجزیه عدد 36، عاملهای 2 و 3 وجود دارد ($36 = 2^2 \times 3^2$) لذا برای اینکه n نسبت به 36 اول باشد باید در n عوامل 2 و 3 وجود داشته باشد یعنی n باید نه مضرب 2 باشد و نه مضرب 3 لذا طبق اصل شمول و عدم شمول داریم:

$$A_1: 2 \text{ مضارب} \implies |A_1| = \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor = 50$$

$$A_2: 3 \text{ مضارب} \implies |A_2| = \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor = 33 \implies |A_1 \cup A_2| \implies A_1 \cap A_2:$$

$$A_1 \cap A_2: 3, 2 \text{ مضارب} \implies |A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor = 16$$

$$|A| = \text{تعداد کل} - (50 + 33 - 16) = 100 - 17 \implies P(A) = \frac{17}{100}$$

۱۲- (۴) برای اینکه حداقل یک 3 ظاهر شود باید یا اصلاً 3 ظاهر نشود (یعنی تمام تاسیهای عددی غیر از 3 بیایند) که احتمال آن برابر $4 + \left(\frac{5}{6}\right)$ است و یا اینکه فقط یک 3 ظاهر شود (یعنی فقط یکی از تاسهای 3 بیاید و بقیه غیر از 3 بیایند) که احتمال آن برابر $3 + \left(\frac{5}{6}\right) \times \frac{1}{6} \times 4$ می باشد لذا داریم:

$$P(A) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 + 4 \times \left(\frac{1}{6}\right) \times \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

بیایند) که احتمال آن برابر $3 + \left(\frac{5}{6}\right) \times \frac{1}{6} \times 4$ می باشد لذا داریم:

$$A = \{(4,1), (4,3), (4,5)\}$$

۱۳- (۳)

$$P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$P(A) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{12} \quad \text{راه دیگر:}$$

۱۴- (۳)

$$P(\text{اولی سالم} | \text{دومی سالم}) \times P(\text{اولی سالم}) = \frac{11}{16} \times \frac{10}{15} = \frac{11}{24}$$

۱۵- (۳)

$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \times P(B) = P(A) (1 - P(B)) = P(A) \times P(B')$$

۱۶- (۱) برای محاسبه احتمال پیش آمد A، چون تعداد حالتهای مختلفی دارد، ابتدا $P(A')$ را حساب می کنیم در این مثال، A' ، یعنی هیچ دو نفری در یک روز متولد نشده باشند و یا ۴ نفر در روزهای مختلف متولد شده باشند، لذا داریم:

$$P(A') = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4} = \frac{120}{343}$$

$$P(A) = 1 - \frac{120}{343} = \frac{223}{343}$$

(۲) - ۱۷

$$|A| = \left| \frac{30}{5} \right| = 6 \leftarrow \text{تعداد مضارب 5}$$

$$|B| = \left| \frac{30}{3} \right| = 10 \leftarrow \text{تعداد مضارب 3}$$

$$|A \cap B| = \left| \frac{30}{15} \right| = 2 \leftarrow \text{تعداد مضارب 15}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{\binom{6}{2} + \binom{10}{2} - \binom{2}{2}}{\binom{30}{2}} = \frac{15 + 45 - 1}{435} = \frac{59}{435}$$

۱۸- (۴) تعداد جملات بسط برابر است با تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ یعنی از بین این جملات جمله هایی مورد نظر هستند که توان لدر آنها 2 باشد تعداد این جملات برابر

است با تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_3 = 4$ یا $x_1 + 2 + x_3 = 6$ که برابر است با $\binom{4+2-1}{2-1}$ بنابراین داریم:

$$P(A) = \frac{5}{28}$$

(۲) - ۱۹

$$P = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{احتمال زن بودن مشتری} \\ \frac{2}{3} & \text{احتمال زن نبودن مشتری} \end{cases} \Rightarrow P(X=x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$N = 100$$

$$x = 40$$

$$p(x=40) = \binom{100}{40} \left(\frac{1}{3}\right)^{40} \left(\frac{2}{3}\right)^{60} = \binom{100}{60} \left(\frac{1}{3}\right)^{40} \left(\frac{2}{3}\right)^{60} = \binom{100}{60} \left(\frac{1}{3}\right)^{40} \left(\frac{2}{3}\right)^{60}$$

۲۰- (۳) احتمال اینکه نفر اول، نام خود را از جعبه بیرون آورد $\frac{1}{4}$ ، نفر دوم نام خود را بیرون آورد $\frac{1}{3}$ نفر سوم، $\frac{1}{2}$ و

$$P(A) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{24}$$

نفر چهارم 1 می باشد لذا داریم:

$$P(x=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \Rightarrow p(x \geq 1) = 1 - p(x=0) = 1 - \binom{3}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \quad (۱) - ۲۱$$

۲۲- (۱) آمدن را با 2 و 2' نیامدن را با 2'' نشان می دهیم در این صورت، پیشامد مورد نظر عبارتست از: $A = \{2, 2', 2'', 2'''\}$ توجه کنید که منظور از یعنی در پرتابهای اول و دوم 2 نیاید و در پرتاب سوم 2 بیاید، بنابراین

داریم:

$$P(A) = P(2) = P(2'') + P(2''') = \frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right) \times \left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}\right) = \frac{91}{216}$$

$$|S| = 1000$$

- ۲۳

$$B = \{1, 3, 5, \dots, 999\} = 500 \Rightarrow |B| = 500$$

$$A = \{3, 6, 9, \dots, 999\}$$

$$A \cap B = \{3, 9, 15, \dots, 999\}$$

برای محاسبه تعداد اعضای $A \cap B$ از فرمول جمله n ام تصاعد حسابی استفاده می کنیم:

$$t_n = a + (n-1)d \Rightarrow 999 = 3 + (n-1)6 \Rightarrow n = 167$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{167}{1000} \Rightarrow P(\text{بر 3 بخشپذیر باشد} \mid \text{فرد باشد}) = P(A|b) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{167}{500}$$

(۱) - ۲۴

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{15}$$

(۱) - ۲۵

$$P(\{a,b,c\} \cap \{c,d,e\}) = P(\{a,b,c\}) \times P(\{c,d,e\}) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{25} \Rightarrow P(\{c\}) = \frac{2}{15}$$

(۳) - ۲۶

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$E = \text{شیر بیاید} \mid \text{زوج از A بیاید} \Rightarrow P(E) = P(\text{شیر بیاید}) \times P(\text{زوج از A بیاید} \mid \text{شیر بیاید})$$

$$P(E) = P(\text{سکه خط بیاید}) + P(\text{سکه شیر آمده باشد} \mid \text{زوج از A بیاید}) \times P(\text{سکه شیر بیاید} \mid \text{زوج از A بیاید})$$

$$\times P(\text{زوج از B انتخاب شود} \mid \text{سکه خط آمده باشد}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{29}{70}$$

(۴) - ۲۷

$$A: \text{اولین دانشجو قبول شود} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(A') = \frac{3}{4}$$

$$B: \text{دومین دانشجو قبول شود} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(B') = \frac{2}{3}$$

$$C: \text{سومین دانشجو قبول شود} \Rightarrow P(C) = \frac{1}{5} \Rightarrow P(C') = \frac{4}{5}$$

پیشامد « فقط یکی قبول شود » اجتماع سه پیشامد دو به دو ناسازگار $A \cap B \cap C'$, $A' \cap B \cap C'$, $A \cap B' \cap C'$ است، بنابراین: $58 = P(\text{فقط یکی قبول شود})$ ضمناً توجه کنید که این سه پیشامد مستقلند زیرا قبول هر کدام از افراد تاثیری در قبولی دیگری ندارد، بنابراین داریم:

$$P(\text{فقط یکی قبول شود}) = P(A)P(B')P(C') + P(A' \cap B \cap C') + P(A') \cap B' \cap C)$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{2}{15} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{4+6+3}{30} = \frac{13}{30}$$

(۳) - ۲۸

$$P(A - B|A) = \frac{P[(A - B) \cap A]}{P(A)} = \frac{P(A - B)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 1 - P(B|A)$$

$$\begin{cases} P(A|B) = P(A) \\ P(B|A) = P(B) \end{cases}$$

(۳) - ۲۹ هرگاه A, B مستقل از هم باشند آنگاه:

$$P(A|B) \times P(B|A) = P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$$

۳۰- (۱) واضح است که: $|S| = 6^3 = 216$ با توجه به فضای نمونه آزمایش می توان نتیجه گرفت که مجموع سه عدد رو شده توسط سه تاس حداقل ۳ و حداکثر ۱۸ می باشد یعنی: $18 \leq \text{جمع اعداد سه تاس}$ لذا مجموع تاس ها می تواند شانزده عدد ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸ را به خود بگیرد، که در نصف این حالتها، مجموع کمتر از

$$P(A) = \frac{1}{2} \quad 11 \text{ و در نصف دیگر مجموع بزرگتر یا مساوی } 11 \text{ خواهد بود بنابراین}$$

۳۱- (۱) چون مهره انتخاب شده نارنجی نیست لذا یا سبز است یا زرد بنابراین احتمال اینکه این مهره سبز باشد برابر است با :

$$P(A) = \frac{5}{10+5} = \frac{1}{3}$$

۳۲- (۲)

$$P(\text{مهره اول آبی و مهره دوم نارنجی}) + P(\text{مهره اول نارنجی و مهره دوم نارنجی}) = P(\text{مهره دوم نارنجی})$$

$$\frac{5}{14} \times \frac{8}{17} + \frac{9}{14} \times \frac{5}{17} = \frac{5 \times 17}{14 \times 17} = \frac{5}{14}$$

۳۳- (۴) چون $n(s)=10$ و احتمال وقوع پیشامدها $\frac{1}{5}$ می باشد، نتیجه می گیریم که پیشامدها باید دو عضوی باشند تا

داشته باشیم : $p(a) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ و چون هر پیشامد یک زیر مجموعه از فضای نمونه ای است لذا تعداد پیشامدهای دو عضوی برابر با تعداد زیر مجموعه های دو عضوی S خواهد بود پس :

$$\text{تعداد پیشامدهای دو عضوی} = \binom{10}{2} = 45$$

۳۴- (۳) باید احتمال اول بنفش و دومی سبز را با احتمال اولی و سبز و دومی بنفش جمع می کنیم بپردازیم:

$$P(A) = \frac{3}{7} \times \frac{4}{7} + \frac{4}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{24}{49}$$

۳۵- (۴) اگر n کالا بخریم ، چون معیوب بودن هر کالا مساوی 0/1 و احتمال سالم بودن آن مساوی 0/9 است ، پس احتمال آنکه اقلا یکی از آنها معیوب باشد برابر است با : $p = 1 - (0/9)^n$ حالا می خواهیم $p > \frac{1}{2}$ باشد پس داریم:

$$1 - (0/9)^n > \frac{1}{2} \Rightarrow (0/9)^n < \frac{1}{2}$$

کوچکترین عدد طبیعی n که در نامعادله فوق صدق می کند برابر است با : n=6

۳۶- (۲)

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

چون در سکه $p = q = \frac{1}{2}$ لذا داریم :

۳۷- (۱)

$$P(A \Delta B|C) = P(A|C) + P(B|C) - 2P(A \cap B|C) = \frac{5}{8} + \frac{1}{4} - 2\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{1}{8}$$

۳۸- (۴)

$$P(A) = \frac{\binom{6}{4}\binom{5}{1} + \binom{6}{5}}{\binom{11}{5}} = \frac{15 \times 5 + 6}{\binom{11}{5}} = \frac{81}{\binom{11}{5}}$$

۳۹- (۳)

$$P(\text{غیر اول})=K \Rightarrow P(\text{اول})=2K \Rightarrow P(\{1\})+P(\{2\})+\dots+P(\{6\})=1$$

$$K+2K+2K+K+2K=K=1 \Rightarrow 9K=1 \Rightarrow K=\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow P(X < 4) = P(\{1\})+P(\{2\})+P(\{3\}) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$$

۴۰- (۲)

$$A = \{2, 3, 5\} \rightarrow A \cap B = \{2\} \Rightarrow \text{سازگارند}$$

$$B = \{1, 2\}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}, P(A) \times P(B) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{6} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Rightarrow A, B \text{ مستقلند}$$

۴۱- (۴) می دانیم معادله سیاله ای $ax+by=c$ در $\mathbb{Z}$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $c | (a, b)$ لذا در اینجا باید $8 | (a, b)$ اما می دانیم از بین اعداد $1, 2, 3, 4, 5, 6$ فقط سه عدد $3, 5, 6$ را عاد نمی کنند لذا معادله زمانی جواب دارد که $(a, b) \# 3$ و $(a, b) \# 5$ و $(a, b) \# 6$ گردد بنابراین معادله به اداء $(3, 3), (5, 5), (3, 6), (6, 3), (6, 6)$ جواب ندارد بنابراین داریم:

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{36-5}{36} = \frac{31}{36}$$

۴۲- (۳) گزینه (الف) و (ب) و (ج) و (د) صحیح می باشند

$$P(B-A|B) = \frac{P[(B-A) \cap B]}{P(B)} = \frac{P(B-A)}{P(B)} < 1 \Rightarrow P(B-A|B) \neq 1$$

دقت کنید که $B-A \subset B \Rightarrow P(B-A) < P(B)$

$$P(A-B|B) = \frac{P[(A-B) \cap B]}{P(B)} = \frac{P(\emptyset)}{P(B)} = 0$$

$$A \subset B = B' \subseteq A' = P(B') \leq P(A')$$

$$P(A \Delta B) = P[(A \cup B) - (A \cap B)] = P(A \cup B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

$$\text{الف) } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

۴۳- (۱) برای اینکه سه عدد a, b, c تشکیل تصاعد حسابی بدهند باید داشته باشیم $a+b=2c$ به عبارت دیگر $a+c$ زوج باشد، برای اینکه مجموع $a+c$ زوج باشد باید هر دو a, c فرد یا هر دو a, c زوج باشند لذا داریم:

$$P(A) = \frac{\binom{5}{2} \binom{2}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{4}{2} + \binom{5}{2}} = \frac{90}{1140} = \frac{9}{114} = \frac{3}{38}$$

۴۴- (۲) مجموع دو عدد زمانی زوج می شود که هر دو زوج یا هر دو فرد باشند، لذا داریم:

$$P(A) = \frac{\binom{5}{2} \binom{2}{2}}{\binom{4}{2} + \binom{5}{2}} = \frac{10}{6+10} = \frac{5}{8}$$

۴۵- (۳) توپ را به nn طریق می توان در n جعبه یکسان قرار داد، ضمناً n توپ را به $n!$ طریق می توان در n جعبه یکسان قرار داد به طوریکه در هر جعبه دقیقاً یک توپ قرار گیرد لذا احتمال مطلوب برابر است با:

$$P(A) = \frac{n!}{n^n}$$

۴۶- (۲) چون A, B مستقلند لذا $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$$P(A \cup B) = P(A)P(B') + P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A)(1 - P(B)) + P(B) = P(A) - P(A)P(B) + P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B)$$

۴۷- (۱)

$$P(\text{دو مهره هم رنگ}) = \frac{\binom{a}{2} + \binom{a+2}{2}}{\binom{2a+2}{2}} = \frac{13}{28} = \frac{\frac{a(a-1)}{2} + \frac{(a+2)(a+1)}{2}}{\frac{(2a+2)(2a+1)}{2}} = \frac{13}{28}$$

پس از ساده کردن معادله فوق به صورت $2a^2 - 11a + 5 = 0$ در می آید که $a=3$ تنها جواب صحیح و مثبت آن است پس در این کیسه 3 مهره سفید و 5 مهره سیاه وجود دارد.

۴۸- (۳) نکته: هرگاه یک آزمایش برنوسی را به طور مستقل تکرار کنیم، احتمال آنکه برای رسیدن به نخستین پیروزی، k مرتبه آزمایش را تکرار کرده باشیم از فرمول زیر به دست می آید:

$$P(k \text{ بار تکرار برای آمدن اولین پیروزی}) = P \times q^{k-1}$$

منظور از فرمول بالا این است که برای آنکه اولین پیروزی در بار k ام رخ دهد، لازم است که در $(k-1)$ مرحله قبلی با شکست خورده باشیم لذا احتمال مورد نظر برابر است با: $p \times q \times q \times \dots \times q \times p = pq^{k-1}$: اگر بدانیم برای رسیدن به اولین پیروزی در یک آزمایش برنوسی، حداقل k مرتبه این آزمایش را تکرار کرده ایم و بخواهیم با این پیش فرض، احتمال آنکه L بار مجبور به تکرار کردن این آزمایش شده باشیم را بدست آوریم از فرمول شرطی زیر استفاده می کنیم: $(L > K)$

می دانیم آزمایش حداقل k مرتبه تکرار شده است: A

می خواهیم آزمایش L بار تکرار شود: B

لذا پیشامدهای A, B را به صورت زیر تعریف می کنیم:

A : بار انداخته شده است 8 سکه حداقل

B : بار انداخته شده است 13 سکه حداقل

$$P = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{pq^{13-1}}{pq^{8-1}} = q^5$$

لذا بنا به فرمول نکته قبل باید P را حساب کنیم:

$$P = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} \quad \text{پس } q = \frac{1}{2} \quad \text{لذا } p = \frac{1}{2} \quad \text{با توجه به اینکه سکه منصف فرض شده است}$$

۴۹- (۲) اگر پیشامد اصابت تیر هر یک از سه نفر a, b, c را با A, B, C نشان دهیم، با توجه به مستقل بودن این پیشامدها داریم:

فقط یکی قبول شده باشد | نفردوم قبول P

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}}{\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{3}{13} = \frac{P(A' \cap B \cap C')}{P(A \cap B' \cap C') + P(A' \cap B \cap C') + P(A' \cap B' \cap C)} \\ & = \frac{P(A')P(B)P(C')}{P(A)P(B')P(C') + P(A')P(B)P(C') + P(A')P(B')P(C)} \end{aligned}$$

(۱) - ۵۰

$$\left. \begin{array}{l} n^n \Rightarrow |S| = 3^3 = 27 \\ n! \Rightarrow |A| = 3! \end{array} \right\} \Rightarrow P(A) = \frac{3!}{3^3} = \frac{2}{9}$$

تعداد کل توابع روی مجموعه ای n عضوی

تعداد توابع (۱-۱) و پوشا روی یک مجموعه n عضوی

(۱) - ۵۱ هر سه مهره غیر سفید یا ۱ مهره سفید و ۲ مهره غیر سفید یا ۲ مهره سفید و ۱ مهره غیر سفید = حداکثر ۲ مهره

سفید

$$= \binom{9}{1} \binom{4}{2} + \binom{9}{2} \binom{4}{1} + \binom{9}{3} = 9 \times 6 + 36 \times 4 + 84 = 282$$

(۲) - ۵۲

$$\begin{array}{c} 3,1 \\ \square \square \square \square \end{array}$$

تعداد اعداد چهار رقمی ساخته شده کمتر از ۵۰۰۰ از 2×5^3

$$\begin{array}{c} \square \square \square \square \\ 2 \times 5 \times 5 \times 1 \end{array}$$

تعداد اعداد چهار رقمی کمتر از ۵۰۰۰ بخش پذیر بر 2×5^2

$$P(A) = \frac{2 \times 5^2}{2 \times 5^3} = \frac{1}{5}$$

(۳) - ۵۳

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n < \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{6}{5}\right)^n > 2 \Rightarrow (1/2)^n > 2 \Rightarrow n = 4$$

$$(۴) - ۵۴ \quad P(\text{مضرب 6 باشد} \mid \text{مضرب 8 نباشد}) = 1 - p(\text{مضرب 8 باشد} \mid \text{مضرب 6 باشد})$$

$$= 1 - \frac{|\text{مضرب 6 و 8 باشد}|}{|\text{مضرب 6 باشد}|} = 1 - \frac{\left\lfloor \frac{100}{24} \right\rfloor}{\left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor} = 1 - \frac{4}{16} = \frac{3}{4}$$

