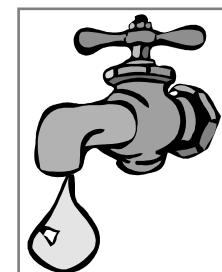
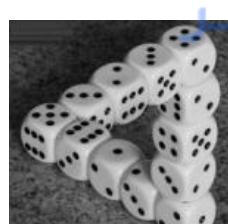


## فصل هفتم

### اندازه گیری سطح و حجم



درس اول : مقایسه و اندازه گیری سطح

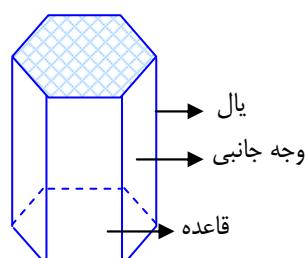
درس دوم : مساحت شکل های هندسی

حل مسئله و راهبرد حذف حالت های نامطلوب

درس سوم : مقایسه و اندازه گیری حجم

درس چهارم : حجم شکل های هندسی

سخت کوشانه ( یادآوری فصل ۷ )



منشور شش پهلو

## مقایسه و اندازه‌گیری سطح



### هدف‌های این درس



یادآوری مفهوم سطح

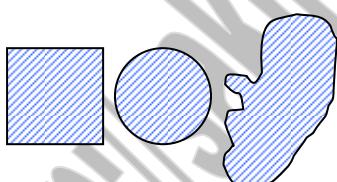
تبدیل واحدهای سطح

انتخاب واحد مناسب برای  
سطح مختلف

مقایسه واحدهای سطح

می‌دانید که به اندازه‌ی سطح هر شکلی مساحت آن شکل گفته می‌شود برای این که مساحت را اندازه بگیریم ابتدا نیاز به واحدی داریم که خود آن واحد دارای سطح باشد و «مربع» مناسب ترین واحد است. البته ضلع مربع می‌تواند خود به طور

مثال ۱ میلی متر یا ۱ سانتی متر یا ... باشد. هر مربعی با هر اندازه‌ای برای اندازه‌گیری هر مساحتی مناسب نیست، مناسب ترین واحد برای اندازه‌گیری مساحت، مربعی است که اندازه‌ی هر ضلع آن واحد اندازه‌گیری طول باشد.



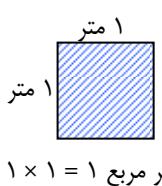
### توضیح برخی از واحدهای سطح



سانتی متر مربع  $1 \times 1 = 1$

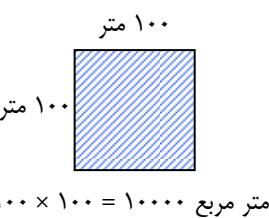
**سانتی متر مربع:** مساحت مربعی است که طور هر ضلع آن ۱ سانتی متر باشد. از این واحد برای اندازه گیری سطح کتاب، میز تحریر، کاغذ و

... استفاده می گردد.



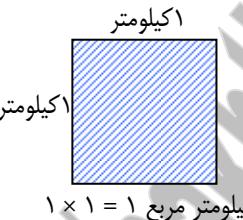
متر مربع  $1 \times 1 = 1$

**متر مربع:** مساحت مربعی است که طول هر ضلع آن ۱ متر باشد. از این واحد برای اندازه گیری اتاق، منزل، فرش، حیاط و ... استفاده می گردد.



متر مربع  $100 \times 100 = 10000$

**هکتار:** مساحت مربعی است که طول هر ضلع آن ۱۰۰ متر باشد، این واحد مخصوص اندازه گیری زمین های کشاورزی می باشد و برابر با ۱۰۰۰۰ متر مربع است.



کیلومتر مربع  $1 \times 1 = 1$

**کیلومتر مربع:** مساحت مربعی است که طول هر ضلع آن ۱ کیلومتر (۱۰۰۰ متر) باشد، از این واحد برای بیان مساحت استان ها، کشورها، قاره ها و ... استفاده می گردد.

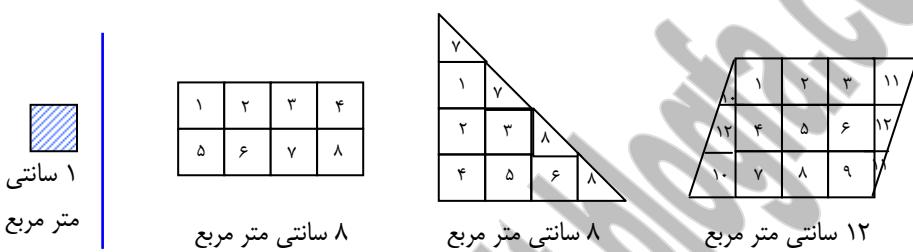
**نکته ۱:** هر کیلومتر برابر با  $1000$  متر است لذا یک کیلومتر مربع برابر با  $1000 \times 1000 = 1000000$  متر مربع می باشد و چون هر هکتار  $10000$  متر مربع است پس یک کیلومتر مربع برابر  $100$  هکتار نیز می باشد.

متر مربع	$10000$	$1000000$
هکتار	۱	

$$\boxed{\square} = \frac{1 \times 1000000}{10000} = 100$$

برای اندازه‌گیری سطح ما می‌توانیم با کاشی کاری و استفاده از مربع، مثلث متساوی الاضلاع و یا شش ضلعی منتظم، این کار را انجام دهیم.

البته ابتدا باید به این نکته توجه کرد که برای پوشان سطح آن شکل (کاشی کاری با مربع) کدامیک از مربع‌های فوق مناسب‌تر است و سپس سطح آن شکل را با این مربع‌ها پوشانده و تعداد را محاسبه کرد.

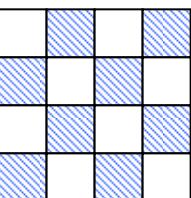


**نکته‌ی ۱:** در اندازه‌گیری مساحت اشکال مختلف همیشه از مربع کامل نمی‌توان استفاده کرد و با توجه به نوع شکل از نصف یا ثلث یا تکه‌هایی از مربع واحد استفاده می‌شود و سطح شکل با آن‌ها کاشی کاری می‌گردد و در نهایت مجموع آن‌ها مربع مساحت شکل خواهد بود.

