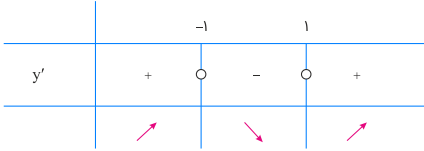




$$y' = \varpi x^\gamma - \varpi = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$



تابع در $x = 1$ دارای مینیمم نسبی است، پس:

$$f(1) > 0 \Rightarrow 1 - \nu + m - \nu > 0 \Rightarrow m > \nu$$

تالیفی محمد مصطفیٰ ابراہیمی - علی شہرابی فراہانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری

تست‌ر علوم تجربی دوازدهم

تستریاضی و فیزیک دوازدهم

ابتدا دامنه تعریف توابع f و g را مشخص می‌کنیم. داریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^y + 1}{1 - x^y} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\} \cup x \neq \pm 1, \quad g(x) = \sqrt{x - x^y} \\ &\Rightarrow D_g = [0, 1] \cup 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

حال باتوجه به تعریف دامنه تابع مرکب، داریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\text{fog}} &= \{\mathbf{x} \in \mathbf{D}_g \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) \in \mathbf{D}_f\} = \{\circ \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{1} \mid \sqrt{\mathbf{x} - \mathbf{x}^\vee} \neq \mathbf{1}\} = \{\circ \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{1} \mid \mathbf{x} - \mathbf{x}^\vee \neq \mathbf{1}\} \\ &= \{\circ \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{1} \mid \underbrace{\mathbf{x}^\vee - \mathbf{x} + \mathbf{1} \neq \circ}_{\Delta < \circ}\} = \{\circ \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{1} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}\} = \{\mathbf{x} \mid \circ \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{1}\} \\ &\Rightarrow \mathbf{D}_{\text{fog}} = [\circ, \mathbf{1}] \end{aligned}$$

$$\mathbf{D}_{\text{gof}} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{D}_f \mid f(\mathbf{x}) \in \mathbf{D}_g\} = \{\mathbf{x} \neq \pm 1 \mid 0 \leq f(\mathbf{x}) \leq 1\} = \left\{ \mathbf{x} \neq \pm 1 \mid 0 \leq \frac{\mathbf{x}^y + 1}{1 - \mathbf{x}^y} \leq 1 \right\}$$

$$\begin{cases} \bullet \leq \frac{x^y + 1}{1 - x^y} \Rightarrow 1 - x^y > 0 \Rightarrow x^y < 1 \Rightarrow -1 < x < 1 \\ \text{صورت همواره مثبت است.} \\ \frac{x^y + 1}{1 - x^y} \leq 1 \Rightarrow \frac{x^y + 1}{1 - x^y} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{2x^y}{1 - x^y} \leq 0 \Rightarrow \frac{\text{صورت همواره}}{\text{نامنفی است.}} \Rightarrow 1 - x^y < 0 \\ \Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 1 \text{ یا } x = 0. \end{cases}$$

اشتراک بازه‌های بالا $\{o\}$ است، پس $D_{\text{gof}} = \{o\}$ می‌شود و اشتراک آن با D_{fog} هم همان $\{o\}$ خواهد بود. داریم:

$$\begin{cases} D_{\text{fog}} = [\circ, \mathbb{I}] \\ D_{\text{gof}} = \{\circ\} \end{cases} \Rightarrow D_{\text{fog}} \cap D_{\text{gof}} = \{\circ\}$$

تالیفی محمد مصطفیٰ ابراہیمی - شروین سیاح نیا - علی شہرابی فراہانی

تست‌ر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

ابتدا با داشتن $f(x) = \frac{x}{x+1}$ ، ضابطه تابع $f(g(x))$ را تشکیل می‌دهیم. داریم:

$$f(g(x)) = \frac{g(x)}{g(x)+1}$$

حال ضابطه به‌دست‌آمده را با ضابطه fog که در صورت تست داده شده است، برابر قرار می‌دهیم. داریم:

$$\frac{g(x)}{g(x)+1} = \frac{2x-1}{x+3} (*) \Rightarrow x \cdot g(x) + 3g(x) = 2x \cdot g(x) + 2x - g(x) - 1$$

$$\Rightarrow (-x+3)g(x) = 2x-1 \Rightarrow g(x) = \frac{2x-1}{-x+3}$$

در آخر توابع f و g را باهم قطع می‌دهیم. برای این منظور ضابطه آن‌ها را برابر هم قرار می‌دهیم. داریم:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{2x-1}{-x+3} \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = -x^2 + 3x \Rightarrow 3x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = P = \frac{c}{a} = \frac{-1}{3}$$

تذکر: برای محاسبه ضابطه $g(x)$ ، می‌توانیم در تناسب $(*)$ ، تفصیل صورت در مخرج انجام دهیم. این کار، محاسبات ما را کمی ساده‌تر می‌کند. داریم:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \xrightarrow{\text{تفصیل صورت در مخرج}} \frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c}$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{g(x)}{g(x)+1} = \frac{2x-1}{x+3} \Rightarrow \frac{g(x)}{\cancel{g(x)}+1-\cancel{g(x)}} = \frac{2x-1}{x+3-(2x-1)}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{2x-1}{-x+3}$$

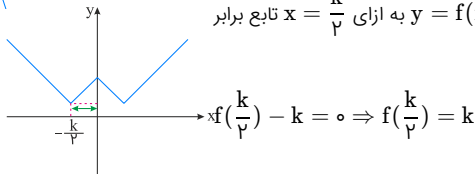
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم
تستر علوم تجربی دوازدهم

از آنجایی که همه نمودارها هم‌جهت هستند و قطعاً یکی از آن‌ها متعلق به تابع $kf(x)$ است، می‌توان نتیجه گرفت k عددی مثبت است. اگر $k < 0$ بود باید یکی از نمودارها به شکل زیر درمی‌آمد.

باتوجه به مثبت بودن k ، نمودار تابع $y = f(x) - k$ شکل پایینی، نمودار $y = f(x) + \frac{k}{p}$ شکل وسطی و نمودار $y = kf(x)$ شکل بالایی است.

باتوجه به این شرایط در نمودار وسطی، فاصله طولی رأس تا محور عرض‌ها $\frac{k}{p}$ است.

اگر این فاصله را $\frac{k}{p}$ در نظر بگیریم در شکل پایینی نقاط زیر برحسب k پیدا می‌شوند، بنابراین در تابع $y = f(x) - k$ به ازای $x = \frac{k}{p}$ تابع برابر صفر است، یعنی:



نمودار تابع $y = kf(x)$ و $y = f(x) + \frac{k}{p}$ در $x = 0$ متقاطع‌اند، پس: $k = kf(0) \xrightarrow{+k} 1 = f(0)$

در نهایت باتوجه به اینکه در شکل پایینی مقدار تابع در $x = 0$ برابر -1 است، داریم:

$$y = f(x) - k \xrightarrow{(0, -1)} -1 = f(0) - k \xrightarrow{f(0)=1} -1 = 1 - k \Rightarrow k = 2$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

از آنجاکه $D_{f'} = \mathbb{R} - \{a, 2\}$ ، پس نقاط $x = a$ و $x = 2$ تنها نقاط مشتق‌ناپذیر تابع f هستند.

از طرفی می‌دانیم که تابع $f(x) = \frac{|x+1|}{x+b}$ در نقاط $x = -1$ به‌عنوان ریشه ساده داخل قدر مطلق (نقطه گوشه) و $x = -b$ به‌عنوان ریشه مخرج (تعریف‌نشده و ناپیوسته) مشتق‌ناپذیر است.

پس:

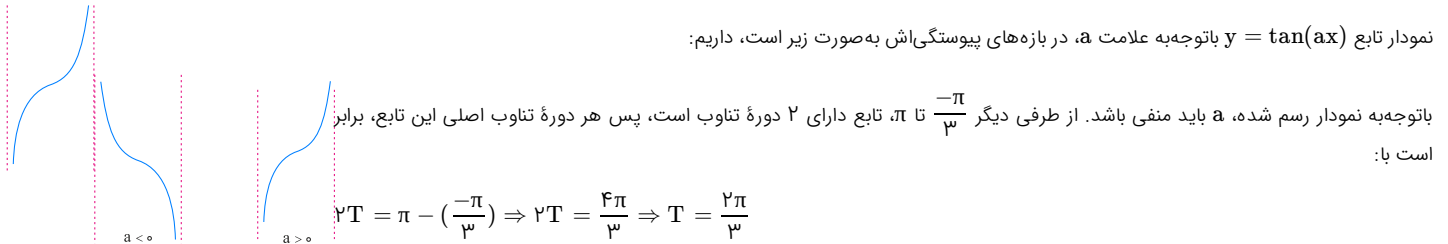
$$\begin{cases} a = -1 \\ -b = 2 \Rightarrow b = -2 \end{cases}$$

و لذا: $a + b = -3$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم
تستر علوم تجربی دوازدهم

نمودار تابع $y = \tan x$ در بازه‌های پیوستگی‌اش به‌صورت زیر است:

نمودار تابع $y = \tan(ax)$ با توجه به علامت a ، در بازه‌های پیوستگی‌اش به‌صورت زیر است، داریم:

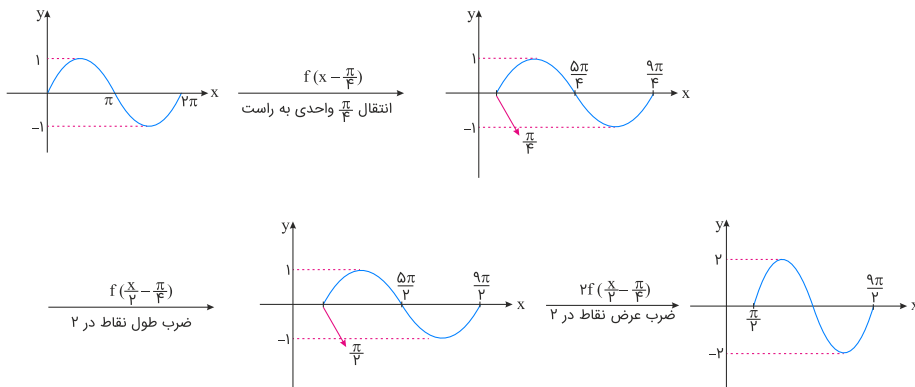


چون $a < 0$ است، پس مقدار منفی آن را می‌پذیریم. داریم:

$$T = \underbrace{\frac{\pi}{|a|}}_{\text{ضریب کمان } x} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{|a|} \Rightarrow |a| = \frac{3}{2} \xrightarrow{a < 0} a = -\frac{3}{2}$$

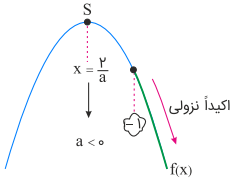
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم
تستر علوم تجربی دوازدهم

برای رسم نمودار $g(x)$ ، باید نمودار $f\left(\frac{2x-\pi}{3}\right) = f\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right)$ را رسم کنیم. به همین جهت ابتدا نمودار تابع f را در جهت افقی و به‌اندازه $\frac{\pi}{3}$ به سمت راست انتقال می‌دهیم $\left(f\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right)$. سپس طول همه نقاط نمودار حاصل را در ۲ ضرب می‌کنیم (نمودار دچار انبساط افقی می‌شود). شکل حاصل نمودار $f\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right)$ را نشان می‌دهد. در ادامه عرض همه نقاط نمودار $f\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right)$ را در ۲ ضرب می‌کنیم. نمودار حاصل همان $g(x)$ است.



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی - آریان حیدری
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

از صورت تست نتیجه می‌گیریم که تابع f در بازه $(-\infty, +1]$ اکیداً نزولی است. برای این منظور قبل از هر کاری باید به این موضوع توجه کنیم که قطعاً دهانه سهمی رو به پایین است. در غیر این صورت تابع درجه دوم، نمی‌تواند از عدد -1 به بعد، اکیداً نزولی باشد. از طرفی دیگر می‌دانیم تابع درجه دوم زمانی در یک بازه اکیداً یکنوا است که طول رأس سهمی در درون آن بازه نباشد، پس داریم:



(۱) $a < 0 \Rightarrow$ دهانه سهمی رو به پایین است

$$\text{طول رأس سهمی} = \frac{y}{a} \leq -1 \xrightarrow{\text{عکس می‌کنیم}} \frac{a}{y} \geq -1 \xrightarrow{\times y} a \geq -y \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱) \cap (۲)} -y \leq a < 0$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

راه حل اول:

$$\underbrace{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}_{\frac{1}{2} \sin \alpha} \cos \alpha = \frac{\sqrt{13}}{26} \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2} \sin \alpha \cos \alpha}_{\frac{1}{4} \sin 2\alpha} = \frac{\sqrt{13}}{26}$$

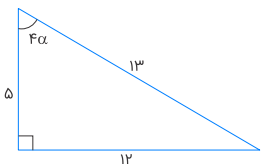
$$\Rightarrow \frac{1}{4} \sin 2\alpha = \frac{\sqrt{13}}{26} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

حال با داشتن $\sin 2\alpha$ ، مقدار $\cos 2\alpha$ را حساب می‌کنیم. داریم:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2\left(\frac{2\sqrt{13}}{13}\right)^2 = 1 - \frac{8}{13} = \frac{5}{13}$$

به کمک مثلث قائم‌الزاویه، مقدار $|\tan 2\alpha|$ را پیدا می‌کنیم. داریم:

$$\cos 2\alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{5}{13}$$



$$\Rightarrow |\tan 2\alpha| = \frac{12}{5}$$

راه حل دوم:

$$1 + \tan^2 2\alpha = \frac{1}{\cos^2 2\alpha} \xrightarrow{\cos 2\alpha = \frac{5}{13}} 1 + \tan^2 2\alpha = \frac{1}{\left(\frac{5}{13}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \tan^2 2\alpha = \frac{169}{25} - 1 = \frac{144}{25} \xrightarrow{\sqrt{\quad}} |\tan 2\alpha| = \frac{12}{5}$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

به ازای $x = -1$ ، صورت کسر عبارت زیر رادیکال برابر ۲- است و مخرج کسر عبارت زیر رادیکال برابر $f(1)$ خواهد بود. چون $f(1) = 0$ است، پس باید از سمتی به $x = -1$ نزدیک شویم که حاصل $f(-x)$ ، مقدار 0^- به خود بگیرد که عبارت زیر رادیکال مثبت شود. اگر از سمت راست به -1 نزدیک شویم، ورودی تابع $f(-x)$ ، برابر 1^- است که مقدار تابع برابر 0^- خواهد بود. پس تنها همسایگی راست $x = -1$ عضو دامنه تعریف تابع g بوده و داریم:

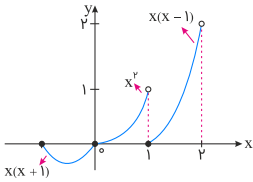
$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow (-1)^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \sqrt{\frac{3x+1}{f(-x)}} = \sqrt{\frac{3(-1)+1}{f(-(-1^+))}} \\ &= \sqrt{\frac{-3+1}{f(1^-)}} = \sqrt{\frac{-2}{0^-}} = \sqrt{+\infty} = +\infty\end{aligned}$$

پس نمودار تابع $g(x)$ در اطراف $x = -1$ به صورت زیر است. داریم:



تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

سعی می‌کنیم نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:



$$\begin{aligned}f(x) &= x(x - [x]) \\ 0 \leq x < 1 &\Rightarrow f(x) = x^2 \\ 1 \leq x < 2 &\Rightarrow f(x) = x(x - 1) \\ -1 \leq x < 0 &\Rightarrow f(x) = x(x + 1)\end{aligned}$$

مطابق شکل تابع در نقطه $(0, 0)$ ، $(1, 1)$ فقط $\min$ نسبی دارد. چون به ازای $x < 0$ تابع مقادیر منفی را نیز می‌پذیرد، پس این نقطه نمی‌تواند $\min$ مطلق هم باشد.

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - کامیار علیون
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

طبق تعریف تابع اکیداً صعودی اگر $x_1 < x_2$ ، آنگاه $f(x_1) < f(x_2)$. باتوجه به اینکه $0 < 1 < 2$ ، پس $f(0) < f(1) < f(2)$ و چون $2 < 3 < 4$ پس $f(2) < f(3) < f(4)$ ؛ بنابراین داریم:

$$\begin{cases} f(0) < f(1) < f(2) \Rightarrow 1 < a < 4 \xrightarrow{a \in \mathbb{Z}} a = 2 \text{ یا } 3 \\ f(2) < f(3) < f(4) \Rightarrow 4 < b < 6 \xrightarrow{b \in \mathbb{Z}} b = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow ab = 10 \text{ یا } 15$$

$$ab \text{ مجموع مقادیر } = 10 + 15 = 25$$

تألیفی آریان حیدری - شروین سیاح نیا
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

حد داده‌شده را کمی ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(2) - f(x)}{x^2 + 2x - 8} = \frac{f}{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(f(x) - f(2))}{(x - 2)(x + 4)} = \frac{f}{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \times \frac{-1}{x + 4} = \frac{f}{3}$$

$$\Rightarrow f'(2) \times \frac{-1}{4} = \frac{f}{3} \Rightarrow f'(2) = -8$$

حال با داشتن ضابطهٔ f ، مقدار $f'(2)$ را حساب می‌کنیم:

$$f(x) = ax^2 \sqrt[3]{3x^2 - 4} \Rightarrow f'(x) = 2ax \sqrt[3]{3x^2 - 4} + ax^2 \frac{6x}{3 \sqrt[3]{(3x^2 - 4)^2}}$$

$$\xrightarrow{x=2} f'(2) = 8a + 4a = 12a \xrightarrow{f'(2)=-8} 12a = -8 \Rightarrow a = \frac{-2}{3}$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علیون

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

معادله را ساده می‌کنیم:

$$2 \cos x \sin x + 2 \cos^2 x = 1 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 1 = -2 \cos x \sin x$$

$$\Rightarrow \cos 2x = -\sin 2x = \sin(-2x) \xrightarrow{\sin(-2x) = \cos(\frac{\pi}{2} + 2x)} \cos 2x = \cos(\frac{\pi}{2} + 2x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + (\frac{\pi}{2} + 2x) \Rightarrow \text{نشدنی} \\ 2x = 2k\pi - (\frac{\pi}{2} + 2x) \Rightarrow 4x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

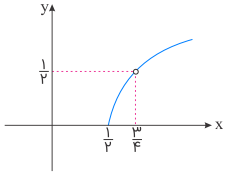
تستر علوم تجربی دوازدهم

روش اول: برای تعیین بُرد تابع $g \circ f$ ، باید نمودار تابع اصلی g را در بُرد تابع f در نظر گرفته و بُرد را مشخص نماییم. پس ابتدا باید بُرد تابع f را مشخص کنیم. برای این منظور عدد $\frac{1}{f}$ را اضافه و کم می‌کنیم. داریم:

$$f(x) = x - \left[x + \frac{1}{f} \right] = \underbrace{x + \frac{1}{f}}_u - \underbrace{\left[x + \frac{1}{f} \right]}_u - \frac{1}{f} = u - [u] - \frac{1}{f}$$

$$0 \leq u - [u] < 1 \Rightarrow -\frac{1}{f} \leq f(x) < \frac{3}{f} \Rightarrow R_f = \left[-\frac{1}{f}, \frac{3}{f} \right)$$

حال نمودار تابع g را در این بُرد به‌دست‌آمده (یعنی بُرد f) در نظر می‌گیریم. داریم:



$$g(x) = \sqrt{x - \frac{1}{f}}$$

$$D_g = R_f = \left[\frac{1}{f}, \frac{3}{f} \right)$$

پس بُرد تابع $g \circ f$ به‌صورت بازه $\left(0, \frac{1}{f} \right]$ است.

روش دوم: ابتدا ضابطه تابع $g \circ f$ را می‌سازیم. داریم:

$$g \circ f(x) = \sqrt{x - \left[x + \frac{1}{f} \right] - \frac{1}{f}} = \sqrt{\underbrace{x + \frac{1}{f} - \left[x + \frac{1}{f} \right]}_{0 \leq u - [u] < 1} - \frac{3}{f}}$$

$$-\frac{3}{f} \leq \text{عبارت زیر رادیکال} < \frac{1}{f} \xrightarrow[\text{دامنه رادیکال}]{\text{باتوجه به}} 0 \leq \text{عبارت زیر رادیکال} < \frac{1}{f}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sqrt{x - \left[x + \frac{1}{f} \right] - \frac{1}{f}} < \frac{1}{f} \Rightarrow R_{g \circ f} = \left[0, \frac{1}{f} \right)$$

نکته تستری:

۱) تابع f در بازه‌ای صعودی است که $f' \geq 0$ بوده و در بازه‌ای نزولی است که $f' \leq 0$ باشد.

۲) در توابع کسری اگر مشتق تابعی را بزرگ‌تر از صفر یا کوچک‌تر از صفر قرار دهیم تا پی ببریم تابع در چه بازه‌ای صعودی یا نزولی است ولی بازه به‌دست‌آمده شامل ریشهٔ مخرج (مجانِب قائم) باشد، باید این بازه را در ریشهٔ مخرج تفکیک حدود کنیم.

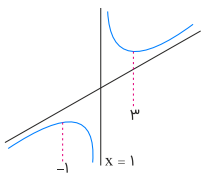
برای آنکه پی ببریم تابع $y = \frac{x^2 + 3x}{x - 1}$ در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است، کافی است ابتدا مشتق تابع را محاسبه کرده و کوچک‌تر از صفر قرار دهیم. داریم:

$$y' = \frac{(2x + 3)(x - 1) - 1(x^2 + 3x)}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{\underbrace{(x - 1)^2}_{\text{همواره نامنفی}}} < 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 < 0 \Rightarrow -1 < x < 3$$

چون بازه به‌دست‌آمده شامل ریشهٔ مخرج یا همان مجانِب قائم، یعنی $x = 1$ است، پس این بازه را در $x = 1$ تفکیک حدود می‌کنیم. بنابراین تابع $y = \frac{x^2 + 3x}{x - 1}$ در بازه $(-1, 1)$ و $(1, 3)$ اکیداً نزولی بوده و داریم:

$$\begin{cases} (a, b) = (-1, 1) \Rightarrow b - a = 2 \\ (a, b) = (1, 3) \Rightarrow b - a = 2 \end{cases}$$

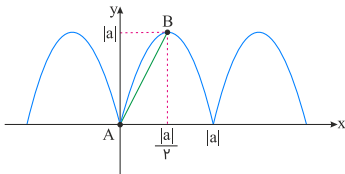


تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - کامیار علیون
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

دورهٔ تناوب تابع f را حساب می‌کنیم:

$$T_f = \frac{\pi}{|\frac{\pi}{a}|} = |a|$$

نمودار تابع f به صورت زیر است:



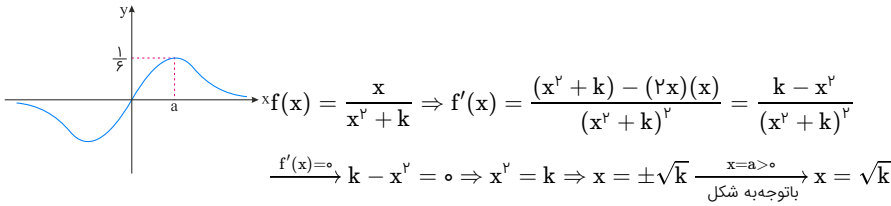
نقاط A و B ، دو نقطهٔ اکسترم نسبی متوالی تابع f هستند.
طول AB را به کمک رابطهٔ فیثاغورس حساب می‌کنیم:

$$AB = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} |a| = \sqrt{5} \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - کامیار علیون
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

باتوجه به نمودار، واضح است که ماکزیمم مطلق این تابع که در نقطهٔ بحرانی $x = a$ اتفاق افتاده است، برابر با $\frac{1}{6}$ می‌باشد؛ به عبارتی $f(a) = \frac{1}{6}$.