(۳) - ۵۵

$$p(\text{هر سه مهره متمایز}) = \frac{\binom{5}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{4}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{5 \times 3 \times 4}{220} = \frac{60}{220} = \frac{6}{22} = \frac{3}{11}$$

$$\binom{n}{1} = n \quad \text{یادآوری}$$

(۱) - ۵۶

$$P(\text{تاس زوج باشد}) \times p(\text{تاس زوج باشد} \mid \text{حداقل یک شیر}) = p(\text{حداقل یک شیر} \mid \text{تاس زوج باشد}) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{6} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

(۲) - ۵۷

$$P(TV) = 0/6, P(Ra) = 0/7, P(TV \cup Ra) = 0/9$$

$$\Rightarrow 0/9 = 0/7 + 0/6 - X \Rightarrow X = 0/4 \Rightarrow P(TV \cap Ra) = 0/4$$

$$P(TV \cap R'a) = p(TV - Ra) = p(TV) - P(TV \cap Ra) = 0/6 - 0/4 = 0/2$$

(۲) - ۵۸ نکته :

$$P(A|B) + P(A'|B) = 1$$

$$P(A'|B) = 1 - P(A|B)$$

$$P(A'|B) = \frac{P(A' \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B - A)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - P(A|B)$$

$$A \subset B \Rightarrow B' \subset A' \Rightarrow P(B') \leq P(A') \quad (۱) - ۵۹$$

۶۰- (۱) برای اینکه عدد دوم 3 باشد باید عدد اول 3 نباشد لذا داریم :

$$P(A) = \frac{9}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{10}$$

(۴) - ۶۱

$$P(\text{نمره بیست} | \text{متاهل}) = \frac{p(\text{متاهل}) \times p(\text{نمره بیست} | \text{متاهل})}{p(\text{نمره بیست} | \text{زن مجرد}) + p(\text{نمره بیست} | \text{مرد مجرد}) + p(\text{متاهل} | \text{نمره بیست}) \times p(\text{متاهل})}$$

$$= \frac{\frac{5}{15} \times \frac{15}{65}}{\frac{5}{15} \times \frac{15}{65} + \frac{5}{30} \times \frac{30}{65} + \frac{2}{20} \times \frac{20}{65}} = \frac{5}{12}$$

$$E(X) = np = 4 \times \frac{1}{2} = 2 \quad (۳) - ۶۲ \quad \text{به کمک دستور محاسبه امید ریاضی در توزیع برنوسی داریم :}$$

۶۳- (۳) در پرتاب سه تاس سالم تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر $6^3 = 216$ می‌باشد، همچنین برای اینکه اعداد رو شده تشکیل تصاعد حسابی با قدر نسبت بدهند لازم است که اعداد رو شده از تاسها، سه عدد متوالی به صورت $(1,2,3), (2,3,4), (3,4,5), (4,5,6)$ باشند که چون هر یک از این 4 حالت خود به 3! طریق به وسیله این سه تاس بوجود می‌آیند تعداد حالات مطلوب برابر است با: $4 \times 3! = 24$ به عنوان مثال داریم :

$$P(A) = \frac{24}{216} = \frac{1}{9} \quad \text{پس : } (3,2,1), (3,1,2), (2,1,3), (2,3,1), (1,3,2), (1,2,3)$$

(۴) - ۶۴

$$P(A \cup B) = P(A)P(B') + P(B)$$

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A)P(B') + P(B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A)P(B')$$

$$P(A) - P(A \cap B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) \Rightarrow$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \implies A, B \text{ مستقلند}$$

(۴) - ۶۵

$$P(\text{هر سه لامپ سالم}) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B|A) \times P(C|A \cap B)$$

در واقع از فرمول مقابل استفاده کرده ایم:

۶۶- (۳) چون فرزند اول پسر است پس برای اینکه هر سه فرزند پسر باشند کافی است دو فرزند دیگر نیز پسر باشند، ضمناً پسر بودن فرزند دوم و سوم مستقل از هم اند لذا داریم :

$$P(\text{دو فرزند دیگر پسر}) = P(\text{فرزند سوم پسر}) \times P(\text{فرزند دوم پسر}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

(۲) - ۶۷

$$\left. \begin{aligned} |A| &= \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor = 33 \\ |B| &= \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor = 20 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{33}{100} + \frac{20}{100} - \frac{6}{100} = \frac{47}{100}$$

$$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{100}{15} \right\rfloor = 6$$

$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{47}{100} = \frac{53}{100}$$

۶۸- (۲) تعداد کل حالات توزیع ۱۰ توپ در ۴ جعبه برابر است با تعداد جوابهای صحیح نامنفی معادله

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \text{ که برابر است با: } \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{10+4-1}{4-1} = \binom{13}{3}$$

و اگر قرار باشند در جعبه اول ۳ توپ قرار گیرد، در این صورت تعداد این حالات برابر است با تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ یا

$$P(A) = \frac{\binom{9}{2}}{\binom{13}{3}} \text{ لذا احتمال پیشامد مطلوب برابر است با: } \binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2}$$

$$\frac{365}{1} \mid \frac{7}{52}$$

۶۹- (۲) در یک سال غیر کبیسه (سال ۳۶۵ روزی) داریم:

یعنی ۵۲ جمعه داریم، احتمال اینکه ۱۰ روز باقی مانده جمعه باشد، (یعنی در یک سال غیر کبیسه ۵۳ جمعه داشته باشیم) برابر است با:

$$\frac{1}{7}$$

$$|S| = \binom{5}{3} = \binom{5}{2} \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

۷۰- (۱) تعداد اعضای فضای نمونه برابر است با:

$$S = \{(1,3,5), (1,3,7), (1,3,9), (1,5,7), (1,5,9), (1,7,9), (3,5,7), (3,5,9), (3,7,9), (5,7,9)\}$$

اعضای S عبارتند از: اما می دانیم در هر مثلث هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر از تفاضل آنها بزرگتر است لذا پیشامد مطلوب

$$A = \{(3,5,7), (3,7,9), (5,7,9)\}$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{3}{10} \text{ یعنی فقط با چوبهای با این ابعاد می توان یک مثلث ساخت لذا داریم:}$$

۷۱- (۳)

$$\left. \begin{aligned} |S| &= 2n^2 = 29 \\ |A| &= 2^{\frac{n^2-n}{2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow p(A) = \frac{2^3}{2^9} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$$

۷۲- (۳) فرض کنید A و B مستقل اند پس $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ چون $P(A) > 0$ و $P(B) > 0$ پس، $P(B) \times P(A) > 0$ در نتیجه

$P(A \cap B) > 0$ و لذا $P(A \cap B) \neq 0$ پس A و B سازگارند.

۷۳- (۳)

$$P(B|A') = \frac{P(A \cap A')}{P(A')} = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{9}$$

$$B = \{(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6), (1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6)\} \quad ۷۴- (۲)$$

$$A = \{(6,6)\} \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{1}{11}$$

(۲)-۷۵

$$P(X=2) = \binom{n}{x} P^x (1-p)^{n-x} \Rightarrow p(X=2) = \binom{6}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

$$P(X=2) = \frac{15 \times 5^4}{6^5} = 3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^5$$

(۴)-۷۶

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0/23 + 0/24 - 0/38 = 0/09$$

(۱)-۷۷

$$P(X=x) = \binom{n}{x} P^x (1-p)^{n-x} = p(X=3) = \binom{5}{3} \left(\frac{60}{100}\right)^3 \left(\frac{40}{100}\right)^2 = 0/3456 = 0/3456 = \frac{34/56}{100} = \%34/56$$

۷۸- با توجه به فصل سوم ، اگر شرط $I \ll A$ برقرار باشد، رابطه ی متناظر با ماتریس A خاصیت بازتابی خواهد داشت، بنابراین تعداد اعضای پیشامد مورد نظر برابر می شود با تعداد روابط بازتابی روی مجموعه ای ۳ عضوی یعنی:

$$|A| = 2^{n^2 - n} = 2^{9-3} = 2^6$$

$$|S| = 2^{n^2} = 2^9$$

همچنین تعداد کل روابط روی یک مجموعه ۳ عضوی برابر است با:

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{2^6}{2^9} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

لذا داریم:

(۲)-۷۹

$$\begin{cases} P(\{a\}) = \frac{1}{2} p(\{b\}) \Rightarrow p(\{b\}) = 2p(\{a\}) \\ P(\{b\}) = \frac{1}{3} p(\{c\}) \Rightarrow p(\{c\}) = 3p(\{b\}) = 6p(\{a\}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow p(\{a\}) + p(\{b\}) + p(\{c\}) = 1 \Rightarrow p(\{a\}) = \frac{1}{9} \Rightarrow 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$P(\{b,c,d\}) = p(\{b\}) + p(\{c,d\}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

(۳)-۸۰

$$P(\{a\}) = 1 - p(\{b,c,d\}) = \frac{1}{6}$$

۸۱- (۴) احتمال آن که در اولین پرتاب خط بیاید، $\frac{1}{2}$ است در سومین پرتاب خط بیاید $\frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ ، در

$(2k+1)$ امین پرتاب خط بیاید $\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}$ است پس احتمال مورد نظر برابر با:

$$P(A) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{2}{3}$$

حد مجموع تصاعد هندسی

۸۲- (۲) احتمال برد احمد در بار اول $\frac{1}{2}$ است و بعد از پرتاب سه نفر دیگر ، باز نوبت به پرتاب نفر اول یعنی احمد می

رسد احتمال برد احمد در بار دوم $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ است ، به همین ترتیب الی آخر لذا داریم :

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^9 + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{8}{15}$$

(۱) - ۸۳

پیشامد آنکه مهره ی استخرجی از کیسه اول آمده باشد A:

طبق فرمول احتمال کل $\Rightarrow$ پیشامد آنکه مه یره استخرجی از کیسه دوم آمده باشد B:

پیشامد آنکه مهره استخرجی آبی باشد W:

$$P(W) = P(A) \times P(W|A) + P(B) \times P(W|B)$$

اما در کیسه ی جدید 3 مهره وجود دارد که 2 مهره از کیسه ی اول و 1 مهره از کیسه ی دوم آمده پس :
در نتیجه داریم :

$$P(A) = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{1}{3}$$

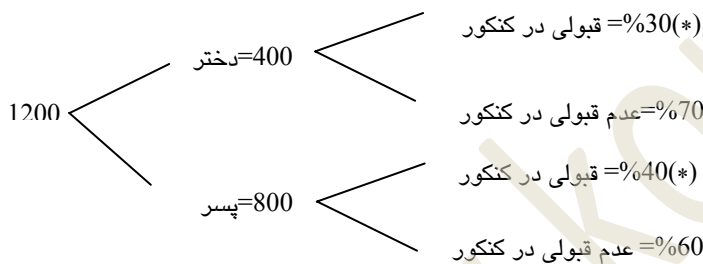
$$P(W) = \frac{2}{3} \times \frac{4}{7} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{6} = \frac{31}{63}$$

$$P(\{b, c\}) = p(\{a, b, c\}) - p(\{a\}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \quad (۲) - ۸۴$$

$$p(\{c, b, d\} \mid P\{a, b, c\}) = \frac{p(\{b, c\})}{p(\{a, b, c\})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

طبق فرمول احتمال شرطی داریم :

(۱) - ۸۵



$$P(\text{پسر} \mid \text{قبولی}) = p(\text{پسر}) \times p(\text{قبولی} \mid \text{پسر}) + p(\text{دختر}) \times p(\text{قبولی} \mid \text{دختر})$$

$$= \frac{400}{1200} \times \frac{30}{100} + \frac{800}{1200} \times \frac{40}{100} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{10} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{11}{30}$$

$$P(\text{قبول شدن در کنکور} \mid \text{پسر}) = \frac{P(\text{قبولی در کنکور} \cap \text{پسر})}{P(\text{قبولی در کنکور})} = \frac{\frac{800}{1200} \times \frac{40}{100}}{\frac{11}{30}} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{11}{30}} = \frac{8}{11}$$

(۳) - ۸۶

$$P(A' \mid B') = \frac{P(A' \cap B')}{P(B')} = \frac{P(A \cup B)'}{P(B')} = \frac{1 - P(A \cup B)}{P(B')}$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = 0/5 \times 0/6 = 0/3$$

$$\Rightarrow P(A' \mid B') = \frac{1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]}{P(B')} = \frac{1 - (0/4 + 0/5 - 0/3)}{0/5} = \frac{4}{5}$$

(۲) - ۸۷

$$\begin{aligned}
 & \text{فرد انتخاب شده استخدام شود: } A: \\
 & B_1: \text{فرد انتخاب شده مرد باشد} \Rightarrow \begin{cases} P(B_1) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5} \\ P(B_2) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5} \\ P(A|B_1) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10} \\ P(A|B_2) = \frac{20}{100} = \frac{2}{10} \end{cases} \\
 & B_2: \text{فرد انتخاب شده زن باشد} \\
 & \Rightarrow P(A) = P(A|B_1) \times P(B_1) + P(A|B_2) \times P(B_2) = \frac{3}{10} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{10} \times \frac{2}{5} = \frac{13}{50}
 \end{aligned}$$

(۴) - ۸۸

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1) \times P(B_1)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{10} \times \frac{3}{5}}{\frac{13}{50}} = \frac{9}{13}$$

(۳) - ۸۹

$$P(\text{ریاضی} - \text{شیمی}) = P(\text{ریاضی}) - P(\text{ریاضی} \cap \text{شیمی}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

(۲) - ۹۰

$$\text{فضای نمونه ای جدید} = \{(6,6,3), (3,6,6), (6,3,6), (5,4,6), (5,6,4), (4,5,6), (4,6,5), (6,4,5), (6,5,4), (5,5,5)\}$$

$$P(\text{مجموع سه عدد 15 باشد} \mid \text{هر سه عدد یکسان باشد}) = \frac{1}{10}$$

(۴) - ۹۱

$$P(\text{یکی از مهره ها سیاه است} \mid \text{مهره دیگر سفید باشد}) = \frac{P(\text{یکی سفید و دیگری سیاه})}{P(\text{یکی از مهره ها سیاه})} = \frac{\frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times 2}{\frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times 2 + \frac{4}{7} \times \frac{3}{6}} = \frac{2}{3}$$

(۴) - ۹۲

$$P(B'|A') = \frac{P(B' \cap A')}{P(B')} = \frac{P(A \cup B)'}{P(A')} = \frac{1 - P(A \cup B)}{P(A')} = \frac{1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4})}{\frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{7}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{6}$$

۹۳- برابر اینکه مهره ها یکی در میان سفید و سیاه باشند ، لازم است ابتدا مهره سیاه در آید سپس مهره سفید و مجدداً سیاه و لذا داریم :

$$P(A) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{35}$$

هفتمی سیاه پنجمی سیاه سومی سیاه اولی سیاه
 ششمی سفید چهارمی سفید دومی سفید

روش دیگر: تعداد روشهای چیندن ۳ مهره ی سفید و ۴ مهره ی سیاه کنار هم در یک ردیف برابر است با: ۷! و تعداد روشهای چیندن ۳ مهره ی سفید و ۴ مهره ی سیاه در یک ردیف کنار هم به صورت یکی در میان برابر است با: ۳! × ۴!

$$\frac{3! \times 4!}{7!} = \frac{1}{35}$$

پس احتمال مورد نظر برابر است با :

۹۴- (۳) طبق فرض داریم :

$$\begin{cases} P(A-B)=0/2 \Rightarrow P(A) - P(A \cap B)=0/2 \\ P(A \cup B)=0/8 \Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B)=0/8 \end{cases}$$

$$(P(A) - P(A \cap B) + P(B) = 0/8 = 0/2 = P(B) + 0/8 \Rightarrow P(B) = 0/6 \Rightarrow P(B') = 0/4 = \frac{2}{5}$$

$$|S| = \frac{6!}{3!3!} = 20$$

۹۵- (۱) تعداد اعضای فضای نمونه ای این آزمایش برابر است با:

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{1}{20}$$

اما فقط در یک حالت رنگ گویها درست حدس زده می شود لذا $|A| = 1$ بنابراین داریم :

۹۶- (۲) دو رقمی های شامل ۵+ یک رقمی (فقط ۵) = تعداد اعداد از ۱ تا ۱۰۰ ، که شامل رقم ۵ می باشند .

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 5 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & 5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 5 \\ \hline \end{array}$$

$$= 1 + 1 \times 9 + 8 \times 1 + 1 \times 1$$

$$= 1+9+8+1=19 \Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{19}{100}$$

۹۷- (۴) نکته : هرگاه مجموع دو پیشامد A و B ، بیشتر از ۱ باشد ، A و B حتما سازگارند

$$P(A)+P(B) = 0/5+0/6=1/1$$

دقت کنید که در این حالت اگر A و B ناسازگار باشند به تناقض زیر می رسیم :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 1/1 > 1 \cdot \ddot{\times} \cdot$$

۹۸- (۲) با توجه به نمودار مقابل ، یعنی فقط یکی از سه پیشامد A و B و C رخ دهد .

$$\underbrace{[A-(B \cup C)]}_{(1)} \cup \underbrace{[B-(A \cup C)]}_{(2)} \cup \underbrace{[C-(A \cup B)]}_C$$

۹۹- (۴) واضح است که $|S| = 6^2 = 36$ ، اما برای اینکه حاصلضرب اعداد رو شده در دو تاس زوج باشد ، باید حداقل

یکی از اعداد رو شده در دو تاس زوج باشد لذا داریم :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 3 \times 6 + 3 \times 6 - 3 \times 3 = 27 \Rightarrow P(A) = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$$

تاس دوم زوج بیاید تاس اول زوج بیاید

۱۰۰- (۱) تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 = a$ برابر است با: $\binom{a+3-1}{3-1} = \binom{a+2}{2}$ که به ازاء $a=3$

برابر ۱۰ و به ازاء $a > 3$ بزرگتر از ۱۰ خواهد بود پس پیشامد مطلوب برابر است با: $\{3, 4, 5, 6\}$ در نتیجه : $P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

۱۰۱- (۱) اگر M در نامساوی $\langle\langle I \rangle\rangle M \& MT$ صدق کند یعنی رابطه متناظر M ، بازتابی و پاد متقارن است که

تعداد این گونه ها رابطه ها برابر است با : $3^{\frac{n^2-n}{2}} = 3^3$ ، اما تعداد کل رابطه هایی که می توان روی یک مجموعه ی ۳

عضوی مانند $A = \{1, 2, 3\}$ نوشت برابر است با $2^{n^2} = 2^9$ بنابراین: $P(A) = P(\text{بازتابی و پاد متقارن}) = \frac{3^3}{2^9} = \frac{27}{512}$ (۲) -۱۰۲

$$P(\text{هر } n \text{ تیر به هدف بخورد}) = \left(\frac{8}{10}\right)^n < 0/4 \Rightarrow \left(\frac{4}{15}\right)^n < \frac{4}{10}$$

به ازاء 3 یا 2 یا 1، $n = 1$ ، تا معادله ی اخیر برقرار نیست $\Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} < \frac{1}{2}$

لذا $n - 1 \geq 4$ و بنابراین $n \geq 5$ ، یعنی حداقل مقدار n برابر 5 است.

$$P(A_1 \cup A_2 | B) = P(A_1 | B) + P(A_2 | B) - P(A_1 \cap A_2 | B) = 0/7 + 0/4 - 0/3 = 0/8 \quad (۳) \quad -۱۰۳$$

$$P(A_1 \Delta A_2 | B) = P(A_1 | B) + P(A_2 | B) - 2P(A_1 \cap A_2 | B) = 0/7 + 0/4 - 0/6 = 0/5 = \frac{1}{2} \quad (۴) \quad -۱۰۴$$

$$100 < \text{اعداد سه رقمی} < 999 = |S| = 999 - 100 + 1 = 900 \quad (۲) \quad -۱۰۵$$

$$|A| = \left\lfloor \frac{999}{12} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{12} \right\rfloor = 83 - 6 = 77$$

عددی مضرب 4 و 6 است که مضرب 12 باشد لذا:

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{77}{900} \quad \text{بنابراین:}$$

(۴) وقتی یک جفت تاس را یک بار پرتاب می کنیم 3 امکان وجود دارد، اول اینکه مجموع 6 است، دوم اینکه