**نکته‌ی ۲:** واحد استانداردی که بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد «متر مربع» می‌باشد که البته برای دقیق‌تر در اندازه‌گیری از واحدهای کوچک‌تر نظیر «میلی متر مربع، سانتی متر مربع و ...» نیز استفاده می‌شود و یا برای سطوح بزرگ‌تر از واحدهای بزرگ‌تر مانند «کیلومتر مربع و ...»



## کار در ذانه



۱- در شکل مقابل در هر ردیف افقی و عمودی چهار مربع هست که مساحت

هر مربع کوچک برابر با ۱ سانتی متر مربع است.

الف) مساحت شکل چند سانتی متر مربع می باشد؟

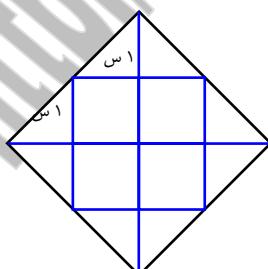
ب) اگر در هر ردیف به جای ۴ مربع، ۸ مربع باشد مساحت شکل چند سانتی متر مربع خواهد بود؟

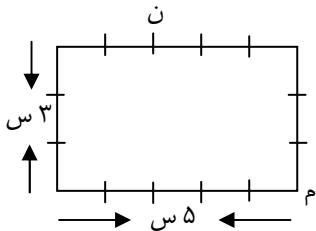
ج) در همین شکل  $(8 \times 8)$  مساحت شکل چند متر مربع می باشد؟

د) اگر در هر ردیف ۲۵ برابر مربع های فعلی شکل،  $(4 \times 4)$  مربع وجود داشته باشد مساحت آن شکل چند سانتی متر مربع خواهد بود؟

ه) مساحت این شکل چند متر مربع است.

۲- مساحت شکل مقابل چند سانتی متر مربع است.





- مساحت شکل مقابل را محاسبه کنید.

نقطه‌ی (n) را با خط کش به نقطه‌ی «m» متصل کنید.

شکل سمت چپ را شماره ۱ و شکل سمت راست را شماره ۲ بگذارید.

- شکل شماره ۱ چه شکلی است؟

مساحت آن چند سانتی متر مربع است؟

- شکل شماره ۲ چه شکلی است؟

مساحت آن چند سانتی متر مربع است؟

- آیا مجموع مساحت‌های این دو شکل با مساحت مستطیل اولیه برابر است؟

- مانند نمونه واحدهای اندازه‌گیری را به هم تبدیل کنید (به یکی از دو روش گفته شده)

۳ کیلومتر مربع = ..... متر مربع

متر مربع	۱۰۰۰۰۰	
کیلومتر مربع	۱	۳

$$\boxed{\phantom{000}} = \frac{3 \times 100000}{1} = 300000$$

روش اول:

$$3 \times (1000 \times 1000) = 3000000$$

روش دوم:

$$200000 \text{ سانتی متر مربع} = ..... \text{ متر مربع}$$

- ۲/۵ کیلومتر مربع = ..... هکتار

- ۳۰۰۰ سانتی متر مربع = ..... متر مربع

- ۰/۰۷ متر مربع = ..... میلی متر مربع

- ۶ سانتی متر مربع = ..... دسی متر مربع

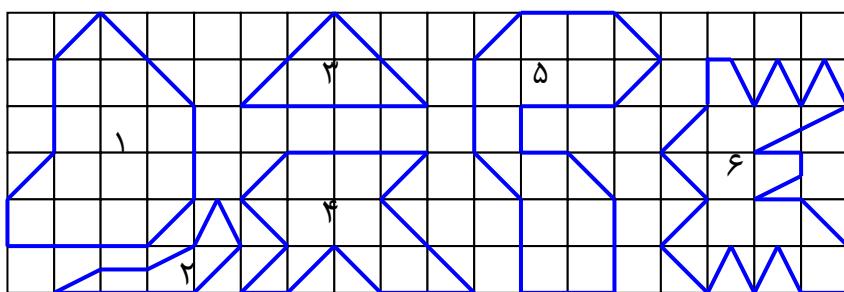
۵- اگر مساحت زمینی ۸۰۰۰۰ سانتی متر مربع باشد مساحت این زمین چند هکتار است ( پیشنهاد می گردد زیر مسئله نوشته شود)



۶- برای اندازه گیری هر یک از موارد نوشته شده کدام واحد سطح مناسب تر است؟

مساحت یک زمین هندبال	مساحت یک برگ کاغذ	مساحت اتاق خواب
مساحت زمین کشاورزی	مساحت قاره آسیا	مساحت ایران

۷- مساحت هر مربع کوچک را ۱ سانتی متر مربع در نظر گرفته و مساحت شکل‌های زیر را بنویسید  
(عدد صحیح، کسری، عدد مخلوط و ...)



شکل ۳:

شکل ۲:

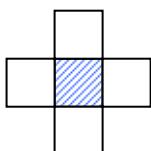
شکل ۱:

شکل ۵:

شکل ۴:

۷- محیط شکل مقابل ۹۶ سانتی متر است.

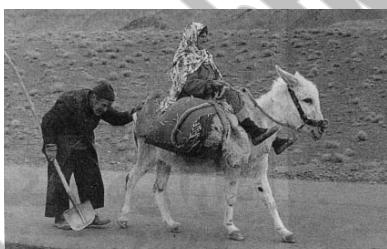
الف) مساحت مربع هاشور خورده چند سانتی متر مربع است؟



ب) مساحت مربع هاشور خورده چندسی متر مربع است؟

۸- مزرعه‌ای است مستطیل شکل به طول ۳۰۰ متر و عرض ۱۰ کیلومتر ،

الف) مساحت این زمین چند متر مربع است؟



ب) مساحت این زمین چند هکتار است؟

۹- به اندازه‌ی سطح هر شکل چه می‌گویند؟

گنجایش

حجم

مساحت

محیط

۱۰- اگر مساحت شکلی ۱ متر مربع باشد یعنی می‌توان سطح آن جسم را با ..... سانتی متر کاشی کاری کرد و پوشاند.