ببینید:



حالا می‌دانیم:

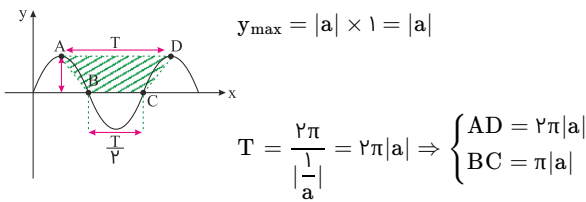
$$f(\sqrt{k}) = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{k}}{k + k} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{k}}{2k} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sqrt{k} = 3 \Rightarrow k = 9$$

تألیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

باتوجه به شکل زیر، واضح است که چهار ضلعی ABCD دوزنقه‌ای است که قاعدهٔ بزرگ آن $AD = T$ ، قاعدهٔ کوچک آن $BC = \frac{T}{3}$ و طول ارتفاع آن برابر با y_A یعنی به اندازهٔ مقدار ماکزیمم تابع است:



ازطرفی دقت کنید که دورهٔ تناوب این تابع برابر است با:

پس مساحت دوزنقهٔ فوق برابر است با:

$$S = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{مجموع قاعده‌ها}}{2} = \frac{(2\pi|a| + \pi|a|) \times |a|}{2} = \frac{3\pi|a|^2}{2} = \frac{3\pi}{2} a^2$$

$$\xrightarrow{S=13/\Delta\pi} \frac{3\pi}{2} a^2 = 13/\Delta\pi \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

دقت کنید که باتوجه به نمودار سینوسی کشیده‌شده و ضابطهٔ $f(x) = a \sin(\frac{x}{a})$ ، می‌تواند هم مثبت و هم منفی باشد:

$$f(x) = a \sin(\frac{x}{a}) = \begin{cases} \xrightarrow{a=3} 3 \sin(\frac{x}{3}) \\ \xrightarrow{a=-3} -3 \sin(\frac{x}{-3}) = 3 \sin(\frac{x}{3}) \end{cases}$$

پس $a = \pm 3$ هر دو قابل قبول هستند و کمترین مقدار ممکن برای a ، -3 است.

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

می‌دانیم در تابع (هموگرافیک) $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، اگر $a+d=0$ باشد، $f = f^{-1}$ است. چون در تابع $f(x) = \frac{-x+1}{x+1}$ ، حاصل $a+d=0$ می‌باشد، پس $f = f^{-1}$ است. بنابراین داریم:

$$f(f(x)) \xrightarrow{f=f^{-1}} f(f^{-1}(x)) = x$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبازی فراهانی

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم: $(x \neq 1)$

$$f(x) = \frac{(x-1)}{x-1} (x+1)(x^2+1)(x^F+1) = \frac{(x^2-1)}{x-1} (x^2+1)(x^F+1) = \frac{x^F-1}{x-1} (x^F+1) = \frac{x^A-1}{x-1}$$

حال از تابع مشتق می‌گیریم.

$$f'(x) = \frac{\lambda x^V (x-1) - (x^A-1)}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(\circ) = 1$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

تستر علوم تجربی دوازدهم

تابع f اکیداً نزولی است و $f(2k^2 - 3k + 1) < f(k^2 + k + 1)$ پس:

$$k^2 + k + 1 > 2k^2 - 3k + 1 \Rightarrow k^2 - 4k < 0 \Rightarrow 0 < k < 4 \quad (1)$$

باید حواسمان را جمع کنیم که عبارات داخل پرانتز مقابل f در دامنه تابع یعنی $(0, +\infty)$ قرار داشته باشند، بنابراین:

$$\begin{cases} k^2 + k + 1 > 0 \Rightarrow (k + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow k \in \mathbb{R} \quad (2) \\ 2k^2 - 3k + 1 > 0 \Rightarrow (2k-1)(k-1) > 0 \Rightarrow k > 1 \text{ یا } k < \frac{1}{2} \quad (3) \end{cases}$$

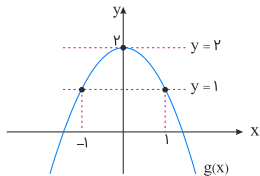
از اشتراک‌گیری بازه‌های (۱)، (۲) و (۳) می‌توان دریافت که: $1 < k < 4$ یا $0 < k < \frac{1}{2}$ که در این بازه‌ها، فقط اعداد صحیح ۲ و ۳ وجود دارند؛ بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

تالیفی آریان حیدری - شروین سیاح نیا

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

می‌دانیم $D_g = \mathbb{R}$ است. D_{fog} برابر است با x ‌هایی که حاصل $g(x)$ به ازای آن‌ها، متعلق به D_f بوده و عددی طبیعی شود. برای این منظور تابع $g(x) = 2 - x^2$ برابر با اعداد طبیعی ۱ و ۲ قرار می‌دهیم. داریم:



$$g(x) = 2 \Rightarrow 2 - x^2 = 2 \Rightarrow x = 0$$

$$g(x) = 1 \Rightarrow 2 - x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$D_{fog} = \{x | \underbrace{x \in D_g}_{x \in \mathbb{R}}, \underbrace{g(x) \in D_f}_{x=0, \pm 1}\} = \{-1, 0, 1\}$$

پس دامنهٔ fog شامل ۳ عضو است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

تستر علوم تجربی دوازدهم

باتوجه به ضابطهٔ $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x + \sqrt{x}}{x}\right)$ و مشتق تابع مرکب، داریم:

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(x) &= (\Delta x^{\frac{1}{2}} - \epsilon x + 1)' \Rightarrow \left(f\left(\frac{x + \sqrt{x}}{x}\right)\right)' \\&= 1 \circ x - \epsilon \Rightarrow \left(\frac{x + \sqrt{x}}{x}\right)' \times f'\left(\frac{x + \sqrt{x}}{x}\right) = 1 \circ x - \epsilon \\&\Rightarrow \frac{-1}{\frac{1}{2}\sqrt{x}^{\frac{1}{2}}} \times f'\left(\frac{x + \sqrt{x}}{x}\right) = 1 \circ x - \epsilon\end{aligned}$$

چون $f'(2)$ مطلوب می‌باشد، کافی است به جای $\frac{x + \sqrt{x}}{x}$ ، ۲ بگذاریم یعنی معادلهٔ $\frac{x + \sqrt{x}}{x} = 2$ را حل کنیم. لذا داریم:

$$\begin{aligned}\frac{x + \sqrt{x}}{x} = 2 &\Rightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} - 2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 = 0 \\&\Rightarrow \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow 1 - \sqrt{x} = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1\end{aligned}$$

حال با قرار دادن $x = 1$ ، در رابطهٔ قبل داریم:

$$\frac{-1}{\frac{1}{2}\sqrt{1}^{\frac{1}{2}}} \times f'(2) = 1 \circ (1) - \epsilon \Rightarrow -\frac{1}{\frac{1}{2}} f'(2) = \epsilon \Rightarrow f'(2) = -\Delta$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

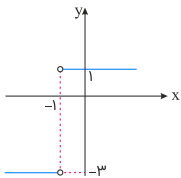
$x = -1$ ریشهٔ سادهٔ عبارت داخل قدر مطلق است، پس f در این نقطه، مشتق‌ناپذیر است: $-1 \notin D_{f'}$
ضابطهٔ f را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = |2x + 2| - x = \begin{cases} 2x + 2 - x & ; x \geq -1 \\ -2x - 2 - x & ; x < -1 \end{cases} = \begin{cases} x + 2 & ; x \geq -1 \\ -3x - 2 & ; x < -1 \end{cases}$$

ضابطهٔ f' را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & ; x > -1 \\ -3 & ; x < -1 \end{cases}$$

نمودار آن به صورت زیر است:



تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - کامیار علیون
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

برای آنکه حد یک تابع گویا در بی‌نهایت، یک عدد شود باید درجه صورت از درجه مخرج، کوچک‌تر یا مساوی باشد. درجه مخرج ۲ است، پس درجه صورت هم باید ۲ باشد. ضریب x^3 را در صورت، مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)^3 + a(x-1)^3}{b(x+2)^2 + (x-3)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\lambda x^3 + 12x^2 + 6x + 1 + ax^3 - 3ax^2 + 3ax - a}{bx^2 + 4bx + 4b + x^2 - 6x + 9}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{(\lambda + a)}^{\text{صفر}} x^3 + (12 - 3a)x^2 + (6 + 3a)x + (1 - a)}{(b+1)x^2 + (4b-6)x + (4b+9)}$$

$$x^3 \text{ ضریب} = 0 \Rightarrow \lambda + a = 0 \Rightarrow a = -\lambda$$

با جایگذاری $a = -\lambda$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{36x^2 - 18x + 9}{(b+1)x^2 + (4b-6)x + (4b+9)} = \frac{36}{b+1}$$

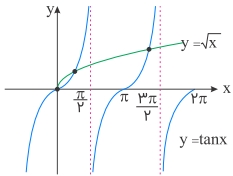
حاصل حد باید با $\frac{a}{b}$ یعنی $\frac{-\lambda}{b} = -4$ برابر باشد. داریم:

$$\frac{36}{b+1} = -4 \Rightarrow b+1 = -9 \Rightarrow b = -10$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

$$\sqrt{x} \cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \sqrt{x} \cos x = \sin x \xrightarrow{\div \cos x} \sqrt{x} = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \sqrt{x} = \tan x$$

نمودار توابع $y = \sqrt{x}$ و $y = \tan x$ را رسم می‌کنیم. مطابق شکل این دو نمودار در فاصله $[0, 2\pi]$ در سه نقطه برخورد می‌کنند، درنتیجه معادله داده‌شده دارای سه جواب است.



تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم
تستر علوم تجربی دوازدهم

ابتدا عبارات را کمی ساده‌تر می‌کنیم:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^p} - x} \times \frac{\sqrt{1+x^p} + x}{\sqrt{1+x^p} + x} = \sqrt{1+x^p} + x$$

$$f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^p}} \times \frac{\sqrt{1+x^p} - x}{\sqrt{1+x^p} - x} = \sqrt{1+x^p} - x$$

حال از عبارت فوق مشتق می‌گیریم. باتوجه به $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ داریم:

$$f'(x) = \frac{px}{2\sqrt{1+x^p}} - 1 = \frac{x}{\sqrt{1+x^p}} - 1$$

$$\xrightarrow{x=1} f'(1) = \frac{1}{\sqrt{1+1^p}} - 1 = \frac{\sqrt{p}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{p}-2}{2}$$

$$g'(x) = \frac{px}{2\sqrt{1+x^p}} + 1 = \frac{x}{\sqrt{1+x^p}} + 1$$

$$\xrightarrow{x=1} g'(1) = \frac{1}{\sqrt{1+1^p}} + 1 = \frac{\sqrt{p}}{2} + 1 = \frac{\sqrt{p}+2}{2}$$

$$\frac{f'(1)}{g'(1)} = \frac{\frac{\sqrt{p}-2}{2}}{\frac{\sqrt{p}+2}{2}} = \frac{\sqrt{p}-2}{\sqrt{p}+2} \times \frac{\sqrt{p}-2}{\sqrt{p}-2}$$

$$= \frac{-(\sqrt{p}-2)^2}{p} = 2\sqrt{p} - 3$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

باتوجه به اینکه $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ و $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ داریم:

$$2 \sin x \cos x - \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \Rightarrow \sin x \left(2 \cos x - \frac{1}{\cos x} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \sin x \left(\frac{2 \cos^2 x - 1}{\cos x} \right) = 0$$

$$۱) \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

$$۲) \frac{2 \cos^2 x - 1}{\cos x} = 0 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{3\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

دسته جواب‌های معادله $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ را می‌توان به فرم $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ در نظر گرفت. بنابراین جواب‌های کلی معادله عبارت‌اند از:

$$\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

روش اول:

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x} \Rightarrow f(f(x)) = \frac{1-f(x)}{1+f(x)} = \frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}} = \frac{\frac{1+x-1+x}{1+x}}{\frac{1+1-x-1+x}{1+x}} = \frac{\frac{2x}{1+x}}{\frac{1}{1+x}} = \frac{2x}{1} = x$$

روش دوم: در تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، اگر $a+d=0$ باشد، داریم:

$$a+d=0 \Rightarrow f^{-1}(x) = f(x)$$

از طرفی ترکیب هر تابع با وارونش، برابر تابع همانی است، پس داریم:

$$f^{-1}(f(x)) = x \xrightarrow{f^{-1}(x)=f(x)} f(f(x)) = x \text{ یا } f(f^{-1}(x)) = x$$

حال چون در تابع $f(x) = \frac{-x+1}{x+1}$ ، مقدار $a+d=0$ است، پس بدون هیچ‌گونه محاسبه‌ای، برای تعیین ضابطه تابع $f \circ f(x)$ می‌توانیم ضابطه $f(f^{-1}(x))$ یا $f^{-1}(f(x))$ را مشخص نماییم که برابر تابع همانی x است.

روش سوم:

مقدار ضابطه $f \circ f(x)$ را به ازای x_0 دلخواهی به دست آورده و سپس این مقدار دلخواه را در تک‌تک گزینه‌ها، جایگذاری کرده و گزینه‌ای را انتخاب می‌کنیم که به ازای همان x_0 ، همان مقدار را بدهد. داریم:

$$f(f(x)) \xrightarrow{x=1} f(f(1)) = f(0) = 1$$

تنها گزینه (۱) به ازای $x=1$ برابر با ۱ می‌شود.

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم
تستر علوم تجربی دوازدهم

$$f(0) = -\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2 \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + a = -\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + a = -\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \Rightarrow b = \pm\sqrt{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) > 0 \Rightarrow 2 \sin\left(\frac{b\pi}{\sqrt{2}} - \frac{3\pi}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} > 0 \xrightarrow{b=\pm\sqrt{2}} b > 0 \Rightarrow b = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow a+b = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

توجه کنید که وقتی نمودار توابع مثلثاتی دارای انتقال افقی هستند، مشخص کردن علامت b (ضریب x) کار ساده‌ای نیست.

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم
تستر علوم تجربی دوازدهم

ابتدا با تفکیک حدود در ریشه‌های داخل قدر مطلق، قدر مطلق‌ها را برداشته و تابع را به صورت یک تابع چندضابطه‌ای می‌نویسیم. داریم:

$$f(x) = x|x^2 - 4| = \begin{cases} \overbrace{x(x^2 - 4)}^{x^3 - 4x} & ; x \leq -2 \text{ یا } x \geq 2 \\ \underbrace{-x(x^2 - 4)}_{-x^3 + 4x} & ; -2 < x < 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4 & ; x < -2 \text{ یا } x > 2 \\ -3x^2 + 4 & ; -2 < x < 2 \end{cases}$$

ابتدا ضابطه اول را برابر صفر قرار می‌دهیم. داریم:

$$3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{4}{3}}$$

چون این دو ریشه به‌دست‌آمده در دامنه $x > 2$ یا $x < -2$ قرار ندارد، پس در ضابطه اول اکسترمم نسبی و نقطه بحرانی وجود ندارد. حال ضابطه دوم را برابر صفر قرار می‌دهیم. داریم:

$$-3x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{4}{3}} \quad (\text{ریشه ساده})$$

ضابطه دوم مشتق، دارای ۲ ریشه ساده بوده که متعلق به دامنه آن می‌باشد. درنتیجه ضابطه دوم دارای ۲ نقطه بحرانی است. در آخر به سراغ نقاط مرزی $x = -2$ و $x = 2$ می‌رویم. داریم:

$$f'_-(-2) = 8, f'_+(-2) = -8 \Rightarrow f'(-2) = \text{وجود ندارد}$$

چون در نقطه $x = -2$ ، مشتق تابع از مثبت به منفی تغییر علامت می‌دهد، پس $x = -2$ ، طول ماکزیمم نسبی تابع f بوده و چون مشتق چپ و مشتق راست برابر نیستند، پس مشتق در $x = -2$ وجود نداشته و درنتیجه نقطه بحرانی محسوب می‌شود. حال به سراغ نقطه $x = 2$ می‌رویم. داریم:

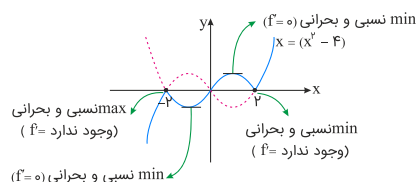
$$f'_-(2) = -8, f'_+(2) = 8 \Rightarrow f'(2) = \text{وجود ندارد}$$

باتوجه به توضیحات قبل، نقطه $x = 2$ طول نقطه مینیمم نسبی تابع f بوده و نقطه بحرانی نیز محسوب می‌شود.

پس نمودار تابع f دارای ۴ اکسترمم نسبی و ۴ نقطه بحرانی است.

روش دوم: نمودار تابع f را رسم می‌کنیم. داریم:

$$f(x) = x|x^2 - 4| = \begin{cases} x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2) & ; x \leq -2 \text{ یا } x \geq 2 \\ -x(x^2 - 4) = -x(x - 2)(x + 2) & ; -2 < x < 2 \end{cases}$$



پس ۴ اکسترمم نسبی و ۴ نقطه بحرانی دارد.

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علیون

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

ابتدا با داشتن ضابطهٔ $f(u)$ ، باید ضابطهٔ $f(x)$ را بسازیم. برای این منظور باید ضابطهٔ $f(u)$ را برحسب u ، بازنویسی کنیم. داریم:

$$\begin{aligned} a^u + b^u &= (a + b)^u - uab(a + b) \\ f\left(\frac{x^u + 1}{x}\right) &= x^u + \frac{1}{x^u} \\ \Rightarrow f\left(x + \frac{1}{x}\right) &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^u - u \cancel{x} \frac{1}{\cancel{x}} \left(x + \frac{1}{x}\right) \\ \xrightarrow{x + \frac{1}{x} = X} f(X) &= X^u - uX \end{aligned}$$

حال با داشتن ضابطهٔ $f(x) = x^3 - 3x$ ، مقدار $f(\sqrt{5})$ را مشخص می‌کنیم. داریم:

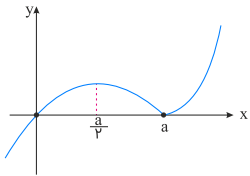
$$f(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^3 - 3(\sqrt{5}) = 5\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

پس $f(\sqrt{5})$ ، دو برابر $\sqrt{5}$ است.

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم
تستر علوم تجربی دوازدهم

ابتدا به کمک بازبینی، نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$y = \begin{cases} x^u - ax & ; x \geq a \\ -x^u + ax & ; x < a \end{cases}$$



بنابراین مختصات نقطهٔ $\min$ و $\max$ برابر است با:

$$\begin{aligned} \max : \left(\frac{a}{u}, f\left(\frac{a}{u}\right)\right) &= \left(\frac{a}{u}, \frac{a^u}{u}\right) \\ \min : (a, 0) \end{aligned}$$

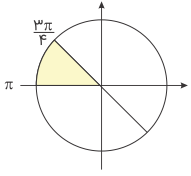
حال فاصلهٔ دو نقطه را برابر با $\sqrt{2}$ قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(a - \frac{a}{u}\right)^2 + \left(0 - \frac{a^u}{u}\right)^2} &= \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{a^u}{u} + \left(\frac{a^u}{u}\right)^2} = \sqrt{2} \\ \xrightarrow{\frac{a^u}{u} = t} t + t^2 &= 2 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow \frac{a^u}{u} = 1 \Rightarrow a^u = u \xrightarrow{a > 0} a = 2 \\ t = -2 \Rightarrow \frac{a^u}{u} = -2 \Rightarrow \text{امکان ندارد} \end{cases} \end{aligned}$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - کامیار علیون
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

$$\frac{\sqrt{1+\sin 2\alpha}-1}{\sqrt{1-\sin 2\alpha}+1}=\frac{\sqrt{(\sin \alpha+\cos \alpha)^2}-1}{\sqrt{(\sin \alpha-\cos \alpha)^2}+1}=\frac{|\sin \alpha+\cos \alpha|-1}{|\sin \alpha-\cos \alpha|+1}$$

اگر $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$ باشد، $\sin \alpha + \cos \alpha < 0$ و $\sin \alpha - \cos \alpha > 0$ است. پس داریم:



$$\begin{aligned}\frac{|\sin \alpha + \cos \alpha| - 1}{|\sin \alpha - \cos \alpha| + 1} &= \frac{-\sin \alpha - \cos \alpha - 1}{\sin \alpha - \cos \alpha + 1} = \frac{-2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - (2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1)}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - (1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2})} \\ &= \frac{-2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{-2 \cos \frac{\alpha}{2} (\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2})}{2 \sin \frac{\alpha}{2} (\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2})} = -\cot \frac{\alpha}{2}\end{aligned}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

در این مسئله تابعی که باید ماکزیمم شود، مساحت مستطیلی است که محدود به سهمی $y = 12 - x^2$ و محور x ها می‌باشد. نقطه دلخواه $A(x, y)$ و $A'(-x, y)$ را روی سهمی در نظر بگیرید. مساحت مستطیل سایه‌زده در شکل زیر برابر است با:

$$\begin{aligned}S &= \text{عرض} \times \text{طول} \xrightarrow{y=12-x^2} S(x) = 2x(12 - x^2) = 24x - 2x^3 \\ &\xrightarrow{\text{مشتق می‌گیریم}} S'(x) = 24 - 6x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \\ &\xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} x = 2, y = 8 \\ &\Rightarrow S_{\max} = 32\end{aligned}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

نکته تستری : در توابع شامل رادیکال با فرجهٔ زوج، اولین گام تعیین دامنهٔ تعریف تابع است.

دامنهٔ تعریف تابع f ، برابر $\mathbb{R}$ است. برای بررسی یکنوایی تابع f ، باید از ضابطهٔ تابع مشتق گرفته و جدول تغییرات تابع را رسم کنیم. داریم:

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2x + 3} \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{\overbrace{2x - 2}^{y(x-1)}}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}} = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 3} + x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}$$

با کمی دقت به راحتی پی می‌بریم که مخرج ریشهٔ حقیقی ندارد (چون دلتای عبارت زیر رادیکال، یعنی عبارت $x^2 - 2x + 3$ منفی است). بنابراین مخرج کسر مشتق همواره مثبت است. حال به بررسی وجود ریشه‌های صورت کسر مشتق می‌پردازیم. داریم:

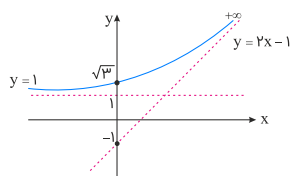
$$\sqrt{x^2 - 2x + 3} + x - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 3} = 1 - x \xrightarrow{1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1} x^2 - 2x + 3 = (1 - x)^2 \\ \Rightarrow x^2 - 2x + 3 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 3 = 1 \Rightarrow \text{ریشهٔ حقیقی ندارد}$$

چون صورت کسر مشتق ریشهٔ حقیقی ندارد، پس یا همواره مثبت است و یا همواره منفی. با کمی دقت یا جایگذاری عدد دلخواهی به راحتی پی می‌بریم صورت کسر مشتق نیز همواره مثبت می‌باشد. باتوجه‌به این توضیحات صورت و مخرج مشتق همواره مثبت بوده و درنتیجه مشتق تابع f ، همواره مثبت می‌باشد. بنابراین نمودار تابع f ، همواره اکیداً صعودی خواهد بود.

روش دوم: باتوجه‌به اینکه دامنهٔ تعریف تابع f برابر $\mathbb{R}$ است، پس کافی است رفتار تابع را در بی‌نهایت دور بررسی نماییم. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt{x^2 - 2x + 3}) \xrightarrow{\text{هم‌ارزی برنولی}} \lim_{x \rightarrow \infty} (x + |x - 1|) \\ \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} y = 2x - 1 \\ \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} y = 1 \end{cases}$$

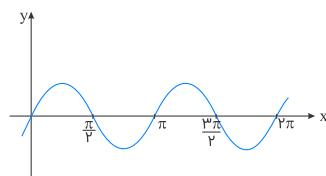
پس نمودار f به صورت زیر خواهد بود:



تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علیون
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

$$f'(x) = \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

نمودار $f'(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$ را رسم می‌کنیم:



جایی که $f'(x)$ مثبت باشد، تابع $f(x)$ صعودی است. مطابق شکل روی بازهٔ $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ مثبت می‌باشد.