مجموع 4 است و سوم اینکه مجموع غیر از این دو حالت است چون

$$P(\text{باشد 6 و غیر از 4 مجموع غیر از}) = 1 - \frac{8}{36} = \frac{28}{36}, P(\text{باشد 4 مجموع}) = \frac{3}{36}, P(\text{باشد 6 مجموع}) = \frac{5}{36}$$

بنابراین اگر این آزمایش را 10 بار تکرار کنیم طبق توزیع چند جمله ای (تعمیم توزیع دو جمله ای) داریم:

$$P(\text{سه بار مجموع 6 بیاید و دو بار مجموع 4 بیاید}) = \binom{10}{3} \binom{7}{2} \binom{5}{5} \left(\frac{5}{36}\right)^3 \left(\frac{3}{36}\right)^2 \left(\frac{28}{36}\right)^5$$

$$= \frac{10!}{3!2!5!} \times \frac{7!}{2!5!} \times 1 \times \left(\frac{5}{36}\right)^3 \left(\frac{3}{36}\right)^2 \left(\frac{28}{36}\right)^5$$

$$= \frac{10!}{3!2!5!} \left(\frac{5}{36}\right)^3 \left(\frac{3}{36}\right)^2 \left(\frac{28}{36}\right)^5$$

ادامه تستهای احتمال

۱- دو عدد حقیقی به تصادف بین $[-2, 2]$ انتخاب می کنیم احتمال اینکه مجموع مربعات آنها کمتر از چهار باشد ، کدام است ؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) $\frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{\pi}{16}$ (۴) $\frac{\pi}{3}$

۲- از فاصله $S = [1, 7] \cup [9, 15]$ یک عدد به تصادف انتخاب می کنیم چقدر احتمال دارد عدد انتخاب شده در فاصله $[7, 10]$ باشد ؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{7}$ (۴) $\frac{3}{14}$

۳- اگر زاویه α را به تصادف در فاصله $[0, \pi]$ انتخاب کنیم ، احتمال آنکه $\sin \alpha < \cos \alpha$ باشد چقدر است ؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{8}$

۴- دو مثلث A, B, C زاویه $\hat{A} = 45^\circ$ است و زاویه های B, C به تصادف انتخاب می شوند احتمال اینکه مثلث A, B, C منفرجه الزاویه باشد ، چقدر است ؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۵- نقطه ای به تصادف درون مربعی به ضلع ۲ انتخاب می کنیم احتمال آنکه فاصله آن نقطه از رئوس مربع ، بیشتر از یک باشد، کدام است ؟

- (۱) $\frac{\pi}{4}$ (۲) بیشتر از $\frac{\pi}{4}$ (۳) کمتر از $\frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۶- هرگاه $|\theta| \leq \frac{\pi}{2}$ باشد احتمال آنکه سری $\sum_{n=1}^{\infty} (2\sin\theta)^n$ باشد ، کدام است ؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۷- فرض می کنیم دو عدد حقیقی بین ۰ و ۱ انتخاب شوند ، احتمال آنکه مجموع این دو عدد بین ۰/۵ و ۱/۵ باشد برابر است با :

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{5}$

۸- دو نقطه به طور تصادفی در بازه ی $(0, 1)$ انتخاب می کنیم ، احتمال اینکه $|x - y| < \frac{1}{2}$ باشد کدام است ؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۹- نقطه X_0 را به تصادف از بازه ی $[0, 2\pi]$ انتخاب می کنیم ، اگر $F(x) = \cos x$ باشد ، احتمال آنکه $f'(x_0) \leq 0$ باشد ، کدام است ؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{5}$

۱۰- اگر $0 \leq x \leq 4$ و $0 \leq y \leq 4$ و $0 \leq z \leq 5$ باشد ، احتمال آنکه $0 \leq 4x + 6y + 3z \leq 12$ باشد چقدر است ؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۱۱- نقطه ای مانند $A(x,y)$ به تصادف از درون مستطیل $[0,2] \times [0,8]$ انتخاب می کنیم احتمال آنکه $y \geq x^3$ باشد ، چقدر است ؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۱۲- نقطه ای به تصادف از پاره خطی به طول L انتخاب می کنیم، احتمال اینکه طول هیچ کدام از دو قطعه، کمتر از $\frac{L}{3}$ نباشد، چقدر است ؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۱۳- اگر X به تصادف از فاصله $(0,3)$ انتخاب شده باشد ، احتمال اینکه $X^2 - 5x + 6 > 0$ باشد ، برابر است با :

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۱۴- بین ۲۰ تا ۲۷ دقیقه (به طور تصادفی) طول می کشد تا یک معلم، از منزلش به مدرسه برسد اگر او ساعت ۸ صبح کلاس داشته باشد و ساعت $7:37'$ صبح از منزل خارج شود احتمال اینکه سر وقت به کلاس برسد چند است ؟

- (۱) $\frac{23}{60}$ (۲) $\frac{23}{27}$ (۳) $\frac{3}{7}$ (۴) $\frac{27}{60}$

۱۵- نقطه ای به تصادف از درون دایره به شعاع واحد انتخاب می کنیم ، احتمال اینکه این نقطه درون قطاع ۰ رادیان و $\frac{\pi}{4}$ رادیان واقع شود چقدر است ؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{1}{16}$ (۴) $\frac{3}{8}$

۱۶- نقطه b را به تصادف در فاصله $(-2,3)$ انتخاب می کنیم ، احتمال اینکه معادله درجه دوم $x^2 + bx + 1 = 0$ دارای ریشه ی حقیقی باشد ، چقدر است ؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۱۷- دو عدد به تصادف از فاصله $[0,1]$ انتخاب می کنیم ، احتمال اینکه ف عدد اول کوچکتر از $\frac{1}{4}$ و عدد دوم بزرگتر از $\frac{1}{2}$ باشد چقدر است ؟

- (۱) $\frac{3}{8}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۱۸- نقطه M را داخل مثلث متساوی الاضلاع ABC' به تصادف انتخاب می کنیم ، احتمال اینکه زاویه $\widehat{BMC}$ حاده باشد ، چقدر است ؟

- (۱) $\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{18}$ (۲) $\frac{1}{4} - \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$ (۳) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{18}$ (۴) $\frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$

۱۹- نقطه x_0 را به تصادف از فاصله $[0,2\pi]$ انتخاب می کنیم ، اگر $F(x) = \cos x$ باشد ، احتمال آنکه در آن نقطه ، تقعر منحنی رو به بالا باشد ، کدام است ؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{5}$

۲۰- اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع احتمالی به صورت $P(X = x) = 5a\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1}$ به ازاء $X=0,1,2,\dots$ باشد ، عدد حقیقی a کدام است ؟

- (۱) $\frac{4}{15}$ (۲) $\frac{24}{5}$ (۳) $\frac{8}{15}$ (۴) $\frac{21}{5}$

۲۱- اگر X و Y دو متغیر تصادفی و K یک عدد حقیقی باشد ، کدام یک از موارد زیر نادرست است ؟

- (۱) $E(X+K)=E(X)+K$ (۲) $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
(۳) $E(X^2)=(E(X))^2$ (۴) $E(KX+Y)=KE(X)+E(Y)$

۲۲- فرض کنید تابع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف شده باشد :

$$F(x) = P(X = x) = \frac{x}{6}, \quad X = 1, 2, 3$$

در این صورت $P(X \leq \frac{7}{3})$ کدام است ؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) 1 (۴) $\frac{5}{6}$

۲۳- تاس سالمی را پرتاب می کنیم، چنانچه عدد رو شده، عددی اول باشد، متغیر تصادفی X را 2 تعریف می کنیم در غیر اینصورت خود عدد رو شده به عنوان متغیر تصادفی تعریف می شود، در اینصورت $P(X \leq 2)$ کدام است ؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{5}{6}$

۲۴- در پرتاب دو تاس، اگر X متغیر تصادفی مجموع اعداد رو شده باشد، آنگاه احتمال $P(4/75 \leq X \leq 6/25)$ چقدر است ؟

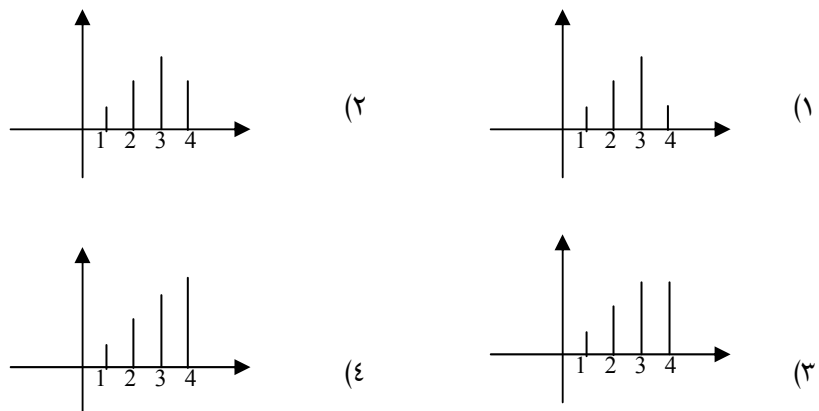
- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۲۵- احتمال آنکه شخصی راست بگوید 0/7 می باشد، در روستایی شروع به پرسش می کنیم، اگر X متغیر تصادفی تعداد آدمهایی باشد که آخرین آنها فقط دروغ گفته باشد تابع جرم احتمال آن چیست ؟

- (۱) $(0/3)^x$ (۲) $(0/7)^{x-1}(0/3)$ (۳) $(0/7)^x 0/3$ (۴) $(0/7)^x$

$X!$	1	2	3	4
$P(X=X!)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	a

۲۶- نمودار میله ای جدول توزیع احتمال مقابل کدام است ؟



۲۷- هرگاه در آزمایش پرتاب 5 سکه با هم ، متغیر تصادفی X نشان دهنده تعداد خطها باشد ، آنگاه فرمول تابع احتمال کدام است؟

$$f_X(x) = \frac{\binom{5+x}{x}}{32}, x = 0,1,2,3,4 \quad (۲)$$

$$f_X(x) = \frac{\binom{5}{x}}{32}, x = 0,1,2,3,4 \quad (۱)$$

$$f_X(x) = \frac{x}{32}, x = 0,1,2,3,4 \quad (۴)$$

$$f_X(x) = \frac{\binom{x}{5}}{32}, x = 0,1,2,3,4 \quad (۳)$$

۲۸- کدامیک از توابع زیر ، تابع توزیع احتمال می باشد ؟

$$P(x=i) = \frac{i}{i^2+3}, (i=1,2,3) \quad (۲)$$

$$P(x=i) = \frac{i}{5}, (i=0,1,2) \quad (۱)$$

$$P(x=i) = \frac{i+1}{9}, (i=1,2,3) \quad (۴)$$

$$P(x=i) = \frac{3-i}{3+i}, (i=3,4,5) \quad (۳)$$

۲۹- یک جفت تاس را آنقدر پرتاب می کنیم تا مجموع 7 بیاید ، احتمال آنکه دقیقاً دو پرتاب لازم باشد ، کدام است ؟

$$\frac{1}{5} \quad (۴)$$

$$\frac{5}{36} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{36} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{8} \quad (۱)$$

۳۰- یک سکه سالم را 5 بار پرتاب می کنیم، اگر متغیر تصادفی X تعداد شیرآمدنها باشد، در این صورت $P(X=3)$ ، با کدامیک برابر است ؟

$$P(X=0) \quad (۴)$$

$$P(X=4) \quad (۳)$$

$$P(X=2) \quad (۲)$$

$$P(X=1) \quad (۱)$$

۳۱- توزیع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر مشخص می شود:

$$\begin{cases} P(x=i) = \frac{i}{i^2+3}, (i=1,2,3) \\ P(x=i) = \frac{1}{14}, (i=4,5,6) \end{cases}$$

مقدار $P(X \leq 3)$ برابر است با :

$$\frac{6}{7} \quad (۴)$$

$$\frac{11}{14} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{9}{14} \quad (۱)$$

۳۲- مقدار K چند باشد تا تابع زیر یک تابع توزیع احتمال باشد ؟

$$P(X=X) = K \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}, (X \in \mathbb{N})$$

$$\frac{3}{5} \quad (۴)$$

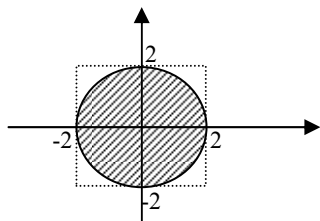
$$\frac{3}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۱)$$

پاسخ تستهای احتمال

۱- گزینه (۲)



$$S = [-2, 2] \times [-2, 2] = a_s = 4^2 = 16$$

$$X^2 + y^2 < 4 = a^A = \pi R^2 = 4\pi$$

$$P(A) = \frac{a_A}{a_s} = \frac{4\pi}{16} = \frac{\pi}{4}$$

۲- گزینه (۱)

$$S = [1, 7] \cup [9, 15] = I_3 = (7-1) + (15-9)$$

$$A = [7, 10] \subset S = A = [8, 10] = I_A = 10 - 8 = 2$$

$$P(A) = \frac{I_A}{I_S} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

۳- گزینه (۳)

$$S = [0, \pi] \Rightarrow I_S = \pi - 0 = \pi$$

واضح است که در فاصله $[0, \pi]$ اگر $0 < x < \frac{\pi}{4}$ باشد $\sin x$ از $\cos x$ کوچکتر است (به دایره مثلثاتی مراجعه کنید) لذا

$$A = [0, \frac{\pi}{4}] \text{ و در نتیجه } I_A = \frac{\pi}{4} \text{ بنابراین داریم:}$$

$$P(A) = \frac{I_A}{I_S} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\pi} = \frac{1}{4}$$

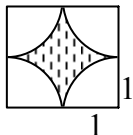
تذکر: دقت کنید که در فاصله $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ از $\sin x$ از $\cos x$ بزرگتر است (باز هم به دایره مثلثاتی مراجعه کنید) و ضمناً

در فاصله $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ، (یعنی مربع دوم) چون $\sin x$ قسمت $\cos x$ منفی است لذا باز هم $\sin x$ از $\cos x$ بزرگتر است.

۴- گزینه (۱) چون $\hat{A} = 45^\circ$ پس $\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ در صورتی که یکی از زوایای C, B بخواهند منفرجه باشند مثلاً زاویه B ، (دقت کنید که در این حالت زاویه C دیگر نمی تواند منفرجه باشد) باید $90^\circ < B < 135^\circ$ باشد از طرفی

$$P(A) = \frac{I_A}{I_S} = \frac{135^\circ - 90^\circ}{135^\circ - 0} = \frac{45^\circ}{135^\circ} = \frac{1}{3} \text{ می باشد لذا داریم:}$$

۵- گزینه (۳)



$$p(A) = \frac{\text{مساحت 4 دایره‌ی به شعاع 1} - \text{مساحت مربع}}{\text{مساحت مربع}}$$

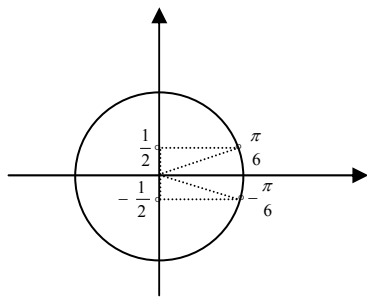
$$= \frac{4 - \pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

۶- گزینه (۳) می دانیم سری $\sum_{n=1}^{\infty} (2\sin\theta)^n$ یک سری هندسی با قدر نسبت $r = 2\sin\theta$ است و می دانیم هر سری

هندسی به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ است و هنگامی همگراست که $|r| < 1$ باشد لذا داریم:

$$|r| < 1 \Rightarrow |2\sin\theta| < 1 \Rightarrow |\sin\theta| < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-1}{2} < \sin\theta < \frac{1}{2}$$

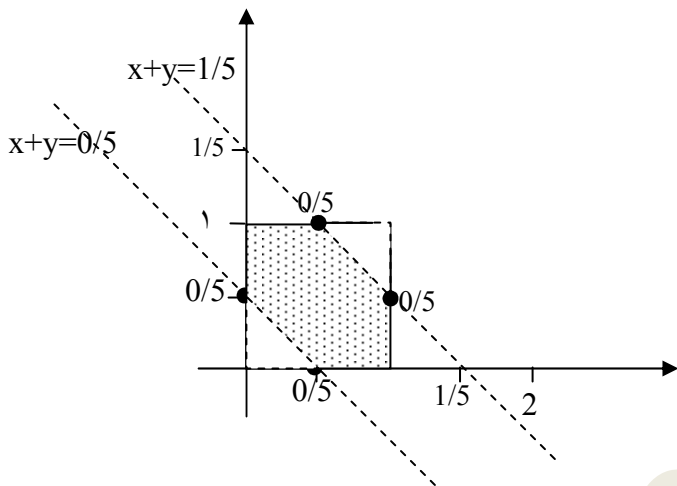
مطابق شکل مقابل و با توجه به اینکه $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ برای اینکه $\sin \theta$ بین $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ قرار گیرد باید کمان θ بین $\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}$ قرار گیرد :



لذا $A = [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$, $S = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ بنابراین احتمال مطلوب برابر است با :

$$P(A) = \frac{l_A}{l_S} = \frac{\frac{\pi}{6} - (-\frac{\pi}{6})}{\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})} = \frac{\frac{\pi}{3}}{\pi} = \frac{1}{3}$$

۷- گزینه (۲)



$$0.5 < X + Y < 1.5$$

$$S = [0, 1] \times [0, 1] \Rightarrow a_S = 1 \times 1 = 1$$

$$A_A = a_S - 2a = 1 - 2 \times \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

$$P(A) = \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \text{ لذا داریم:}$$

۸- گزینه (۴)

$$|x - y| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < x - y < \frac{1}{2}$$

$$P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{\frac{3}{4}}{1} = \frac{3}{4} \text{ مطابق تست قبل داریم:}$$

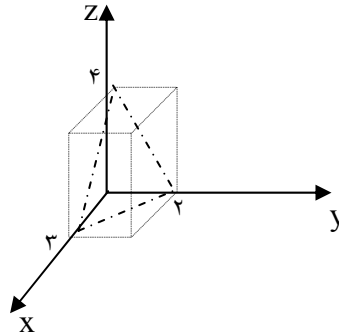
۹- گزینه (۱)

$$f'(x) \leq 0$$

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x \Rightarrow -\sin x \leq 0 \Rightarrow \sin x \geq 0 \Rightarrow$$

$$0 \leq x \leq \pi \Rightarrow \begin{cases} S = [0, 2\pi] \\ A = [0, \pi] \end{cases} \Rightarrow P(A) = \frac{l_A}{l_S} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

۱۰- گزینه (۲) نمودار $4x+6y+3z=1$ عبارتست از یک صفحه



$$\left. \begin{array}{l} \text{محل تلاقی با محور } x \text{ ها} \\ Y=0, Z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow x = 3$$

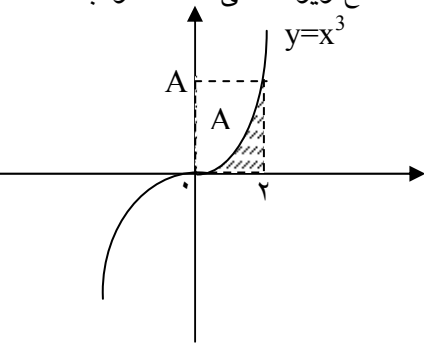
$$\left. \begin{array}{l} \text{محل تلاقی با محور } y \\ x=0, Z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow 6x = 12 \Rightarrow x = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{محل تلاقی با محور } z \\ x=0, y=0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3z = 12 \Rightarrow z = 4$$

با توجه به نامعادله $0 \leq 4x + 6y + 3z \leq 12$ ، فضای پیشامد عبارتست از حجم هرم و فضای نمونه ای عبارتست از حجم مکعب مستطیلی به ابعاد ۴ و ۲ و ۳ لذا داریم:

$$P(A) = \frac{V_A}{V_S} = \frac{\frac{1}{3}(\text{مساحت قاعده})(\text{ارتفاع})}{3 \times 2 \times 4} = \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{2} \times 3 \times 2) \times 4}{3 \times 2 \times 4} = \frac{1}{6}$$