۱۰۰۰۰ مربع

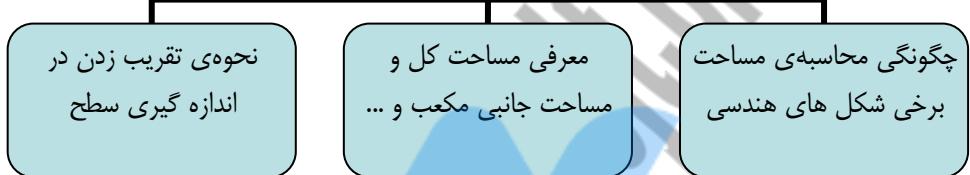
۱۰۰ مربع

۱ مربع



## مساحت شکل های هندسی

### هدفهای این درس



در سال های گذشته و در پایه های قبلی در مورد مساحت برخی شکل ها و طریقه‌ی محاسبه‌ی آن مطالب زیادی آموخته اید که برخی از آن ها جهت پادآوری به طور خلاصه نوشته می شود.

$$\text{مساحت مربع} = \frac{\text{خودش} \times \text{اندازه‌ی یک ضلع}}{2 \div (\text{قطر} \times \text{قطر})}$$

$$\text{عرض} \times \text{طول} = \text{مساحت مستطیل}$$

$$\frac{2}{(\text{قاعده} \times \text{ارتفاع})} = \text{مساحت مثلث}$$

$$\text{ارتفاع} \times \text{قاعده} = \text{مساحت متوازی الاضلاع}$$

$$\frac{2}{(\text{ارتفاع} \times \text{مجموع دو قاعده})} = \text{مساحت ذوزنقه}$$

$$\frac{2}{(\text{قطر کوچک} \times \text{قطر بزرگ})} = \text{مساحت لوزی}$$

$$\text{عدد پی} \times (\text{شعاع} \times \text{شعاع}) = \text{مساحت دایره}$$

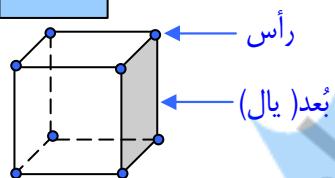
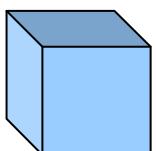
$$\text{عدد پی} \times (\text{نصف قطر بزرگ} \times \text{نصف قطر کوچک}) = \text{مساحت بیضی}$$

در اشکال فضایی نیز می‌توان مساحت وجه شکل را محاسبه نمود و واحد اندازه گیری نیز همان «مربع» است (مثلاً متر مربع یا سانتی متر مربع یا ....) به هر طرف یا سمت این اشکال «وجه» گفته می‌شود مثلاً مکعب (۶ وجه دارد) لذا چنان‌چه تمام وجه‌ها با یکدیگر مساوی باشند آن شکل را «چند وجهی منتظم» و اگر مساوی نباشند «چند وجهی غیر منتظم» می‌نامند.

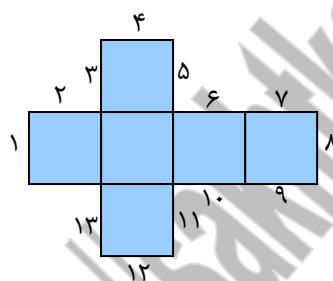
**نکته:** فقط پنج نوع چند وجهی منتظم وجود دارد، چهار وجهی، شش وجهی (مکعب)، هشت وجهی، دوازده وجهی و بیست وجهی.

### مکعب

به مکعب شش وجهی منتظم نیز گفته می‌شود بدین علت که شش وجه مرتع شکل و مساوی دارد. محل برخورد ابعاد مکعب را **رأس** مکعب گفته و به ضلع‌هایی که رأس‌های مکعب را وصل می‌کنند **یال** می‌گویید.



هر مکعب ۱۲ یال (ضلع یا بعد) مساوی، ۸ رأس، ۴ قطر مساوی، ۲۴ زاویه قائمه و ۱۳ خط تقارن دارد.



گسترده مکعب از شش مرتع مساوی تشکیل شده است و ۱۴ یال (ضلع) مساوی دارد که محیط آن را تشییکل می‌دهد.

سطح کل مکعب یعنی مجموع مساحت‌های ۶ وجه آن و سطح جانبی یعنی ۴ طرف آن (بجز بالا و پایین)

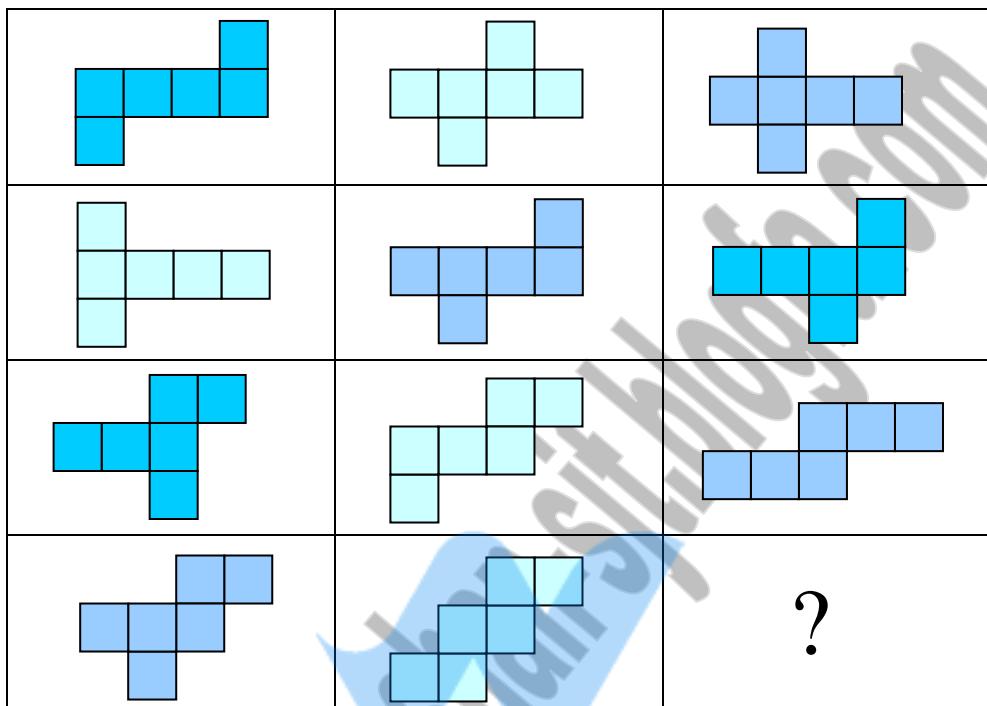
$$\text{مساحت یک مرتع} = 6 \times \text{مساحت یک مرتع}$$