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علیون
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

ابتدا تابع $f + ۱$ را تشکیل می‌دهیم. داریم:

$$f = \{(1, ۲), (۰, -۱), (۲, ۰)\}$$

$$f + ۱ = \{(1, ۳), (۰, ۰), (۲, ۱)\}$$

حال با داشتن تابع $f + ۱$ ، مقدار تابع $(fo(f + ۱))(۰)$ را محاسبه می‌کنیم. برای این منظور در گام اول مقدار تابع $f + ۱$ را به ازای صفر مشخص کرده و در گام بعدی، مقدار به‌دست‌آمده را در تابع f قرار داده و مقدار تابع را به ازای این مقدار محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$(f + ۱)(۰) = ۰$$

$$\Rightarrow (fo(f + ۱))(۰) = f(\underbrace{(f + ۱)(۰)}_۰) = f(۰) \xrightarrow{(۰, -۱) \in f} f(۰) = -۱$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم
تستر علوم تجربی دوازدهم

باید عبارت زیر رادیکال را به‌صورت مربع کامل تبدیل کنیم. داریم:

$$f(x) = \sqrt{x - ۲\sqrt{x-۱}}; x \geq ۲$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{x - ۱ - ۲\sqrt{x-۱} + ۱} = \sqrt{(\sqrt{x-۱} - ۱)^۲} = |\sqrt{x-۱} - ۱|$$

چون $x \geq ۲$ است، پس عبارت داخل قدر مطلق، قطعاً بزرگ‌تر یا مساوی صفر خواهد بود. پس داریم:

$$\xrightarrow{x \geq ۲} y = f(x) = \underbrace{|\sqrt{x-۱} - ۱|}_{\substack{\text{همواره بزرگ‌تر} \\ \text{یا مساوی صفر}}} \xrightarrow{x \rightarrow y, y \rightarrow x} x = \sqrt{y-۱} - ۱$$

$$\Rightarrow \sqrt{y-۱} = x + ۱ \xrightarrow{\text{به توان } ۲} y - ۱ = (x + ۱)^۲$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = (x + ۱)^۲ + ۱ = x^۲ + ۲x + ۲, \quad x \geq ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۲ \\ b = ۲ \\ c = ۰ \end{cases} \Rightarrow a + b + c = ۴$$

تذکر: چون بُرد تابع f به‌صورت $y \geq ۰$ است، پس در تابع وارون، $x \geq ۰$ خواهد بود.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

نکته: توابع شامل جزء صحیح در نقطه‌ای به طول $x_۰$ که به ازای آن عبارت داخل جزء صحیح، عددی صحیح شود، معمولاً ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است. زمانی تابع در $x_۰$ مشتق‌پذیر می‌شود که $x_۰$ طول $\min$ (نسبی) عبارت داخل جزء صحیح بوده و یا در $x_۰$ ، پشت جزء صحیح عامل صفرشونده از درجهٔ ۲ (یا بیشتر از ۲) وجود داشته باشد. ابتدا از روی حدود x ، حدود عبارت داخل جزء صحیح را می‌سازیم. داریم:

$$۴ < x < ۸ \Rightarrow \frac{۴}{۳} < \frac{x}{۳} < \frac{۸}{۳}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید $\frac{x}{۳}$ در تنها $x = ۶$ مقدار صحیح به خود می‌گیرد. چون در صورت مسئله به این جمله اشاره شده است که تابع در این بازه مشتق‌پذیر است. پس باید در $x = ۶$ ، پشت جزء صحیح عامل صفرشونده از درجهٔ ۲ قرار دهیم تا تابع در این بازه مشتق‌پذیر باشد. به عبارت دیگر $x = ۶$ ریشهٔ مضاعف عبارت پشت جزء صحیح باشد. داریم:

$$۲ \text{ از درجهٔ } x = ۶ \text{ عامل صفرشونده در } x = ۶ \Rightarrow \begin{cases} b = -۱۲ \\ c = ۳۶ \end{cases}$$

درنتیجه حاصل $b + ۲c$ برابر است با:

$$b + ۲c = (-۱۲) + ۲(۳۶) = ۶۰$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

می‌دانیم: $(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$ ، بنابراین $f(x)$ هم بر $x-1$ و هم بر $x-2$ بخش‌پذیر است و داریم:

$$f(1) = f(2) = 0$$

حال با جایگذاری $x=1$ و $x=2$ در ضابطهٔ f ، مقادیر a و b را محاسبه می‌کنیم:

$$f(1) = 0 \Rightarrow 1^4 - a(1)^3 + 5(1)^2 - 9(1) + b = 0 \Rightarrow b - a - 3 = 0 \quad (1)$$

$$f(2) = 0 \Rightarrow 2^4 - a(2)^3 + 5(2)^2 - 9(2) + b = 0 \Rightarrow b - 8a + 18 = 0 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} a = 3, b = 6 \Rightarrow a + b = 9$$

تألیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

طبق قاعدهٔ ل‌ه‌ویل، در رادیکال صورت بین $9x^2$ و $5x$ ، $9x^2$ و در مخرج بین $\sqrt{-2x}$ و $2x$ ، $2x$ را انتخاب می‌کنیم؛ پس داریم:

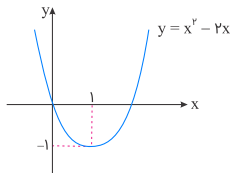
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{9x^2 + 5x}}{2x + \sqrt{-2x}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{9x^2}}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - |3x|}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - (-3x)}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

اول به سراغ جزء صحیح می‌رویم. نقطهٔ $x=1$ طول رأس سهمی $y = x^2 - 2x$ است. باتوجه‌به نمودار سهمی، وقتی $x \rightarrow 1$ ، $x^2 - 2x \rightarrow (-1)^+$ ، بنابراین $[x^2 - 2x] = -1$ و حد به‌صورت زیر درمی‌آید:



$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{\sqrt{3x+1} - 2} = \frac{1^2 + 3(1) - 4}{\sqrt{3(1)+1} - 2} = \frac{0}{0}$$

بنابراین به سراغ رفع ابهام عامل صفرشونده می‌رویم. با ضرب مخرج در مزدوج آن داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{\sqrt{3x+1} - 2} &\times \frac{\sqrt{3x+1} + 2}{\sqrt{3x+1} + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 3x - 4) \times (\sqrt{3x+1} + 2)}{(3x+1) - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+4)(\sqrt{3x+1} + 2)}{3(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+4)(\sqrt{3x+1} + 2)}{3} = \frac{5 \times 4}{3} = \frac{20}{3} \end{aligned}$$

روش دوم: از روش هوییتال نیز می‌توانیم استفاده کنیم.

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

$$f(t) = \sqrt[p]{t^p + k} = (t^p + k)^{\frac{1}{p}}$$

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{1}{p}(t^p + k)^{-\frac{p-1}{p}} \times pt = \frac{pt}{p\sqrt[p]{(t^p + k)^p}}$$

از آنجاکه t زمان و لذا همواره مثبت است، پس $f'(t) > 0$ و آهنگ رشد جمعیت همواره مثبت می‌باشد. اما دقت کنید در یک بازه زمانی طولانی ($t \rightarrow +\infty$) داریم:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{pt}{p\sqrt[p]{(t^p + k)^p}} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{هم‌ارزی پرونان}} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{pt}{p\sqrt[p]{(t^p + k)^p}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{pt}{p\sqrt[p]{(t^p)^p}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{pt}{p\sqrt[p]{t^p}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{pt}{pt^{\frac{p}{p}}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{p}{pt^{\frac{1}{p}}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{p}{p\sqrt[p]{t}} = \frac{p}{+\infty} = 0^+$$

پس آهنگ رشد جمعیت در درازمدت، عدد مثبت بسیار کوچکی است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

ابتدا معادله را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\frac{\sin yx - \sin x}{\sin x \sin yx} = \frac{y}{\sin yx} \Rightarrow \sin yx(\sin yx - \sin x) = y \sin x \sin yx$$

$$\xrightarrow{\sin yx = y \sin yx \cos yx} y \sin yx \cos yx(\sin yx - \sin x) = y \sin x \sin yx$$

$$\xrightarrow[\text{ریشهٔ مخرج}]{\sin yx \neq 0} \cos yx(\sin yx - \sin x) = \sin x \Rightarrow \cos yx \sin yx - \cos yx \sin x = \sin x$$

$$\Rightarrow \cos yx \sin yx = \sin x(1 + \cos yx) \xrightarrow{1 + \cos yx = y \cos yx} \cos yx \sin yx = y \sin x \cos yx$$

$$\Rightarrow y \sin x \cos x \cos yx = y \sin x \cos yx \xrightarrow{\sin x, \cos x \neq 0} \cos yx = \cos x$$

$$\Rightarrow yx = yk\pi \pm x \Rightarrow x = yk\pi \text{ یا } x = \frac{yk\pi}{y}$$

باتوجه به فرض، روابط $\sin x \neq 0$ ، $\sin yx \neq 0$ ، $\sin yx \neq 0$ باید برقرار باشند. پس: $\frac{k\pi}{y}$ ، $\frac{k\pi}{y}$ ، $\frac{k\pi}{y}$. بنابراین در بازه $[0, 2\pi]$ فقط دو جواب $x = \frac{y\pi}{y}$ ، $\frac{4\pi}{y}$ قابل قبول است.

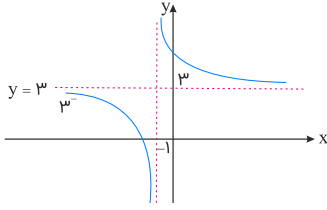
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

راه حل اول:

می‌دانیم $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+4}{x+1} = 3$ است. ولی چون عبارت $\frac{3x+4}{x+1}$ داخل جزء صحیح قرار دارد، مهم است بدانیم از مقادیر بیشتر از ۳ به عدد ۳ نزدیک می‌شود یا از مقادیر کمتر از ۳. برای این منظور نمودار تابع $y = \frac{3x+4}{x+1}$ را رسم می‌کنیم.



مطابق شکل، در $-\infty$ تابع از مقادیر کمتر از ۳ به عدد ۳ نزدیک می‌شود.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{3x+4}{x+1} \right] = [3^-] = 2$$

راه حل دوم:

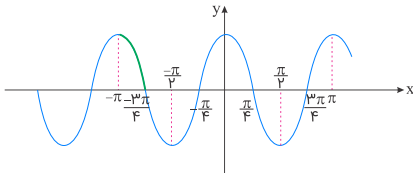
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{3x+4}{x+1} \right] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{3x+3}{x+1} + \frac{1}{x+1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[3 + \frac{1}{x+1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 + \left[\frac{1}{x+1} \right] = 3 + [0^-] = 3 - 1 = 2 \end{aligned}$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

می‌دانیم:

$$\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

پس نمودار تابع $y = \cos 2x$ را رسم می‌کنیم. داریم:

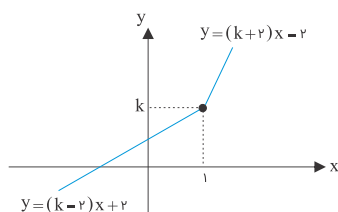


باتوجه به نمودار رسم‌شده در بالا، تابع در فاصله $\left[-\pi, -\frac{3\pi}{4} \right]$ اکیداً نزولی است، پس حداقل مقدار a برابر با $-\pi$ می‌باشد.

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم
تستر علوم تجربی دوازدهم

برای حذف قدر مطلق و ساده‌سازی عبارت، دامنهٔ تابع را به دو بازهٔ $x \geq 1$ و $x < 1$ افراز می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2 + kx = (k+2)x - 2 & ; x \geq 1 \\ -2x + 2 + kx = (k-2)x + 2 & ; x < 1 \end{cases}$$



هر دو ضابطه، خط هستند و مقدار هر دو ضابطه به ازای $x = 1$ یکسان است. (توجه داشته باشید که نمودار ضابطهٔ اول به ازای $x = 1$ ، توپر است و نمودار ضابطهٔ دوم به ازای $x = 1$ توخالی می‌باشد). برای آنکه این دو خط اکیداً صعودی باشند، باید شیب هردوی آن‌ها مثبت باشد، یعنی: $k+2 > 0$ و $k-2 > 0$ و در نتیجه $k > 2$ و $k > -2$ که از اشتراک این دو بازه $k > 2$ به دست می‌آید.

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

تستر علوم تجربی دوازدهم

عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\sin x (\sin x - \cos x) = \sin^2 x - \sin x \cos x = 1$$

$$\Rightarrow 1 - \sin^2 x = -\sin x \cos x$$

$$\cos^2 x = -\sin x \cos x \Rightarrow \cos^2 x + \sin x \cos x = 0$$

$$\Rightarrow \cos x (\cos x + \sin x) = 0$$

بنابراین دو حالت زیر رخ می‌دهد:

$$1) \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\xrightarrow{[0, 2\pi]} x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$2) \cos x = -\sin x \xrightarrow{-\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} + x)} \cos x = \cos(\frac{\pi}{2} + x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + x \Rightarrow \text{نشدنی} \\ x = 2k\pi - (\frac{\pi}{2} + x) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \xrightarrow{[0, 2\pi]} x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

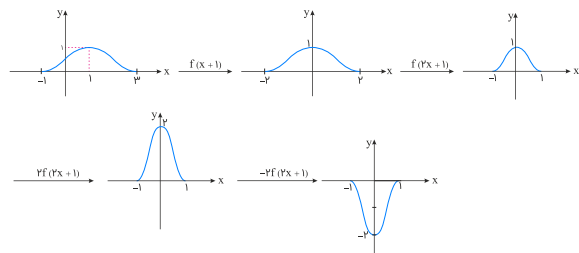
پس معادله در بازهٔ $[0, 2\pi]$ ، چهار جواب دارد.

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری

تستر علوم تجربی دوازدهم

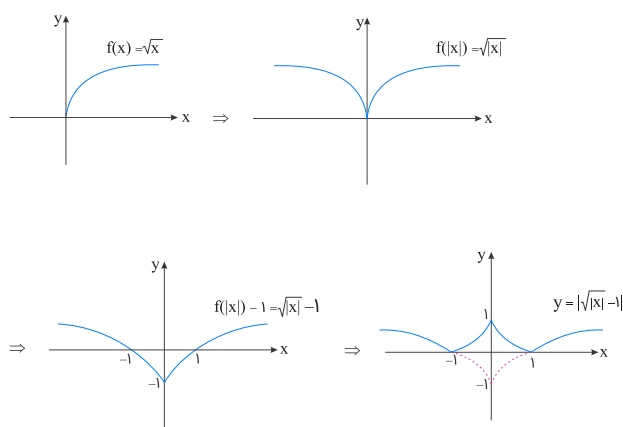
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

در گام نخست تابع f را یک واحد به سمت چپ انتقال افقی می‌دهیم؛ سپس طول نقاط نمودار را در $\frac{1}{p}$ ضرب می‌کنیم و بعد عرض نقاط را در ۲ ضرب کرده و درنهایت نمودار را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. داریم:



تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

ابتدا تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را رسم می‌کنیم. داریم:



تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم
تستر علوم تجربی دوازدهم

نقطه A روی منحنی $y = \sqrt{x^2 + 2x + 1}$ را به صورت $A(x, \sqrt{x^2 + 2x + 1})$ در نظر می‌گیریم. فاصله $A(x, \sqrt{x^2 + 2x + 1})$ تا $B(-۳, ۰)$ را می‌نویسیم:

$$AB = \sqrt{(x+۳)^2 + (\sqrt{x^2+2x+1}-۰)^2} = \sqrt{2x^2 + \lambda x + 17}$$

ریشه مشتق عبارت فوق را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{4x + \lambda}{2\sqrt{2x^2 + \lambda x + 17}} = 0 \Rightarrow x = -2$$

$x = -2$ را در $\sqrt{2x^2 + \lambda x + 17}$ قرار می‌دهیم:

$$\min(AB) = \sqrt{\lambda - 16 + 17} = \sqrt{9} = 3$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - کامیار علیون
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

نکته: توابع به شکل $y = |f(x)|$ در ریشه‌های فقط ساده (غیرمکرر) داخل قدر مطلق، مشتق‌ناپذیر هستند. اگر به ازای این ریشه ساده، پشت قدر مطلق عامل صفرشونده دیده شود، تابع در این ریشه ساده داخل قدر مطلق، مشتق‌پذیر بوده و مشتق برابر صفر دارد.

باتوجه به نکته فوق، ریشه‌های ساده داخل قدر مطلق را مشخص می‌کنیم. داریم:

$$3x^4 + x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(3x^3 + x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x^3 + x - 4 = 0 \end{cases}$$

برای حل معادله درجه سوم $3x^3 + x - 4 = 0$ ، چون مجموع ضرایب معادله برابر صفر است، پس یک ریشه قطعاً $x = 1$ خواهد بود. چون این عبارت به صورت مجموع دو تابع اکیداً صعودی است، پس این عبارت اکیداً صعودی بوده و نمی‌تواند بیش از یک جا، محور x ها را قطع کند. بنابراین معادله $3x^3 + x - 4 = 0$ ، تنها دارای ریشه ساده $x = 1$ است.

باتوجه به توضیحات بالا، عبارت داخل قدر مطلق دارای دو ریشه ساده $x = 0$ و $x = 1$ است و دیگر ریشه‌ای ندارد. چون به ازای $x = 0$ عبارت پشت قدر مطلق صفر می‌شود، نتیجه می‌گیریم که مشتق تابع در $x = 0$ صفر است. پس تابع تنها در $x = 1$ ، مشتق‌ناپذیر می‌باشد.

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبازی فراهانی
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

نکته: اگر در تابع $y = f(x) \times g(x)$ مقدار $f(x)$ در $x = a$ صفر شود (عامل صفرشونده)، آنگاه:

$$y'(a) = f'(a) \times g(a)$$

باتوجه به ضابطه $y = \frac{(x-2)^2}{\sqrt{ax^2+1}}$ و همچنین نکته عامل صفرشونده، داریم:

$$y' = 2(x-2) \times \frac{1}{\sqrt{ax^2+1}}$$

همچنین باتوجه به اینکه هنوز عامل صفرشونده موجود است، بنابراین می‌توان برای مشتق دوم نیز از همین ضابطه دوباره مشتق گرفت:

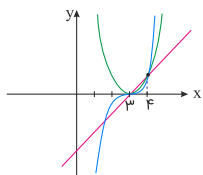
$$y'' = 2 \times \frac{1}{\sqrt{ax^2+1}} \xrightarrow{x=2} 1 = 2 \times \frac{1}{\sqrt{a(2)^2+1}} \Rightarrow \sqrt{4a+1} = 2$$

$$\Rightarrow 4a+1=4 \Rightarrow a=\frac{3}{4}$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علیون
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

توابع $f(x) = (x+a)$ ، $g(x) = (x+a)^2$ و $h(x) = (x+a)^3$ ، هرکدام، یک انتقال افقی a واحدی از توابع $y = x$ ، $y = x^2$ و $y = x^3$ هستند که تنها در بازه $[0, 1]$ مقدار تابع $y = x$ از مقدار تابع $y = x^2$ و مقدار تابع $y = x^2$ از مقدار تابع $y = x^3$ بیش‌تر است. پس از انتقال افقی a واحدی این سه تابع، تغییری در شکل و ظاهر و نحوه قرارگیری آن‌ها رخ نمی‌دهد.

باتوجه به این‌که در بازه $[3, 4]$ داریم: $(x+a)^3 \geq (x+a)^2 \geq (x+a)$ ، می‌توان دریافت که هرکدام از توابع f ، g و h یک انتقال سه واحدی به سمت راست از توابع اولیه‌شان هستند، بنابراین: $a = -3$.

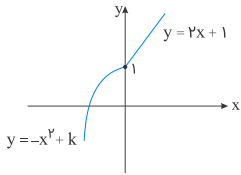


تألیفی آریان حیدری - شروین سیاح نیا
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

باتوجه به فرض سوال، داریم: $f^{-1}(f^{-1}(3)) = 0$. اگر $f^{-1}(3) = a$ ، آنگاه بررسی می‌کنیم که تابع f به ازای چه مقدار a ، خروجی ۳ می‌دهد. لذا داریم:

$$f(a) = 3 \Rightarrow \begin{cases} 2a + 1 = 3 \Rightarrow a = 1 \\ -a^2 + k = 3 \Rightarrow a^2 = k - 3 \Rightarrow a = \pm\sqrt{k-3} \end{cases}$$

اما دقت کنید که چون تابع f وارون‌پذیر است، باید یک‌به‌یک باشد. لذا باتوجه به نمودار تابع f می‌توان گفت که $k \leq 1$: زیرا اگر $k > 1$ ، آنگاه تابع f دیگر یک‌به‌یک نخواهد بود. بنابراین مقدار $\sqrt{k-3}$ تعریف نشده است و $a = \pm\sqrt{k-3}$ قابل قبول نیست. (چون زیر رادیکال منفی می‌شود)



پس فقط $a = 1$ قابل قبول است. در ادامه داریم:

$$f^{-1}(3) = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = 0 \Rightarrow f(0) = 1$$

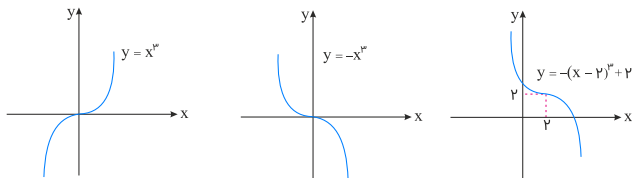
$$\xrightarrow{x \leq 0} f(0) = -(0)^2 + k = 1 \Rightarrow k = 1$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

ضابطه تابع را به کمک اتحاد مکعب دوجمله‌ای ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^3 + 6x^2 - 12x + 10 = -x^3 + 6x^2 - 12x + 8 + 2 \\ &= -(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) + 2 = -(x-2)^3 + 2 \end{aligned}$$

نمودار تابع $y = x^3$ را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم، سپس نمودار را ۲ واحد به سمت راست و ۲ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



نمودار تابع از ربع سوم نمی‌گذرد.

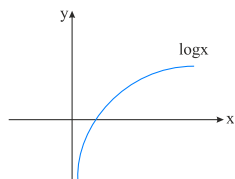
تألیفی آریان حیدری - شروین سیاح نیا
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

چون حاصل حد فقط برابر $-\infty$ است، پس مخرج باید در $x = 1$ ریشه مضاعف داشته باشد. برای این منظور باید مخرج کسر را به صورت $F(x-1)^2$ در نظر بگیریم. داریم:

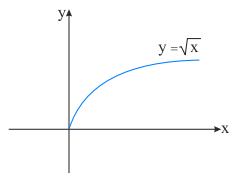
$$\begin{aligned} \text{مخرج کسر} &= ax^2 + bx + 4 = 4(x-1)^2 = 4(x^2 - 2x + 1) = 4x^2 - 8x + 4 \\ \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -8 \end{cases} &\Rightarrow a^2 + b = 4^2 + (-8) = 16 - 8 = 8 \end{aligned}$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

نمودار توابع را رسم می‌کنیم:
گزینه "۱": تابع اکسترمم نسبی ندارد.

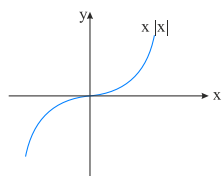


گزینه "۲": $x = 0$ ابتدای بازه دامنه است و اکسترمم نسبی نمی‌باشد.

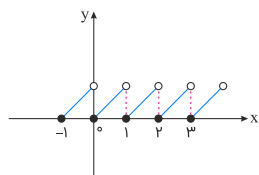


گزینه "۳": تابع اکسترمم نسبی ندارد.

$$y = x|x| = \begin{cases} x^2 & ; x \geq 0 \\ -x^2 & ; x < 0 \end{cases}$$

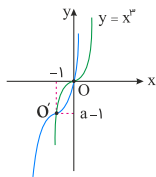


گزینه "۴": تابع در نقاط با طول صحیح min نسبی دارد.



تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علیون
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

ابتدا ضابطهٔ تابع را طوری می‌نویسیم که از آن بیشترین استفاده را ببریم. باتوجه‌به اینکه: $x^3 + 3x^2 + 3x + a = (x + 1)^3 + a - 1$ نمودار این تابع را از روی تابع $y = x^3$ می‌کنیم:



مرکز تقارن تابع $y = x^3$ نقطهٔ $O(0, 0)$ است که پس از انتقال، به نقطهٔ $(-1, -5)$ تبدیل شده است. طبق قوانین انتقال، نقطهٔ $O(0, 0)$ ابتدا یک واحد انتقال افقی به سمت چپ داشته و سپس $(a - 1)$ واحد انتقال قائم خواهد داشت. بنابراین مختصات این نقطه پس از انتقال $(-1, a - 1)$ خواهد بود که باتوجه‌به فرض مسئله داریم:

$$O' = (-1, -5) \Rightarrow (-1, -5) = (-1, a - 1) \Rightarrow a - 1 = -5 \Rightarrow a = -4$$

نکته: مرکز تقارن تابع درجه سوم $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، نقطهٔ $(-\frac{b}{3a}, f(-\frac{b}{3a}))$ است.

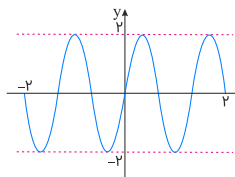
تألیفی آریان حیدری - شروین سیاح نیا

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

باتوجه‌به اینکه $\cos(\frac{3\pi}{4} - \pi bx) = -\sin \pi bx$ ، ضابطهٔ نمودار را ساده می‌کنیم:

$$y = a \cos(\underbrace{\frac{3\pi}{4} - \pi bx}_{-\sin \pi bx}) = -a \sin \pi bx$$



با دقت در شکل می‌بینیم که $y_{\max} = 2$ ، یعنی:

$$3T = 2 - (-2) = 4 \Rightarrow T = \frac{4}{3}$$

$$\xrightarrow{T = \frac{4}{3}} \frac{2\pi}{|\pi b|} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{2}{|b|} = \frac{4}{3} \Rightarrow |b| = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{2} \text{ ق.ق} \\ b = -\frac{3}{2} \text{ غ.ق} \end{cases}$$

چون $a = -2$ و نمودار نسبت به محور y ها قرینه نشده است، $b = -\frac{3}{2}$ قابل قبول نیست، بنابراین داریم:

$$a = -2, \quad b = \frac{3}{2} \Rightarrow a.b = -3$$

* می‌توانستیم $a = 2$ و $b = -\frac{3}{2}$ را هم در نظر بگیریم اما چون ضرب مدنظر است فرقی ندارد.