۱۱- گزینه (۲) برای به دست آوردن مساحت فضای پیشامد مطلوب (A) کافی است سطح زیر منحنی $Y=X^3$ را به کمک انتگرال به دست آورده از مساحت مستطیل کم کنیم:

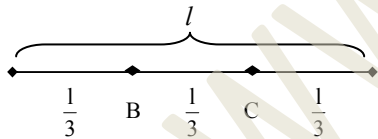


$$\text{مساحت ناحیه هاشورخورده} = \int_0^2 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 = 4 - 0 = 4$$

$$a_A = a_S - (\text{مساحت هاشورخورده}) = (2 \times 8) - 4 = 12$$

$$P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

۱۲- گزینه (۱) برای اینکه طول هیچکدام از دو قطعه کمتر از $\frac{1}{3}$ نباشد لازم است که نقطه انتخاب شده در فاصله B تا C باشد لذا داریم:



$$S = 1$$

$$A = \frac{1}{3} \Rightarrow P(A) = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}$$

$$x^2 - 5x + 6 > 0 \Rightarrow P = (x-2)(x-3) > 0 \Rightarrow$$

۱۳- گزینه (۴)

x	2	3
P	+	-

$(0,2)$ - مجموعه جواب قابل قبول با توجه به $S=(0,3) \Rightarrow S=(-\infty,2) \cup (3,+\infty)$ مجموعه جواب

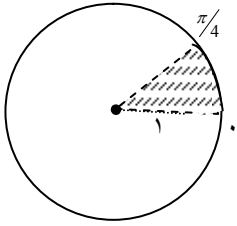
$$\left\{ \begin{array}{l} S = (0,3) \\ A = (0,2) \end{array} \right\} \Rightarrow P(A) = \frac{l_A}{l_S} = \frac{2-0}{3-0} = \frac{2}{3}$$

۱۴- گزینه (۳) اگر مدت زمان رسیدن او به مدرسه بین 20 تا 23 دقیقه طول بکشد ، سر وقت به کلاس درس خواهد

$$P(A) = \frac{23-20}{27-20} = \frac{3}{7}$$

رسید ، پس احتمال سر وقت رسیدن او به کلاس برابر است با :

۱۵- گزینه (۲)



$$S = \text{دایره واحد} = a_s = \pi R^2 = \pi (1)^2 = \pi$$

$$A = \text{قسمت هاشور خورده} \Rightarrow a_A = \frac{1}{8} \pi R^2 = \frac{1}{8} \pi$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{a_A}{a_s} = \frac{\frac{1}{8} \pi}{\pi} = \frac{1}{8}$$

نکته : مساحت قطاعی به زاویه مرکزی α رادیان واقع در دایره ای به شعاع R برابر است با $\frac{\alpha}{2\pi} \times \pi R^2$

۱۶- گزینه (۳)

$$X^2 + bx + 1 = 0 \Rightarrow \Delta \geq 0 \Rightarrow b^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow b^2 \geq 4 \Rightarrow b \leq -2 \text{ یا } b \geq 2$$

$$\Rightarrow S = (-3, 3) \Rightarrow I_s = 3 - (-3) = 6$$

$$A = (-3, -2] \cup [2, 3) \Rightarrow I_A = 1 + 1 = 2 \Rightarrow P(A) = \frac{I_A}{I_s} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$S = [0, 1]$$

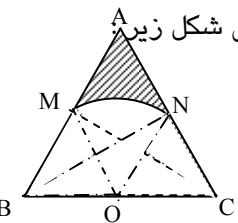
۱۷- گزینه (۲)

$$A = \{x : 0 \leq x < \frac{1}{4}\} \Rightarrow P(A) = \frac{I_A}{I_s} = \frac{\frac{1}{4}}{1} = \frac{1}{4}$$

$$B = \{x : \frac{1}{2} < x \leq 1\} \Rightarrow P(B) = \frac{I_B}{I_s} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

چون دو پیشامد A, B مستقل از هم هستند لذا داریم :



$$P(A) = \frac{\text{مساحت قسمت هاشورخورده}}{\text{مساحت مثلث}}$$

احتمال مطلوب برابر است با :

$$= \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$\text{مساحت قسمت هاشورخورده} = S_{\triangle ABC} - (S_{\triangle OMB} + S_{\triangle ONC} + S_{\triangle OMN})$$

$$= \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} - \left(\frac{a^2 \sqrt{3}}{16} + \frac{a^2 \sqrt{3}}{16} + \frac{1}{6} \pi \frac{a^2}{4} \right) \Rightarrow \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} - \frac{a^2 \sqrt{3}}{8} - \frac{\pi a^2}{24} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{8} - \frac{\pi a^2}{24}$$

$$P(A) = \frac{\frac{a^2 \sqrt{3}}{8} - \frac{\pi a^2}{24}}{\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2} - \frac{\pi \sqrt{3}}{18}$$

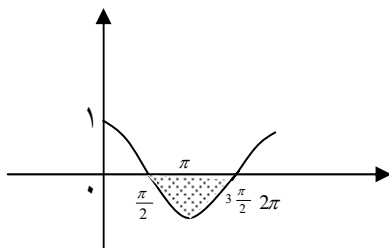
لذا داریم :

۱۹- گزینه (۱) برای آنکه در نقطه ای مانند XO تقعر منحنی رو به بالا باشد لازم است که مشتق دوم در آن نقطه مثبت باشد .

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(x) = -\cos x$$

$$f''(x) > 0 \Rightarrow -\cos x > 0 \Rightarrow \cos x < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$$

$$\begin{cases} S = [0, 2\pi] \\ A = (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \end{cases} \Rightarrow P(A) = \frac{l_A}{l_S} = \frac{\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}}{2\pi - 0} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$



۲۰- گزینه (۳)

$$\sum_{x=1}^{\infty} P(X=x) = 1 \Rightarrow P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + \dots = 1$$

$$5a\left(\frac{1}{3}\right) + 5a\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 5a\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \dots = 1$$

$$\frac{5a\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = 1 \Rightarrow \frac{5}{3}a = \frac{8}{9} \Rightarrow a = \frac{\frac{8}{9}}{\frac{5}{3}} = \frac{8}{15}$$

۲۱- گزینه (۳) توجه کنید که امید ریاضی تابعی خطی است لذا گزینه های (۱)، (۲)، (۴) صحیح اند ، با یک مثال نقض می توان نشان داد که تساوی داده شده در گزینه (۳) نادرست است .

۲۲- گزینه (۱)

$$p\left(x \leq \frac{7}{3}\right) = p(x=1) + p(x=2) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

۲۳- گزینه (۱) واضح است که مقادیری که متغیر تصادفی x اختیار می کند ، عبارتست از : ۶, ۴, ۱, ۲ در واقع داریم :

$$\begin{cases} \text{اول} = \{2, 3, 5\} = X=2 \\ \text{غیر اول} = \{1, 4, 6\} = X=1, 4, 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(X \leq 2) = P(X=2) + P(X=1) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

۲۴- گزینه (۱) واضح است که مقادیری که متغیر تصادفی X اختیار می کند عبارتست از : $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ لذا داریم :

$$P(4/75 \leq X \leq 6/25) = P(X=5) + P(X=6) = \frac{4}{36} + \frac{5}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$A = \{(2,3), (3,2), (1,4), (4,1)\}$: مجموع اعداد دو تاس ۵ شود

$B = \{(2,4), (4,2), (3,3), (1,5), (5,1)\}$: مجموع اعداد دو تاس ۶ شود

۲۵- گزینه (۳)

$$\begin{cases} x=1 \Rightarrow \begin{cases} \text{گزینه ۱} = 0/3 \\ \text{گزینه ۲ و ۴ نادرستند} \\ \text{گزینه ۳} = 0/3 \end{cases} \\ x=2 \Rightarrow \text{گزینه ۱ نادرست است} \Rightarrow 0/7 \times 0/3 = 0 \text{ دروغ گفته} \times \text{اولی راست گفته} \end{cases}$$

پس گزینه ۳ درست است .

۲۶- گزینه (۱)

$$\frac{1}{10} + \frac{3}{10} + \frac{1}{2} + a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{10} = p(x=1) = p(x=4)$$

پس گزینه ۱ صحیح است .

۲۷- گزینه (۱) با توجه به توزیع برنوسی داریم:

$$F_x(X) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x \binom{n}{k} P^k (1-P)^{n-k}$$

$$F_x(X) = \frac{\binom{n}{x}}{2^n} = \frac{\binom{5}{x}}{3^2} \quad \text{چون در سکه } p=q \text{ لذا داریم:}$$

۲۸- گزینه (۴) در گزینه (۳)، $P(X=4)$ منفی است لذا نادرست است.

در گزینه های (۱) و (۲)، مجموع احتمالات، یک نمی شوند تنها در گزینه ۴ داریم:

$$P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = \frac{2}{9} + \frac{3}{9} + \frac{4}{9} = 1$$

۲۹- گزینه (۳) مجموع ۷ بیاید را با S_r مجموع r نیاید را با S'_r نمایش می دهیم، جهت اینکه، برای «مجموع r بیاید»، دو پرتاب لازم باشد باید در پرتاب اول، مجموع r نیاید و در پرتاب دوم مجموع r بیاید لذا داریم:

$$P(S'_r \cap S_r) = P(S'_r) \times P(S_r) = \frac{30}{36} \times \frac{6}{36} = \frac{5}{36}$$

دقت کنید که تعداد حالت هایی که در پرتاب دو تاس مجموع r می شود عبارتست از: $\{(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)\}$
 ۳۰- گزینه (۲)

$$P(X=2) = \text{احتمال اینکه ۲ بار شیر بیاید} = \frac{\binom{5}{2}}{2^5} = \frac{\binom{5}{3}}{2^5} = \text{احتمال اینکه ۳ بار شیر بیاید}$$

۳۱- گزینه (۳) جدول توزیع احتمال متغیر تصادفی X عبارتست از:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$

لذا داریم:

$$P(X \leq 3) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = \frac{1}{4} + \frac{2}{7} + \frac{1}{4} = \frac{11}{14}$$

۳۲- (۲) باید داشته باشیم:

$$\sum_{x=1}^{\infty} P(x=x) = 1$$

$$\sum_{x=1}^{\infty} K \left(\frac{2}{3} \right)^{x-1} = 1 \Rightarrow K \sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^{x-1} = 1$$

$$\Rightarrow K \times \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1 \Rightarrow 3K = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{3}$$

لذا داریم:

«تستهای کنکور سراسری و آزاد از ۷۹ تا ۸۴»

۱- دو تاس (مکعب) متمایز را پرتاب می کنیم ، با کدام احتمال هر یک از اعداد رو شده مقرر 3 نیست؟ (سراسری ریاضی ۷۹)

(۱) $\frac{4}{9}$ (۲) $\frac{5}{9}$ (۳) $\frac{5}{12}$ (۴) $\frac{7}{18}$

۲- اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند و $P(A), P(B) + P(A' \cup B') = 1$ و P(A), P(B) + P(A' ∪ B') = 1 و پیشامد A, B نسبت به هم چگونه اند؟ (سراسری ریاضی ۷۹)

(۱) سازگار (۲) مستقل (۳) وابسته (۴) ناسازگار

۳- از بین 6 داوطلب ریاضی و 4 داوطلب گروه تجربی ، به طور تصادفی 4 نفر انتخاب می شوند با کدام احتمال دو نفر آنان از گروه ریاضی است؟ (سراسری ریاضی ۷۹)

(۱) $\frac{5}{21}$ (۲) $\frac{5}{14}$ (۳) $\frac{4}{7}$ (۴) $\frac{3}{7}$

۴- نقطه ای به تصادف روی منحنی $|X| + |Y| = 3$ انتخاب می کنیم ، احتمال آنکه فاصله این نقطه از محور Y ها کوچکتر از $\frac{1}{3}$ باشد ، چقدر است؟ (آزاد ریاضی ۷۹)

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) 0 (۳) $\frac{1}{9}$ (۴) 1

۵- اگر $P(A - B) = \frac{1}{4}$, $P(B - A) = \frac{3}{4}$ باشد ، $P(A \cap B)$ کدام است؟ (آزاد ریاضی ۷۹)

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) 0 (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) داده های سوال کافی نیست

۶- در پرتاب دو تاس، اگر حداقل یکی از تاسها، 5 ظاهر شود، احتمال اینکه دو تاس، دو عدد متوالی را نشان دهند، چقدر است؟ (آزاد ریاضی ۷۹)

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{9}$ (۳) $\frac{1}{18}$ (۴) $\frac{4}{11}$

۷- یک نقطه روی دایره ای $X^2 + Y^2 = 1$ انتخاب می کنیم احتمال آنکه فاصله این نقطه از خط $X = 2$ برابر $\sqrt{2}$ باشد چقدر است؟ (آزاد ۷۹)

(۱) $\frac{1}{2\pi}$ (۲) $\frac{1}{\pi}$ (۳) $\frac{2}{\pi}$ (۴) 0

۸- دایره ای در نظر می گیریم نقطه ای به طور تصادفی بر روی سطح آن انتخاب می کنیم احتمال آنکه این نقطه به مرکز آن نزدیکتر تا محیط دایره باشد ، کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۰)

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{2\pi}$ (۳) $\frac{19}{27}$ (۴) $\frac{1}{4\pi}$

۹- سه عدد تاس سالم را با هم پرتاب می کنیم ، با کدام احتمال اعداد رو شده مضرب 3 نیستند؟ (سراسری ریاضی ۸۰)

(۱) $\frac{8}{27}$ (۲) $\frac{4}{9}$ (۳) $\frac{19}{27}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۱۰- در اولین ظرف از سه ظرف همانند، 3 مهره سفید و 9 مهره سیاه و در دومین ظرف 5 مهره سفید و 3 مهره سیاه و در ظرف سوم فقط مهره سیاه داریم، چشم بسته از یکی از ظرفها، یک مهره از ظرف بیرون می آوریم احتمال آنکه این مهره سیاه باشد کدام است؟ (سراسری ۸۰)

$$\frac{5}{16} (۱) \quad \frac{7}{24} (۲) \quad \frac{5}{12} (۳) \quad \frac{7}{12} (۴)$$

۱۱- در پرتاب چهار تاس، چهار عدد متوالی ظاهر شده، احتمال آنکه، یکی از تاسها، عدد 2 باشد چقدر است؟ (آزاد ریاضی ۸۰)

$$\frac{2}{3} (۱) \quad \frac{3}{4} (۲) \quad \frac{1}{4} (۳) \quad 1 (۴)$$

۱۲- یک نقطه به تصادف از محدوده $\{(X, Y) | 0 < X < 2, 0 < Y < 2\}$ انتخاب می کنیم، احتمال آنکه $X^2 + Y^2 < 4$ باشد کدام است؟ (آزاد ریاضی ۸۰)

$$\frac{\pi}{4} (۱) \quad \frac{\pi}{16} (۲) \quad \frac{1}{4} (۳) \quad \frac{1}{16} (۴)$$

۱۳- اگر A, B دو پیشامد مستقل باشند، کدام گزینه صحیح است؟ (آزاد ریاضی ۸۰)

$$P(A-B) = P(A) - P(B) (۱) \quad P(A-B) = P(A).P(B') (۲)$$

$$P(A-B) = P(A).P(B) (۳) \quad P(A-B) = P(B-A) (۴)$$

۱۴- تاس سالمی را پرتاب می کنیم، اگر عدد فرد ظاهر شد یکبار دیگر تاس را پرتاب می کنیم و اگر عدد زوج ظاهر شد دو بار دیگر تاس را پرتاب می کنیم چقدر احتمال دارد مجموع اعداد رو شده در تاسهای پرتاب شده (در بعضی حالات دو تاس و در بعضی حالات سه تاس) کوچکتر از 5 باشد؟ (آزاد ریاضی ۸۰)

$$\frac{25}{125} (۱) \quad \frac{25}{216} (۲) \quad \frac{5}{126} (۳) \quad \frac{5}{36} (۴)$$

۱۵- احتمال آنکه دانش آموزی در درس فیزیک قبول شود 0/55 و در درس شیمی قبول شود، 0/6 است، اگر احتمال آنکه، حداقل یکی از دو درس قبول شود 0/75 باشد، با کدام احتمال، در هر درس قبول شود؟ (سراسری ریاضی ۸۰)

$$0/25 (۱) \quad 0/40 (۲) \quad 0/45 (۳) \quad 0/50 (۴)$$

۱۶- دو ظرف همانند، اول دارای 6 مهره سفید و 4 مهره سیاه و دومی دارای 6 مهره سفید و 8 مهره سیاه است، با چشم بسته یکی از دو ظرف را اختیار کرده و مهره ای از آن بیرون می آوریم، احتمال اینکه مهره سفید باشد، کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۱)

$$\frac{17}{35} (۱) \quad \frac{18}{35} (۲) \quad \frac{37}{70} (۳) \quad \frac{39}{70} (۴)$$

۱۷- توزیع احتمال متغیر تصادفی X متناظر با r برابر است به صورت
$$\begin{cases} P(x=i) = \frac{1}{i^2+1}, (1 < i \leq 5) \\ P(x=j) = \frac{j-4}{a}, j=6,7 \end{cases}$$
 است، u کدام است؟

(سراسری ریاضی ۸۱)

$$30 (۱) \quad 24 (۲) \quad 20 (۳) \quad 18 (۴)$$

۱۸- نقطه ای به تصادف از منحنی $|x-2| + |y-1| = 1$ انتخاب می کنیم، احتمال آنکه فاصله این نقطه از محورها، یکسان باشد، کدام است؟ (آزاد ریاضی ۸۱)

$$\frac{1}{2} (۱) \quad \text{صفر} (۲) \quad \frac{1}{4} (۳) \quad \frac{1}{8} (۴)$$

۱۹- اگر $P(A) + P(A' \cap B) = P(A \cap B)$ باشد، $P(A-B)$ کدام است؟ (آزاد ریاضی ۸۱)

(۱) $P(A)$ (۲) صفر (۳) $P(A \cap B)$ (۴) $P(B' - A)$

۲۰- دو تاس سفید و یک تاس قرمز را پرتاب می کنیم، احتمال آنکه عدد تاس قرمز کوچکتر از تاسهای سفید باشد، کدام است؟ (آزاد ریاضی ۸۱)

(۱) $\frac{5}{72}$ (۲) $\frac{55}{216}$ (۳) $\frac{55}{72}$ (۴) $\frac{5}{216}$

۲۱- نقطه ای به تصادف از محدوده $0 < X, Y < 4$ ، انتخاب می کنیم، احتمال اینکه این نقطه به نقطه $A(\frac{1}{2}, 1)$ نزدیکتر باشد تا به نقطه $B(3, 1)$ کدام است؟ (آزاد ریاضی ۸۱)

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{5}{16}$ (۴) $\frac{7}{16}$

۲۲- اگر دو پیشامد A, B مستقل باشند و $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ ، حاصل $P(A \cup B')$ کدام است؟ (آزاد ریاضی ۸۱)

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

۲۳- سه ظرف مشابه اولی فقط ده مهره سیاه و دومی فقط ۳۰ مهره سفید و سومی دارای ۳۰ مهره سفید و ۱۰ مهره سیاه هستند از یکی از ظرفها به تصادف یک مهره بیرون می آوریم، احتمال آنکه این مهره سیاه باشد، چقدر است؟ (آزاد ریاضی ۸۱)

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{5}{12}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۲۴- در پرتاب چهار سکه با هم، احتمال اینکه فقط سه سکه رو یا فقط سه سکه پشت بیاید کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۲)

(۱) $\frac{5}{16}$ (۲) $\frac{7}{16}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۲۵- رئیس و منشی و ۴ کارمند، دور یک میز گرد می نشستید، با کدام احتمال، منشی مقابل رئیس قرار می گیرد؟ (سراسری ریاضی ۸۲)

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۲۶- نقطه ای به تصادف در بازه $\langle \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3} \rangle$ ، انتخاب می کنیم، احتمال آنکه $\langle \cos x \rangle \sin x$ باشد، کدام است؟ (آزاد ریاضی ۸۲)