$$4 \times \text{مساحت یک مرتع} = \text{مساحت جانبی مکعب}$$

**مثال:** مساحت کل یک مکعب به ابعاد «۴» سانتی متر را حساب کنید.

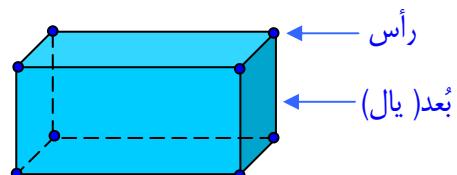
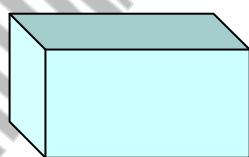
$$\text{سانتی متر مربع } 96 = 6 \times (4 \times 4)$$

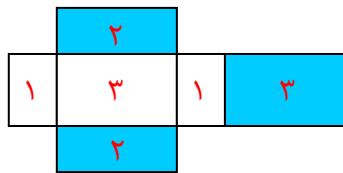
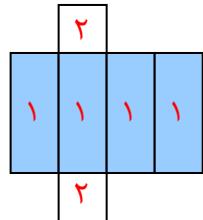
هر یک از اشکال زیر می تواند گسترده‌ی یک مکعب باشد.



### مکعب مستطیل

مکعب مستطیل یا ۶ وجهی از ۶ مستطیل که دو به دو هم مساویند تشکیل شده است که البته می تواند ۴ مستطیل و ۲ مربع هم باشد و گسترده‌ی آن می تواند به این شکل ها باشد.  
هر مکعب مستطیل ۱۲ ضلع (۴ طول مساوی و ۴ عرض مساوی و ۴ ارتفاع مساوی)، ۸ نقطه مساوی و ۸ رأس دارد.



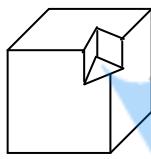
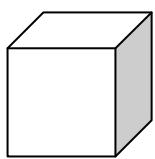


$$\text{مجموع مساحت های هر شش وجه} = \text{مساحت کل} \rightarrow$$

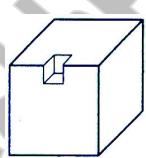
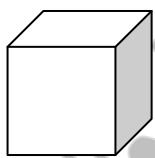
$$\frac{2 \times \text{عرض} \times \text{طول} + 2 \times \text{ارتفاع} \times \text{طول} + 2 \times \text{ارتفاع} \times \text{عرض}}{\text{سطح کل}}$$

مثال: برای ساختن یک کارتون به ابعاد «۳، ۴ و ۵» سانتی متر، چند سانتی متر مربع مقدار لازم است؟

$$\text{سانتی متر مربع} = 94 = (5 \times 4) \times 2 + (4 \times 3) \times 2 + (5 \times 3) \times 2 = 40 + 30 + 24$$

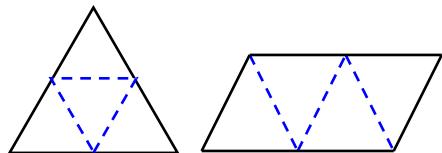


**نکته ۱:** اگر از گوشه‌ی یک مکعب مستطیل و یا مکعب، قسمتی از آن را (به شکل مکعب یا مکعب مستطیل) جدا کنیم مساحت قسمت رنگ شده و یا مقداری که رنگ مصرف شده با مساحت یا مقدار رنگ مصرفی شکل اولیه تفاوتی ندارد.



**نکته ۲:** اگر از یک مکعب مستطیل و یا مکعب، قسمتی از آن را (به شکل مکعب یا مکعب مستطیل) مطابق شکل مقابله جدا کنیم مساحت های رنگ شده یا مقدار رنگ مصرف شده در شکل اولیه کم تر می باشد.

### چهار وجهی منتظم



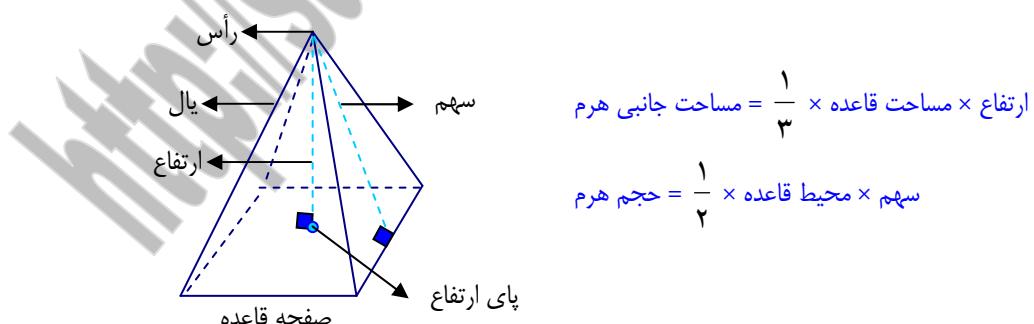
از چهار مثلث متساوی الاضلاع برابر تشکیل شده است که برای نشان دادن آن کافی است که وسط اضلاع یک مثلث متساوی الاضلاع را به همدیگر وصل کنیم.