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

روش اول:

صورت کسر، بازشدهٔ $(x-1)^۳$ است. حد داده‌شده را به سه حد تفکیک می‌کنیم:

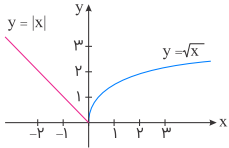
$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^۳ - ۳x^۲ + ۳x - 1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[۴]{x}-1)(\sqrt[۴]{x}-1)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^۳}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[۴]{x}-1)(\sqrt[۴]{x}-1)} \\&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[۴]{x}-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[۴]{x}-1} \\&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[۴]{x}^۳ + \sqrt[۴]{x} + 1)}{\sqrt[۴]{x}-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[۴]{x}-1)(\sqrt[۴]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt[۴]{x}-1} \\&= ۲ \times ۳ \times ۴ = ۲۴\end{aligned}$$

روش دوم:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1} &= \frac{n}{m} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^1 - 1}{\sqrt{x} - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^1 - 1}{\sqrt[۴]{x} - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^1 - 1}{\sqrt[۴]{x} - 1} &= ۲ \times ۳ \times ۴ = ۲۴\end{aligned}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم
تستر علوم تجربی دوازدهم

ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم. داریم:



تابع در $x = ۰$ نقطهٔ گوشه‌ای است، پس گزینه‌های "۱" و "۳" نمی‌توانند درست باشند. چون مشتق راست تابع f در $x = ۰$ موجود نیست (مشتق راست برابر $+\infty$ است)، گزینهٔ "۲" هم نمی‌تواند صحیح باشد.

$$f'_+(۰) : (\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{0^+} = +\infty$$

بنابراین تنها گزینهٔ "۴" صحیح می‌باشد و تابع f در $x = ۰$ نقطهٔ گوشه‌ای است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

اول نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned}f(x) &= \sqrt[۳]{(x+۲)^۳} = (x+۲)^{\frac{۳}{۳}} \\ f'(x) &= \frac{۳}{۳}(x+۲)^{-\frac{۱}{۳}} = \frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x+۲}} \Rightarrow \text{نقاط بحرانی} \begin{cases} x = -۳ \\ x = -۲ \\ x = ۰ \end{cases}\end{aligned}$$

مقدار تابع را در نقاط بحرانی پیدا می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} f(-۳) &= ۱ \\ f(-۲) &= ۰ \Rightarrow \min \\ f(۰) &= \sqrt[۳]{۴} \Rightarrow \max \end{aligned} \right\} \Rightarrow \max + \min = \sqrt[۳]{۴}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - کامیار علیون
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

راه حل اول:

به کمک اتحاد $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ داریم:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 x = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 x \quad (*)$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = \sin \frac{\pi}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{\sqrt{2}} \xrightarrow{0 \leq x < \frac{\pi}{\sqrt{2}}} \frac{\pi}{\sqrt{2}} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{\sqrt{2}} \xrightarrow{0 \leq x < \frac{\pi}{\sqrt{2}}} \frac{\pi}{\sqrt{2}} \end{cases} \\ \sin x = \sin \frac{-\pi}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \xrightarrow{0 \leq x < \frac{\pi}{\sqrt{2}}} \text{جواب ندارد} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{\sqrt{2}} \xrightarrow{0 \leq x < \frac{\pi}{\sqrt{2}}} \frac{\pi}{\sqrt{2}} \end{cases} \end{cases}$$

مجموع جواب‌ها برابر است با:

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{\sqrt{2}}$$

راه حل دوم:

$$\sin^2 x = \sin^2 \alpha \Rightarrow x = k\pi \pm \alpha$$

حال از معادله $(*)$ ، داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 x = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin^2 \frac{\pi}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$\xrightarrow{\div \sqrt{2}} x = \frac{k\pi}{\sqrt{2}} \pm \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

k	o	۱	۲
x	$\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ یا $-\frac{\pi}{\sqrt{2}}$	$\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ یا $-\frac{\pi}{\sqrt{2}}$	غ، ق، ق
	✓	✓	✓

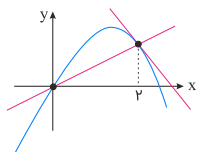
$$\Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{\sqrt{2}}$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

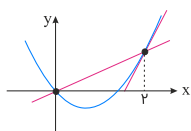
تستر علوم تجربی دوازدهم

آهنگ لحظه‌ای تغییرات تابع f در $x = 2$ همان شیب خط مماس بر نمودار f در نقطه $x = 2$ است و آهنگ متوسط تغییرات در بازه $[0, 2]$ همان شیب پاره‌خط واصل بین دو نقطه $x = 0$ و $x = 2$ می‌باشد. پس گزینه‌ای درست است که شیب خط مماس بر f در $x = 2$ بیشتر از شیب پاره‌خط واصل بین $x = 0$ و $x = 2$ باشد. واضح است که در گزینه "۱" این دو مقدار باهم برابرند.
گزینه "۲":



شیب خط مماس > شیب پاره‌خط واصل
+ -

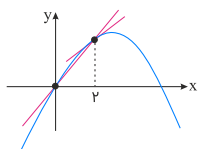
گزینه ۳:



شیب خط مماس < شیب پاره‌خط واصل

پس همین گزینه درست است.

گزینه "۴":



شیب خط مماس > شیب پاره‌خط واصل

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم
تستر علوم تجربی دوازدهم

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}}|x| - x^{\frac{2}{3}} = \begin{cases} x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} & ; x \geq 0 \\ -x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} & ; x < 0 \end{cases}$$

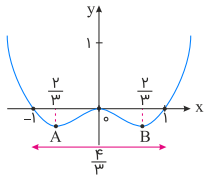
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}x = x(\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}) & ; x > 0 \\ -\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}x = x(-\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}) & ; x < 0 \end{cases}$$

برای پیدا کردن اکسترمم‌های نسبی تابع مشتق را تعیین علامت می‌کنیم.

x	$-\frac{2}{3}$	۰	$\frac{2}{3}$
$x(\frac{2}{3}x - \frac{2}{3})$		○	○
$x(-\frac{2}{3}x - \frac{2}{3})$	-	○	+
f'	-	○	+
f		min	max

پس تابع در نقاطی به طول‌های $x = -\frac{2}{3}$ و $x = \frac{2}{3}$ مینیمم نسبی دارد.

چون در این نقاط تابع $f(x) = x^{\frac{2}{3}}|x| - x^{\frac{2}{3}}$ عرض یکسانی دارد، فاصله این دو نقطه برابر فاصله طول آن‌ها باهم خواهد بود.



$$\text{فاصله مینیمم نسبی‌ها} = AB = \frac{2}{3} - (-\frac{2}{3}) = \frac{4}{3}$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علیون

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

$$y = \sqrt[3]{x^2 - 1} \Rightarrow y' = \frac{\frac{2}{3}x}{\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}} = 0 \Rightarrow x = 0$$

x	۰
y'	-
y	min

مینیمم تابع در $x = 0$ رخ می‌دهد و برابر است با:

$$y(0) = -1$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علیون

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

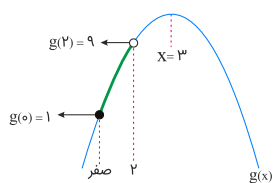
می‌دانیم در تابع $\text{gof}(x)$ ، برد تابع $f(x)$ برابر با دامنهٔ تابع $g(x)$ خواهد بود، پس ابتدا برد تابع $f(x)$ را مشخص کرده و سپس تابع درجه دوم رسم پذیر $g(x)$ را در این برد به‌دست‌آمده، برش می‌زنیم تا برد تابع g مشخص شود. این برد همان برد تابع $\text{gof}(x)$ است. داریم:

$$f(x) = \sqrt{x - \mathcal{F}[\frac{x}{\mathcal{F}}]} = \sqrt{\mathcal{F}(\frac{x}{\mathcal{F}} - [\frac{x}{\mathcal{F}}])}$$

$$\circ \leq u - [u] < 1 \xrightarrow{\times \mathcal{F}} \circ \leq \text{عبارت زیر رادیکال} < \mathcal{F} \Rightarrow \circ \leq f(x) < \mathcal{F}$$

$$\Rightarrow R_f = [\circ, \mathcal{F}) \Rightarrow D_g = [\circ, \mathcal{F})$$

$$\Rightarrow g(x) = -x^{\mathcal{F}} + \mathcal{F}x + 1, \quad D_g = R_f = [\circ, \mathcal{F})$$



$$\Rightarrow R_{\text{gof}(x)} = [1, 9)$$

پس برد تابع $\text{gof}(x)$ ، برابر با بازهٔ $[1, 9)$ است که این بازه شامل ۸ عدد صحیح است.

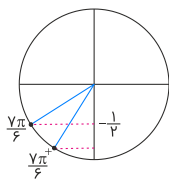
تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

تستر علوم تجربی دوازدهم

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}} \frac{\cos x}{1 + 2 \sin x} \xrightarrow{x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{1 + 2(-\frac{1}{2})} = \frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{0} = \infty$$

برای تعیین علامت ∞ باید تکلیف علامت صفر حدی مخرج را مشخص کنیم (شکل را ببینید):

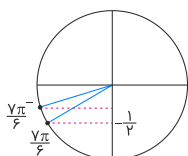


$$\text{الف) } x \rightarrow \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^+ \Rightarrow \sin x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^-$$

پس جواب حد برابر است با:

$$\frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{1 + 2(-\frac{1}{2})^-} = \frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{1 + (-1)^-} = \frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{0^-} = +\infty$$

$$\text{ب) } x \rightarrow \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^- \Rightarrow \sin x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^+$$



پس جواب حد برابر است با:

$$\frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{1 + 2(-\frac{1}{2})^+} = \frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{1 + (-1)^+} = \frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{0^+} = -\infty$$

بنابراین گزینه "۲" صحیح است.

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم
تستر علوم تجربی دوازدهم

باتوجه به فرمول‌های مثلثاتی، باید عامل صفرشونده را با یک شکل یکسان در صورت و مخرج کسر بسازیم. داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\tan^2 x \cdot \sqrt{1 - \cos^2 x}}{\sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{\sin^2 x}{\cancel{\cos^2 x}} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 x}}{\sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\overset{\text{منفی}}{2 \sin x \cdot \cos x \cdot \sqrt{1 - \cos^2 x}}}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2 \sqrt{1 - \cos^2 x} \cdot \cancel{\cos x}}{\cancel{\sin^2 x}} = -2\sqrt{1} \end{aligned}$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبازی فراهانی
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم
تستر علوم تجربی دوازدهم

تابع f در $x = 0$ پیوسته است، پس:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = b$$

به محاسبه حد فوق می‌پردازیم:

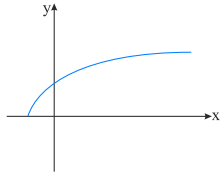
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[p]{x+a^p} - a}{x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هویتال}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{p}(x+a^p)^{\frac{p}{p}-1}}{1} \\ &= \frac{1}{p}(a^p)^{\frac{p}{p}-1} = \frac{1}{p}(a)^{-1} = \frac{1}{pa^1} \Rightarrow b = \frac{1}{pa^1} \end{aligned}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم
تستر علوم تجربی دوازدهم

محاسبه آهنگ تغییر مشکل است، از طرفی تابع در نقطه $x = 2$ مشتق‌پذیر است و باتوجه به کوتاه بودن طول بازه، آهنگ متوسط خواسته شده بسیار نزدیک به آهنگ لحظه‌ای در نقطه $x = 2$ است.

$$f(x) = 3\sqrt{4x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{3 \times 4}{2\sqrt{4x+1}} \Rightarrow f'(2) = 2$$

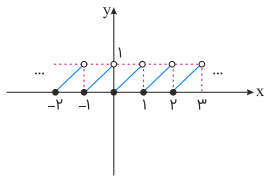
پس پاسخ گزینه "۲" یا "۴" است. از طرفی باتوجه به نمودار تابع، آهنگ تغییر در این تابع نزولی است، پس پاسخ گزینه "۴" می‌باشد.



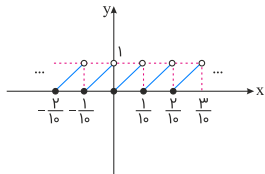
$$f(x) = 3\sqrt{4x+1}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

می‌دانیم نمودار تابع $y = x - [x]$ به صورت زیر است:



پس با یک انقباض افقی، نمودار تابع $f(x) = 10x - [10x]$ بدین صورت خواهد بود:



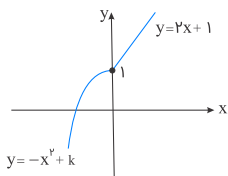
واضح است که نمودار این تابع، در نقاطی به فرم $x = \frac{k}{10}$ ($k \in \mathbb{Z}$) فقط از راست پیوسته و در سایر نقاط از هر دو طرف پیوسته است. پس نمودار این تابع در هیچ نقطه‌ای، صرفاً دارای پیوستگی چپ نیست.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

باتوجه به فرض سوال داریم: $f^{-1}(f^{-1}(3)) = 0$. $f^{-1}(3) = a$ اگر $f^{-1}(3) = a$ ، آنگاه بررسی می‌کنیم که تابع f به ازای چه مقدار a ، خروجی 3 می‌دهد. لذا داریم:

$$f(a) = 3 \Rightarrow \begin{cases} 2a + 1 = 3 \Rightarrow a = 1 \\ -a^2 + k = 3 \Rightarrow a^2 = k - 3 \Rightarrow a = \pm\sqrt{k-3} \end{cases}$$

اما دقت شود که چون تابع f وارون‌پذیر است؛ باید یک‌به‌یک باشد. لذا باتوجه به نمودار تابع f می‌توان گفت که $k \leq 1$ ، زیرا اگر $k > 1$ ، آنگاه تابع f دیگر یک‌به‌یک نخواهد بود. بنابراین مقدار $\sqrt{k-3}$ تعریف نشده است و $a = \pm\sqrt{k-3}$ قابل قبول نیست. (چون زیر رادیکال منفی می‌شود)



پس فقط $a = 1$ را داریم. در ادامه داریم:

$$f^{-1}(3) = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = 0 \Rightarrow f(0) = 1$$

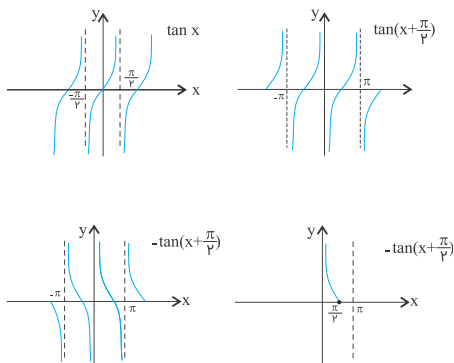
$$\xrightarrow{x=0} f(0) = -(0)^2 + k = 1 \Rightarrow k = 1$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

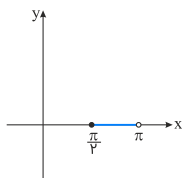
برای رسم تابع f باید قدر مطلق را برداریم. برای این منظور باید علامت $\cot x$ را در بازه $(-\pi, \pi)$ مشخص کنیم. داریم:

$$0 < x \leq \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\substack{\text{ربع اول} \\ \cot x > 0}} f(x) = \frac{\cot x + \cot x}{2} = \frac{\cancel{\cot x}}{\cancel{2}} = \cot x$$

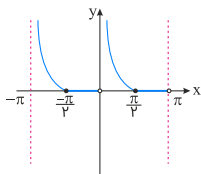
باتوجه به اینکه $-\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cot x$ است، برای رسم $\cot x$ باید نمودار تانژانت را $\frac{\pi}{2}$ سمت چپ ببریم و سپس آن را نسبت به محور x ها قرینه کنیم، در آخر در بازه $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ تابع را رسم می کنیم:



$$\frac{\pi}{2} < x < \pi \xrightarrow{\substack{\text{ربع دوم} \\ \cot x < 0}} f(x) = \frac{\cot x - \cot x}{2} = 0$$



پس نمودار تابع f به صورت زیر خواهد بود. داریم:



شیب خط $y = -۲x + ۳$ باید با مشتق تابع $y = -x^۳ + x + m$ برابر باشد. داریم:

$$y' = -۳x^۲ + ۱ = -۲ \Rightarrow -۳x^۲ = -۳ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ & \checkmark \\ x = -۱ & \times \end{cases}$$

چون نقطهٔ تماس در ناحیهٔ اول قرار دارد، $x = ۱$ قابل قبول است. به‌علاوه منحنی و خط در $x = ۱$ باید از یک نقطه عبور کنند.

$$y = -۲x + ۳ \xrightarrow{x=۱} y = ۱ \Rightarrow \text{A (۱, ۱)}$$

این نقطه باید در ضابطهٔ $y = -x^۳ + x + m$ هم صدق کند. پس داریم:

$$۱ = -۱ + ۱ + m \Rightarrow m = ۱$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علیون
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

از ماشین $x^۲ \rightarrow \underline{f} \rightarrow \underline{g} \rightarrow (x-۱)$ ، نتیجه می‌گیریم که:

$$f(g(x-۱)) = x^۲ \xrightarrow{g(x)=\frac{x+۱}{x}} f\left(\frac{(x-۱)+۱}{(x-۱)}\right) = x^۲ \Rightarrow f\left(\frac{x}{x-۱}\right) = x^۲$$

حال برای محاسبهٔ $f\left(\frac{۳}{۲}\right)$ ، کافی است ورودی تابع f را برابر $\frac{۳}{۲}$ قرار دهیم. داریم:

$$\text{ورودی تابع} = \frac{x}{x-۱} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow x = ۳ \xrightarrow{x=۳ \text{ را جایگذاری می‌کنیم } f\left(\frac{x}{x-۱}\right)=x^۲} f\left(\frac{۳}{۲}\right) = ۹$$

تذکر: می‌توانیم با داشتن ضابطهٔ $f(u)$ ، ضابطهٔ $f(x)$ را مشخص کرده و سپس به‌جای x در آن $x = \frac{۳}{۲}$ را جایگذاری نماییم که این کار، بسیار وقت‌گیر است.

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبازی فراهانی
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم
تستر علوم تجربی دوازدهم

ضابطهٔ تابع $f(x)$ (باتوجه‌به نمودار) برابر است با:

$$f(x) = (x-k)^۳ + ۱ \Rightarrow f(x) = x^۳ - ۳kx^۲ + ۳k^۲x - k^۳ + ۱$$

تابع از مبدأ گذشته است، بنابراین نقطهٔ $(۰, ۰)$ در آن صدق می‌کند:

$$۰ = (۰)^۳ - ۳k(۰)^۲ + ۳k^۲(۰) - k^۳ + ۱ \Rightarrow k^۳ = ۱ \Rightarrow k = ۱$$

ضابطهٔ تابع پس از جایگذاری عدد ۱ به‌جای k برابر است با:

$$f(x) = x^۳ - ۳kx^۲ + ۳k^۲x - k^۳ + ۱ \xrightarrow{k=۱} f(x) = x^۳ - ۳x^۲ + ۳x$$

پس $a = -۳$ ، $b = ۳$ و $c = ۰$ ، بنابراین داریم:

$$a + b + c = -۳ + ۳ + ۰ = ۰$$

تألیفی آریان حیدری - شروین سیاح نیا
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

عبارت $(۲x^۳ + ۵)^۳ = ۸x^۹ + ۶۰x^۶ + ۳۰x^۳ + ۱۲۵$ ، یک عبارت درجه ۹ است. برای آنکه درجه کل عبارت ۶ باشد، باید حتماً جمله درجه ۹ عبارت $(۲x^۳ + ۵)^۳$ با یکی از جملات $kx(۴x^۶ + ۲)^n$ حذف شود. پس n باید ۲ باشد. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= (۲x^۳ + ۵)^۳ + \underbrace{kx(۴x^۶ + ۲)^۲}_{۱۶x^۸ + ۱۶x^۶ + ۴} \\ &= (۸x^۹ + ۶۰x^۶ + ۳۰x^۳ + ۱۲۵) + (۱۶kx^۹ + ۱۶kx^۵ + ۴kx) \\ \Rightarrow f(x) &= (۸ + ۱۶k)x^۹ + ۶۰x^۶ + ۱۶kx^۵ + ۳۰x^۳ + ۴kx + ۱۲۵ \end{aligned}$$

برای اینکه تابع f یک چندجمله‌ای از درجه ۶ باشد، باید ضریب جمله $x^۹$ را برابر صفر قرار دهیم تا این جمله حذف شود. داریم:

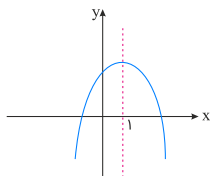
$$x^۹ \text{ ضریب} = ۸ + ۱۶k = ۰ \Rightarrow k = -\frac{۸}{۱۶} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow n + k = ۲ + \left(-\frac{۱}{۲}\right) = \frac{۳}{۲}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

تستر علوم تجربی دوازدهم

ضابطه تابع، ضابطه یک سهمی را نشان می‌دهد که باتوجه‌به بازه‌های اکیداً صعودی و اکیداً نزولی تابع، می‌توان دریافت که $x = ۱$ محور تقارن تابع است و اینکه سهمی رو به پایین است، بنابراین ضریب $x^۲$ منفی و $۱ = -\frac{b}{۲a}$ است.



$$m - ۳ < ۰ \Rightarrow m < ۳$$

$$-\frac{۲(m^۲ - ۳)}{۲(m - ۳)} = ۱ \Rightarrow -(m^۲ - ۳) = m - ۳$$

$$\Rightarrow m^۲ + m - ۶ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = ۲ \xrightarrow{m < ۳} \text{ قابل قبول} \\ m = -۳ \xrightarrow{m \leq ۳} \text{ قابل قبول} \end{cases}$$

پس مجموع مقادیر m برابر است با $-۱ = ۲ + (-۳)$.

تالیفی آریان حیدری - شروین سیاح نیا

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

کافی است $f'\left(\frac{۳}{۲}\right)$ را حساب کنیم:
در همسایگی $\frac{۳}{۲}$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} [x^۲] = \left[\frac{۹}{۴}\right] = ۲ \\ |\underbrace{۲x - ۴}_{-}| = -۲x + ۴ \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{۱۰x - ۳}{۳x - ۲x + ۴} = \frac{۱۰x - ۳}{x + ۴} \Rightarrow f'(x) = \frac{۴۳}{(x + ۴)^۲} \\ \Rightarrow f'\left(\frac{۳}{۲}\right) = \frac{۴۳}{\left(\frac{۱۱}{۲}\right)^۲} = \frac{۱۷۲}{۱۲۱} \end{aligned}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

وقتی $1 = g^{-1}(f(3a))$ است، یعنی $f(3a) = g(1)$.

$$g(1) = \frac{1}{\sqrt{}} + \sqrt{1-1} = \frac{1}{\sqrt{}} \Rightarrow f(3a) = \frac{1}{\sqrt{}}$$

پس کافی است معادله $f(x) = \frac{1}{\sqrt{}}$ را حل کنیم:

$$\frac{x}{1+|x|} = \frac{1}{\sqrt{}}$$

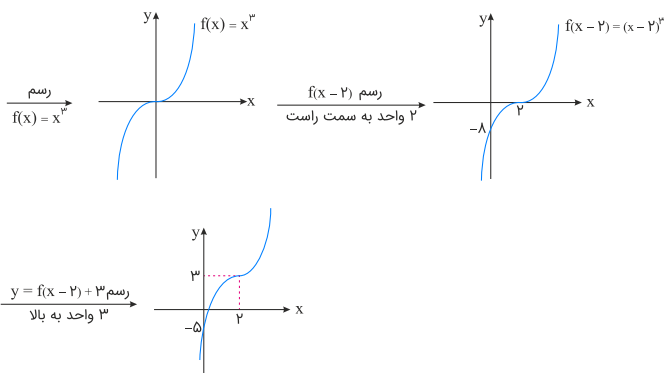
نیازی به حل نیست! قابل حدس است که $x = 1$ در این تساوی صدق می‌کند. پس ورودی f برابر با ۱ است، به عبارتی:

$$3a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

برای رسم نمودار تابع f ، باید ابتدا ضابطه آن را ساده کنیم. داریم:

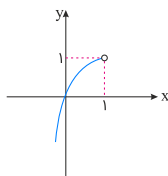
$$y = x^3 - 6x^2 + 12x - 5 = \underline{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} + 3 = \underline{(x-2)^3} + 3$$



همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، نمودار تابع فوق از ناحیه دوم دستگاه مختصات عبور نمی‌کند.