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{5}{6}$

۲۷- اگر $P(A-B) = \frac{2}{17}$, $P(B-A) = \frac{10}{17}$, $P(B) = 33P(A)$ باشند، آنگاه چقدر است؟ (آزاد ریاضی ۸۲)

(۱) $\frac{12}{17}$ (۲) $\frac{16}{17}$ (۳) $\frac{15}{17}$ (۴) $\frac{14}{17}$

۲۸- شخص A یک تاس و شخص B دو تاس پرتاب می کنند احتمال آنکه مجموع دو تاسی که B پرتاب می کند، برابر تاس A باشد کدام است؟ (آزاد ریاضی ۸۲)

(۱) $\frac{15}{216}$ (۲) $\frac{5}{216}$ (۳) $\frac{3}{216}$ (۴) $\frac{10}{216}$

۲۹- نقطه ای به تصادف روی منحنی $|X| + |Y| = 4$ انتخاب می کنیم، احتمال آنکه فاصله این نقطه از نقطه ای $A(5,0)$ بیشتر از 5 باشد، چقدر است ؟ (آزاد ریاضی ۸۲)

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{5}{8}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{3}{8}$

۳۰- اگر $P(A) = 2P(B) = 3P(A \cap B)$ باشد، حاصل $\frac{P(A \cup B)}{P(A \cap B)}$ کدام است ؟ (آزاد ریاضی ۸۲)

- (۱) ۲ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{7}{2}$ (۴) $\frac{9}{2}$

۳۱- خانواده های A و B هر کدام دارای سه فرزند هستند، احتمال آنکه تعداد دخترهای خانواده A از تعداد دختری خانواده B بیشتر باشد چقدر است ؟ (آزاد ریاضی ۸۲)

- (۱) $\frac{17}{32}$ (۲) $\frac{7}{32}$ (۳) $\frac{9}{32}$ (۴) $\frac{11}{32}$

۳۲- نقطه $M(x,y)$ درون مثلثی با سه راس $(0,0)$ ، $(0,4)$ و $(3,0)$ به تصادف انتخاب می شود، با کدام احتمال این نقطه روی یکی از میانه های مثلث قرار می گیرد ؟ (سراسری ریاضی ۸۳)

- (۱) 0 (۲) $\frac{1}{144}$ (۳) $\frac{1}{30}$ (۴) $\frac{1}{12}$

۳۳- از مجموعه اعداد $\{100, 101, \dots, 600\}$ عددی به تصادف انتخاب شده است، با کدام احتمال این عدد می تواند مضرب 4 یا مضرب 9 باشد ؟ (سراسری ریاضی ۸۳)

- (۱) $\frac{2}{9}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{13}{36}$

۳۴- بروی هر یک از چند کارت یکسان، اعداد سه رقمی حاصل از جایگشت های مجموعه ارقام $\{2, 4, 5, 6, 7\}$ را نوشته، به تصادف یک کارت از بین آنها بیرون می آوریم، با کدام احتمال دو رقم از اعداد این کارتها فرد می باشند ؟ (سراسری ریاضی ۸۳)

- (۱) $0/2$ (۲) $0/25$ (۳) $0/3$ (۴) $0/4$

۳۵- نقطه ای از محدوده $3X + Y + 4Z < 12$ با شرط $X, Y, Z > 0$ انتخاب می کنیم، احتمال آنکه $Z < 1$ باشد، کدام است ؟ (آزاد ریاضی ۸۳)

- (۱) $\frac{19}{27}$ (۲) $\frac{8}{27}$ (۳) $\frac{1}{27}$ (۴) $\frac{16}{27}$

۳۶- اگر $P(A - B) + P(B - A) = P(A \cup B)$ حاصل $\frac{P(A - B)}{P(A)}$ کدام است ؟ (آزاد ریاضی ۸۳)

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) 1 (۴) $\frac{1}{4}$

۳۷- در پرتاب دو تاس، هر دو تاس کوچکتر از 5، ظاهر شده است، احتمال آنکه مجموع دو تاس برابر 4 باشد، کدام است ؟ (آزاد ریاضی ۸۳)

- (۱) $\frac{3}{16}$ (۲) $\frac{1}{12}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{8}$

۳۸- کیسه ای شامل دو ظرف، ظرف اول 5 مهره سفید و سه مهره سیاه و ظرف دوم، شامل 6 مهره سفید و 5 مهره سیاه است، اگر بخواهیم در برداشتن یک مهره به تصادف از یک ظرف، احتمال سیاه و سفید برابر باشد، چند مهره سیاه باید به ظرف دوم، اضافه کنیم ؟ (آزاد ریاضی ۸۳)

- (۱) 4 (۲) 3 (۳) 5 (۴) 7

۳۹- یک نقطه به تصادف از محدوده $0 < 2X + Y < 8$ انتخاب می کنیم، احتمال آنکه $2X > 3Y$ باشد، کدام است؟ (آزاد ریاضی ۸۳)

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{5}}{4}$

۴۰- اگر A و B دو مجموعه جدا از هم و $P(A') + P(B') = 1/4$ باشد، $P(A \cup B)$ کدام است؟ (آزاد ریاضی ۸۳)

(۱) $0/8$ (۲) $0/4$ (۳) 1 (۴) $0/6$

۴۱- در پرتاب سه تاس، احتمال آنکه حداقل یک بار، شش ظاهر شود، کدام است؟ (آزاد ریاضی ۸۳)

(۱) $\frac{90}{216}$ (۲) $\frac{107}{216}$ (۳) $\frac{108}{216}$ (۴) $\frac{91}{216}$

۴۲- سکه سالمی را افراد A, B, C به ترتیب پرتاب می کنند اولین شخصی که شیر ظاهر کند برنده است. احتمال آنکه A (نفر اول) برنده شود، چند برابر آن است که B یا C برنده شوند؟ (آزاد ریاضی ۸۳)

(۱) $\frac{3}{2}$ (۲) 1 (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) 2

۴۳- تاس سالمی را ۱۰ بار می ریزیم، احتمال اینکه ۶ بار، برآمد تاس، عددی بزرگتر از ۳ باشد، کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۴)

(۱) $\frac{63}{256}$ (۲) $\frac{75}{256}$ (۳) $\frac{75}{512}$ (۴) $\frac{105}{512}$

۴۴- دو نفر قرار گذاشتند که بین ساعت ۷ تا ۸ صبح در آزمایشگاهی حاضر شوند، هر کدام زودتر رسید، فقط ۶ دقیقه، منتظر دیگری باشد و گرنه کار خود را شروع کند با کدام احتمال این دو نفر قبل از شروع کار یکدیگر را ملاقات می کنند؟ (سراسری ریاضی ۸۴)

(۱) $0/18$ (۲) $0/19$ (۳) $0/21$ (۴) $0/24$

۴۵- یک سکه به شعاع $0/5$ سانتی متر را بر روی صفحه شطرنجی شکل مقابل، که هر ضلع آن ۶ سانتی متر است، پرتاب نموده ایم، احتمال اینکه سکه درون مربعهای سفید قرار گیرد کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۴)



(۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{4}{25}$ (۴) $\frac{5}{36}$

۴۶- دو ظرف داریم در اولی ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه، در دومی ۷ مهره سفید و ۱۰ مهره سیاه است از ظرف اول یک مهره برداشته و بدون رویت رنگش، آنرا در ظرف دوم قرار می دهیم، آنگاه از ظرف دوم یک مهره بیرون می آوریم، با کدام احتمال، این مهره سفید است؟ (سراسری ریاضی ۸۴)

(۱) $\frac{8}{27}$ (۲) $\frac{11}{27}$ (۳) $\frac{34}{81}$ (۴) $\frac{41}{81}$

۴۷- با کدام مقدار a و با کدام حوزه مقادیر x ، تابع $P(x=i) = a(\frac{1}{3})^i$ یک تابع احتمال اولین موفقیت در احتمال اولین موفقیت در امتحان آم است؟ (سراسری ریاضی ۸۴)

(۱) $a=1$ x ناشما را نامتناهی (۲) $a=1$ x ناشما را متناهی

(۳) $a=2$ x شما را نامتناهی (۴) $a=2$ شما را متناهی

۴۸- در یک کیسه، ۵ مهره سفید و ۷ مهره سیاه موجود است، ۲ مهره از کیسه خارج می کنیم احتمال اینکه دو مهره همرنگ نباشند، کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۴)

(۱) $\frac{6}{11}$ (۲) $\frac{19}{33}$ (۳) $\frac{35}{66}$ (۴) $\frac{37}{66}$

۴۹- نقطه ای از محدوده $0 < x, y < 4$ انتخاب می کنیم ، احتمال اینکه $2x + y > 2$ باشد ، کدام است؟ (آزاد ۸۴)

- (۱) $\frac{15}{16}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{7}{8}$

۵۰- اگر $P(A \cup B) + P(A \cap B) = (P(A))^2 + (P(B))^2$ و A, B مساوی نباشند ، حاصل $P(A') + P(B')$ کدام است ؟ (آزاد ۸۴)

- (۱) صفر (۲) 1 (۳) 2 (۴) اطلاعات کافی نیست

۵۱- تاس سالمی را افراد A, B, C به ترتیب پرتاب می کنند اول شخصی که شش ظاهر کند برنده است، احتمال برنده شدن A، چند برابر احتمال برنده شدن C است ؟ (آزاد ۸۴)

- (۱) $\frac{6}{5}$ (۲) $\frac{216}{125}$ (۳) $\frac{36}{25}$ (۴) $1 - \frac{125}{216}$

۵۲- نقطه ای از محدوده $0 < X, Y < 2$ انتخاب می کنیم ، احتمال آنکه $1 < (X-2)^2 + (Y-2)^2$ باشد کدام است ؟ (آزاد ۸۴)

- (۱) $\frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{\pi}{8}$ (۳) $\frac{\pi}{16}$ (۴) $\frac{\pi}{6}$

۵۳- اگر $P(A-B) = \frac{1}{7}$, $P(B-A) = \frac{3}{7}$ باشد بیشترین مقدار $\frac{P(A)}{P(B)}$ کدام است؟ (آزاد ۸۴)

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۵۴- تاس سالمی را پرتاب می کنیم اگر زوج ظاهر شد دو تاس دیگر و اگر فرد ظاهر شد یک تاس دیگر پرتاب می کنیم ، احتمال اینکه مجموع تاسهای پرتاب شده (در بعضی حالات دو تاس و بعضی حالات سه تاس) برابر 7 باشد ، چقدر است ؟ (آزاد ۸۴)

- (۱) $\frac{9}{216}$ (۲) $\frac{22}{216}$ (۳) $\frac{24}{216}$ (۴) $\frac{26}{216}$

«پاسخ تستهای کنکور سراسری و آزاد از ۷۹ تا ۸۵»

گزینه (۱) اگر در تاس اول عدد رو شده مضرب ۳ نباشد (یعنی ۳ یا ۶ ظاهر نشود)، احتمال آنکه $\frac{4}{6}$ یا $\frac{2}{3}$ است، چون دو تاس مستقل هستند پس:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

۲- گزینه (۲)

$$P(A).P(B) + P(A' \cup B') = 1$$

$$P(A).P(B) + P(A \cap B)' = 1 = P((A)P(B) + 1 - P(A \cap B) = 1$$

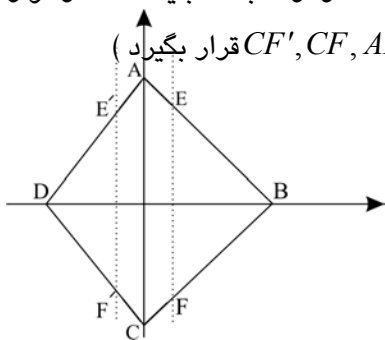
$$\Rightarrow P(\cap B) = P(A).P(B) \Rightarrow$$

دو پیشامد مستقل از همدی

۳- گزینه (۴)

$$p(A) = \frac{\binom{6}{2} \times \binom{4}{2}}{\binom{10}{4}} = \frac{15 \times 6}{210} = \frac{3}{7}$$

۴- گزینه (۳) می دانیم معادله $|X| + |Y| = 3$ ، مربعی است به مرکز مبدا مختصات و نیم قرن ۳ که اقطارش متوازی محورهای مختصات است (شکل مقابل)، برای اینکه فاصله این نقطه تا محور Y ها، کمتر از ۳ باشد باید نقطه در نوار ایجاد شده بین دو خط $X = \frac{1}{3}, X = \frac{1}{3}$ قرار بگیرد، (یعنی روی پاره خطهای AE, AE', CF, CF' قرار بگیرد)



$$A \begin{vmatrix} 0 \\ 3 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \end{vmatrix}, E \begin{vmatrix} 3 \\ 3 \end{vmatrix} \Rightarrow AB = 3\sqrt{2}, AE = \frac{1}{3}\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow P = \frac{\text{طول پاره خط مانند } AE}{\text{طول پاره خط مانند } AB} = \frac{4(\frac{1}{3}\sqrt{2})}{4(3\sqrt{2})} = \frac{1}{9}$$

تذکر مهم: چون در صورت سوال، عبارت «روی منحنی» وجود دارد، لذا نقطه انتخابی باید از نقاط روی مربع باشد نه داخل مربع، به عبارت دیگر این مساله طولی می باشد نه مساله مساحتی، هر چند که طراح سوال عمداً گزینه $\frac{17}{81}$ را نیز در گزینه‌ها قرار داده است تا اگر دانش آموزی کم وقتی کرده و از راه مساحت، احتمال را حساب کند اشتباه فکر کند که تست را درست حل کرده است.

۵- گزینه (۲)

$$A - B = A - (A \cap B) = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$\begin{cases} P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \\ P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} = P(A) - P(A \cap B) \\ \frac{3}{4} = P(B) - P(A \cap B) \end{cases}$$

$$+ \underline{\hspace{2cm}} \\ 1 = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(A \cap B) = 1$$

$$P(A \cup B) = P(A \cap B) = 1$$

$$P(A \cup B) = 1 + P(A \cap B), (*)$$

چون $P(A \cap B) \geq 0$ ، $P(A \cup B) \leq 1$ ، لذا رابطه‌ی (*) وقتی هنگامی برقرار است که $P(A \cap B) = 0$

۶- گزینه (۴) فضای نمونه ای جدید عبارتست از :

$\{(1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (5,5), (6,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,6)\}$ = فضای نمونه ای جدید

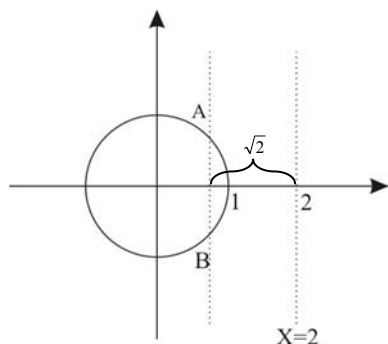
$A = \{(4,5), (6,5), (5,4), (5,6)\}$ = دو عدد متوالی

$$\Rightarrow P(A) = \frac{4}{11}$$

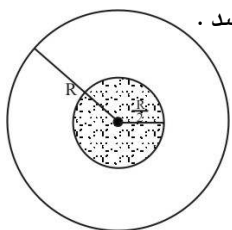
۷- گزینه (۴) مطابق شکل ، نقطه اختیار شده باید نقطه A یا B باشد اما طول این دو نقطه صفر است لذا داریم :

$$P = \frac{l_A}{l_S} = \frac{0}{\text{محیط دایره}} = \frac{0}{2\pi R} = 0$$

در واقع در این تست، محیط دایره، فضای نمونه‌ای بوده و طول (درازی) دو نقطه A, B، پیش آمد مطلوب می‌باشد. (چون نقطه بعد ندارد، لذا طول این دو نقطه صفر است)



۸- گزینه (۳) به مرکز 0 و به شعاع $\frac{R}{2}$ یک دایره می‌زنیم ، نقطه باید داخل دایره به شعاع $\frac{R}{2}$ باشد .



$$P = \frac{\text{مساحت سطح هاشور خورده}}{\text{سطح کل دایره}} = \frac{\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2}{\pi R^2} = \frac{1}{4}$$

۹- گزینه (۱) چون عدد رو شده مضرب 3 نمی باشد ، بایستی یکی از تعداد $\{1,2,4,5\}$ ظاهر شود که احتمال آن

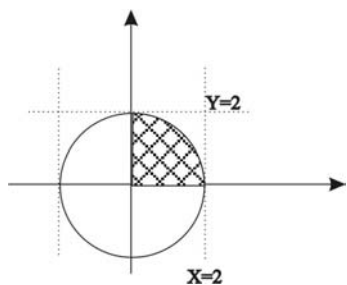
$$P(A \cap B \cap C) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

۱۰- گزینه (۱) فضای نمونه ای جدید عبارتست از :

$\{(1,2,3,4), (2,3,4,5), (3,4,5,6)\}$ = فضای نمونه ای جدید

$$A = \{(1,2,3,4), (2,3,4,5)\} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{3}$$

۱۱- گزینه (۱)



$$P = \frac{\text{سطح هاشور خورده}}{\text{سطح مربع}} = \frac{\frac{1}{4} \pi R^2}{2^2} = \frac{\frac{1}{4} \pi (2)^2}{4} = \frac{\pi}{4}$$

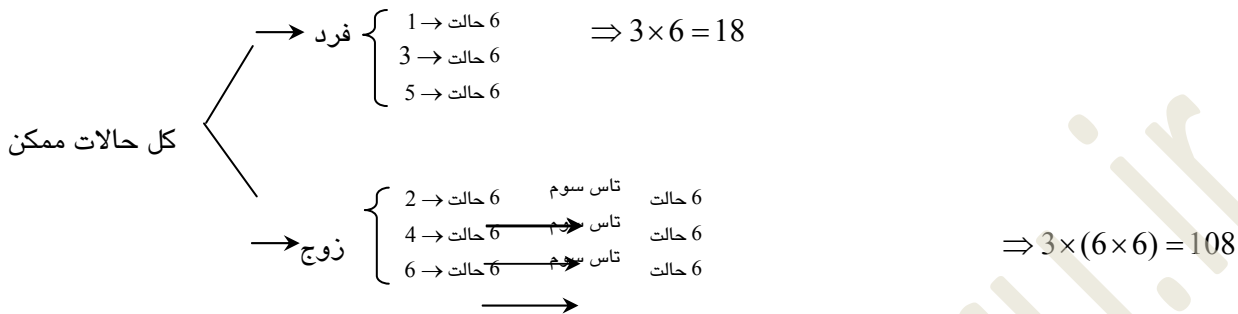
۱۲- گزینه (۲) می دانیم هر گاه A, B دو پیشامد مستقل از هم باشند آنگاه A, B' نیز دو پیشامد مستقل از هم اند لذا :

$$P(A \cap B') = P(A)P(B')$$

$$P(A - B) = P(A).P(B')$$

۱۳- گزینه (۳)

نتیجه تاس دوم نتیجه تاس اول



$$\Rightarrow |S| = 108 + 18 = 126 \text{ حالت}$$



$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{126}$$

۱۴- گزینه (۲)

A : قبولی در فیزیک

B ; قبولی در شیمی

$$P(A) = 0/55$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(B) = 0/6$$

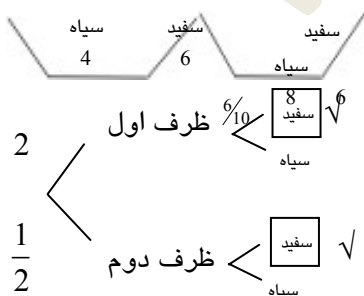
$$0/75 = 0/55 + 0/6 - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = 0/75$$

$$P(A \cap B) = 0/40$$

$$P(A \cap B) = ?$$

۱۵- گزینه (۲)



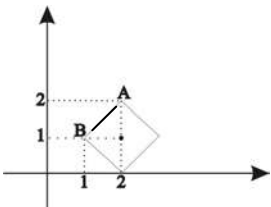
$$\Rightarrow p(A) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{6}{10}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{6}{14}\right) = \frac{18}{35}$$