**نکته‌ی ۱:** در گسترده چهار وجهی منتظم ضلع مثلث دو برابر یا ل چهار وجهی منتظم می باشد یعنی هر ضلع دو یا ل است.

**نکته‌ی ۲:** قاعده در اشکال مسطح پاره خطی است که ارتفاع بر آن عمود شده است ولی قاعده در اشکال فضایی سطحی است که روی صفحه قرار می گیرد.

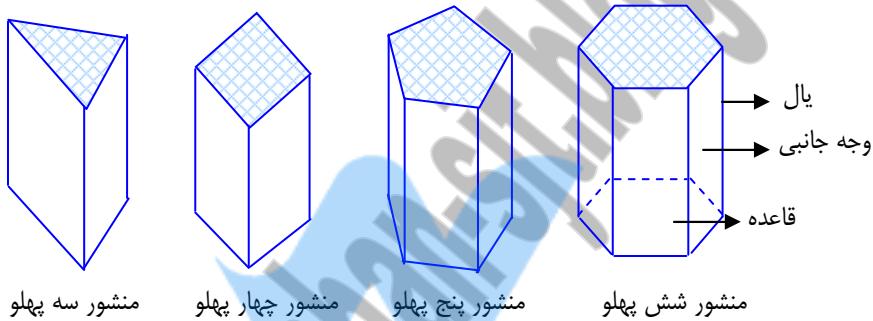
**نکته‌ی ۳:** چهار وجهی منتظم، چهار وجه متساوی (به شکل مثلث متساوی الاضلاع)، ۶ یا ل (ضلع) متساوی و ۴ رأس دارد.

**هرم:** هرم در لغت به معنی سخت پیر گردیدن و کلان سال شدن است و در اصطلاح هندسه حجمی است که قاعده‌ی آن یک چند ضلعی و وجه جانبی اش مثلث هایی باشند که همه به یک رأس مشترک (رأس هرم) متنه‌ی می شوند. به عبارتی شکلی سه بعدی است که از اتصال نقطه‌ای در فضا به تمام نقاط شکل بسته در صفحه بوجود می آید، به آن نقطه «رأس هرم» و به آن شکل «قاعده هرم» گفته می شود. اگر قاعده‌ی هرم مثلث یا مربع باشد به ترتیب «هرم مثلث القاعده» و «هرم مربع القاعده» نامیده می شود و اگر قاعده هرم (شکل هرمی) دایره باشد به آن «مخروط» می گویند.



## منشور

منشور در لغت به معنی پرآکنده، نشر شده، زنده شده و مبعوث شده است و در اصطلاح هندسه نام شکلی است که دو قاعده دارد که دو چند ضلعی مساوی هستند و بدنی منشور (سطح جانبی منشور) از مستطیل ها یا متوازی الاضلاع ها تشکیل شده است به عبارتی می توان گفت: هرگاه دو چند ضلعی مساوی را در دو صفحه‌ی جداگانه و موازی با هم در نظر گرفته و رئوس این دو چند ضلعی را نظیر به نظیر به همدیگر وصل نماییم، جسمی حاصل می شود که به آن **منشور** می‌گویند.

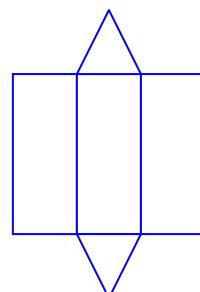


چون منشور شکل های متفاوتی می تواند داشته باشد لذا نمی توان فرمول خاصی تعیین کرد ولی به هر حال می توان گفت :

مجموع مساحت سطوح جانبی + مجموع مساحت های دو قاعده = مساحت کل منشور

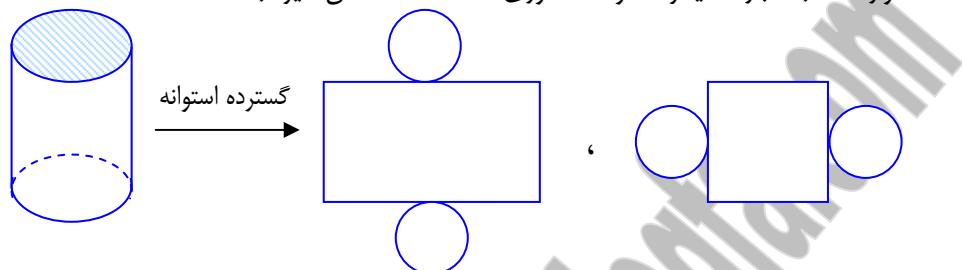
$2 \times \text{مساحت یک دایره} = \text{مساحت دو قاعده منشور}$

مجموع مساحت های سطوح جانبی = مساحت جانبی منشور



**استوانه:** استوانه نام شکلی است که دو قاعده دارد که دو دایره مساوی هستند و بر جانبی راست

استوار است به عبارت دیگر: استوانه منشوری است که قاعده آن دایره باشد.



$$\text{ارتفاع} \times \text{محیط قاعده (دایره)} = \text{مساحت جانبی استوانه}$$

$$\text{مساحت های دو قاعده} + \text{مساحت جانبی} = \text{مساحت کل استوانه}$$

$$\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده (دایره)} = \text{حجم استوانه}$$

**نکته ۱:** محیط دایره باید به اندازه عرض یا طول مستطیل و یا ضلع مرربع باشد.

**مخروط:** به معنی خراشیده شده، تراشیده شده و خراطی شده است و در اصطلاح هندسه حجمی است که از دوران مثلث قائم الزاویه حول یک ضلع آن به دست می‌آید. کله قند و کلاه بوقی نمونه‌هایی به شکل مخروط هستند.