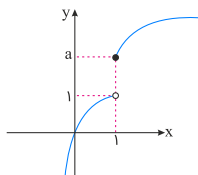
تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

باتوجه به اینکه $1 + (x-1)^2 = x^2 - 2x + 2$ ، نمودار این ضابطه را در $x < 1$ رسم می‌کنیم.



برای آنکه تابع f اکیداً صعودی باشد، کافی است عرض نقطهٔ توپُر، از عرض نقطهٔ توخالی بزرگ‌تر یا مساوی باشد (در سایر نقاط هردو ضابطه روند صعودی خود را طی می‌کند و نیازی به بررسی نیست) یعنی: $a \geq 1$.

بنابراین یکی از حالت‌های نمودار می‌تواند به صورت زیر باشد:



تألیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

می‌دانیم:

$$S_{\triangle OAB} = \frac{OA \times OB}{2} \Rightarrow 10 = \frac{f \times OB}{2} \Rightarrow OB = 4 \Rightarrow B(4, 0)$$

شیب پاره خط AB (که در واقع همان خط مماس بر منحنی f در $x = 3$ است) را به کمک دو نقطهٔ $A(0, 4)$ و $B(4, 0)$ حساب می‌کنیم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 4}{4 - 0} = -1 \Rightarrow f'(3) = -1$$

ضمناً باتوجه به شکل، می‌دانیم که: $f(3) = 3$.

حالا با داشتن $f(3)$ و $f'(3)$ به محاسبهٔ حد $\frac{0}{0}$ داده شده به کمک قاعدهٔ هسپیتال می‌پردازیم:

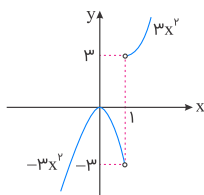
$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f'(x) - 1}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f'(x) - 1}{1} = f'(3) - 1 = 3 - 1 = 2$$

تألیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

$$y = |x^3 - 1| = \begin{cases} x^3 - 1 & ; x \geq 1 \\ -x^3 + 1 & ; x < 1 \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} 3x^2 & ; x \geq 1 \\ -3x^2 & ; x < 1 \end{cases}$$



تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علیون

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

نکته: در توابع $y = |f(x)|$ ریشه‌های ساده $f(x)$ ، نقاط مشتق‌ناپذیر هستند. بنابراین بایستی $f(x) = \mathbb{F}x^{\mathbb{V}} - mx + ۱$ یا فاقد ریشه باشد و یا دارای ریشهٔ مضاعف، پس داریم:

$$\Delta \leq ۰ \Rightarrow (-m)^{\mathbb{V}} - \mathbb{F}(\mathbb{F})(۱) \leq ۰ \Rightarrow m^{\mathbb{V}} \leq ۱\mathbb{F} \Rightarrow -\mathbb{F} \leq m \leq \mathbb{F} \quad (\text{I})$$

ازطرفی باتوجه‌به اینکه $\Delta \leq ۰$ است، بنابراین عبارت $\mathbb{F}x^{\mathbb{V}} - mx + ۱$ همواره بزرگ‌تر مساوی صفر می‌باشد. پس:

$$y = |\mathbb{F}x^{\mathbb{V}} - mx + ۱| = \mathbb{F}x^{\mathbb{V}} - mx + ۱$$

حال می‌دانیم تابع درجهٔ دوم با ضریب مثبت $x^{\mathbb{V}}$ بعد از رأس اکیداً صعودی خواهد بود، بنابراین:

$$x_{\text{S}} = \frac{-(-m)}{\lambda} \leq \frac{1}{\mathbb{F}} \Rightarrow m \leq \mathbb{V} \quad (\text{II})$$

بنابراین اشتراک دو بازه $\mathbb{V} \leq m \leq -\mathbb{F}$ است.

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - کامیار علیون
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

$$\lim_{t \rightarrow \mathbb{V}} \frac{f(t) - f(\frac{\mathbb{V}t + \mathbb{V}}{\mathbb{F}})}{\frac{t - \mathbb{V}}{\mathbb{F}}} \stackrel{\text{HOP}}{=} \lim_{t \rightarrow \mathbb{V}} \frac{f'(t) - \frac{\mathbb{V}}{\mathbb{F}}f'(\frac{\mathbb{V}t + \mathbb{V}}{\mathbb{F}})}{\frac{1}{\mathbb{F}}} = \lim_{t \rightarrow \mathbb{V}} \frac{\frac{1}{\mathbb{F}}f'(t)}{\frac{1}{\mathbb{F}}} = f'(\mathbb{V})$$

$$f(x) = x\sqrt{\mathbb{V}x + \mathbb{V}} \Rightarrow f'(x) = (۱)\sqrt{\mathbb{V}x + \mathbb{V}} + \frac{x}{\sqrt{\mathbb{V}x + \mathbb{V}}} \Rightarrow f'(\mathbb{V}) = \mathbb{F} + \frac{\mathbb{V}}{\mathbb{F}} = \frac{\mathbb{V}\mathbb{V}}{\mathbb{F}}$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

اول دامنهٔ تعریف تابع را پیدا می‌کنیم. داریم:

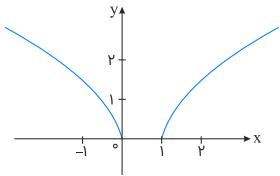
$$f(x) = \sqrt{x^{\mathbb{V}} - x}$$

$$x^{\mathbb{V}} - x \geq ۰ \Rightarrow x(x - ۱) \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۰ \text{ یا } x \geq ۱ \Rightarrow D_f = (-\infty, ۰] \cup [۱, +\infty)$$

تابع در $x = ۰$ و $x = ۱$ نقطهٔ بحرانی دارد، چراکه نقاط ابتدا و انتهای بازه، جزء نقاط بحرانی تابع محسوب می‌شوند. حالا مشتق را برابر صفر قرار می‌دهیم تا بررسی کنیم که آیا تابع نقطهٔ بحرانی دیگری دارد یا نه. داریم:

$$f'(x) = \frac{\mathbb{V}x - ۱}{\mathbb{V}\sqrt{x^{\mathbb{V}} - x}} = ۰ \Rightarrow x = \frac{1}{\mathbb{V}}$$

$x = \frac{1}{\mathbb{V}}$ در دامنهٔ تابع نیست، پس نمی‌تواند نقطهٔ بحرانی باشد.
برای فهم بیشتر نمودار تابع f را برایتان رسم کرده‌ایم.



تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - کامیار علیون
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

برای به دست آوردن نقاط اکسترمم‌های مطلق (نقاط بیشترین و کمترین مقدار تابع) بایستی طول تمام نقاط بحرانی را به دست آورده و سپس عرض آن‌ها را محاسبه کنیم. پس از آن بیشترین مقدار به عنوان **max** مطلق و کمترین مقدار به عنوان **min** مطلق خواهد بود.
(دقت کنید ابتدا و انتهای بازه بسته نقاط بحرانی محسوب می‌شوند).

$$y' = 3x^2 - 6mx = 0 \Rightarrow 3x(x - 2m) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \notin [m, 3m] \\ x = 2m \in [m, 3m] \end{cases} \times$$

پس طول نقاط بحرانی تابع به صورت $x = m, 2m, 3m$ می‌باشند. حال با محاسبه عرض آن‌ها، داریم:

$$f(m) = m^3 - 3m^3 + 1 = -2m^3 + 1$$

$$f(2m) = 8m^3 - 12m^3 + 1 = -4m^3 + 1 \xrightarrow{\text{min مطلق}} (2m, -4m^3 + 1)$$

$$f(3m) = 27m^3 - 27m^3 + 1 = 1 \xrightarrow{\text{max مطلق}} (3m, 1)$$

$$\text{شیب خط واصل} = \frac{(1) - (-4m^3 + 1)}{3m - 2m} = \frac{4m^3}{m} = 4m^2$$

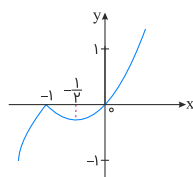
تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علیون

تستر علوم تجربی دوازدهم

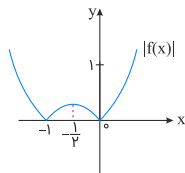
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

اول نمودار $f(x)$ را رسم می‌کنیم.

$$f(x) = x|x+1| = \begin{cases} x(x+1) & ; x \geq -1 \\ -x(x+1) & ; x < -1 \end{cases}$$



حالا نمودار $|f(x)|$ را رسم می‌کنیم.



مطابق شکل تابع در فاصله‌های $[-1, -\infty)$ و $[0, \frac{-1}{2}]$ اکیداً نزولی است.

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبازی فراهانی

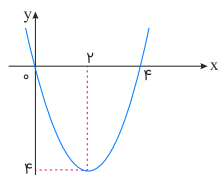
تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

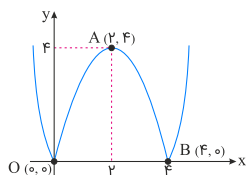
ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{(x^2 - 4x)^2} = |x^2 - 4x| = |x(x - 4)|$$

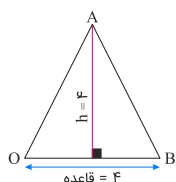
تابع $y = x(x - 4)$ یک سهمی با دهانهٔ رو به بالا و ریشه‌های ۰ و ۴ است.



حالا قدر مطلق به تابع اثر می‌کند و قسمت‌های پایین محور x ‌ها، نسبت به آن قرینه می‌شوند:



باتوجه به شکل، تابع f در نقاط O و B ، مشتق ندارد و در نقطهٔ A ، مشتقش صفر است، پس هر ۳ نقطه، بحرانی هستند. مساحت مثلث OAB را حساب می‌کنیم:



$$S = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{4 \times 4}{2} = 8$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علیون
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

با جایگذاری $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$ به جای $\cos^2 x$ یک معادلهٔ قابل تبدیل به درجهٔ ۲ می‌رسیم:

$$4 \sin^2 x = 4(1 - \sin^2 x) - 1 \Rightarrow 4 \sin^2 x + 4 \sin^2 x - 3 = 0 \xrightarrow{\sin^2 x = t} 8t^2 + 4t - 3 = 0 \Rightarrow t_1 = -\frac{3}{4}, t_2 = \frac{1}{4}$$

معادلهٔ $\sin^2 x = -\frac{3}{4}$ جواب ندارد. معادلهٔ $\sin^2 x = \frac{1}{4}$ نیز به دو معادلهٔ $\sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$ منجر می‌شود که در فاصلهٔ $(0, \pi)$ دارای جواب‌های $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ هستند. پس مجموع جواب‌های معادله در این بازه برابر با π است.

تألیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

ابتدا معادلهٔ خط مماس رسم‌شده را می‌نویسیم: $y = mx$.

$$m = f'(3) = 2x = 6 \Rightarrow y = 6x$$

با جایگذاری $x = 3$ در معادلهٔ این خط به نقطهٔ $(3, 18)$ می‌رسیم که باید در ضابطهٔ تابع $f(x) = x^2 + k$ هم صدق کند:

$$18 = 9 + k \Rightarrow k = 9$$

تألیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

شیب خط قاطع را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{شیب خط قاطع} = \frac{f(۳) - f(۰)}{۳ - ۰} = \frac{۲ - ۱}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

شیب خط مماس باید $\frac{۱}{۳}$ باشد.

$$\text{شیب خط مماس} = f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \sqrt{x+۱} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow x+۱ = \frac{۹}{۴} \Rightarrow x = \frac{۵}{۴}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

تستر علوم تجربی دوازدهم

اولاً باید $b = ۱$ باشد تا جملات پرتوان هریک از رادیکال‌های موجود در مخرج باهم ساده شوند، در غیر این‌صورت مخرج بی‌نهایت شده و جواب حد صفر می‌شود، درحالی‌که قرار است $\frac{۱}{۲}$ شود. پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{۱}{\sqrt{x} + \sqrt{ax} - \sqrt{x} - \sqrt{x}} = \frac{۱}{۲}$$

با ضرب صورت و مخرج این کسر در مزدوج مخرج داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{۱}{\sqrt{x} + \sqrt{ax} - \sqrt{x} - \sqrt{x}} &\times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{ax} + \sqrt{x} - \sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{ax} + \sqrt{x} - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{ax} + \sqrt{x} - \sqrt{x}}{(x + \sqrt{ax}) - (x - \sqrt{x})} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{ax} + \sqrt{x} - \sqrt{x}}{\sqrt{ax} + \sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x}}{\sqrt{ax} + \sqrt{x}} \\ &\quad \downarrow \text{پرتوان} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{۲\sqrt{x}}{(\sqrt{a} + 1)\sqrt{x}} = \frac{۲}{\sqrt{a} + 1} \end{aligned}$$

پس:

$$\frac{۲}{\sqrt{a} + 1} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \sqrt{a} + 1 = ۴ \Rightarrow \sqrt{a} = ۳ \Rightarrow a = ۹ \Rightarrow a + b = ۹ + ۱ = ۱۰$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

تستر علوم تجربی دوازدهم

از آنجا که حاصل حد برابر با بی‌نهایت است، اولاً باید مخرج کسر به صورت حدی صفر شده باشد، به عبارتی x باید به سمت ریشهٔ مخرج برود، پس b ریشهٔ مخرج است. ثانیاً چون حد تابع در حوالی ریشهٔ مخرج نباید تغییر علامت بدهد (دقت کنید که با رفتن x به سمت b از هر دو طرف، قرار است جواب $+\infty$ شود، یعنی مخرج باید $^{\circ-}$ شده باشد). پس مخرج باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد و b هم ریشهٔ مضاعف مخرج می‌شود. داریم:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (y)^2 - F(a)(a) = 0 \Rightarrow F - Fa^2 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

حال دو حالت پیش می‌آید:

$$1) a = 1 \Rightarrow \text{مخرج} : x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

$$\Rightarrow b = \text{ریشهٔ مضاعف مخرج} = -1$$

پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-1}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-1}{(x + 1)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \Rightarrow \text{غیرقابل قبول}$$

$$2) a = -1 \Rightarrow \text{مخرج} : -x^2 + 2x - 1 = -(x - 1)^2$$

$$\Rightarrow b = \text{ریشهٔ مضاعف مخرج} = 1$$

پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{-x^2 + 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{-(x - 1)^2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \Rightarrow \text{قابل قبول}$$

پس فقط حالت $a = -1$ و $b = 1$ قابل قبول است و $a - b = -2$.

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

روش اول:

ابتدا صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم. داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{6 - \sqrt[3]{x + 5}} - 2}{9 - x^2} &\times \underbrace{\frac{\sqrt{6 - \sqrt[3]{x + 5}} + 2}{\sqrt{6 - \sqrt[3]{x + 5}} + 2}}_F = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{6 - \sqrt[3]{x + 5} - 4}{F(9 - x^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt[3]{x + 5}}{F(9 - x^2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt[3]{x + 5}}{F(9 - x^2)} \times \underbrace{\frac{F + 2\sqrt[3]{x + 5} + \sqrt[3]{(x + 5)^2}}{F + 2\sqrt[3]{x + 5} + \sqrt[3]{(x + 5)^2}}}_{12} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\lambda - (x + 5)}{F\lambda(9 - x^2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - x}{F\lambda(3 - x)(3 + x)} = \frac{1}{F\lambda \times 6} = \frac{1}{288} \end{aligned}$$

روش دوم:

$$\text{HOP} : \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{(x + 5)^2}}}{2\sqrt{6 - \sqrt[3]{x + 5}} - 2x} = \frac{\frac{1}{12}}{-6} = \frac{-1}{-6} = \frac{1}{288}$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبازی فراهانی

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

تستر علوم تجربی دوازدهم

خط $y + ۲x = ۳$ در $x = ۲$ بر تابع f مماس است، پس:
اولاً: در این نقطه، مقدار یکسانی دارند:

$$y + ۴ = ۳ \Rightarrow y = -۱ \Rightarrow f(۲) = -۱$$

ثانیاً: شیب این خط، برابر با مشتق تابع f در $x = ۲$ است:

$$f'(۲) = -۲$$

از حد $\lim_{x \rightarrow -۱} \frac{g(x) + ۴}{x^۲ - ۱} = ۳$ ، دو نتیجه می‌گیریم:

اولاً: حد مخرج صفر و حاصل حد کل کسر موجود است، پس حد صورت هم صفر می‌باشد:

$$g(-۱) + ۴ = ۰ \Rightarrow g(-۱) = -۴$$

ثانیاً: حد ساده می‌شود:

$$\lim_{x \rightarrow -۱} \frac{g(x) - g(-۱)}{\underbrace{(x - ۱)(x + ۱)}_{-۲}} = ۳ \xrightarrow{\frac{g(x) - g(-۱)}{(x+۱)} = g'(-۱)} \frac{g'(-۱)}{-۲} = ۳ \Rightarrow g'(-۱) = -۶$$

حال با اطلاعات فوق، داریم:

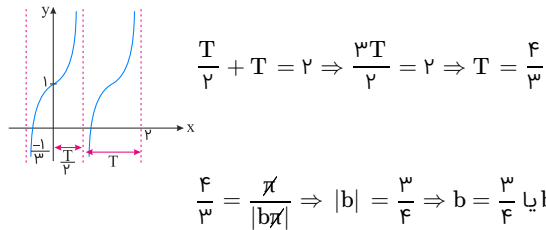
$$(g \circ f)'(۲) = f'(۲) \cdot \underbrace{g'(f(۲))}_{-۱} = f'(۲) \times \underbrace{g'(-۱)}_{-۶} = ۱۲$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - کامیار علیون
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

اول از همه مقدار تابع در صفر برابر ۱ است، پس داریم:

$$y(۰) = ۱ \Rightarrow \underline{a \tan(۰)} + c = ۱ \Rightarrow c = ۱ \Rightarrow y = a \tan(b\pi x) + ۱$$

باتوجه به شکل تابع، داریم:



دوره تناوب تابع برابر $\frac{۴}{۳}$ است، پس داریم:

مقدار تابع در $\frac{-۱}{۳}$ برابر صفر است، پس داریم:

$$y = a \tan\left(\frac{۳\pi}{۴}x\right) + ۱ \xrightarrow{\left(\frac{-۱}{۳}, ۰\right)} ۰ = a \tan\left(\frac{-\pi}{۴}\right) + ۱ \Rightarrow -a + ۱ \Rightarrow a = ۱$$

حال با معلوم بودن مقادیر a , b و c ، حاصل $a + b + c$ برابر است با:

$$a + b + c = ۱ + \frac{۳}{۴} + a = ۲\frac{۷}{۵}$$

تذکر: به ازای $b = -\frac{۳}{۴}$ ، حاصل $a + b + c$ برابر $۰\frac{۷}{۵}$ است که در گزینه ها وجود ندارد.

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم
تستر علوم تجربی دوازدهم

نقطه‌ای به طول $x = ۱$ علاوه بر اینکه روی نمودار $f(x)$ قرار دارد، روی خط $y = ۳x + ۱$ نیز قرار می‌گیرد. بنابراین با صدق دادن $x = ۱$ در معادله خط، می‌توانیم مختصات نقطه تماس را به دست آوریم:

$$x = ۱ \xrightarrow{y=۳x+۱} y = ۳(۱) + ۱ = ۴ \Rightarrow (۱, ۴) \text{ نقطهٔ تماس}$$

حال مختصات نقطهٔ تماس را در معادلهٔ $f(x)$ قرار می‌دهیم:

$$f(x) = x^۳ + ax^۲ + bx + ۲ \xrightarrow{x=۱, f(x)=۴} ۴ = (۱)^۳ + a(۱)^۲ + b(۱) + ۲$$

$$\Rightarrow ۴ = a + b + ۳ \Rightarrow a + b = ۱$$

ازطرفی می‌دانیم شیب خط مماس بر نقطهٔ تماس، معادل مشتق تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = ۱$ است. بنابراین داریم:

$$(f'(۱) = ۳ \text{ است یعنی } m = ۳ \text{ برابر با } y = ۳x + ۱ \text{ شیب خط } ۱)$$

$$f'(x) = ۳x^۲ + ۲ax + b$$

$$\xrightarrow{f'(۱)=۳} ۳ = ۳(۱)^۲ + ۲a(۱) + b \Rightarrow ۲a + b = ۰ \Rightarrow b = -۲a$$

$$\xrightarrow{a+b=۱} a + (-۲a) = ۱ \Rightarrow a = -۱ \Rightarrow b = ۲$$

$$\Rightarrow a - b = -۱ - ۲ = -۳$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرایی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

از آنجایی که تابع (هموگرافیک) $f(x) = \frac{2x+b}{3x+d}$ در بازه‌های $(-2, +\infty)$ و $(-\infty, -2)$ اکیداً یکنوا است، نتیجه می‌گیریم، عدد $x = -2$ ، ریشه مخرج است، پس داریم:

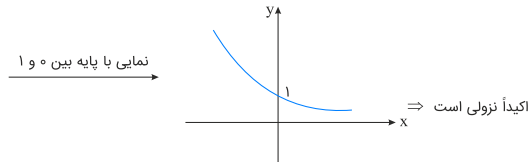
$$3x + d = 0 \xrightarrow{x=-2} 3(-2) + d = 0 \Rightarrow d = 6$$

با تعیین $d = 6$ ، ضابطه f به شکل $f(x) = \frac{2x+b}{3x+6}$ درمی‌آید. حال چون این تابع، محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع می‌کند، پس نقطه $(1, 0)$ در تابع صدق می‌کند. داریم:

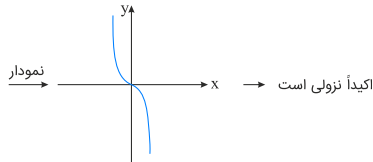
$$f(1) = 0 \Rightarrow \frac{2+b}{9} = 0 \Rightarrow 2+b = 0 \Rightarrow b = -2$$

با جایگذاری $d = 6$ و $b = -2$ ، یکنوایی گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم. داریم:

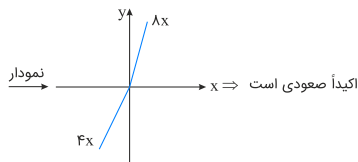
$$(1) y = 6^{-x} = \left(\frac{1}{6}\right)^x$$



$$(2) y = -2x^3$$



$$(3) y = 6x + 2|x| = \begin{cases} 8x & ; x \geq 0 \\ 4x & ; x < 0 \end{cases}$$

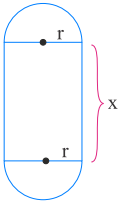


$$(4) y = \sin 6x \Rightarrow \text{نوسانی (متناوب)} \Rightarrow \text{غیر یکنوا}$$

پس جواب گزینه ۳ است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

ابتدا یک شکل برای مسئله رسم می‌کنیم:



مطابق شکل داریم:

$$\begin{aligned} \text{محیط دو نیم‌دایره} + 2x &= \text{محیط پنجره} \\ &= 2x + 2\left(\frac{1}{2} \times 2\pi r\right) = 2x + 2\pi r \xrightarrow{\text{محیط}=100} 2x + 2\pi r = 100 \\ &\Rightarrow x + \pi r = 100 \quad (*) \end{aligned}$$

می‌خواهیم این پنجره بیشترین نوردهی را داشته باشد، به عبارتی مساحت آن ماکزیمم شود:

$$\begin{aligned} \text{مساحت دو نیم‌دایره} + \text{مساحت مستطیل} &= \text{مساحت پنجره} \\ &= x \times 2r + 2\left(\frac{1}{2}\pi r^2\right) \\ \Rightarrow S &= 2rx + \pi r^2 \xrightarrow[x=100-\pi r]{(*)} 2r(100 - \pi r) + \pi r^2 = 200r - 2\pi r^2 + \pi r^2 = 200r - \pi r^2 \end{aligned}$$

حال نقطهٔ بحرانی تابع مساحت را به دست می‌آوریم:

$$S' = 200 - 2\pi r = 0 \Rightarrow 200 = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{100}{\pi} = 100 \times \frac{1}{\pi}$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم
تستر علوم تجربی دوازدهم

با استفاده از رابطهٔ $u' \times \frac{ad-bc}{(cu+d)^2} = \left(\frac{au+b}{cu+d}\right)'$ ، مشتق تابع f را حساب می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{a\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{a+2}{(\sqrt{x}+1)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای f در $x = 16$ برابر با $f'(16)$ است که باید $\frac{1}{40}$ شود:

$$f'(16) = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \frac{a+2}{25} \times \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{40} \Rightarrow a+2 = 5 \Rightarrow a = 3$$

با جایگذاری $a = 3$ ، ضابطهٔ f به صورت $f(x) = \frac{3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$ درمی‌آید. آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[1, 4]$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{\frac{4}{3} - \frac{1}{2}}{3} = \frac{5}{18}$$

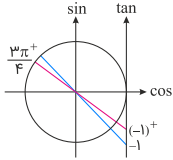
تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علیون
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

اگر $x \rightarrow \frac{5}{2}$ ، آنگاه مخرج برابر $2 = 1 + 1 = 1 + \tan \frac{5\pi}{4} + 1$ است و حاصل حد نمی‌تواند نامتناهی باشد. پس گزینه‌های "۳" و "۴" قطعاً نادرست هستند.