۱۶- گزینه (۱)

$$\sum_{i=1}^7 p(x=i) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{2}{\alpha} + \frac{3}{\alpha} = 1 \Rightarrow \alpha = 30$$

۱۷- گزینه (۳) یادآوری: هر رابطه به معادله $|X - A| + |Y - B| = K$ و $K > 0$ ، معادله یک مربع به مختصات $5(A, B)$ و طول نیم قطر K است که اقطارش موازی محورهای مختصات است مطابق شکل نقطه مورد نظر باید $A \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right]$ یا $B \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right]$ باشد در واقع این نقاط نقطای هستند که طول و عرضشان با هم برابر است بنابراین ضلع AB از مربع، روی نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد بنابراین فاصله تمام نقاط روی آن از محورهای مختصات یکسان است، چون AB یکی از ۴ ضلع مربع است لذا:

$$P = \frac{l_{AB}}{l_{\text{مربع}}} = \frac{l_{AB}}{4AB} = \frac{AB}{4AB} = \frac{1}{4}$$

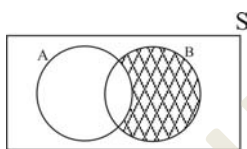


۱۸- گزینه (۲)

$$P(A) + P(B \cap A') = P(A \cap B)$$

$$P(A) + P(B - A) = P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A \cap B)$$

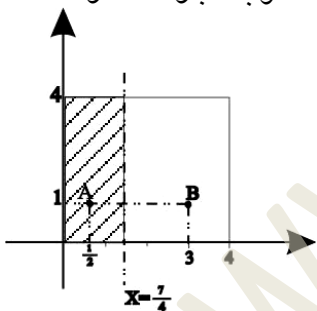


۱۹- گزینه (۲) فضای نمونه ای این آزمایش تصادفی برابر است با: $|S| = 6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216$ اما پیشامد مطلوب عبارتست از: عدد تاس قرمز کوچکتر از اعداد دو تاس سفید باشد لذا اگر این پیشامد را منحنی کنیم، به صورت زیر در می آید:

تاس قرمز ۵ و دو تاس سفید ۶ یا تاس قرمز ۴ و دو تاس سفید ۵ یا ۶ یا تاس قرمز ۳ و دو تاس سفید یکی از اعداد ۴ تا ۶ یا تاس قرمز ۲ و دو تاس سفید یکی از اعداد ۳ تا ۶ یا تاس قرمز ۱ و دو تاس سفید یکی از اعداد ۲ تا ۶

$$\left(\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{4}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{2}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}\right) = \frac{55}{216}$$

۲۰- گزینه (۴) فضای نمونه ای عبارتست از نقاط درون مربع به ضلع ۴ و پیشامد مطلوب عبارتست از قسمت هاشورخورده لذا داریم:



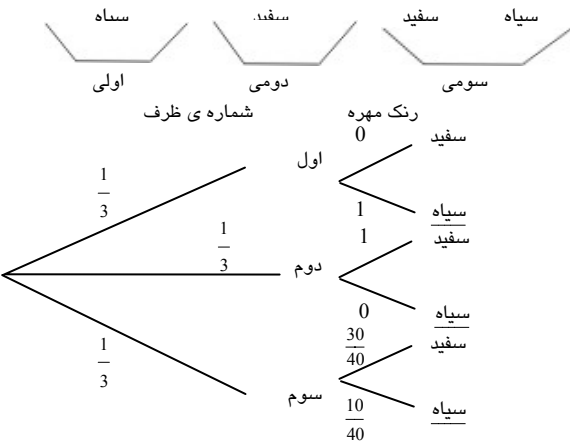
$$\begin{cases} a_S = 4^2 = 16 \\ a_A = \text{مساحت مستطیل هاشورخورده} = 4 \times \frac{7}{4} = 7 \end{cases}$$

$$AB \text{ منصف } X_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{\frac{1}{2} + 3}{2} = \frac{7}{4} \Rightarrow P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{7}{16}$$

۲۱- گزینه (۲) یادآوری: اگر A, B مستقل از هم باشند، A, B' نیز مستقل از همدی، یعنی: $P(A \cap B') = P(A) \times P(B')$

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B') = P(A) + P(B') - P(A) \cdot P(B') = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$$

۲۲- گزینه (۲)



$$\Rightarrow p(A) = \left(\frac{1}{3} \times 1\right) + \left(\frac{1}{3} \times 0\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{10}{40}\right) = \frac{5}{12}$$

۲۳- گزینه (۴)

$$S = \{(پ پ پ پ), (پ پ پ ر), \dots, (ر ر ر ر)\} = n(s) = 2^4 = 16$$

$$A = \{(پ پ پ پ), (پ پ پ ر), (پ پ ر پ), (پ ر پ پ), (پ ر ر ر), (ر پ ر ر), (ر ر پ ر), (ر ر ر پ)\}$$

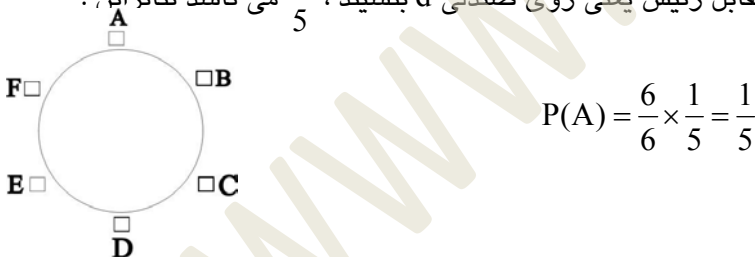
$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

راه دوم : از فرمول توزیع دو جمله ای استفاده می کنیم :

$$P(3 \text{ رو}) + P(4 \text{ رو}) = \frac{\binom{4}{3}}{2^4} + \frac{\binom{4}{4}}{2^4} = \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

۲۴- گزینه (۳) ابتدا رئیس هر یک از 6 محل را می تواند انتخاب کند یعنی در واقع احتمال انتخاب هر یک از شش صندلی توسط رئیس $1 = \frac{6}{6}$ می باشد (مثلا فرض کنید رئیس روی صندلی a نشسته باشد) در این صورت منشی باید روی یکی

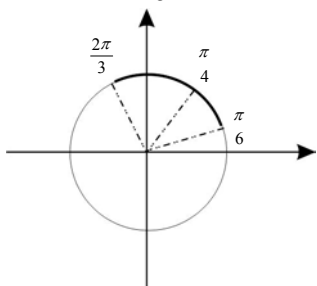
از 5 صندلی دیگر بنشیند ، لذا احتمال آنکه منشی مقابل رئیس یعنی روی صندلی d بنشیند ، $\frac{1}{5}$ می باشد بنابراین :



$$P(A) = \frac{6}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

۲۵- گزینه (۳) می دانیم $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4}$ ، اما با توجه به شکل به سادگی دیده می شود که در فاصله $\frac{\pi}{6}$ تا $\frac{\pi}{4}$ ، $\cos$

از Sin بزرگتر است لذا :



$$\begin{cases} l_s = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \\ l_A = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12} \end{cases} \Rightarrow P(A) = \frac{l_A}{l_s} = \frac{\frac{\pi}{12}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6}$$

۲۶- گزینه (۴) یادآوری : $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

$$\begin{cases} P(A - B) = \frac{2}{17} \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \\ P(B - A) = \frac{10}{17} \Rightarrow P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{17} = P(A) - P(A \cap B) \\ \frac{10}{17} = P(B) - P(A \cap B) \end{cases}$$

$$-\frac{8}{17} = P(A) - P(B)$$

$$P(A) - 3P(A) = \frac{-8}{17} \Rightarrow P(A) = \frac{4}{17} \Rightarrow P(B) = 3P(A) = \frac{12}{17}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{17} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{17} + \frac{12}{17} - \frac{2}{17} = \frac{14}{17}$$

۲۷- گزینه (۱) عدد تاس A هر یک از اعداد 1 تا 6 می باشد ، اما چون مجموع دو تاس B هیچگاه 1 نمی شود لذا تاس A

1

نمی تواند باشد ، بنابراین اگر X را مجموع دو تاس B در نظر بگیریم X می تواند مقادیر 2, 3, 4, 5, 6 را به خود بگیرد .

$$x = 2 \Rightarrow (1, 1)$$

$$x = 3 \Rightarrow (1, 2), (2, 1)$$

$$x = 4 \Rightarrow (1, 3), (3, 1), (2, 2)$$

$$x = 5 \Rightarrow (1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)$$

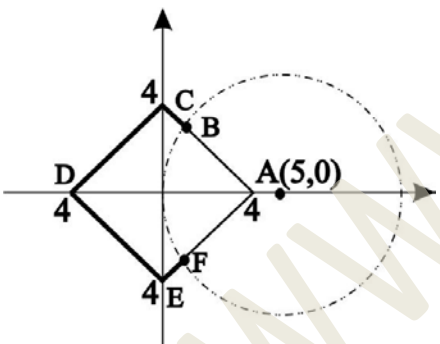
$$x = 6 \Rightarrow (1, 5), (5, 1), (3, 3), (2, 4), (4, 2)$$

$$x = 2 \Rightarrow (1, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 \Rightarrow (1, 1) \\ x = 3 \Rightarrow (1, 2), (2, 1) \\ x = 4 \Rightarrow (1, 3), (3, 1), (2, 2) \\ x = 5 \Rightarrow (1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2) \\ x = 6 \Rightarrow (1, 5), (5, 1), (3, 3), (2, 4), (4, 2) \end{array} \right\} n(A) = 15 = p(B) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{15}{6^3} = \frac{15}{216}$$

۲۸- گزینه (۲) نمودار رابطه ای $|x| + |y| = 4$ ، عبارتست از یک مربع به مرکز مبدا و نیم قطر حالا به مرکز $A(5, 0)$ و شعاع 5 واحد، دایره ای رسم می کنیم نقطه مورد نظر باید روی پاره خط شکسته BCDEF باشد تا فاصله اش از نقطه

$A(5, 0)$ بیشتر از 5 باشد لذا داریم :



$$S = \text{محیط مربع} = 4(4\sqrt{2}) = 16\sqrt{2}$$

$$A = 2(4\sqrt{2}) + BC + EF = 2(4\sqrt{2}) + 2(\sqrt{2}) = 10\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{l_A}{l_s} = \frac{10\sqrt{2}}{16\sqrt{2}} = \frac{5}{8}$$

$$\text{معادله دایره} = (X-5)^2 + Y^2 = 25$$

$$\text{معادله BC در ربع اول } (X>0, Y>0) = |X| + |Y| = 4 = X + Y = 4$$

$$\Rightarrow x = 1, y = 3 \Rightarrow B\left(1, 3\right), C\left(0, 4\right) \Rightarrow BC = \sqrt{(1-0)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{2}$$

۲۹- گزینه (۳)

$$P(A) = 2P(B) = 3P(A \cap B)$$

$$\frac{P(A \cup B)}{P(A \cap B)} = \frac{P(A) + P(B) - P(A \cap B)}{P(A \cap B)} = \frac{3P(A \cap B) + \frac{3}{2}P(A \cap B) - P(A \cap B)}{P(A \cap B)} = \frac{\frac{7}{2}P(A \cap B)}{P(A \cap B)} = \frac{7}{2}$$

دقت کنید که نسبت ارتفاعهای دو مثلث متشابه برابر نسبت تشابه (و در اینجا برابر $\frac{2}{3}$) و نسبت مساحتها برابر مجذور

نسبت تشابه (در اینجا برابر $(\frac{2}{3})^2$) می باشد.

۳۵- گزینه (۳) یادآوری:

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \left. \begin{aligned} (A-B) \cup (B-A) \cup (A \cap B) &= A \cup B \\ P(A-B) + P(B-A) + P(A \cap B) &= P(A \cup B) \end{aligned} \right\} \\ & P(A-B) + P(B-A) = P(A \cup B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0 \\ & \frac{P(A-B)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) - 0}{P(A)} = 1 \end{aligned}$$

۳۶- گزینه (۱) چون هر دو تاس عدد کوچکتر از ۵ ظاهر شده‌اند لذا تعداد اعضای فضای نمونه‌ای عبارتست از:

$$|S| = 4 \times 4 = 16$$

$$A = \{(1,3), (3,1), (2,2)\} = P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{3}{16}$$

۳۷- گزینه (۳) فرض می کنیم تعداد مهره های سیاه اضافه شده به کیسه دوم، برابر X باشد در این صورت داریم:

$$\text{احتمال مهره سفید باشد} = \frac{1}{2} \times \frac{5}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{6}{11+X} = \frac{5}{16} + \frac{3}{11+X}$$

$$\text{احتمال مهره سیاه باشد} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{5+X}{11+X} = \frac{3}{16} + \frac{5+X}{2(11+X)}$$

$$\frac{5}{16} + \frac{3}{11+X} = \frac{3}{16} + \frac{5+X}{2(11+X)} = X = 5$$

۳۸- گزینه (۲)

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 3y = 2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow P(3,2)$$

$$P(A) = \frac{\text{مساحت مثلث OMP}}{\text{مساحت مثلث OMN}} = \frac{\frac{8 \times 3}{2}}{\frac{8 \times 4}{2}} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$$

۳۹- گزینه (۴)

$$P(A') + P(B') = 1/4 = 1 - P(A) + 1 - P(B) = 1/4 = 0/6 = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0/6 - 0 = 0/6$$

۴۰- گزینه (۴) حداقل یک بار شش ظاهر شود متمم حالتی است که در هر ۳ بار ۶ نیاید اگر فرض کنیم:

$$\begin{cases} A = \text{بار اول شش بیاید} \\ B = \text{بار دوم شش بیاید} \\ C = \text{بار سوم شش بیاید} \end{cases} \Rightarrow \text{حداقل یک بار شش بیاید} = A \cup B \cup C = (A' \cap B' \cap C')$$

لذا داریم:

$$P(\text{حداقل یک بار شش بیاید}) = 1 - P(\text{هر سه بار شش بیاید}) = 1 - \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$$

۴۱- گزینه (۳) با توجه به ترتیب پرتاب سکه بوسیله A, B, C داریم :

$$\begin{cases} P(A) = 2P(B) \\ P(B) = 2P(C) \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

زیرا در سه پرتاب اول ، احتمال برد A, B, C به ترتیب برابر است با :

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1 \Rightarrow 4P(C) + 2P(C) + P(C) = 1$$

$$7P(C) = 1 \Rightarrow \begin{cases} P(C) = \frac{1}{7} \\ P(B) = \frac{2}{7} \\ P(A) = \frac{4}{7} \end{cases} \Rightarrow \frac{\text{احتمال برد A}}{\text{احتمال برد C یا B}} = \frac{P(A)}{P(B \cup C)} = \frac{P(A)}{P(B) + P(C)} = \frac{\frac{4}{7}}{\frac{2}{7} + \frac{1}{7}} = \frac{4}{3}$$

۴۲- گزینه (۴) چون احتمال اینکه عددی بزرگتر از 3 بیاید (4 یا 5 یا 6 بیاید) برابر $\frac{1}{2}$ است لذا احتمال آنکه عددی بزرگتر از 3 نیاید نیز $\frac{1}{2}$ است لذا طبق فرمول توزیع احتمال دو جمله ای برابر $P = q = \frac{1}{2}$ داریم .

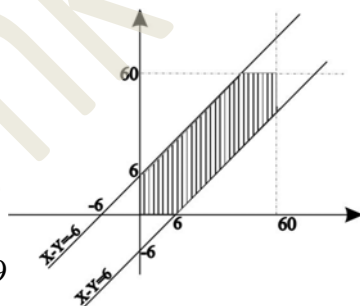
$$P(A) = \frac{\binom{10}{6}}{2^{10}} = \frac{105}{512}$$

۴۳- گزینه (۲)

$$S: \begin{cases} 0 < x < 60 \\ 0 < y < 60 \end{cases}$$

$$A: |X - Y| < 6$$

$$P(A) = \frac{\text{مساحت قسمت هاشور خورده}}{\text{مساحت کل مربع}} \Rightarrow P = 1 - \frac{54 \times 54}{60 \times 60} = 1 - 0.81 = 0.19$$



۴۴- گزینه (۴) اگر یک مربع سفید به ضلع 2 سانتی متر اختیار کنیم احتمال اینکه سکه داخل آن قرار گیرد برابر $\frac{1}{4}$ است

اکنون فرض می کنیم :

$$A = \text{سفید}$$

B = درون خانه

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = \frac{5}{9} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{36}$$

در این صورت داریم :

۴۵- گزینه (۳)



$$P(A) = \frac{4}{7} \times \frac{7}{18} + \frac{5}{9} \times \frac{8}{18} = \frac{68}{9 \times 18} = \frac{34}{81}$$

۴۶- گزینه (۳)

$$P(X=1) + P(X=2) + \dots = 1$$

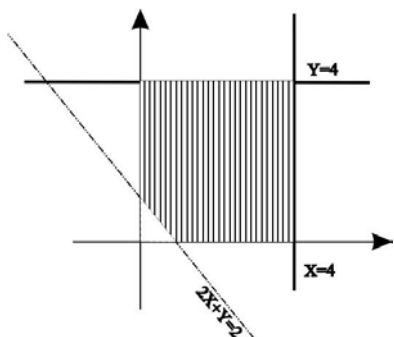
$$\frac{1}{3}a + \frac{1}{9}a + \frac{1}{27}a + \dots = 1 \Rightarrow \frac{\frac{1}{3}a}{1 - \frac{1}{3}} = 1 \Rightarrow a = 2$$

۴۷- گزینه (۳)

$$P(\text{هر دو هم رنگ}) = p(\text{هر دو سفید}) + p(\text{هر دو سیاه}) = \frac{\binom{5}{2} + \binom{7}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{31}{36}$$

$$P(\text{هر دو هم رنگ نباشند}) = 1 - p(\text{هر دو هم رنگ باشند}) = 1 - \frac{31}{66} = \frac{35}{66}$$

$$P(\text{هر دو هم رنگ}) = p(\text{یکی سفید و یکی سیاه}) = \frac{\binom{5}{1} \times \binom{7}{1}}{\binom{12}{2}} = \frac{35}{6} \quad \text{راه دیگر}$$



۴۸- گزینه (۱)

$$P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{\text{مساحت هاشور خورده}}{\text{مساحت مربع}} = \frac{4 \times 4 - \frac{1 \times 2}{2}}{16} = \frac{15}{16}$$

۴۹- گزینه (۲)

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = (P(A))^2 + (P(B))^2$$

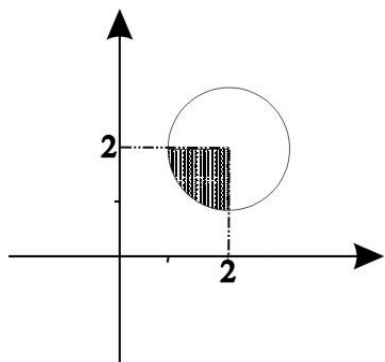
$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(A \cap B) = (P(A))^2 + (P(B))^2 \Rightarrow P(A) + P(B) = (P(A))^2 + (P(B))^2$$

۵۰- گزینه (۳)

$$\Rightarrow \begin{cases} P(A)=1 \\ P(B)=0 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} P(A)=0 \\ P(B)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(A')=0 \\ P(B')=1 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} P(A')=1 \\ P(B')=0 \end{cases} \Rightarrow P(A') + P(B')$$

$$\begin{cases} P(B) = \frac{5}{6} P(A) \\ P(C) = \frac{5}{6} P(B) = \frac{5}{6} \left(\frac{5}{6} P(A) \right) = \frac{25}{36} P(A) = \frac{P(A)}{P(C)} = \frac{P(A)}{\frac{25}{36} P(A)} = \frac{36}{25} \end{cases}$$

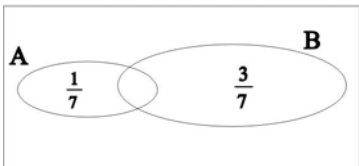
۵۱- گزینه (۳)



$$P(A) = \frac{\text{مساحت مربع دایره}}{\text{مساحت مربع}} = \frac{\frac{1}{4} \pi (1)^2}{2 \times 2} = \frac{\pi}{16}$$

۵۲- گزینه (۲) با توجه به نمودار ون ، ماکزیمم $P(A \cap B)$ می تواند $\frac{3}{7}$ باشد پس $\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{7} + \frac{3}{7}}{\frac{3}{7} + \frac{3}{7}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ دقت کنید

که اگر $\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{3}{4}$ باشد (گزینه ۴) در این صورت $P(A \cap B) = \frac{5}{7}$ به دست می آید و در نتیجه $P(S) > 1$ می شود که غیر قابل قبول است .