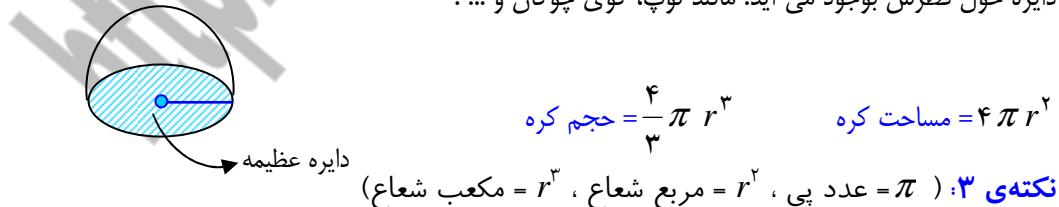


$$\text{مولد} \times \text{محیط قاعده} \times \frac{1}{2} = \text{مساحت جانبی مخروط}$$

$$\text{ارتفاع} \times \frac{1}{3} \times \text{مساحت قاعده} = \text{حجم مخروط}$$

**نکته ۲:** به پاره خط «آب» یا «آج»، وتر مثلث قائم الزاویه‌ای که مخروط را بوجود آورده است مولد گفته می‌شود.

**کره:** به معنی گوی و آن چه به شکل گوی باشد و در اصطلاح هندسه شکلی است که از دوران نیم دایره حول قطرش بوجود می‌آید. مانند توپ، گوی چوگان و ... .



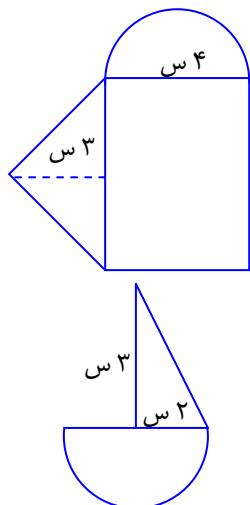
$$\frac{4}{3} \pi r^3 = \text{حجم کره}$$

**نکته ۳:** ( $\pi$  = عدد پی،  $r^2$  = مربع شعاع،  $r^3$  = مکعب شعاع)

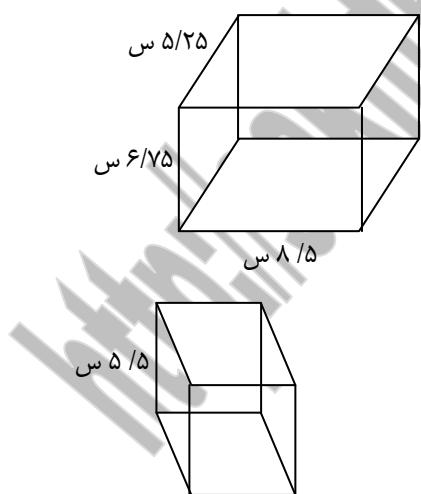


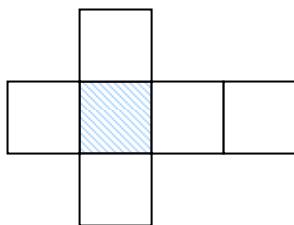
## کار در خانه

۱- مساحت هر یک از شکل های زیر را محاسبه کنید (در صورت لزوم با تقریب کم تر از ۱ به روش قطع کردن)



۲- مساحت کل، شکل های زیر را محاسبه کنید. (در صورت لزوم بعد از محاسبه جواب ها را با تقریب کم تر از یک گرد کنید)





۳- محیط شکل مقابل ۷۰ سانتی متر است:

(الف) ضلع مربع چند سانتی متر است.

(ب) مساحت قسمت هاشور زده چند سانتی متر مربع است؟

(ج) مساحت این شکل چند سانتی متر مربع است؟

۴- به کمک پدر یا مادر، ابعاد یخچال یا فریزر متزبان را اندازه بگیرید و سپس؛

(الف) اندازه های طول و عرض و ارتفاع یخچال را به ترتیب بنویسید.

$$\text{طول} = \text{عرض} = \text{ارتفاع}$$

(ب) در صورت لزوم این ابعاد را با تقریب کم تراز ۱/۰ گرد کنید.



(ج) مساحت کل، یخچال را محاسبه کنید.

(د) فرض کنید می خواهید این یخچال را رنگ بزنید! چه مساحتی را باید رنگ کنید؟

(ه) اگر برای هر متر مربع، ربع لیتر رنگ لازم باشد مقدار رنگ مورد نیاز را به طور تقریبی محاسبه کنید

(می توانید باز هم در صورت نیاز سطحی که باید رنگ شود را با تقریب کم تراز ۱ گرد کنید).

۵- اندازه ای ابعاد اتاق یاسمن « $\frac{4}{3}$  ،  $6\frac{1}{15}$  ،  $2\frac{8}{85}$  » متر می باشد، او می خواهد اتفاقش را به رنگ

سال رنگ آمیزی کند ؟

الف) ابتدا ابعاد را با تقریب کم تر از  $10^{\circ}$  گرد کنید و سپس حساب کنید چند متر مربع باید رنگ آمیزی

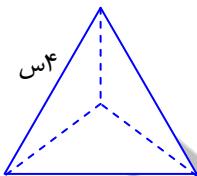


شود.

ب) حالا با همان ابعاد اولیه، سطحی را که باید رنگ آمیزی شود محاسبه کنید و بعد عدد بدست آمده را با تقریب کم تر از  $10^{\circ}$  گرد کنید.

ج) آیا اندازه های بدست آمده از سطح با هم برابرند؟ چرا؟

د) اگر برای هر متر مربع رنگ آمیزی نیم لیتر رنگ مصرف گردد و قوطی های رنگ ۱ لیتری باشند  
حداقل به چند قوطی رنگ، نیاز داریم؟



۶- ارتفاع شکل مقابل ۳ سانتی متر است:

الف) گستردگی شکل مقابل را رسم کنید.

ب) مساحت گستردگی این شکل را محاسبه کنید.