ولی اگر $x \rightarrow \frac{3}{2}$ ، آنگاه مخرج $0 = 1 + 1 - 1 = 1 + \tan(\frac{3\pi}{4}) + 1$ و حاصل حد نامتناهی است. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} \frac{\sin \pi x}{\tan \frac{\pi x}{2} + 1} = \frac{\sin \frac{3\pi}{2}^+}{\tan(\frac{3\pi}{2}^+) + 1} = \frac{-1}{(-1)^+ + 1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

توجه کنید چون تابع تانژانت در ناحیه دوم دایره مثلثاتی صعودی است، پس مقدار آن در $\frac{3\pi}{4}$ نسبت به $\frac{3\pi}{4}$ افزایش یافته و برابر $(-1)^+$ می‌باشد. برای درک بهتر می‌توانیم از دایره مثلثاتی نیز کمک بگیریم. داریم:



تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

تابع $f(x)$ در -1 ، 1 و $x = 0$ مشتق‌ناپذیر است، چرا که این نقاط ریشه‌های درجه یک عبارت داخل قدر مطلق هستند. $x = 0$ نیز ریشه درجه یک عبارت داخل قدر مطلق است ولی خارج از قدر مطلق عامل صفرکننده $\sqrt{x}$ باعث صفرشدن مشتق در این نقطه می‌شود و تابع در $x = 0$ نقطه بحرانی دارد ولی مشتق‌پذیر است. دقت کنید که این تابع نقاط بحرانی دیگری نیز دارد ولی تنها نقاط مشتق‌ناپذیری آن $x = \pm 1$ است.

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم
تستر علوم تجربی دوازدهم

برای آنکه پی ببریم تابع f در چه بازه‌ای صعودی است، باید مشتق تابع را بزرگ‌تر از صفر قرار دهیم. داریم:

$$f'(x) = (3x^2 - 4) \sqrt{x} + \frac{1}{3\sqrt{x^3}} (x^3 - 40x) = \frac{(3x^2 - 40)(3x) + x^3 - 40x}{3\sqrt{x^3}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{10x^3 - 160x}{3\sqrt{x^3}} > 0 \Rightarrow 10x^3 - 160x > 0 \Rightarrow 10x(x^2 - 16) > 0$$

همواره نامنفی

حال برای حل نامعادله فوق، جدول تعیین علامت آن را رسم می‌کنیم. داریم:

x	سادۀ -۴	سادۀ ۰	سادۀ ۴
f'	- ۰ +		- ۰ +
f	↘	↗	↘

پس تابع f در بازه‌های $(-4, 0)$ یا $(4, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

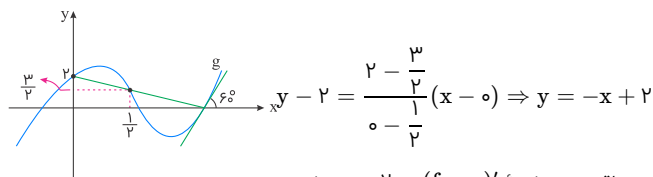
در بین گزینه‌ها فقط بازه $(-3, -1)$ زیرمجموعه بازه‌هایی است که تابع f در آن اکیداً صعودی می‌باشد.

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - کامیار علیون
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

حد موردنظر همان تعریف مشتق تابع $f \times g$ در نقطه $x = ۲$ است.

ابتدا سعی می‌کنیم نقطه‌ای به طول ۲ را در نمودار تابع g شناسایی کنیم.

خط واصل بین نقاط $(\frac{۱}{۳}, \frac{۳}{۳})$ و $(۰, ۲)$ را روی نمودار ببینید. معادله این خط را می‌نویسیم:



واضح است که محل تلاقی این خط با محور x ها نقطه $(۲, ۰)$ است. پس $x = ۲$ ریشه تابع g بوده و درواقع در محاسبه $(f \times g)'$ در $x = ۲$ ، تابع g عامل صفرشونده محسوب می‌شود و طبق نکته عامل صفرشونده، برای محاسبه $(f \times g)'(۲)$ کافی است $f(۲) \times g'(۲)$ را حساب کنیم.

$g'(۲)$ از روی نمودار g یعنی شیب خط مماس بر منحنی g در $x = ۲$ که باتوجهبه شکل برابر است با: $\tan \phi^0 = \sqrt{۳}$

اما در مورد مقدار تابع f در $x = ۲$ مواظب باشید! تابع f در $x = ۲$ ناپیوسته و لذا مشتق‌ناپذیر است و نکته عامل صفرشونده به‌صورت $(\lim_{x \rightarrow ۲} f(x)) \times g'(۲)$ درمی‌آید، پس ملاک حد تابع f در $x = ۲$ است که برابر با ۲ می‌باشد نه ۳ . پس:

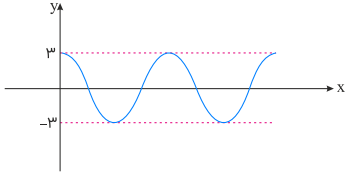
$$(\lim_{x \rightarrow ۲} f(x)) \times g'(۲) = ۲ \times \sqrt{۳} = ۲\sqrt{۳}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

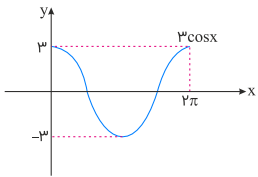
می‌دانیم $1 \leq \cos(ax) \leq -1$ ، پس $3 \leq \cos(ax) \leq -3$ و باتوجه به شکل، واضح است که:



صفر تلاقی $a < -3$ یا $3 < a \Rightarrow$
 کمترین تلاقی $a = \pm 3 \Rightarrow$
 بیشترین تلاقی $a = \pm 1$ یا $\pm 2 \Rightarrow$

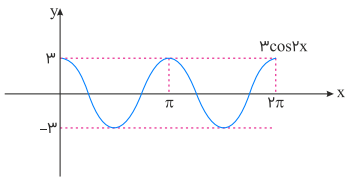
نمودار دقیق تابع را در این دو حالت در فاصله $(0, 2\pi)$ رسم می‌کنیم و تعداد نقاط تلاقی را می‌شماریم:

$$1) a = \pm 1 \Rightarrow f(x) = 3 \cos x$$



واضح است که خط $y = 1$ یا $y = -1$ هرکدام نمودار تابع را در دو نقطه قطع می‌کنند.

$$2) a = \pm 2 \Rightarrow f(x) = 3 \cos 2x$$



همانطور که می‌بینیم، خط $y = 2$ یا $y = -2$ هرکدام نمودار تابع را در چهار نقطه قطع می‌کنند.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی - آریان حیدری
 تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم
 تستر علوم تجربی دوازدهم

$$f(\underbrace{2x+1}_t) = 4x^2 - 2x$$

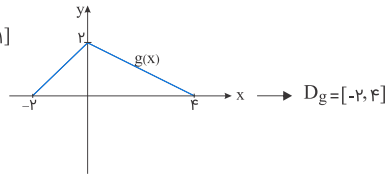
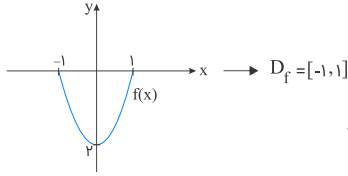
$$\xrightarrow{x=\frac{t-1}{2}} f(t) = 4\left(\frac{t-1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{t-1}{2}\right) = (t-1)^2 - (t-1)$$

$$\Rightarrow f(t) = t^2 - 3t + 2 \Rightarrow f(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow -x} f(-x) = (-x)^2 - 3x(-x) + 2 \Rightarrow f(-x) = x^2 + 3x + 2$$

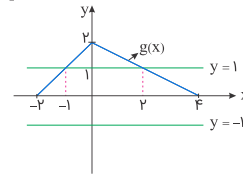
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی
 تستر علوم تجربی دوازدهم
 تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

برای تعیین دامنهٔ تعریف تابع fog، ابتدا دامنهٔ تابع g را مشخص کرده و سپس $g(x)$ را در دامنهٔ تابع f قرار می‌دهیم. داریم:



$$\Rightarrow D_{fog} = \{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x \mid -2 \leq x \leq 4, -1 \leq g(x) \leq 1\}$$

برای حل نامعادلهٔ $-1 \leq g(x) \leq 1$ ، کافی است به شکل زیر دقت نماییم. داریم:



$$\Rightarrow -1 \leq g(x) \leq 1 \Rightarrow -2 \leq x \leq -1 \text{ یا } 2 \leq x \leq 4$$

$$\Rightarrow D_{fog} = \{x \mid -2 \leq x \leq -1 \text{ یا } 2 \leq x \leq 4\}$$

پس دامنهٔ تعریف تابع fog به صورت زیر خواهد بود. داریم:

$$D_{fog} = [-2, -1] \cup [2, 4] \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x = -2, -1, 2, 3, 4$$

بنابراین دامنهٔ تابع fog شامل ۵ عدد صحیح است.

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

ابتدا صورت و مخرج را تجزیه و کسر را ساده می‌کنیم. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{2x^2 + 7x + 6}{x^3 - 3x} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{(x+3)(2x+3)}{x(x+3)(x-2)} = -\infty$$

پس a می‌تواند صفر و ۲ (ریشه‌های مخرج) باشد. باید چک کنیم حد چپ تابع در آن‌ها، $-\infty$ می‌شود یا خیر.

چک کردن $a = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x + 3}{x(x-2)} = \frac{3}{0^+} = +\infty \quad \times$$

چک کردن $a = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x + 3}{x(x-2)} = \frac{7}{0^-} = -\infty \quad \checkmark$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

باتوجه به فرمول‌های بسط 2α ، ابتدا کمی ظاهر معادله را تغییر می‌دهیم. داریم:

$$\cos 2x + 7 \cos x + 3 = 0 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 1 + 7 \cos x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow 2 \cos^2 x + 7 \cos x + 3 = 0 \xrightarrow{\cos x = t} 2t^2 + 7t + 3 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{-7 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-7 \pm 7}{4} \Rightarrow t = -3, \quad t = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} \cos x = -3 \quad \times \\ \cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

تستر علوم تجربی دوازدهم

دقت کنید که توابع f و g در بازه $[a, b]$ همواره مثبت هستند اما f نزولی و g صعودی است. بنابراین با فرض $x_1 > x_2$ داریم:

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ و } g(x_1) > g(x_2) \text{ و درنتیجه:}$$

$$g(x_1) > g(x_2) \xrightarrow{g(x_1), g(x_2) > 0} \frac{1}{g(x_1)} < \frac{1}{g(x_2)}$$

$$\xrightarrow{f(x_1) < f(x_2)} \frac{f(x_1)}{g(x_1)} < \frac{f(x_2)}{g(x_2)}$$

پس با فرض $x_1 > x_2$ به $\frac{f}{g}(x_1) < \frac{f}{g}(x_2)$ رسیده‌ایم، یعنی تابع $\frac{f}{g}$ اکیداً نزولی است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

کمی عبارت را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\left(\frac{1}{\cos x} - 2 \cos x\right) \sqrt{2 + 2 \cos 2x} = \left(\frac{1 - 2 \cos^2 x}{\cos x}\right) \sqrt{2(1 + \cos 2x)} \quad (I)$$

حال از آنجا که $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ ، نتایج زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} \text{الف) } 1 - 2 \cos^2 x = -\cos 2x \\ \text{ب) } 1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x \end{cases}$$

پس عبارت (I) به این صورت درمی‌آید:

$$\left(\frac{-\cos 2x}{\cos x}\right) \sqrt{2(2 \cos^2 x)} = \left(\frac{-\cos 2x}{\cos x}\right) \underbrace{\sqrt{2 \cos^2 x}}_{2 |\cos x|}$$

چون x در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی است، پس $\cos x$ مثبت بوده و $|\cos x| = \cos x$. بنابراین داریم:

$$\left(\frac{-\cos 2x}{\cos x}\right) \times 2 \cos x = -2 \cos 2x$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

باید ببینیم چه کارهایی روی $y = |x|$ می‌توان اعمال کرد که به تابع g تبدیل شود. در گام نخست تابع $|x|$ را دو واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم سپس نمودار را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم و بعد نمودار را یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم. اما باید توجه داشت که چه اتفاقی رخ داده که $g(0) = -\frac{4}{3}$ شده است. قطعاً ضریب مانند a پشت $|x - 2|$ - قرار داشته که این اتفاق افتاده؛ بنابراین a را به‌دست می‌آوریم:

$$g(x) = -a|x - 2| - 1 \xrightarrow{g(0) = -\frac{4}{3}} g(0) = -2a - 1 = -\frac{4}{3} \Rightarrow -2a = -\frac{4}{3} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{-2}{3}|x - 2| - 1 \Rightarrow g(5) = \frac{2}{3}|5 - 2| - 1 = -3$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبازی فراهانی
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم
تستر علوم تجربی دوازدهم

برای تعیین بازه‌ای که در آن تابع $y = \frac{1}{f(x)-1}$ اکیداً نزولی باشد، مشتق تابع را مشخص کرده و منفی قرار می‌دهیم. داریم:

$$y' = \frac{0 - f'(x)}{(f(x) - 1)^2} = \frac{-f'(x)}{(f(x) - 1)^2} \leq 0$$

باتوجه به اینکه $(f(x) - 1)^2$ همواره مثبت می‌باشد، بنابراین بایستی $0 \geq f'(x)$ باشد. (یعنی بازه‌ای که تابع f در آن اکیداً صعودی باشد).

به ظاهر طول بیشترین بازه از تابع f با این خاصیت، بازه $(1, 6)$ می‌باشد. دقت کنیم که $x = 4$ ریشهٔ مخرج تابع $y = \frac{1}{f(x)-1}$ می‌باشد و این نقطه، نقطهٔ ناپیوستگی تابع است. پس بایستی بازه $(1, 6)$ را در $x = 4$ تفکیک کرده و ادعا کنیم تابع در بازه‌های $(1, 4)$ و $(4, 6)$ اکیداً نزولی می‌باشد که حداکثر طول بازه $4 - 1 = 3$ خواهد بود.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علیون
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\tan x - 1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - 1}{\sqrt{(\sin x - \cos x)^2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\frac{\sin x - \cos x}{\cos x}}{|\sin x - \cos x|} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

توجه کنید که وقتی $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ است، مقدار $\sin x$ از $\cos x$ بزرگ‌تر است، پس:

$$|\sin x - \cos x| = \sin x - \cos x$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبازی فراهانی
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم
تستر علوم تجربی دوازدهم

چون دامنهٔ تعریف تابع بازهٔ $[-۱, ۳]$ است، درنتیجه اگر عبارت زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار دهیم، جواب نامعادلهٔ حاصل به صورت $-۱ \leq x \leq ۳$ خواهد بود. پس -۱ و ۳ ، ریشه‌های عبارت زیر رادیکال (یعنی عبارت $-x^2 + ax + b$) بوده و با مفهوم S و P داریم:

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = -۱ + ۳ = ۲ \xrightarrow{S=a} a = ۲$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = -۱ \times ۳ = -۳ \xrightarrow{P=-b} -b = -۳ \Rightarrow b = ۳$$

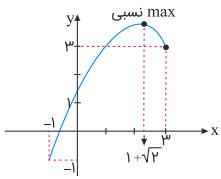
پس ضابطهٔ تابع به صورت $f(x) = x + \sqrt{-x^2 + ۲x + ۳}$ است. حال از ضابطهٔ تابع مشتق گرفته و ریشهٔ سادهٔ صورت مشتق را مشخص می‌کنیم. داریم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{\overbrace{-2x+2}^{f'(-x+1)}}{\sqrt{-x^2+2x+3}} = \frac{\sqrt{-x^2+2x+3} - x + 1}{\sqrt{-x^2+2x+3}} = 0 \\ &\Rightarrow \sqrt{-x^2+2x+3} - x + 1 = 0 \\ &\Rightarrow \sqrt{-x^2+2x+3} = x - 1 \xrightarrow[\text{به توان ۲}]{x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1} -x^2 + 2x + 3 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 2 = 0 \\ &\xrightarrow{\div 2} x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{2} \neq 1 \\ x = 1 + \sqrt{2} \end{cases} \text{ ساده} \Rightarrow \text{اکسترم} \end{aligned}$$

حال برای تعیین مقدار تابع در نقطهٔ اکسترم نسبی آن، $x = 1 + \sqrt{2}$ را در ضابطهٔ تابع جایگذاری می‌کنیم. داریم:

$$y_{\text{اکسترم}} = f(1 + \sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{\underbrace{-(1 + \sqrt{2})^2}_{-1-2\sqrt{2}-2} + \underbrace{2(1 + \sqrt{2})}_{2+2\sqrt{2}} + 3} = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 1 + 2\sqrt{2} \simeq 3.8$$

چون مقدار تابع در نقاط ابتدا و انتهای دامنهٔ تعریف تابع (یعنی $f(-۱) = -۱$ و $f(۳) = ۳$) از مقدار اکسترم نسبی کمتر است، پس قطعاً عرض نقطهٔ اکسترم از عرض نقاط همسایگی خود، بیشتر بوده و درنتیجه نوع نقطهٔ اکسترم نسبی تابع، ماکزیمم نسبی می‌باشد.



می‌دانیم آهنگ تغییر لحظه‌ای برابر است با مقدار مشتق تابع موردنظر، پس داریم:

$$y' = 3x^2 - 6x + 2$$

کمترین مقدار این تابع به ازای رأس سهمی اتفاق می‌افتد، یعنی:

$$x_S = \frac{-(-6)}{2(3)} = 1 \Rightarrow y'(1) = 3 - 6 + 2 = -1$$

پس کمترین مقدار آهنگ لحظه‌ای ۱- است.

ازطرفی آهنگ متوسط در این بازه برابر است با:

$$\frac{y(3) - y(1)}{3 - 1} = \frac{((3)^3 - 3(3)^2 + 2(3) + 1) - ((1)^3 - 3(1)^2 + 2(1) + 1)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

بنابراین:

$$[1, 3] \text{ کمترین مقدار ممکن برای آهنگ لحظه‌ای - آهنگ متوسط در بازه } = 3 - (-1) = 4$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - کامیار علیون

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

ابتدا با داشتن زوج مرتب‌های تابع f ، توابع f^{-1} و f^2 را می‌سازیم. داریم:

$$f^2 = \{(-1, 4), (2, 5), (5, 1), (1, 1)\} \quad , \quad f^{-1} = \{(2, -1), (5, 2), (-1, 5), (1, 1)\}$$

$$\begin{cases} f^{-1}(f^2(-1)) = f^{-1}(4) = 2 \\ f^{-1}(f^2(2)) = f^{-1}(5) = 2 \\ f^{-1}(f^2(5)) = f^{-1}(1) = 1 \\ f^{-1}(f^2(1)) = f^{-1}(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow f^{-1} \circ f^2 = \{(2, 2), (5, 1), (1, 1)\}$$

مجموع اعضای برد تابع $f^{-1} \circ f^2$ برابر است با:

$$2 + 1 + 1 = 4$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی

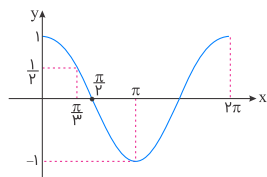
تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

ابتدا حد تابع در نقطهٔ $x = \frac{\pi}{3}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \cos x}{2 \cos x - 1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}}{2 \times \frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{\text{صفر حدی}} = \infty$$

برای تعیین علامت ∞ ، باید علامت صفر حدی موجود در مخرج را به دست آوریم. یعنی حد چپ و راست تابع در $x = \frac{\pi}{3}$ را محاسبه کنیم. باتوجه‌به نمودار $y = \cos x$ داریم:



$$x > \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos x < \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \cos x < 1 \Rightarrow 2 \cos x - 1 < 0$$

$$x < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos x > \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \cos x > 1 \Rightarrow 2 \cos x - 1 > 0$$

پس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^+} \frac{\sin x - \cos x}{2 \cos x - 1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^-} \frac{\sin x - \cos x}{2 \cos x - 1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

بنابراین باید به دنبال نموداری باشیم که در همسایگی راست $\frac{\pi}{3}$ تا $-\infty$ و در همسایگی چپ $\frac{\pi}{3}$ تا $+\infty$ رفته باشد که با این اوصاف گزینهٔ "۱" صحیح است.

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

ابتدا ضابطهٔ f' را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = x + \sqrt{2x-1} - 7 \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

مشتق $\frac{f \circ f}{f}$ را حساب می‌کنیم:

$$y = \frac{f(f(x))}{f(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x) \cdot f'(f(x)) \cdot f(x) - f'(x) \cdot f(f(x))}{f^2(x)}$$

با جایگذاری $x = 5$ داریم:

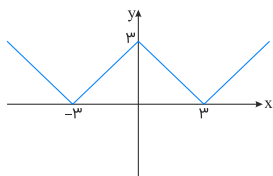
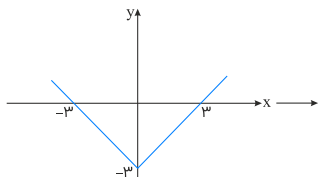
$$y' = \frac{f'(5) \cdot f'(f(5)) \cdot f(5) - f'(5) \cdot f(f(5))}{f^2(5)} = \frac{(\frac{5}{2})(\frac{5}{2})(1) - (\frac{5}{2})(-5)}{1^2} = \frac{1}{2} + \frac{25}{2} = \frac{26}{2}$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علیون

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

بهترین کار این است که نمودار تابع $y = ||x| - ۳|$ را رسم کنیم. کافی است نمودار $y = |x|$ را سه واحد به سمت پایین برده و سپس قرینه قسمت‌هایی که در زیر محور x ها واقع شده‌اند را در بالای محور رسم کنیم:



واضح است که این تابع در $\mathbb{R}$ دارای سه نقطه گوشه‌ای و مشتق‌ناپذیر در $۳, ۰, -۳$ است. حالا باتوجه به گزینه‌ها، دامنه این تابع را محدود می‌کنیم:

صفر نقطه مشتق‌ناپذیر $\Rightarrow (-۳, -۱)$: بازه $\Rightarrow a = -۱$: گزینه ۱

صفر نقطه مشتق‌ناپذیر $\Rightarrow (-۳, ۰)$: بازه $\Rightarrow a = ۰$: گزینه ۲

یک نقطه مشتق‌ناپذیر در $x = ۰$: بازه $\Rightarrow (-۳, ۲)$: گزینه ۳

دو نقطه مشتق‌ناپذیر در $x = ۰, ۳$: بازه $\Rightarrow (-۳, ۴)$: گزینه ۴

تألیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک

تستر علوم تجربی دوازدهم

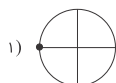
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

ابتدا کمی ضابطهٔ تابع را ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{2 \sin x + \sin 2x}{(1 + \cos x) \sin x} = \frac{2 \sin x + 2 \sin x \cos x}{(1 + \cos x) \sin x} = \frac{2 \sin x (1 + \cos x)}{(1 + \cos x) \sin x} = 2$$

اما دقت کنید! نقاطی که مخرج کسر را صفر می‌کنند، عضو دامنهٔ این تابع نیستند:

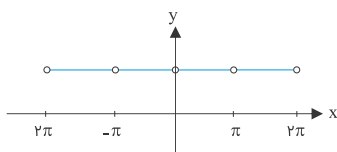
$$(1 + \cos x) \sin x = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -1 & (1) \\ \sin x = 0 & (2) \end{cases}$$



اجتماع این نقاط روی دایرهٔ مثلثاتی به صورت زیر می‌شود، یعنی ریشه‌های مخرج به صورت $x = k\pi$ بوده و دامنهٔ این تابع $\mathbb{R} - \{x | x = k\pi\}$ می‌باشد.



پس نمودار آن به صورت خط افقی $y = 2$ با نقاط توخالی در $x = k\pi$ است:



واضح است که دورهٔ تناوب این تابع $T = \pi$ می‌باشد.