۵۳- گزینه (۳)

$$A = \text{پیشامد مجموع ۲ شود} = \left\{ \begin{array}{l} \text{تاس دوم} \quad \text{تاس اول} \\ (1, 6) \\ (3, 4) \\ (5, 2) \\ \text{تاس سوم} \quad \text{تاس دوم} \quad \text{تاس اول} \\ (2, 2, 3), (2, 3, 2), (2, 1, 4), (2, 4, 1) \\ \text{تاس سوم} \quad \text{تاس دوم} \quad \text{تاس اول} \\ (4, 1, 2), (4, 2, 1) \\ \text{تاس سوم} \quad \text{تاس دوم} \quad \text{تاس اول} \\ (6, ?, ?) \end{array} \right\}$$

سطر اول

سطر دوم

سطر سوم

سطر چهارم

سطر پنجم

سطر ششم

$$P(A) = \underbrace{\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}}_{\text{سطر اول}} + \underbrace{\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}}_{\text{سطر دوم}} + \underbrace{\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}}_{\text{سطر سوم}} + \underbrace{\frac{1}{6} \times \frac{4}{36}}_{\text{سطر چهارم}} + \underbrace{\frac{1}{6} \times \frac{2}{36}}_{\text{سطر پنجم}} + \underbrace{\frac{1}{6} \times \frac{0}{36}}_{\text{سطر ششم}}$$

۵۳- گزینه (۳)

$$P(A) = \frac{24}{216}$$

تست های آمار :

۱- کوچکترین داده ی آماری 12 و بزرگترین داده ی آماری 67 است ، اگر دو داده ی دیگر ، یکی برابر 20 و دیگری 50 به اطلاعات فوق اضافه شود ، دامنه ی تغییرات؟

(۱) دو واحد اضافه می شود (۲) دو برابر می شود (۳) دو واحد کم می شود (۴) تغییر نمی کند

پاسخ : گزینه ی « 4 » صحیح است. چون اعداد 20 و 50 بین دو عدد 12 و 67 هستند لذا کوچکترین و بزرگترین داده ها باز هم 12 و 67 بوده ، بنابراین دامنه ی تغییرات تغییری نخواهد کرد.

۲- تعدادی داده را در هشت دسته طبق بندی نموده ایم ، در صورتی که مراکز دسته های اول و سوم به ترتیب 11/5 و 15/5 باشد ، بیشترین مقدار داده ها ، کدام می تواند باشد؟

(۱) 24 (۲) 26 (۳) 28 (۴) 30

پاسخ : گزینه ی « 2 » صحیح است.

نکته : می دانیم فاصله ی هر دو مرکز دسته ی متوالی برابر طول دسته است ، اما اگر x_m و x_n به ترتیب مرکز دسته ی n ام و m ام باشند آنگاه :

$$x_n - x_m = (n - m) c$$

از طرفی با توجه به آنکه مرکز هر دسته ، وسط دو کران می باشد ، لذا فاصله ی مرکز هر دسته تا کران بالا یا پایین همان دسته برابر نصف طول دسته است یعنی :

$$\text{کران بالای دسته ی } n \text{ ام} = x_n + \frac{c}{2}$$

$$\text{کران پایین دسته ی } n \text{ ام} = x_n - \frac{c}{2}$$

می دانیم بیشترین تعداد داده ها در دسته ی آخر قرار دارد لذا کران پایین و بالای دسته ی هشتم را بدست می آوریم ، برای این منظور بهتر است ابتدا مرکز دسته ی هشتم تعیین شود ، اما داریم :

$$x_8 - x_3 = 5c \Rightarrow x_8 - 15/5 = 10 \Rightarrow x_8 = 25/5$$

$$\text{کران بالای دسته ی هشتم} = x_8 + \frac{c}{2} = 25/5 + 1 = 26/5$$

$$\text{کران پایین دسته ی هشتم} = x_8 - \frac{c}{2} = 25/5 - 1 = 24/5$$

لذا حدود دسته ی هشتم عبارت است از : $(24/5 - 26/5)$ که با توجه به گزینه ها ، فقط عدد گزینه ی 2 در دسته ی هشتم قرار دارد.

۳- کرانه ی پایین دسته ی دوم یک جامعه ی آماری برابر 24 و مرکز دسته برابر 25 است ، کرانه ی بالای دسته ی دوم چقدر است؟

(۱) 24/5 (۲) 23 (۳) 26 (۴) 24

پاسخ : گزینه ی « 3 » صحیح است.

$$\text{کران پایین دسته ی دوم} = x_2 - \frac{c}{2} \Rightarrow 24 = 25 - \frac{c}{2} \Rightarrow \frac{c}{2} = 1 \Rightarrow c = 2$$

$$\text{کران بالای دسته ی دوم} = x_2 + \frac{c}{2} = 25 + \frac{2}{2} = 26$$

۴- در یک جدول توزیع فراوانی ، بیشترین داده 50 ، تعداد دسته ها 6 و طول دسته ها 5 است ، کمترین داده چقدر است؟ (آزاد انسانی - 80)

(۱) 40 (۲) 30 (۳) 20 (۴) 10

پاسخ : گزینه ی « 3 » صحیح است.

$$k = \frac{R}{c} \Rightarrow k = \frac{Max - Min}{c} \Rightarrow 6 = \frac{50 - Min}{5} \Rightarrow 30 = 50 - Min$$

$$\Rightarrow Min = 20$$

۵- دامنه ی تغییرات یک نمونه ی آماری 20 می باشد ، اگر بخواهیم تعداد دسته ها 1 واحد از طول دسته ها کمتر باشد ، باید طول دسته را چقدر در نظر گرفت؟

- (۱) 4 (۲) 5 (۳) 6 (۴) 7

پاسخ : گزینه ی « 2 » صحیح است.

$$k = \frac{R}{c} \Rightarrow c = \frac{R}{k} \Rightarrow c = \frac{20}{c-1} \Rightarrow c(c-1) = 5 \times 4 \Rightarrow c = 5$$

۶- تعداد دانش آموزان 3 کلاس یک مدرسه 70 ، 60 و 50 نفر است ، در نمودار دایره ای این 3 کلاس ، زاویه ی مربوط به کلاس 50 نفری چند درجه است؟

- (۱) 50 (۲) 150 (۳) 100 (۴) 120

پاسخ : گزینه ی « 3 » صحیح است.

$$n = 50 + 60 + 70 = 180$$

$$\alpha^\circ = \frac{x_i}{n} \times 360^\circ = \frac{50}{180} \times 360 = 50 \times 2 = 100^\circ$$

۷- توزیع گروه های خونی تعدادی از افراد به صورت زیر است :

A	B	A B	O
24	14	10	12

درصد مساحت مربوط به گروه خونی O در نمودار دایره ای کدام است؟

- (۱) 15 (۲) 20 (۳) 25 (۴) 40

پاسخ : گزینه ی « 2 » صحیح است.

$$60 = \text{تعداد کل افراد}$$

$$O \text{ کمان مربوط به گروه خونی } = \frac{2}{60} \times 360 = 12 \times 6 = 72^\circ$$

$$O \text{ درصد مساحت مربوط به گروه خونی } = \frac{72^\circ}{360^\circ} \times 100 = 20$$

۸- فراوانی نسبی داده ای $0/3$ است ، اگر فراوانی این داده ، 3 واحد افزایش یابد ، فراوانی نسبی آن $\frac{2}{5}$ خواهد شد ،

تعداد کل داده ها در ابتدا ، چقدر بوده است؟

- (۱) 15 (۲) 14 (۳) 18 (۴) 17

پاسخ : گزینه ی « 3 » صحیح است.

فراوانی داده را با F_i و فراوانی نسبی آن را با f_i و تعداد داده ها را با n نشان می دهیم ، لذا داریم :

$$f_i = \frac{F_i}{n} \Rightarrow \frac{3}{10} = \frac{f_i}{n} \quad (1)$$

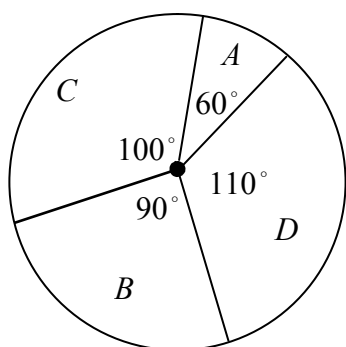
در حالتی که فراوانی این داده 3 واحد افزایش می یابد ، تعداد داده ها یعنی n نیز 3 واحد افزایش خواهد یافت اما با

توجه به اینکه فراوانی نسبی در این حالت $\frac{2}{5}$ است داریم :

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{5} &= \frac{f_i + 3}{n + 3} \quad (2) \\ (1) \Rightarrow f_i &= \frac{3n}{10} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{\frac{3n}{10} + 3}{n + 3} \Rightarrow 2n + 6 = \frac{3}{2}n + 15$$

$$\frac{1}{2}n = 9 \Rightarrow n = 18$$

۹- اگر نمودار زیر ، توزیع 60000 نفر را در گروه های سنی A و B و C و D نشان دهد، چند نفر در گروه سنی A قرار دارند؟



(۱) 1000

(۲) 6000

(۳) 10000

(۴) 15000

پاسخ : گزینه ی « 3 » صحیح است.

$$A \text{ کمان مربوط به } = \frac{x}{60000} \times 360^\circ$$

$$60^\circ = \frac{x}{1000} \times 6 \Rightarrow x = 10000$$

۱۰- تعدادی داده را در چند طبقه دسته بندی کرده ایم ، اگر بخواهیم فاصله ی طبقات نصف شود، برای تعداد طبقات کدام حالت پیش خواهد آمد؟

(۱) نصف می شود

(۲) 2 برابر می شود

(۳) تغییر نمی کند

(۴) 2 واحد به آن اضافه می شود

پاسخ : گزینه ی « 2 » صحیح است.

در این تست منظور از فاصله ی طبقات ، طول دسته می باشد ، اما می دانیم :

$$\text{طول دسته} = \frac{\text{دامنه ی تغییرات}}{\text{تعداد طبقات}} \Rightarrow k = \frac{R}{c} \Rightarrow R = k c$$

حال چون دامنه ی تغییرات تغییری نکرده و ثابت مانده است لذا هنگامی که طول دسته ها را نصف می کنیم تعداد دسته

$$R = \frac{c}{2} \times 2 k$$

ها باید دو برابر شود یعنی :

زیرا 2 با 2 ساده می شود.

۱۱- اگر فراوانی یک دسته 15 و زاویه ی مربوط به آن در نمودار دایره ای 18 درجه باشد ، حجم جامعه ی آماری کدام است؟

- (۱) 200 (۲) 300 (۳) 180 (۴) 150

پاسخ : گزینه ی « 2 » صحیح است.

$$\alpha^\circ = \frac{F_1}{n} \times 360^\circ \Rightarrow 18^\circ = \frac{15}{n} \times 360^\circ \Rightarrow 18n = 15 \times 360^\circ$$

$$n = 15 \times 20^\circ = 300^\circ$$

۱۲- در یک نمونه گیری آماری ، تعداد داده ها 10 و مجموع مربعات تفاضل داده ها از میانگین برابر 14/4 است ، اگر ضریب تغییرات داده ها 0/04 باشد ، میانگین داده ها چقدر است؟

- (۱) 18 (۲) 24 (۳) 30 (۴) 32

پاسخ : گزینه ی « 3 » صحیح است.

منظور از مجموع مربعات تفاضل داده ها از میانگین ، همان $\sum (x_i - \bar{x})^2$ است ، در نتیجه داریم :

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{14/4}{10} = 1/44 \Rightarrow \sigma = \sqrt{1/44} = 1/2$$

$$c_v = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow \frac{4}{100} = \frac{1/2}{\bar{x}} \Rightarrow \bar{x} = \frac{120}{4} = 30$$

چون ضریب تغییرات 0/04 است لذا :

۱۳- اگر میانگین اعداد x و y و z برابر 7 و واریانس آنها 16 باشد ، ضریب تغییرات اعداد $3x - 1$ ، $3y - 1$ ، $3z - 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{11}{20}$ (۴) $\frac{9}{5}$

پاسخ : گزینه ی « 2 » صحیح است.

واضح است که میانگین داده های جدید برابر خواهد بود با :

$$3\bar{x} - 1 = 3(7) - 1 = 20$$

و واریانس برابر خواهد بود با :

$$3^2 \sigma^2(x) = 9 \times 16 = 144$$

و در نتیجه $\sigma = 12$ لذا داریم :

$$c_v = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

۱۴- اگر مجموع مساحت های مستطیل ها در نمودار مستطیلی تعدادی داده برابر 250 و فراوانی نسبی دسته ی اول

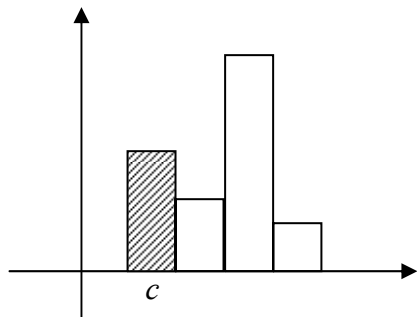
$$\frac{1}{10} \text{ و فراوانی همین دسته ، 5 باشد ، طول هر دسته چقدر خواهد بود؟}$$

- (۱) 3 (۲) 4 (۳) 5 (۴) 6

پاسخ : گزینه ی « 3 » صحیح است.

می دانیم در نمودار مستطیلی ، بر روی محور x ها حدود دسته ها و بر روی محور y ها فراوانی نشان داده می شود ، از آنجایی که تفاضل بین کران های بالا و پایین هر دسته برابر طول دسته است ، برای تعیین مساحت هر یک از مستطیل ها ، کافی است طول دسته را در فراوانی آن دسته ضرب کنیم.

لذا با توجه به شکل داریم :



$$S = c F_1 + c F_2 + \dots + c F_n = c \sum F_i$$

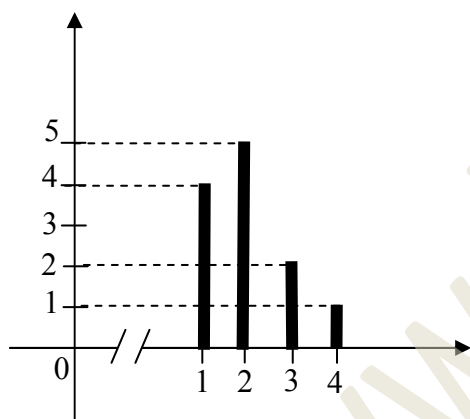
مساحت کل مستطیل ها

نکته : سطح زیر نمودار چند بر فراوانی با سطح زیر نمودار مستطیلی متناظرش برابر است ، به عبارت دیگر مساحت زیر نمودار چند بر فراوانی نیز از رابطه ی $c \sum F_i$ بدست می آید.
اکنون داریم :

$$f_i = \frac{F_i}{n} \Rightarrow \frac{1}{10} = \frac{5}{n} \Rightarrow n = 50 \Rightarrow \sum F_i = 50$$

$$S = c \cdot \sum F_i \Rightarrow 250 = c \times 50 \Rightarrow c = 5$$

۱۵- واریانس داده ها در نمودار میله ای رو به رو چقدر است؟



$$\frac{5}{6} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{5}{4} \quad (۴)$$

پاسخ : گزینه ی « ۱ » صحیح است.

ابتدا با توجه به نمودار می توان جدول فراوانی را به صورت زیر تشکیل داده و سپس واریانس را حساب کنیم :

مرکز دسته x_i	1	2	3	4
فراوانی f_i	4	5	2	1

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{\sum F_i x_i}{n} = \frac{4+10+6+4}{4+5+2+1} = \frac{24}{12} = 2$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum F_i (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{4(1-2)^2 + 5(2-2)^2 + 2(3-2)^2 + 1(4-2)^2}{12} = \frac{4+0+2+4}{12} = \frac{5}{6}$$

۱۶- یک سری داده‌ی آماری را در k دسته طبق‌بندی نموده‌ایم، طول دسته 12، شده است. اگر تعداد دسته‌ها را 4 واحد افزایش دهیم، طول هر دسته 6 خواهد شد، k کدام است؟

- (۱) 3 (۲) 6 (۳) 5 (۴) 4

پاسخ: گزینه‌ی «4» صحیح است.

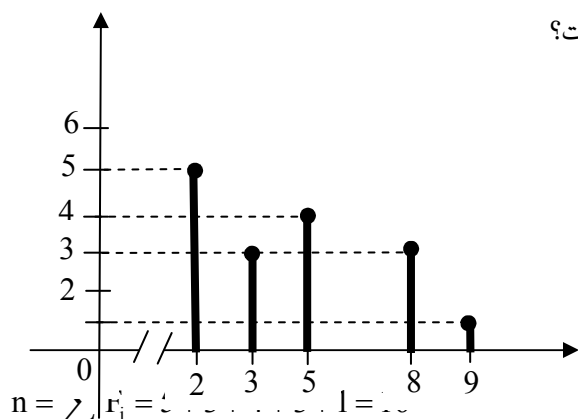
$$c = \frac{R}{k} \Rightarrow 12 = \frac{R}{k} \Rightarrow R = 12k$$

پس از آنکه تعداد دسته‌ها، 4 واحد افزایش می‌یابد، طول دسته 6 خواهد شد، اما واضح است در این حالت دامنه‌ی تغییرات تغییری نکرده است، پس داریم:

$$6 = \frac{12k}{k+4} \Rightarrow 6k + 24 = 12k \Rightarrow 6k = 24 \Rightarrow k = 4$$

۱۷- با توجه به نمودار میله‌ای رو به رو، میانه‌ی داده‌ها کدام است؟

- (۱) 3 (۲) 4 (۳) 5 (۴) 7/5



پاسخ: گزینه‌ی «2» صحیح است.

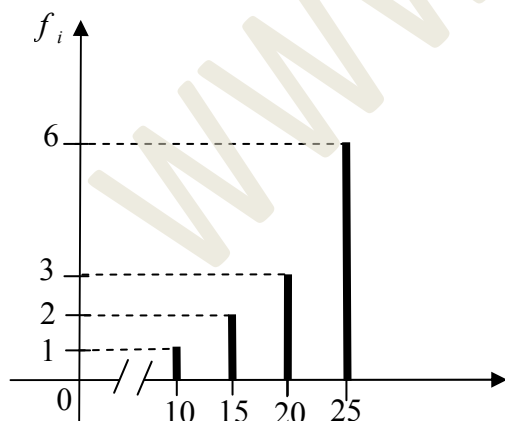
چون 16 داده داریم، لذا میانه برابر میانگین داده‌های هشتم و نهم خواهد بود، اما اگر داده‌ها را از ابتدا شمارش کنیم، عدد 2، پنج بار تکرار شده، عدد 3، سه بار تکرار دارد، حال چون داده‌ی هشتم عدد 3 و داده‌ی نهم عدد 5 می‌باشد، میانه برابر است با:

$$\tilde{x} = \frac{3+5}{2} = 4$$

۱۸- نمودار میله‌ای یک سری از داده‌ها به شکل مقابل است، در نمودار میله‌ای این داده‌ها، زاویه‌ی مربوطه به

$x_i = 25$ چند درجه است؟

- (۱) 90° (۲) 150° (۳) 180° (۴) 120°



پاسخ: گزینه‌ی «3» صحیح است.