ج) این شکل ( گستردگی چهار وجهی منتظم ) از چند مثلث متساوی الاضلاع برابر تشکیل شده است؟

د) در این شکل ( گستردگی چهار وجهی منتظم ) چند مثلث دیده می شود؟

ه) اگر مساحت قاعده آن ۸ سانتی متر مربع باشد مساحت کل این شکل چند سانتی متر مربع است؟

۷- عملیات مربوط به تبدیل واحدهای زیر را در چکنویس انجام داده و سپس جواب های صحیح را در جدول بنویسید.

	۰/۰۵		۳	کیلومتر مربع
		۲۰	۳۰۰	هکتار
۸۰۰۰			۳۰۰۰۰۰	متر مربع
			۳۰۰۰۰۰۰	دسی متر مربع

۸- کیلومتر مربع برابر با چند متر است؟

۸۰۰۰۰۰۰ متر

۸۰۰۰ متر

قابل مقایسه با هم نیستند چو ساختی ندارند

۸۰۰۰۰ متر

۹- اگر اندازه ضلع هر مکعبی ۲ برابر شود، مساحت جانبی آن چند برابر می شود؟

۴  ۲  ۶  ۸

۱۰- محیط یکی از وجههای مکعبی ۲۰ سانتی متر است محیط گسترده این مکعب چند سانتی متر است؟

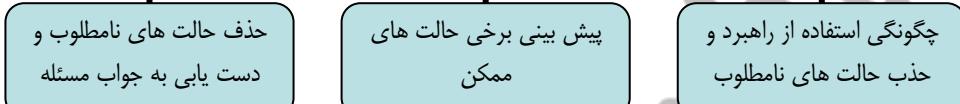
۱۲۰  ۳۰  ۶۰

۷۰



## حل مسئله (راهبرد حذف حالت های نامطلوب)

هدف های این درس



برای حل بعضی از مسئله ها می توانید همه حالت های ممکن را در نظر بگیرید سپس با توجه به شرایط موضوعی که در مسئله طرح شده است جواب ها و حالت های نامطلوب و غیر ممکن را حذف کرده تا به جواب دست پیدا کنید.

برای این که کلیه ای حالت های ممکن را بنویسیم بهتر است که از تفکر نظام دار استفاده کنید و پس از این که همه ای حالت های ممکن را نوشته ایم از بین آن ها با توجه به سوالی که مطرح شده است پاسخ نهایی را پیدا کنید درباره تفکر نظام دار و نوشتن جدول و ... در فصول قبل توضیح داده شده است.

**مثال:** مجموع سه عدد طبیعی ۱۵ و حاصل ضرب آن ها ۱۰۵ است، آن سه عدد را پیدا کنید.

$$\triangle + \bigcirc + \square = 15$$

از طریق جدول نظام دار ابتدا با روش حدس و آزمایش سه عدد

$$\triangle + \bigcirc + \square = 105$$

انتخاب کرده و نتیجه را بررسی می کنیم و حالت های نامطلوب را حذف کرده تا به جواب برسیم.

اعداد حدسی	حاصل جمع	حاصل ضرب	نتیجه
۱۱ و ۲ و ۲	$11 + 2 + 2 = 15$	$11 \times 2 \times 2 = 44$	غلط
۱۰ و ۳ و ۲	$10 + 3 + 2 = 15$	$10 \times 3 \times 2 = 60$	غلط
۸ و ۴ و ۳	$8 + 4 + 3 = 15$	$8 \times 4 \times 3 = 96$	غلط
۷ و ۵ و ۳	$7 + 5 + 3 = 15$	$7 \times 5 \times 3 = 105$	درست



پایه های پنجم و ششم ابتدائی سنتی کوشان

## کار در خانه

۱- گسترده‌ی یک مکعب می‌تواند اشکال مختلفی داشته باشد، ۴ نمونه را رسم کنید.

۲- کوچک‌ترین عدد سه رقمی هستم که از ۱۲۰ کم تر و بر ۳ بخش پذیرم. من چه عددی هستم؟

(الف) ابتدا کلیه اعداد سه رقمی کوچک‌تر از ۱۲۰ را بنویسید.

(ب) از بین اعداد نوشته شده آن‌ها را که بر ۳ بخش پذیر نیستند حذف و بقیه را بنویسید.

(ج) از بین اعداد بخش پذیر بر ۳ و کم‌تر از ۱۲۰ که نوشته‌اید کوچک‌ترین عدد کدام است؟



۳- در یک معما قدمی گفته می‌شد که پیرمردی قصد داشت از رودخانه‌ای عبور کند و خودش را به کلبه اش برساند پیر مرد همراه خود یک روباه و یک خروس و یک کیسه گندم داشت. اولاً ظرفیت قایق محدود بود و به جز خودش فقط فضای می‌توانست یکی از این‌ها را در قایق بگذارد و از رودخانه عبور کند و مشکل دومش هم این بود که باید این سه را به گونه‌ای با خود می‌برد که تا وقتی به آن طرف رودخانه می‌رسد و برای بردن آن یکی بر می‌گردد، اتفاقی نیفتاده باشد مثلًا خروس گدم‌ها را و یا روباه خروس را در غیاب او نخورده باشد.

**راهنمایی:** راه های ممکن را یکی نوشه و حالت های نامطلوب را حذف کنید تا به جواب برسید

مثال:

حالت اول: مرحله‌ی اول روباه را با خود ببرد  $\rightarrow$  تا وقتی برگردد خروس گندم ها را خورده است.

حالت دوم: اول گندم را با خود ببرد  $\rightarrow$

حالت سوم:

۴- مجموع سه عدد طبیعی ۱۳ و حاصل ضرب آن ها ۶۰ می شود، آن سه عدد را پیدا کند. (با استفاده از راهبرد حذف حالت های نامطلوب)

۵- اگر بعد مکعبی  $\frac{1}{2}$  برابر شود مساحت کل آن مربع چه تغییری می کند؟ (راهنمایی: مانند سؤال ۴ می توانید حل کنید.)