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم
تستر علوم تجربی دوازدهم

$$\begin{aligned} f(x^{\flat}f(x)) &\xrightarrow{\text{مشتق}} (x^{\flat}f(x))'f'(x^{\flat}f(x)) = (\flat xf(x) + x^{\flat}f'(x))f'(x^{\flat}f(x)) \\ &= (\flat f(1) + f'(1))f'(f(1)) \\ &\downarrow \\ &_{x=1} \end{aligned}$$

چون $f(x) = x\sqrt{x}$ ، پس $f(1) = 1$ است. داریم:

$$(f(x^{\flat}f(x)))' = (\flat + f'(1)) \times f'(1)$$

$f'(1)$ را می‌خواهیم:

$$\begin{aligned} f(x) &= x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(1) = \frac{3}{2} \\ \Rightarrow (f(x^{\flat}f(x)))' &= (\flat + \frac{3}{2}) \times \frac{3}{2} = \frac{\flat}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{\flat 1}{4} \end{aligned}$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علیون
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

روش اول:

حد داده‌شده ابهام $\frac{0}{0}$ است. برای ساختن عامل صفرشونده می‌توانیم از هم‌ارزی برنولی برای حل مسئله استفاده کنیم. اگر $u \rightarrow 0$ ، آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{1+u} &\sim 1 + \frac{u}{n} \\ (1+u)^m &\sim 1 + mu \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1+3x}}{1 - \sqrt{1-x}} = \frac{1 - (1 + \frac{1}{3}(3x))}{1 - (1 - \frac{1}{2}(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{\frac{1}{2}x} = -2$$

روش دوم:

حد صورت تست ابهام $\frac{0}{0}$ است. پس برای رفع ابهام از روش هوپیتال کمک می‌گیریم. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1+3x}}{1 - \sqrt{1-x}} \xrightarrow[\text{HOP}]{\text{ابهام } \frac{0}{0}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-3}{3\sqrt{(1+3x)^2}}}{\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبازی فراهانی
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

هنگامی که جواب حد وقتی $x \rightarrow -1$ میل کرده، $+\infty$ شده است، حد راست و چپ در (-1) هر دو $+\infty$ شده! (انفصال مضاعف) و این یعنی مخرج ریشهٔ مضاعف (-1) دارد، پس:

$$\begin{aligned} \text{مخرج} &= -(x+1)^2 = -x^2 - 2x - 1 = -x^2 + (a+1)x - 2b - 1 \\ \Rightarrow \begin{cases} a+1 = -2 \Rightarrow a = -3 \\ -2b-1 = -1 \Rightarrow -2b=0 \Rightarrow b=0 \end{cases} &\Rightarrow a+b = -3 \end{aligned}$$

تألیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

شکل تابع به صورت $\sqrt{u}$ است که در آن $u = ۲ - \sqrt{\frac{۳}{x+۲}}$ می‌باشد. حال مشتق این تابع را با رابطه $u' \cdot \frac{1}{۲\sqrt{u}}$ محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$\xrightarrow{y'=\frac{1}{۲\sqrt{u}}u'} y' = \frac{1}{۲\sqrt{۲-\sqrt{\frac{۳}{x+۲}}}} \times \left(0 - \frac{1}{۲\sqrt{\frac{۳}{x+۲}}} \times \left(\frac{-۳}{(x+۲)^۲} \right) \right)$$

درنهایت با جایگذاری $x = ۱$ ، داریم:

$$y'(1) = \frac{1}{۲\sqrt{1}} \cdot \left(-\frac{1}{۲\sqrt{1}} \times \frac{-۳}{۹} \right) = \frac{1}{۲} \times \frac{۳}{۱۸} = \frac{1}{۲} \times \frac{1}{۶} = \frac{1}{۱۲}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

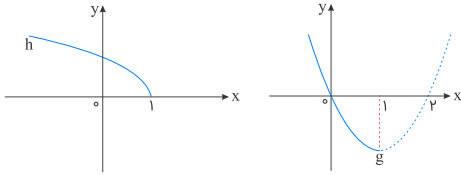
تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

تابع f را به صورت جمع دو تابع $g(x) = x^۲ - ۲x$ و $h(x) = \sqrt{1-x}$ در نظر می‌گیریم. دقت کنیم دامنهٔ تابع f به صورت $D_f = (-\infty, 1]$ است. داریم:

$$f(x) = \underbrace{x^۲ - ۲x}_{g(x)} + \underbrace{\sqrt{1-x}}_{h(x)}$$

نمودار g و h را با شرط $x \leq 1$ رسم می‌کنیم. باتوجه‌به نمودارهای زیر، هر دو تابع، اکیداً نزولی هستند. چون جمع دو تابع اکیداً نزولی، تابعی اکیداً نزولی است، پس f نیز قطعاً اکیداً نزولی خواهد بود.



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

تستر علوم تجربی دوازدهم

ابتدا طول نقاط اکسترم نسبی تابع را مشخص می‌کنیم. داریم:

$$f'(x) = \frac{a(x^۲+1) - ۲x(ax)}{(x^۲+1)^۲} = \frac{a(x^۲+1 - ۲x^۲)}{(x^۲+1)^۲} = \frac{a(1-x^۲)}{(x^۲+1)^۲}$$

ریشه‌های صورت کسر f' ، $x = \pm 1$ بوده و تابع f' در $x = ۱$ و $x = -۱$ تغییر علامت می‌دهد، پس طول نقاط اکسترم نسبی f ، $x = ۱$ و $x = -۱$ است، داریم:

$$A\left(1, \frac{a}{۲}\right), \quad B\left(-1, \frac{-a}{۲}\right)$$

معادلهٔ خطوط مماس در این دو نقطه به صورت $y = \frac{a}{۲}$ و $y = \frac{-a}{۲}$ است. فاصلهٔ این دو خط از هم $|a|$ است که باید برابر با ۲۰ باشد، داریم:

$$|a| = ۲۰ \xrightarrow{a > 0} a = ۲۰$$

با داشتن $a = ۲۰$ ، مقدار $f(۲)$ را مشخص می‌کنیم، داریم:

$$f(x) = \frac{۲۰x}{x^۲+1} \Rightarrow f'(۲) = \frac{۲۰(۲)}{۲^۲+1} = \frac{۴۰}{۵} = ۸$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - کامیار علیون

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

نکته: توابع رادیکالی با فرجهٔ فرد، در تمام ریشه‌های زیر رادیکال (به‌شرط آنکه بعد از ساده کردن، ریشهٔ عبارت پشت رادیکال نشود) قطعاً مشتق‌ناپذیر است.

اگر عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ فرد، یعنی عبارت $x^۲ + mx - m$ ریشه (ساده یا مضاعف) داشته باشد، آنگاه تابع f در این ریشه مشتق‌ناپذیر است و این با شرط صورت مسئله در تضاد می‌باشد. پس باید عبارت زیر رادیکال دارای ریشهٔ حقیقی نباشد. داریم:

$$\Delta < ۰ \Rightarrow m^۲ + ۴m < ۰ \Rightarrow -۴ < m < ۰$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

$$f'(۱) = \lim_{x \rightarrow ۱} \frac{f(x) - f(۱)}{x - ۱} = \lim_{x \rightarrow ۱} \frac{x|x - ۱| + a|x^۲ - ۱|}{x - ۱} = \frac{۰}{۰}$$

$$f'_+(۱) = ۱ + a(۲) \text{ , } f'_-(۱) = -۱ + a(-۲) \Rightarrow ۱ + ۲a = -۲a - ۱ \\ \Rightarrow ۴a = -۲ \Rightarrow a = -\frac{۱}{۲}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

حد مخرج کسر وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{۴}$ صفر می‌شود. چون حاصل حد، عدد شده است، پس حد صورت نیز باید صفر باشد تا بعد از رفع ابهام $\frac{۰}{۰}$ ، حاصل حد که یک عدد است (L)، به دست آید. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{۴}} (a \cos^۴ x - ۱) = ۰ \Rightarrow a \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲} \right)^۴ - ۱ = ۰ \Rightarrow \frac{a}{۴} - ۱ = ۰ \Rightarrow a = ۴$$

با جایگذاری $a = ۴$ ، حاصل حد را حساب می‌کنیم. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{۴}} \frac{۴ \cos^۴ x - ۱}{\cos^۶ x - \sin^۶ x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{۴}} \frac{(۲ \cos^۴ x - ۱)(۲ \cos^۲ x + ۱)}{(\cos^۲ x - \sin^۲ x)(\cos^۴ x + \sin^۲ x \cos^۲ x + \sin^۴ x)}$$

هر دو عبارت $۲ \cos^۲ x - ۱$ و $\cos^۲ x - \sin^۲ x$ برابر با $\cos ۲x$ هستند، پس می‌توانیم آن‌ها را از صورت و مخرج، ساده کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{۴}} \frac{\overbrace{(۲ \cos^۲ x - ۱)}^{\cos ۲x} (۲ \cos^۲ x + ۱)}{\underbrace{(\cos^۲ x - \sin^۲ x)}_{\cos ۲x} (\cos^۴ x + \sin^۲ x \cos^۲ x + \sin^۴ x)} = \frac{۲ \times \frac{۲}{۴} + ۱}{\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴}} = \frac{۲}{\frac{۳}{۴}} = \frac{\lambda}{۳} \Rightarrow L = \frac{\lambda}{۳}$$

پس حاصل $a + ۳L$ برابر است با:

$$a + ۳L = ۴ + ۳ \left(\frac{\lambda}{۳} \right) = ۴ + \lambda = ۱۲$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

تستر علوم تجربی دوازدهم

باتوجه‌به مفروضات مشخص می‌شود که g نیز یک تابع خطی است.

$$f(x) = ax + b \Rightarrow a = \tan \alpha = ۴ \Rightarrow f(x) = ۴x + b$$

$$g(x) = cx + d$$

$$\begin{cases} (f \circ g)(x) = f(g(x)) = ۴(cx + d) + b = ۴cx + ۴d + b = -\lambda x + ۱\lambda \\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = c(۴x + b) + d = ۴cx + bc + d = -\lambda x - ۹ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۴c = -\lambda \Rightarrow c = -۲ \\ ۴d + b = ۱\lambda \\ bc + d = -۹ \end{cases} \xrightarrow{c=-۲} d = ۳, \text{ } b = ۶ \Rightarrow g(x) = cx + d = -۲x + ۳ \Rightarrow g(-۲) = ۷$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی

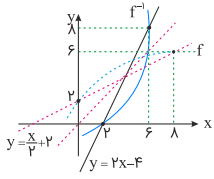
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

تستر علوم تجربی دوازدهم

برای محاسبه دامنۀ تابع g ، باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد، پس داریم:

$$f^{-1}(x) - 2x + 4 \geq 0 \Rightarrow f^{-1}(x) \geq 2x - 4$$

اگر نمودار هر دو تابع $f(x)$ و خط $y = \frac{x}{2} + 2$ را نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم قرینه کنیم (یعنی خط $y = x$)، نمودار دو تابع $f^{-1}(x)$ و خط $y = 2x - 4$ مشخص می‌شوند (دو خط $y = 2x - 4$ و $y = \frac{x}{2} + 2$ وارون یکدیگرند). حال با کمی دقت به راحتی پی می‌بریم که در بازه $(2, 6) - \mathbb{R}$ ، نمودار تابع $f^{-1}(x)$ بالاتر یا برابر با خط $y = 2x - 4$ خواهد بود.



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

ابتدا با داشتن ضابطه $f(x)$ ، خودمان ضابطه $f(g(x))$ را تشکیل می‌دهیم و سپس ضابطه به دست آمده را برابر با ضابطه $f(g(x))$ داده شده، قرار می‌دهیم. داریم:

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(x) = \lambda x^3 - 1 \Rightarrow f(g(x)) = \lambda g^3(x) - 1 \\ f(g(x)) = \underbrace{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} - 1 = \underbrace{(x+1)^3} - 1 \end{cases} \\ \Rightarrow \lambda g^3(x) = (x+1)^3 \\ \Rightarrow g^3(x) = \frac{(x+1)^3}{\lambda} \xrightarrow{\sqrt[3]{}} g(x) = \frac{x+1}{2} \\ \Rightarrow (f+g)(-1) = f(-1) + g(-1) = -9 + 0 = -9 \end{aligned}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

با ابهام $\infty - \infty$ مواجهیم که برای رفع آن، عبارت را در مزدوج خودش ضرب و تقسیم می‌کنیم:

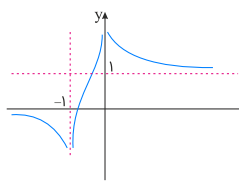
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - \sqrt{x^6 - x^2 + b} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 - \sqrt{x^6 - x^2 + b})(x^2 + \sqrt{x^6 - x^2 + b})}{x^2 + \sqrt{x^6 - x^2 + b}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^6) - (x^6 - x^2 + b)}{x^2 + \sqrt{x^6 - x^2 + b}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - b}{x^2 + \sqrt{x^6 - x^2 + b}} \\ &\xrightarrow{\text{هم‌ارزی پرتوان در صورت و مخرج}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - b}{x^2 + \sqrt{x^6 - x^2 + b}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + \sqrt{x^6}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

پس جواب حد فوق کاملاً مستقل از b است و به ازای هر مقدار b ، جواب $\frac{1}{2}$ خواهد بود.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

تابع در $+\infty$ به خط $y = 1$ نزدیک می‌شود:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$



به‌علاوه اگر حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} f^{-1}(x)$ را بخواهیم، باید ببینیم به ازای چه مقداری از x حد تابع $-\infty$ است. باتوجه‌به شکل، $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ می‌باشد. پس

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f^{-1}(x) = -1 \text{ است. داریم:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow -\infty} f^{-1}(x) = 1 + (-1) = 0$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

برخلاف تصور اولیه، با ابهام $\infty - \infty$ مواجه نیستیم و کافی است از هم‌ارزی پرتوان استفاده کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{fx^2 + x + 1} + \sqrt{fx^2 - x + 1}) \underset{\text{پرتوان}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{fx^2} + \sqrt{fx^2})$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (|2x| + |2x|) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x) = +\infty$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

برای آنکه $x = 3$ نقطهٔ بحرانی تابع f باشد ولی اکسترم نسبی آن نباشد، لازم است که $x = 3$ ریشهٔ مکرر زوج معادلهٔ $f'(x) = 0$ شود، چون ریشه‌های ساده و مکرر فرد f' (که f' در آن‌ها هم صفر می‌شود و هم تغییر علامت می‌دهد) هم جزء نقاط بحرانی تابع f هستند و هم اکسترم نسبی آن.

$$f(x) = \frac{x^2 - ax + 3}{x + b} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x - a)(x + b) - (1)(x^2 - ax + 3)}{(x + b)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(2x^2 + 2bx - ax - ab) - (x^2 - ax + 3)}{(x + b)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 + 2bx - ab - 3}{(x + b)^2} \xrightarrow{f'(x)=0} x^2 + 2bx - ab - 3 = 0$$

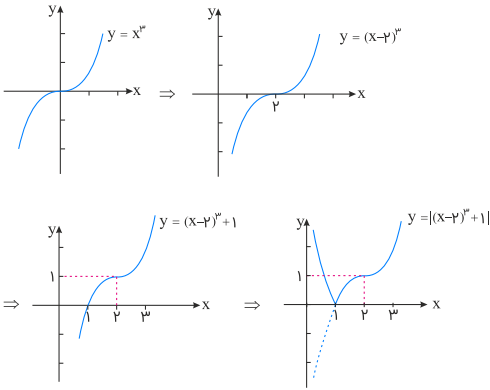
برای آنکه این معادله، ریشهٔ مضاعف $x = 3$ داشته باشد، باید به‌صورت $x^2 = 6x + 9 - 3(x - 3)^2$ باشد، پس:

$$\begin{cases} 2b = -6 \Rightarrow b = -3 \\ -ab - 3 = 9 \xrightarrow{b=-3} 3a - 3 = 9 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow a - b = 4 - (-3) = 7 \end{cases}$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

تستر علوم تجربی دوازدهم

$$f(x) = x^w - \varepsilon x^r + \eta x^{-\lambda+1} = x^w - \varepsilon x^r + \eta x^{-\lambda+1} \underbrace{\phantom{x^{-\lambda+1}}}^{(x-r)^p}$$


گزینه ۴

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(\psi + |h|) - f(\psi)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(\psi - h) - f(\psi)}{h}$$
$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(\nu - h) - f(\nu)}{h} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(\nu + t) - f(\nu)}{-t} \\ &= -\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(\nu + t) - f(\nu)}{t} = -f'_+(\nu) \end{aligned}$$

گزینه ۴

$$f'(x) = \frac{fx - \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow fx = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{\text{تولد}} \sqrt{x} = \frac{1}{fx}$$

$$\Rightarrow \sqrt{fx} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{f^2}$$
$$f(\circ) = \circ, \quad f(1) = \frac{1}{\nu}, \quad f\left(\frac{1}{\epsilon}\right) = -\frac{\mu}{1\epsilon}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h-3) + 5}{5h^2 + h} = 6 \xrightarrow{\text{پیرتوان}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h-3) + 5}{h} = 6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(-3) = -5 \\ 2f'(-3) = 6 \Rightarrow f'(-3) = 3 \end{cases}$$

حال مشتق تابع $f^3\left(\frac{1}{x}\right)$ را در $x = -\frac{1}{3}$ حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \left(f^3\left(\frac{1}{x}\right)\right)' &= 3f^2\left(\frac{1}{x}\right) \times f'\left(\frac{1}{x}\right) \times \frac{-1}{x^2} \underset{x=-\frac{1}{3}}{=} 3f^2(-3) \times f'(-3) \times (-9) \\ &= 3(-5)^2(3)(-9) = -2025 \end{aligned}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم
تستر علوم تجربی دوازدهم

برای پیدا کردن ضابطهٔ تابع وارون در تست کافی است x ای دلخواه در دامنهٔ تابع انتخاب کنیم (بهتر است نقطه‌های ابتدا و انتهای دامنه را انتخاب نکنیم، چون ممکن است دو گزینه یا بیشتر درست شوند) سپس با قرار دادن آن در تابع داده‌شده، y متناظر با آن را حساب کرده و سپس جای x و y نقطهٔ به‌دست‌آمده را عوض کرده و در گزینه‌ها جایگذاری کنیم تا گزینهٔ درست مشخص شود.

$$y = \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} \xrightarrow{x=5} f(3) = \sqrt{5 - 2\sqrt{5-1}} = \sqrt{5 - 2(2)} = \sqrt{1} = 1$$

$$\Rightarrow A \Big|_1^5 \in f \Leftrightarrow A' \Big|_5^1 \in f^{-1} \Rightarrow \text{گزینهٔ ۴}$$

تالیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

$f \circ f'(x)$ تابعی چندجمله‌ای از درجهٔ دوم است، به‌عبارتی با قرار دادن f' در داخل تابع $f(x)$ ، به عبارت درجهٔ دوم رسیده‌ایم. پس $f(x)$ خود باید از درجهٔ دوم باشد، یعنی:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 2ax + b \\ f''(x) = 2a \end{cases}$$

$$\Rightarrow f \circ f'(x) = f(f'(x)) = f(2ax + b)$$

$$= a(2ax + b)^2 + b(2ax + b) + c$$

$$= (4a^3x^2 + 4a^2bx + ab^2) + (2abx + b^2) + c$$

$$= (4a^3)x^2 + (4a^2b + 2ab)x + (ab^2 + b^2 + c)$$

از مقایسهٔ این عبارت با $108x^2 + mx + n$ داریم:

$$4a^3 = 108 \Rightarrow a^3 = 27 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow f''(x) = 2a = 6$$

چون f'' تابعی ثابت است، $f''(99)$ هم برابر ۶ خواهد بود.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

معادله را ساده‌تر می‌کنیم:

$$2 \sin x (\cos x - \sin x) = \cos 2x \Rightarrow 2 \sin x \cos x - 2 \sin^2 x = \cos 2x$$

$$\frac{2 \sin x \cos x = \sin 2x}{2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x} \Rightarrow \sin 2x + \cos 2x - 1 = \cos 2x \Rightarrow \sin 2x = 1$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبازی فراهانی
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم
تستر علوم تجربی دوازدهم

حد تابع را فقط می‌توان در $-\infty$ محاسبه نمود چرا که دامنهٔ تابع $f(x)$ ، $[-۱, +\infty)$ است.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{2x - |x + 1|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \sqrt{1-x}}{2x - |x + 1|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \sqrt{1-x}}{2x + (x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم
تستر علوم تجربی دوازدهم

تابع $f(x)$ خطی است. بنابراین تابع $g(x)$ تابعی چندجمله‌ای از درجهٔ دوم است. دقت کنید در تابع‌های درجهٔ دوم آهنگ تغییرات متوسط در بازهٔ $[a, b]$ با آهنگ لحظه‌ای تغییر در نقطهٔ $x = \frac{a+b}{2}$ (وسط بازه) برابر است.
بنا بر آنچه گفته شد، آهنگ تغییرات متوسط تابع $g(x)$ در بازهٔ $[-۱, ۳]$ با آهنگ لحظه‌ای تغییرات در $x = ۱$ برابر و اختلاف آن‌ها صفر است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم
تستر علوم تجربی دوازدهم

ببینیم هر مرحله به زبان ریاضی چه معنایی دارد و مرحله‌به‌مرحله ضابطه‌ها را مشخص کنیم:

۱- انقباض افقی ۲ واحدی: $f(2x)$

۲- قرینه نسبت به محور y ها: $f(-2x)$

۳- یک واحد انتقال افقی به سمت چپ: محل اشتباه اغلب همین‌جا است که شاید بگویید این مرحله $f(-2x + 1)$ است. باید بدانید در نوشتن ضابطهٔ تبدیل، هر تغییری که انجام می‌شود بر متغیر x است نه قسمت‌های دیگر. در اینجا یعنی به جای x ، باید $(x + 1)$ بگذاریم. یعنی ضابطه در این مرحله $f(-2(x + 1)) = f(-2x - 2)$ است.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}} + \sqrt{-x}$$

$$\Rightarrow f(-2x - 2) = \frac{1}{\sqrt{-2x - 2 + 2}} + \sqrt{-(-2x - 2)} = \frac{1}{\sqrt{-2x}} + \sqrt{2x + 2}$$

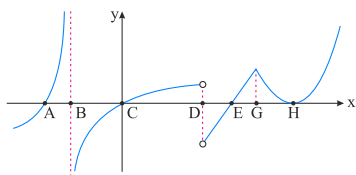
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم
تستر علوم تجربی دوازدهم

هر نقطه‌ای از دامنهٔ تابع f در آن مشتق تابع (یعنی f') صفر باشد یا f' در آن موجود نباشد، نقطهٔ بحرانی محسوب می‌شود. در نقاط بحرانی که علامت f' از مثبت به منفی، تغییر علامت دهد، آن نقطه، ماکزیمم نسبی تابع f است و اگر f' در نقطه‌ای از منفی به مثبت، تغییر علامت دهد، آن نقطه، مینیمم نسبی تابع f می‌باشد.

بحرانی‌ها: A, B, C, D, E, H (۶ نقطهٔ بحرانی)

max نسبی: B و D (۲ تا نقطه ماکزیمم نسبی)

min نسبی: A, C و E (۳ تا نقطه مینیمم نسبی)



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - کامیار علیون
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

ابتدا به $D_f = \mathbb{R} - \{-۱, ۱\}$ و $D_g = \mathbb{R} - \{-۳\}$ دقت می‌کنیم. پس اولاً اعداد ± ۱ در D_{gof} نیستند. ثانیاً باید اعدادی مانند x را پیدا کنیم که به ازای آن‌ها $f(x) = -۳$ باشند. با حل معادلهٔ $\frac{۱}{x^۲ - ۱} = -۳$ داریم:

$$x^۲ - ۱ = \frac{-۱}{۳} \Rightarrow x^۲ = \frac{۲}{۳} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{۲}{۳}}$$

پس $D_{gof} = \mathbb{R} - \{-۱, ۱, \pm \sqrt{\frac{۲}{۳}}\}$ که فقط دو عدد صحیح -۱ و ۱ در آن نیستند.

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

باتوجه‌به اینکه حاصل $۱ - \sin ۲x$ و $۱ + \cos ۴x$ به ازای $x = \frac{\pi}{۴}$ برابر با صفر است، با یک رفع ابهام $\frac{0}{0}$ روبه‌رو هستیم.