در نمودار میله‌ای مرکز دسته‌ها (یا خود داده‌ها) را روی محور x ‌ها مشخص کرده، سپس روی هر یک از داده‌ها، میله‌ای که طول برابر با فراوانی آن داده باشد رسم می‌کنیم، اکنون داریم:

$$n = \sum f_i = 1 + 2 + 3 + 6 = 12 \Rightarrow \alpha^\circ = \frac{F_i}{n} \times 360^\circ$$

چون فراوانی مربوط به $x_i = 25$ برابر 6 می باشد لذا زاویه ی نظیر این داده در نمودار دایره ای برابر است با :

$$\alpha^\circ = \frac{6}{12} \times 360^\circ = 180^\circ$$

۱۹- در دو دسته ی داده های $\begin{cases} x_i : 2, 3, 5, 7 \\ y_i : 9, 13, 21, 29 \end{cases}$ ، کدام گزینه درست است؟

(۱) میانگین گروه دوم ، چهار برابر میانگین گروه اول است.

(۲) واریانس گروه دوم ، چهار برابر واریانس گروه اول است.

(۳) ضریب تغییرات گروه دوم ، از ضریب تغییرات گروه اول بیشتر است.

(۴) ضریب تغییرات گروه دوم ، از ضریب تغییرات گروه اول کمتر است.

پاسخ : گزینه ی « 4 » صحیح است.

با کمی دقت دیده می شود که همه ی داده های گروه اول چهار برابر شده و با عدد 1 جمع شده اند پس میانگین گروه دوم از 4 برابر میانگین گروه اول یک واحد بیشتر است ، همچنین انحراف معیار گروه دوم 4 برابر انحراف معیار گروه اول است پس واریانس گروه دوم ، 16 برابر واریانس گروه اول است اما در مورد ضریب تغییرات :

اگر ضریب تغییرات گروه اول را با cv نمایش دهیم داریم :

$$cv = \frac{\sigma}{x}$$

در گروه دوم ضریب تغییرات برابر است با :

$$(cv)' = \frac{4\sigma}{4x + 1}$$

با توجه به آنکه نسبت به حالت اول مخرج کسر در مقایسه با صورت کسر ، بیشتر بزرگ شده است ، ضریب تغییرات گروه دوم کمتر خواهد بود.

۲۰- اگر میانگین داده های $3x_1 + 1, 3x_2 + 1, \dots, 3x_n + 1$ برابر با 7 باشد ، آنگاه میانگین داده های $3 - 2x_1, 3 - 2x_2, \dots, 3 - 2x_n$ کدام است؟

$$\begin{matrix} (۱) & -\frac{14}{3} & (۲) & -1 & (۳) & -\frac{8}{3} & (۴) & 1 \end{matrix}$$

پاسخ : گزینه ی « 2 » صحیح است.

اگر میانگین داده های $x_1, x_2, \dots, x_n$ را $\bar{x}$ در نظر بگیریم ، آنگاه میانگین داده های $3x_1 + 1, 3x_2 + 1, \dots, 3x_n + 1$ برابر $3\bar{x} + 1$ خواهد بود ، لذا داریم :

$$3\bar{x} + 1 = 7 \Rightarrow \bar{x} = 2$$

از طرفی اگر میانگین داده های $3 - 2x_1, 3 - 2x_2, \dots, 3 - 2x_n$ را با $\bar{x}'$ نمایش دهیم ، داریم :

$$\bar{x}' = 3 - 2\bar{x} = 3 - 2(2) = -1$$

۲۱- اگر واریانس قیمت ها در سال گذشته 1000 ریال بوده و امسال 10 درصد به قیمت ها افزوده شده باشد ، واریانس جدید قیمت ها کدام است؟

$$\begin{matrix} (۱) & 100 & (۲) & 121 & (۳) & 1000 & (۴) & 1210 \end{matrix}$$

پاسخ : گزینه ی « 4 » صحیح است.

اگر x قیمت های پارسال باشد، داریم:

$$y = x + \frac{10}{100}x = \frac{110}{100}x = \frac{11}{10}x$$

یعنی قیمت ها $\frac{11}{10}$ برابر شده اند، پس واریانس قیمت ها $\left(\frac{11}{10}\right)^2 = \frac{121}{100}$ برابر خواهد شد. بنابراین داریم:

$$1000 = \text{واریانس قیمت های پارسال}$$

$$= \frac{121}{100} \times 1000 = 1210 = \text{واریانس قیمت های امسال}$$

۲۲- اگر واریانس داده های $6, k+1, m+n, 2m-n$ برابر صفر باشد، انحراف معیار داده های k و $n+3$ و $m+1$ کدام است؟

3 (۴)

2 (۳)

1 (۲)

0 (۱)

پاسخ: گزینه ی «1» صحیح است.

چون واریانس داده های $6, k+1, m+n, 2m-n$ صفر است، لذا همه ی داده ها با هم برابرند، پس همه ی آنها برابر 6 می باشند، در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} 2m-n=6 \\ m+n=6 \end{cases} \Rightarrow m=4, n=2$$

$$k+1=6 \Rightarrow k=5$$

در این صورت داده های $k, n+3, m+1$ همه برابر 5 شده و چون داده ها با هم برابرند، انحراف معیار آنها صفر خواهد بود.

۲۳- در داده های جدول زیر، اگر درصد فراوانی نسبی دسته ی وسط برابر 30 باشد، فراوانی دسته ی 12-10 کدام است؟ (سراسری تجربی - 79)

مرکز دسته	7	9	11	13	15
فراوانی دسته	9	15	x	10	8

20 (۴)

18 (۳)

16 (۲)

14 (۱)

پاسخ: گزینه ی «3» صحیح است.

$$\text{درصد فراوانی نسبی هر دسته} = \frac{\text{فراوانی آن دسته}}{\text{کل فراوانی ها}} \times 100$$

$$30 = \frac{x}{9+15+x+10+8} \times 100 \Rightarrow 30 = \frac{x}{x+42} \times 100$$

$$3x+126=10x \Rightarrow 7x=126 \Rightarrow x=18$$

۲۴- اگر میانگین داده های $n, n+1, \dots, 2n$ برابر $\bar{x}$ باشد، میانگین داده های $n-1, (n+1)-2, \dots, 2n-(n+1)$ چقدر است؟ (آزاد پزشکی - 79)

$$\bar{x} - \frac{n+1}{2} \quad (۴)$$

$$\bar{x} - \frac{n+2}{2} \quad (۳)$$

$$\bar{x} \quad (۲)$$

$$\bar{x} - \frac{n}{2} \quad (۱)$$

پاسخ : گزینه ی « 3 » صحیح است.

راه حل اول : فرض می کنیم $\bar{x}$ میانگین داده های اولیه و $\bar{Y}$ میانگین داده های مطلوب باشد ، در این صورت داریم :

$$\bar{x} = \frac{n + n + 1 + n + 2 + \dots + 2n}{n + 1}$$

$$\bar{Y} = \frac{n - 1 + (n + 1) - 2 + \dots + 2n - (n + 1)}{n + 1} = \frac{n + n + 1 + \dots + 2n - (1 + 2 + 3 + \dots + (n + 1))}{n + 1}$$

$$= \frac{n + n + 1 + n + 2 + \dots + 2n}{n + 1} - \frac{(n + 1)(n + 2)}{2(n + 1)} = \bar{x} - \frac{n + 2}{2}$$

راه حل دوم : عدد گذاری : n رامثلاً برابر 3 می گیریم ، لذا میانگین داده های 6 ، 5 ، 4 ، 3 برابر $\bar{x}$ است و میانگین داده های گروه دوم یعنی 2 ، 2 ، 2 ، 2 خواسته شده (به جای n ، 3 قرار داده ایم) ، با این شرایط داریم :

$$\bar{x} = \frac{3 + 4 + 5 + 6}{4} = \frac{9}{2}$$

و میانگین داده های گروه دوم برابر است با 2 ، حال در گزینه ها به جای $n = 3$ و به جای $\bar{x} = \frac{9}{2}$ را قرار می دهیم

باید به عدد 2 برسیم ، اما تنها گزینه ی درست گزینه ی (3) است زیرا :

$$\bar{x} - \frac{n + 2}{2} = \frac{9}{2} - \frac{3 + 2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

۲۵- اگر میانگین داده های $x_1, x_2, \dots, x_n$ برابر $\bar{x}$ باشد ، میانگین داده های $x_1 + \bar{x}, x_2 + 2\bar{x}, \dots, x_n + n\bar{x}$ کدام است؟ (آزاد غیر پزشکی - 79)

$$\frac{(n + 1)\bar{x}}{2} \quad (۱) \quad 2\bar{x} \quad (۲) \quad \frac{(n + 3)\bar{x}}{2} \quad (۳) \quad \frac{n\bar{x}}{2} \quad (۴)$$

پاسخ : گزینه ی « 3 » صحیح است.

راه حل اول : فرض می کنیم $\bar{x}$ و $\bar{Y}$ به ترتیب میانگین گروه اول و دوم باشند ، لذا داریم :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

$$\bar{Y} = \frac{x_1 + \bar{x} + x_2 + 2\bar{x} + \dots + x_n + n\bar{x}}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + \frac{(1 + 2 + \dots + n)\bar{x}}{n}$$

$$= \bar{x} + \frac{\frac{n(n + 1)}{2}\bar{x}}{n} = \bar{x} + \frac{(n + 1)\bar{x}}{2} = \frac{(n + 3)\bar{x}}{2}$$

راه حل دوم : x_1, x_2, x_3 را به ترتیب 1 ، 2 ، 3 فرض می کنیم در این صورت داریم :

$$\bar{x} = \frac{1 + 2 + 3}{3} = 2$$

اما میانگین داده های گروه دوم یعنی 9 ، 6 ، 3 برابر $\bar{Y} = \frac{3 + 6 + 9}{3} = 6$ خواهد شد اکنون $n = 3$ و $\bar{x} = 2$ را در

گزینه ها قرار می دهیم ، حاصل باید برابر $\bar{Y} = 6$ شود که تنها گزینه ی « 3 » در ست خواهد بود.

۲۶- میانگین داده های 5- ، 4- ، 3- ، 2- و 1- و داده های $a, 98, 97, 96$ و 95 برابرند ، a کدام است؟ (آزاد پزشکی - 80)

$$100 \quad (۱) \quad -401 \quad (۲) \quad -399 \quad (۳) \quad -101 \quad (۴)$$

پاسخ : گزینه ی « 2 » صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \frac{-1-2-3-4-5}{5} = \frac{-15}{5} = -3 \\ \bar{y} &= \frac{95+96+97+98+a}{5} = \frac{386+a}{5} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{386+a}{5} = -3 \Rightarrow a = -15 - 386 = -401$$

۲۷- میانگین داده های $a, 4, 4, 3$ و 2 برابر 2 است ، میانگین داده های $(100+6a), 4, 3, 2$ چقدر است؟ (آزاد غیر پزشکی - 80)

22 (۴)

19 (۳)

20 (۲)

18 (۱)

پاسخ : گزینه ی « 3 » صحیح است.

$$\bar{x} = \frac{2+3+4+4+a}{5} = 2 \Rightarrow 13+a=10 \Rightarrow a=-3$$

$$\bar{y} = \frac{2+3+4+4+(100+6a)}{5} = \frac{13+82}{5} = \frac{95}{5} = 19$$

۲۸- اگر میانگین داده های x_1+1, x_2+2, x_3+3 برابر $\bar{x}$ باشد ، میانگین داده های $3x_1+1, 3x_2+2, 3x_3+3$ کدام است؟ (آزاد پزشکی - 81)

$3\bar{x}-2$ (۴)

$3\bar{x}$ (۳)

$3\bar{x}-4$ (۲)

$3\bar{x}-6$ (۱)

پاسخ : گزینه ی « 2 » صحیح است.

$$\bar{x} = \frac{(x_1+1)+(x_2+2)+(x_3+3)}{3} \Rightarrow x_1+x_2+x_3 = 3\bar{x} - 6$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{(3x_1+1)+(3x_2+2)+(3x_3+3)}{3} = \frac{3(x_1+x_2+x_3)}{3} + \frac{6}{3} \\ &= \frac{3(3\bar{x}-6)}{3} + 2 = 3\bar{x} - 6 + 2 = 3\bar{x} - 4 \end{aligned}$$

۲۹- نمره ی کل آزمون عمومی یک داوطلب ، مطابق جدول زیر ، 58 درصد است ، نمره ی آزمون زبان انگلیسی او چند درصد است؟ (سراسری تجربی - 81)

درس	ادبیات فارسی	عربی	معارف اسلامی	زبان انگلیسی
درصد	65	52	70	?
ضریب	4	2	3	2

34 (۴)

33 (۳)

32 (۲)

31 (۱)

پاسخ : گزینه ی « 2 » صحیح است.

نمره ی کل آزمون عمومی این داوطلب ، همان میانگین نمرات دروس عمومی او با احتساب ضریب هر درس است ، اما داریم :

$$\bar{x} = \frac{4(65)+2(52)+3(70)+2x}{11} \Rightarrow 58 = \frac{260+104+210+2x}{11}$$

↑
11

مجموع کل فراوانی ها یا ضرایب دروس

$$\Rightarrow 638 = 574 + 2x \Rightarrow x = 32$$

۳۰- اگر میانگین داده های $x_1 - 1$ و $x_2 - 2, \dots, x_n - n$ برابر $\bar{x}$ باشد، میانگین داده های $x_1 + 1, x_2 + 2, \dots, x_n + n$ کدام است؟ (آزاد غیر پزشکی - 81)

$$\bar{x} + n + 1 \quad (۱) \quad \bar{x} + \frac{n(n+1)}{2} \quad (۲) \quad \bar{x} + \frac{n+1}{2} \quad (۳) \quad 2\bar{x} \quad (۴)$$

پاسخ: گزینه ی «۱» صحیح است.

$$\bar{x} = \frac{(x_1 - 1) + (x_2 - 2) + \dots + (x_n - n)}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} - \frac{1 + 2 + \dots + n}{n}$$

راه حل اول:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} \Rightarrow \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \bar{x} + \frac{n+1}{2}$$

$$\bar{Y} = \frac{(x_1 + 1) + (x_2 + 2) + \dots + (x_n + n)}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + \frac{1 + 2 + \dots + n}{n}$$

$$\bar{Y} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n}$$

$$\bar{Y} = \left(\bar{x} + \frac{n+1}{2} \right) + \frac{n+1}{2} = \bar{x} + (n+1)$$

راه حل دوم (عدد گذاری): به جای x_1, x_2, x_3 به ترتیب 1 و 2 و 3 را قرار دهید و همانند تست های قبل عمل کنید.

۳۱- اگر میانگین داده های a, b, c, d برابر 5 و واریانس آنها برابر صفر باشد، میانگین داده های $a, b, c, d, c + d, a + b$ کدام است؟ (آزاد تجربی - 82)

$$10 \quad (۱) \quad 4 \quad (۲) \quad 5 \quad (۳) \quad 8 \quad (۴)$$

پاسخ: چون واریانس داده ها صفر است، لذا همه ی داده ها برابرند و چون میانگین آنها، 5 است، لذا همگی برابر 5 هستند، بنابراین داریم:

$$\bar{x} = \frac{a + b + c + d + (a + b) + (c + d)}{6} = \frac{5 + 5 + 5 + 5 + 10 + 10}{6} = \frac{40}{6} = \frac{20}{3}$$

که در گزینه ها نیست.

۳۲- اگر واریانس داده های $a, b, c, d, 3$ برابر صفر باشد، میانگین داده های $3 + 6, d + 5, c + 4, b + 3, a + 2$ کدام است؟ (آزاد پزشکی - 82)

$$20 \quad (۱) \quad \text{صفر} \quad (۲) \quad 3 \quad (۳) \quad 7 \quad (۴)$$

پاسخ: گزینه ی «۴» صحیح است.

چون واریانس داده ها صفر است لذا همه ی داده ها برابر بوده و همه با 3 برابرند، بنابراین داریم:

$$\bar{x} = \frac{(3 + 6) + (d + 5) + (c + 4) + (b + 3) + (a + 2)}{6}$$

$$\bar{x} = \frac{5 + 6 + 7 + 8 + 9}{5} = \frac{35}{5} = 7$$

۳۳- اندازه ی قد 120 دانش آموز، در جدول زیر دسته بندی شده است، فراوانی دسته ی چهارم کدام است؟ (سراسری تجربی - 83)

مرکز دسته	155	158	161	164	167	170
درصد فراوانی نسبی	10	15	18	x	20	12

(۴) 30

(۳) 25

(۲) 24

(۱) 20

پاسخ: گزینه ی «4» صحیح است.

در هر جدول، مجموع درصد های فراوانی های نسبی همیشه برابر 100 است، پس داریم:

$$10+15+18+x+20+12=100 \Rightarrow x=25$$

اما با توجه به آنکه درصد فراوانی نسبی دسته ی چهارم 25 است و تعداد داده ها نیز 120 داده شده است، می توان فراوانی این دسته را به صورت زیر بدست آورد:

$$\text{درصد فراوانی نسبی} = \frac{\text{فراوانی}}{n} \times 100 \Rightarrow 25 = \frac{F_i}{120} \times 100 \Rightarrow \frac{F_i}{120} = \frac{1}{4} \Rightarrow F_i = 30$$

۳۴- به داده های 3، 6، 7، 8 کدام عدد را اضافه کنیم، تا میانگین داده های حاصل یک واحد اضافه گردد؟ (آزاد غیر پزشکی - 83)

(۴) 11

(۳) 10

(۲) 9

(۱) 8

پاسخ: گزینه ی «4» صحیح است.

$$\bar{x} = \frac{3+6+7+8}{4} = \frac{24}{4} = 6$$

$$\bar{Y} = \frac{3+6+7+8+a}{5} = \bar{x} + 1 = 6+1 = 7$$

$$\Rightarrow 24+a=35 \Rightarrow a=11$$

۳۵- هشت داده ی آماری با میانگین 15 و واریانس 4 مفروض است، اگر دو داده ی 12 و 8 به آنها اضافه شود، واریانس 10 داده ی حاصل کدام است؟ (سراسری تجربی - 84)

(۴) 5

(۳) 4/8

(۲) 4/5

(۱) 4

پاسخ: گزینه ی «4» صحیح است.

چون میانگین دو داده ی 12 و 18 برابر $\frac{12+18}{2} = 15$ می باشد، با افزوده شدن این دو عدد به هشت داده ی قبلی، میانگین تغییر نخواهد کرد و همان 15 خواهد بود، از طرفی با توجه به اینکه واریانس هشت داده ی اولیه، برابر 4 است، نتیجه می گیریم:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^8 (x_i - 15)^2}{8} \Rightarrow \sum_{i=1}^8 (x_i - 5)^2 = 8 \times 4 = 32$$

با اضافه شدن دو داده ی 12 و 18، واریانس به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$(\sigma^2)' = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - 15)^2}{10} = \frac{32 + (12-15)^2 + (18-15)^2}{10} = \frac{32+9+9}{10} = 5$$

۳۶- در 60 داده ی آماری ، میانگین 3 و انحراف معیار $1/2$ محاسبه شده است ، اگر به تمام داده ها 9 واحد اضافه شود ، ضریب تغییرات داده های جدید کدام است؟ (آزمون سراسری تجربی - 85)

- (۱) $0/1$ (۲) $0/2$ (۳) $0/3$ (۴) $0/4$

پاسخ : گزینه ی «1» صحیح است.

چون به تمام داده ها ، 9 واحد اضافه شده لذا به میانگین نیز 9 واحد اضافه می شود ، اما انحراف معیار ثابت می ماند بنابراین داریم :

$$CV = \frac{\sigma}{x+9} = \frac{1/2}{3+9} = \frac{1/2}{12} = \frac{1}{24} = 0/04$$

۳۷- کوچکترین و بزرگترین داده های آماری 31 و 52 می باشند ، این داده ها در 7 دسته ، دسته بندی شده اند ، 37 درصد داده ها کمتر از 40 و 48 درصد آنها بیشتر یا مساوی 43 می باشند ، اگر فراوانی کل 80 باشد ، فراوانی دسته ی وسط کدام است؟

- (۱) 9 (۲) 12 (۳) 15 (۴) 16

پاسخ : گزینه ی «2» صحیح است.

$$48 + 37 = 85 \Rightarrow 15 \text{ درصد داده ها مربوط به دسته ی وسط است} \Rightarrow \frac{15}{100} \times 80 = 12$$