با استفاده از دو اتحاد مثلثاتی $۱ - \sin ۲x = (\sin x - \cos x)^۲$ و $۱ + \cos ۴x = ۲\cos^۲ ۲x = ۲(\cos^۲ x - \sin^۲ x)^۲$ داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{۱ - \sin ۲x}{۱ + \cos ۴x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x - \cos x)^۲}{۲\cos^۲ ۲x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x - \cos x)^۲}{۲(\sin x - \cos x)^۲(\sin x + \cos x)^۲} \\ &= \frac{۱}{۲} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{۱}{(\sin x + \cos x)^۲} = \frac{۱}{۴} \end{aligned}$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^۲ + ۱}{x + ۱} - ax - b \right) &= \left(\frac{x^۲ + ۱ - ax^۲ - ax - bx - b}{x + ۱} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(۱-a)x^۲ + (-a-b)x + ۱-b}{x + ۱} \right) = ۱ \\ \begin{cases} ۱ - a = ۰ \Rightarrow a = ۱ \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(-a-b)x + ۱-b}{x + ۱} \right) = ۱ \Rightarrow (-a-b) = ۱ \Rightarrow b = -۲ \Rightarrow a + b = -۱ \end{cases} \end{aligned}$$

تألیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

نکته تستری: برای تعیین طول نقاط بحرانی توابعی که ضابطهٔ مشتق آن‌ها مشخص است (به عبارتی شامل قدر مطلق یا جزء صحیح نباشند)، از ضابطهٔ تابع مشتق گرفته و همهٔ ریشه‌های صورت مشتق را مشروط بر اینکه متعلق به دامنهٔ تعریف تابع باشند، به عنوان طول نقطهٔ بحرانی معرفی می‌کنیم. در توابع شامل رادیکال با فرجهٔ فرد، علاوه بر ریشه‌های صورت، ریشه‌های مخرج را نیز مشخص می‌کنیم.

$$f(x) = x^{\frac{۷}{۳}} - ۲۸x^{\frac{۱}{۳}} = (x^۲ - ۲۸) \cdot \sqrt[۳]{x} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

باتوجه‌به توضیحات بالا، داریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^۲ - ۲۸) \cdot \sqrt[۳]{x} = ۲x \cdot \sqrt[۳]{x} + \frac{۱}{۳ \sqrt[۳]{x^۲}} (x^۲ - ۲۸) = \frac{۶x^۲ + x^۲ - ۲۸}{۳ \sqrt[۳]{x^۲}} = \frac{۷x^۲ - ۲۸}{۳ \sqrt[۳]{x^۲}} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \text{اکسترم نسبی} \Rightarrow \text{ساده } x^۲ = ۴ \Rightarrow x = \pm ۲ \\ \text{عطف قائم} \Rightarrow \text{مضاعف } ۳ \sqrt[۳]{x^۲} = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۰ \end{cases} \end{aligned}$$

پس تابع f دارای ۳ نقطهٔ بحرانی است.

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علیون

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

باید از قسمت داخلی عبارت شروع کنیم و طبق شکل حدهای خواسته‌شده را پیدا کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \underbrace{\underbrace{[f(f(x))]}_{+\infty}}_{1^+} - \lim_{x \rightarrow 2^-} \underbrace{\underbrace{[f(f(x))]}_{-\infty}}_{(-1)^+} = 2$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

چون ضابطهٔ دوم، یک تابع اکیداً صعودی است (تابع $x + \sqrt{x+3}$ ، به‌صورت مجموع دو تابع اکیداً صعودی می‌باشد، پس اکیداً صعودی خواهد بود)، درنتیجه ضابطهٔ اول نیز، باید قطعاً اکیداً صعودی باشد، پس داریم:

$$(1) \quad a > 0 = \text{شیب خط}$$

از طرفی دیگر برد ضابطهٔ اول و ضابطهٔ دوم نباید اشتراک داشته باشند. برای تعیین برد توابع اکیداً صعودی، کافی است به ترتیب دامنه، برد را مشخص نماییم. داریم:

$$f(x) = \begin{cases} ax + a - 1, & x \in (-\infty, 1) \Rightarrow R_1 = (-\infty, 2a - 1) \\ x + \sqrt{x+3}, & x \in [1, +\infty) \Rightarrow R_2 = [3, +\infty) \end{cases}$$

برای آنکه بردها اشتراکی نداشته باشند، باید مقدار $2a - 1$ ، کوچک‌تر یا مساوی ۳ باشد. داریم:

$$R_1 \cap R_2 = \emptyset \Rightarrow 2a - 1 \leq 3 \Rightarrow 2a \leq 4 \Rightarrow a \leq 2 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} 0 < a \leq 2 \xrightarrow{a \in \mathbb{Z}} a = \{1, 2\}$$

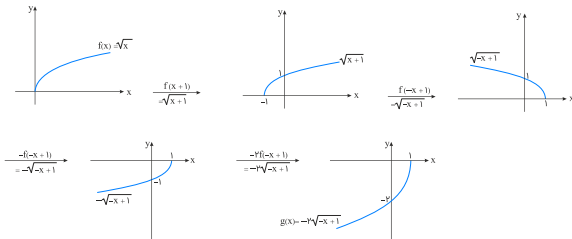
پس مجموعهٔ مقادیر a ، شامل ۲ عدد صحیح خواهد بود.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبازی فراهانی
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

باید بررسی کنیم چه تبدیلاتی روی نمودار تابع $f(x)$ آمده تا به نمودار تابع $g(x)$ تبدیل شده است. اینکه نمودار هم نسبت به محور x ها و هم نسبت به محور y ها قرینه شده است، کمی کار را سخت می‌کند. نمودار f را یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم (یعنی به‌جای x ، $x+1$ قرار می‌دهیم، یعنی $f(x+1)$) و سپس نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم (یعنی به‌جای x ، $-x$ قرار می‌دهیم، یعنی $f(-x+1)$). حال نمودار حاصل را نسبت به محور x ها قرینه کرده (کل تابع را در -1 ضرب می‌کنیم، یعنی $-f(-x+1)$) و بعد عرض همهٔ نقاط را ۲ برابر می‌کنیم ($-2f(-x+1)$).

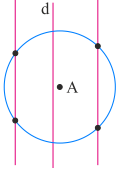
پس ضابطهٔ تابع g عبارت است از:

$$g(x) = -2\sqrt{-x+1} \Rightarrow g(-3) = -4$$



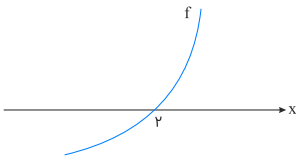
تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبازی فراهانی
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

مکان هندسی نقاطی که از نقطه A به فاصله معلوم k هستند یک دایره به مرکز A و شعاع k می‌باشد. از طرفی مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله k' هستند دو خط موازی با d است. محل تلاقی این دو خط موازی با دایره نقاط موردنظر هستند که تعداد آن‌ها حداکثر ۴ است.



تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری - علی شهبابی فراهانی
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

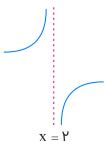
باتوجه به اینکه $f'(x) = 2x^4 + x^6 + 1$ عبارت‌ی همواره مثبت می‌باشد، بنابراین تابع f اکیداً صعودی می‌باشد. از طرفی می‌دانیم $f(2) = 0$ ، پس باتوجه به صعودی بودن تابع f ، مقدار تابع در همسایگی چپ و راست $x = 2$ ، به ترتیب 0^- و 0^+ خواهد بود.



$$\Rightarrow \begin{cases} f(2^-) = 0^- \\ f(2^+) = 0^+ \end{cases}$$

حال برای بررسی نمودار تابع $y = \frac{1-x}{f(x)}$ در اطراف $x = 2$ ، باید حد چپ و حد راست این تابع را در $x = 2$ مشخص کنیم. داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1-x}{f(x)} &= \frac{1-2}{f(2^+)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1-x}{f(x)} &= \frac{1-2}{f(2^-)} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \end{aligned} \Rightarrow$$



تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - کامیار علیون
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

تابع $y = |x^2 - 1|$ در نقطه‌های $x = \pm 1$ مشتق‌ناپذیر است و برای اینکه تابع $f(x)$ فقط در یک نقطه مشتق‌ناپذیر باشد، ضابطه آن باید $f(x) = (x+1)|x^2 - 1|$ یا $f(x) = (x-1)|x^2 - 1|$ باشد و در نتیجه a می‌تواند ۱ یا -۱ باشد.

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم
تستر علوم تجربی دوازدهم

ابتدا عرض نقاط بحرانی تابع را مشخص کرده و سپس مقادیر را در بی‌نهایت دورها نیز مشخص می‌کنیم (حد در بی‌نهایت تابع). داریم:

$$y' = \frac{1(1+x^2) - 2x \cdot x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \Rightarrow y' = 0 \xrightarrow{\text{صورت مشتق}} 1-x^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y(1) = \frac{1}{2} \\ x=-1 \Rightarrow y(-1) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$$

بین عرض‌های به‌دست‌آمده مقایسه کرده و بیشترین عرض را به عنوان ماکزیمم مطلق و کمترین عرض را به عنوان مینیمم مطلق معرفی می‌کنیم. داریم:

$$y_{\max} = \frac{1}{2}, y_{\min} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{اختلاف مقادیر اکسترمم مطلق} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علیون
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

اولاً:

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{توان دو}} (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}_1 + \underbrace{2 \sin \alpha \cos \alpha}_{\sin 2\alpha} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$$

ثانیاً:

$$\sin \alpha \sin^{\frac{\alpha}{2}} - \sin \alpha \cos^{\frac{\alpha}{2}} = \sin \alpha (\sin^{\frac{\alpha}{2}} - \cos^{\frac{\alpha}{2}})$$

$$= \sin \alpha (\underbrace{\sin^{\frac{\alpha}{2}} - \cos^{\frac{\alpha}{2}}}_{-\cos \alpha}) (\underbrace{\sin^{\frac{\alpha}{2}} + \cos^{\frac{\alpha}{2}}}_1)$$

$$= -\sin \alpha \cos \alpha = -\frac{1}{2} \sin 2\alpha = -\frac{1}{2} \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{8}$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

در هر مسیر به‌طور جداگانه آهنگ تغییر لحظه‌ای و متوسط را بررسی می‌کنیم: (می‌دانیم آهنگ تغییر لحظه‌ای شیب خط مماس و آهنگ تغییر متوسط شیب واصل بین دو سر بازه است)

مسیر "۱":

آهنگ تغییر متوسط < آهنگ تغییر لحظه‌ای > °

مسیر "۲":

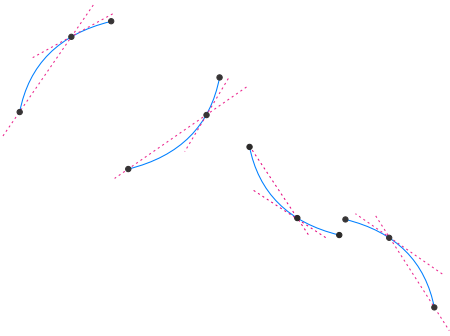
آهنگ تغییر لحظه‌ای < آهنگ تغییر متوسط > °

مسیر "۳":

° < آهنگ تغییر لحظه‌ای < آهنگ تغییر متوسط

مسیر "۴":

° < آهنگ تغییر متوسط < آهنگ تغییر لحظه‌ای



تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علیون
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

اگر $f(x) = \sqrt{x}$ تابع اولیۀ ما باشد، پس $\sqrt{x-1} + 1 = 2\sqrt{x-1} + 1 = 2f(x-1) + 1$ ابتدا نمودار را یک واحد به سمت راست انتقال داده، سپس عرض نقاط را در ۲ ضرب کرده و در نهایت کل نمودار را یک واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم که این عوامل با یک جابه‌جایی بی‌تأثیر در گزینه "۳" دیده می‌شوند.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم
تستر علوم تجربی دوازدهم

باتوجه به وجود $\sqrt{-x}$ در ضابطۀ تابع f ، باید $x \leq 0$ باشد. پس نتیجه می‌گیریم که $|x| = -x$ است. پس ضابطۀ f به صورت $f(x) = \frac{-x-1}{\sqrt{-x}+1}$ درمی‌آید. صورت را با اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم. داریم:

$$f(x) = \frac{(\sqrt{-x})^2 - 1}{\sqrt{-x} + 1} = \frac{(\sqrt{-x} - 1)(\cancel{\sqrt{-x} + 1})}{(\sqrt{-x} + 1)} = \sqrt{-x} - 1 \quad ; x \leq 0$$

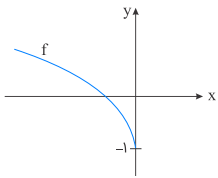
حال ضابطۀ f^{-1} را به دست می‌آوریم. داریم:

$$y = \sqrt{-x} - 1 \Rightarrow \sqrt{-x} = y + 1 \Rightarrow -x = (y + 1)^2 \\ \Rightarrow x = -(y + 1)^2 \xrightarrow[y, x]{\text{عوض کردن جای}} y = -(x + 1)^2$$

برد تابع $f(x) = \sqrt{-x} - 1$ همان $D_{f^{-1}}$ است. پس داریم:

$$R_f = D_{f^{-1}} = [-1, +\infty)$$

$$f^{-1}(x) = -(x + 1)^2 \quad ; x \geq -1$$



تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع به ترتیب ۱ و -3 است، پس داریم:

$$\left. \begin{aligned} y_{\max} &= |b| + c = 1 \\ y_{\min} &= -|b| + c = -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow |b| = 2, \quad c = -1$$

باتوجه به اینکه نمودار تابع سینوسی $y = b \sin(ax) + c$ در سمت راست محور y ، به صورت صعودی شروع شده، پس $a > 0$ است.

از طرفی دورۀ تناوب تابع $T = 4\pi - \left(\frac{-4\pi}{3}\right) = \frac{16\pi}{3}$ است، پس داریم:

$$\frac{2\pi}{|a|} = \frac{16\pi}{3} \Rightarrow |a| = \frac{3}{8}$$

پس باتوجه به اینکه $ab > 0$ است، داریم:

$$f_{abc} = f\left(\frac{3}{8} \times 2 \times (-1)\right) = -3$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم
تستر علوم تجربی دوازدهم

ابتدا تابع را ساده‌تر می‌کنیم و به‌صوت توانی می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[5]{x^2} \sqrt[6]{x^2} \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[5]{x^2} \sqrt[6]{x^2 \times x^{\frac{2}{3}}} \\ &= \sqrt[5]{x^2} \sqrt[6]{x^{\frac{10}{3}}} = \sqrt[5]{x^2} \times x^{\frac{5}{9}} = \sqrt[5]{x^{\frac{10}{3}}} = x^{\frac{2}{3}} \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{\lambda}{15} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{\lambda}{15 \sqrt[3]{x^2}} \end{aligned}$$

از مقایسهٔ این عبارت با $f'(x) = \frac{a}{b \sqrt{x^c}}$ نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{cases} a = \lambda \\ b = 15 \Rightarrow a - b + c = \lambda - 15 + \frac{2}{3} = 0 \\ c = \frac{2}{3} \end{cases}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

ابتدا با تفکیک حدود در ریشه‌های داخل قدر مطلق، تابع f را به صورت یک تابع چندضابطه‌ای تبدیل می‌کنیم. داریم:

$$f(x) = \begin{cases} -x - (2x - 1) + ax + 3 = (a - 3)x + 4 & ; x \leq 0 \\ x - (2x - 1) + ax + 3 = (a - 1)x + 4 & ; 0 < x < \frac{1}{2} \\ x + (2x - 1) + ax + 3 = (a + 3)x + 2 & ; x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

حال دقت کنیم که تنها امکان برای وجود بی‌شمار نقطهٔ بحرانی در این تابع، ثابت بودن تابع در یکی از زیربازه‌های موجود می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3 \\ \text{یا} \\ a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \\ \text{یا} \\ a + 3 = 0 \Rightarrow a = -3 \end{cases}$$

پس حاصل جمع مقادیر ممکن برای a برابر است با: $1 + (-3) + (3) = 1$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علیون

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

$$V = \pi r^2 h = 330 \Rightarrow h = \frac{330}{\pi r^2}$$

$$S = \text{مساحت دو قاعده} + \text{مساحت جانبی} = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{330}{\pi r^2} \right) = 2 \left(\pi r^2 + \frac{330}{r} \right)$$

$$S' = 2 \left(2\pi r + \frac{-330}{r^2} \right) = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{165}{\pi}} \text{ cm}$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبازی فراهانی

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

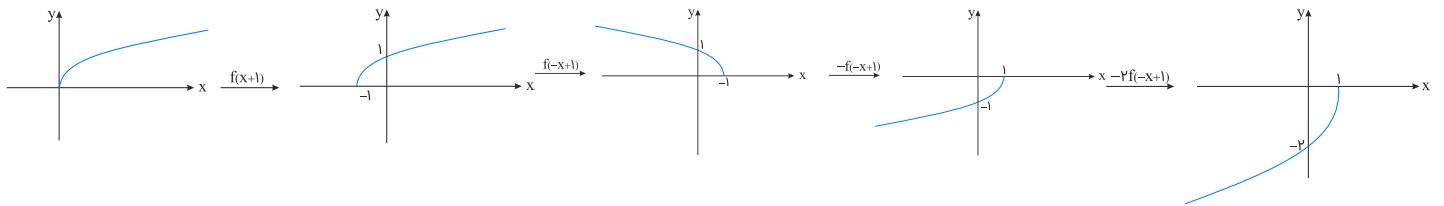
تستر علوم تجربی دوازدهم

می‌دانیم $f(f^{-1}(x)) = x$ است، پس حاصل عبارت $f(f^{-1}(5))$ برابر ۵- می‌باشد. حال با جایگذاری $f(f^{-1}(-5)) = -5$ در تساوی داده‌شده، معادله را ساده‌تر می‌کنیم. داریم:

$$\begin{aligned} 3g(f(a)) + \underbrace{f(f^{-1}(-5))}_{-5} &= 1 \Rightarrow 3g(f(a)) = 6 \Rightarrow g(f(a)) = 2 \xrightarrow{g(x)=\sqrt{f-x}} \sqrt{f-f(a)} = 2 \\ \Rightarrow f(a) &= 0 \xrightarrow{(3,0) \in f} a = 3 \end{aligned}$$

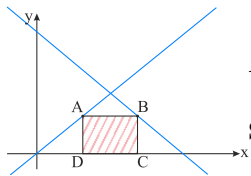
تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهرابی فراهانی
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک یازدهم

باید ببینیم با چه تغییرهایی نمودار $f(x)$ به نمودار $g(x)$ تبدیل شده است. اینکه نمودار هم نسبت به محور x ها و هم نسبت به محور y ها قرینه شده است، مقداری کار را سخت می‌کند. نمودار f را یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم $(f(x+1))$ و سپس نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم $(f(-x+1))$. نمودار حاصل را نسبت به محور x ها قرینه کرده $(-f(-x+1))$ و سپس عرض همهٔ نقاط را در ۲ ضرب می‌کنیم $(-2f(-x+1))$.



تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهرابی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

مختصات نقطهٔ A واقع بر خط $y = 3x$ را به صورت $(x_1, 3x_1)$ و مختصات نقطهٔ B واقع بر خط $y = -3x + 2$ را به صورت $(x_2, -3x_2 + 2)$ در نظر می‌گیریم. داریم:



$$AD = BC \Rightarrow 3x_1 = -3x_2 + 2 \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{2}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{2}{3} - x_1$$

$$S_{\text{مستطیل}} = AB \times AD = (x_2 - x_1)(3x_1) = \left(\frac{2}{3} - x_1 - x_1\right)3x_1 = \left(\frac{2}{3} - 2x_1\right)3x_1 = -6x_1^2 + 2x_1$$

از آنجاکه تابع S برحسب x_1 از درجهٔ دوم است، پس بیشترین مقدار آن در رأس سهمی اتفاق می‌افتد، یعنی:

$$x_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{-12} = \frac{1}{6}$$

$$S_{\text{max}} = S\left(\frac{1}{6}\right) = -6\left(\frac{1}{6}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}$$

تألیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

می‌دانیم:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1) - f(1 - 2h^2)}{2h^2} = \frac{2}{3} f'_-(1)$$

یعنی کافی است مشتق چپ تابع f را در $1 = x$ از ضابطهٔ بالایی حساب کرده و در $\frac{2}{3}$ ضرب کنیم. اما دقت کنید تابع f در $1 = x$ از سمت چپ پیوسته نیست:

$$\begin{cases} f(1) = 3 & \text{ضابطهٔ پایین} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 4 & \text{ضابطهٔ بالا} \end{cases}$$

پس این تابع در $1 = x$ از سمت چپ قطعاً مشتق‌ناپذیر است و حاصل این حد وجود ندارد.

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - شروین سیاح نیا - آریان حیدری
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم
تستر علوم تجربی دوازدهم

محل تلاقی خط $y = 10x + 20$ با محور x ها را پیدا می‌کنیم:

$$y = 10x + 20 \xrightarrow{y=0} x = -2 \Rightarrow (-2, 0)$$

از آنجا که این خط در نقطهٔ $(0, -2)$ بر منحنی f مماس است، پس:

$$\begin{cases} f(-2) = 0 \\ f'(-2) = 10 \end{cases}$$

پس در مشتق‌گیری از تابع $g(x)$ در $x = -2$ دقت کنید که:
اولاً:

$$f(x) - f^3(x) \xrightarrow{x=-2} f(-2) - f^3(-2) = 0$$

یعنی پرانتز اول، یک عامل صفرشونده است.
ثانیاً: در بین پرانتزهای بعدی هم $x^2 - 4$ نیز عامل صفرشونده در $x = -2$ محسوب می‌شود و لذا مشتق تابع g در $x = -2$ ، به خاطر وجود دوتا عامل صفرشونده، حتماً صفر است.

تألیفی آریان حیدری - محمدعلی زیرک
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^3 - x^2 + 1}{x^3 - x^2 - 9x + 14} = \frac{13}{0^+} = +\infty$$

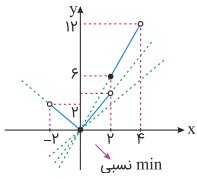
$$\text{توجه: } x^3 - x^2 - 9x + 14 = (x - 2)(x^2 + x - 7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (x - 2)(x^2 + x - 7) = (0^-)(-1) = 0^+$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - آریان حیدری - شروین سیاح نیا - علی شهبازی فراهانی
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم
تستر علوم تجربی دوازدهم

ابتدا به کمک بازه‌بندی، نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

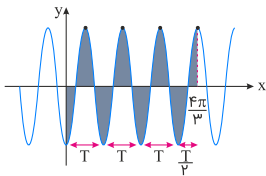
$$\begin{aligned} -۲ < x < ۰ &\Rightarrow -۱ < \frac{x}{۲} < ۰ \xrightarrow{|\frac{x}{۲}|=-1} f(x) = (-x)(-۱ + ۲) = -x \\ ۰ \leq x < ۲ &\Rightarrow ۰ \leq \frac{x}{۲} < ۱ \xrightarrow{|\frac{x}{۲}|=0} f(x) = (x)(۰ + ۲) = ۲x \\ ۲ \leq x < ۴ &\Rightarrow ۱ \leq \frac{x}{۲} < ۲ \xrightarrow{|\frac{x}{۲}|=1} f(x) = (x)(۱ + ۲) = ۳x \end{aligned}$$



بنابراین باتوجه‌به شکل، تنها در $x = ۰$ ، $\min$ نسبی وجود دارد.

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبابی فراهانی - کامیار علیون
تستر علوم تجربی دوازدهم
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم

چون سؤال از ما حداکثر مقدار a را خواسته است، پس نتیجه می‌گیریم در $x = \frac{۴\pi}{۳}$ تابع دارای چهارمین ماکزیمم خود خواهد بود. نمودار کلی $y = -۳ \cos ax$ به‌صورت زیر است. باتوجه‌به نمودار تابع $y = -۳ \cos ax$ داریم:



$$۷ \times \text{طاق} = \frac{۴\pi}{۳} \Rightarrow \text{طاق} = \frac{۴\pi}{۲۱} \Rightarrow T = ۲ \times \text{طاق} = \frac{۸\pi}{۲۱}$$

از طرف دیگر می‌دانیم دوره تناوب تابع $y = -۳ \cos ax$ برابر است با $T = \frac{۲\pi}{|a|}$ است، پس داریم:

$$\frac{۲\pi}{|a|} = \frac{۸\pi}{۲۱} \Rightarrow |a| = \frac{۲۱}{۴} \Rightarrow a = \frac{۲۱}{۴}$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - شروین سیاح نیا - علی شهبابی فراهانی
تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم
تستر علوم تجربی دوازدهم

ریشه‌های f' در بازهٔ $[-۱, ۴]$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x^6}{۶} - ۲x^۲ + k \Rightarrow f'(x) = x^۵ - ۴x \xrightarrow{f'(x)=۰} x^۵ - ۴x = ۰$$

$$\Rightarrow x(x^۴ - ۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۲ \\ x = -۲ \end{cases} \times$$

مقدار f را در نقاط بحرانی (جاهایی که $f' = ۰$ و ابتدا و انتهای بازه) حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(۰) = k \\ f(۲) = ۴ - ۸ + k = k - ۴ \Rightarrow \text{min مطلق} \\ f(-۱) = \frac{۱}{۶} - ۲ + k = k - \frac{۱۱}{۶} \\ f(۴) = ۶۴ - ۳۲ + k = k + ۳۲ \Rightarrow \text{max مطلق} \end{cases}$$

مقدار max مطلق، ۵ برابر min مطلق است، پس:

$$k + ۳۲ = ۵(k - ۴) \Rightarrow k + ۳۲ = ۵k - ۲۰ \\ \Rightarrow ۴k = ۵۲ \Rightarrow k = ۱۳$$

تألیفی محمد مصطفی ابراهیمی - علی شهبازی فراهانی - کامیار علیون

تستر علوم تجربی دوازدهم

تستر ریاضی و فیزیک دوازدهم