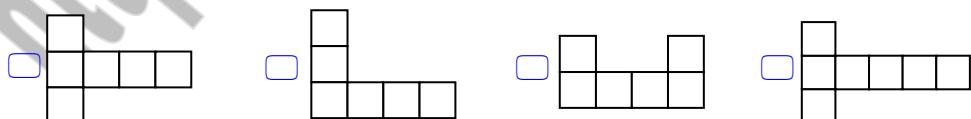
- ۱  برابر می شود      ۲  برابر می شود      ۳  فرقی نمی کند

۶- اگر در تقسیمی مقسوم علیه دو برابر شود خارج قسمت چه تغییری می کند؟

- ۱  برابر می شود      ۲  برابر می شود      ۳  فرقی نمی کند

**راهنمایی:** در این سؤال چون یکی از چهار گزینه پاسخ صحیح است لذا می توانید از گزینه‌ی اول شروع کرده و با انجام یک تقسیم درستی یا نادرستی آن را امتحان کنید بدین طریق پاسخ های غلط (حالت نامطلوب در اینجا) را کنار گذاشته تا به جواب برسید.

۷- کدام یک از اشکال زیر گستردگی یک مکعب است؟





لایه های پنجم و ششم ابتدایی ساخت کوشان

## مقایسه و اندازه گیری حجم



### هدف های این درس

معرفی واحدهای اندازه گیری  
غیر استاندارد و استاندارد و  
مقایسه آن ها

یادآوری حجم و ظرفیت

محاسبه حجم به طور  
تقریبی

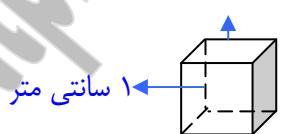
بیان حجم اشکال و اجسام  
با عدد مخلوط

تبديل واحدهای حجم

لزوم استفاده از واحدهای  
استاندارد

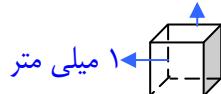
حجم در لغت به معنی برآمدگی و سنتری و بسامت چیزی می باشد و در اصطلاح هندسی گنجایش و ظرفیت جسم و آن مقداری از فضا که جسم آن را اشغال می کند را نشان می دهد.  
همان طور که می دانید اشکال فضایی حجم داشته و برای اندازه گیری حجم آن ها باید واحدی داشته باشیم که خود نیز دارای حجم باشد و این واحد «مکعب» می باشد، فراموش نکنید که هر مکعبی برای اندازه گیری هر حجمی مناسب نیست و باید تشخیص داد که از کدام یک باید استفاده کرد ( سانتی متر مکعب، متر مکعب و ... )

1 سانتی متر

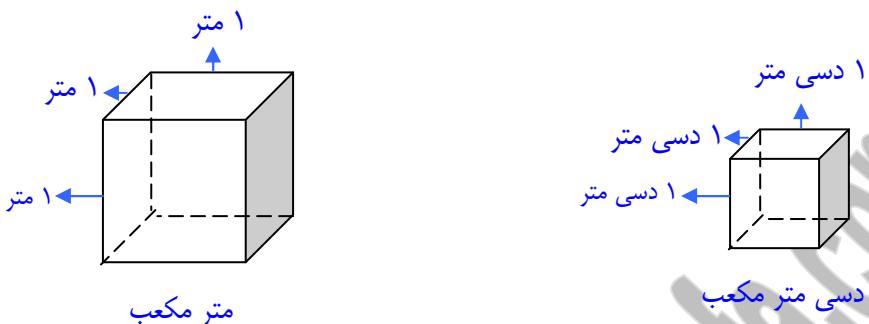


سانتی متر مکعب

1 میلی متر



میلی متر مکعب



**مثال:** با توجه به مکعب داده شده (چینه) حجم شکل

مقابل را محاسبه کنید (تعداد را نیز بشمارید)

**روش اول:** سه ردیف چینه داریم (مکعب هایی با ابعاد

۱ سانتی متر) که در هر ردیف دو تا طبقه‌ی سه تایی

داریم یعنی در هر ردیف ۶ تا و در نتیجه  $6 + 6 + 6 = 18$  تا مکعب (چینه) داریم به عبارتی ۱۸ سانتی متر مکعب.

**روش فرمولی:**

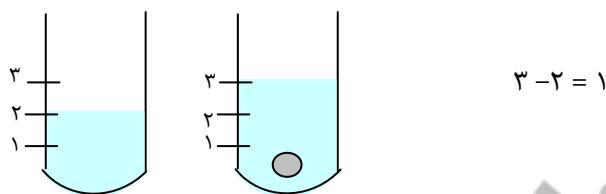
$$\text{سانتی متر مکعب} = 2 \times 3 \times 3 = 18$$

**نکته‌ی ۱:** در همین شکل چنانچه ابعاد مکعب‌های ما ۱ متر باشد. حجم مکعب ۱ متر مکعب خواهد بود و حجم جسم ۱۸ متر مکعب می باشد.

**روش بدست آوردن حجم اجسامی که شکل هندسی مشخصی ندارند**

برای محاسبه‌ی حجم این یا جسام می توانیم از ظروف مدرج (بشر و ...) استفاده کنیم.

**مثال:** اگر بخواهیم حجم یک سکه یا یک سنگ را محاسبه کنیم، ابتدا در یک ظرف مدرج به اندازه‌ی معلومی آب می‌ریزیم و مقدار آن را می‌نویسیم سپس سکه را در داخل ظرف آب می‌اندازیم. سطح آب بالاتر می‌آید و آن را نیز یاد داشت می‌کنیم. تفاوت دو عدد نوشته شده حجم سکه است.



می‌دانید که مربع یک عدد یعنی آن عدد ضربدر خودش **مثال:** مربع عدد ۳ برابر است با  $(3 \times 3 = 9)$ ، هم‌چنین مکعب هر عدد یعنی آن عدد ضربدر خودش ضربدر خودش **مثال:** مکعب عدد ۳ برابر است با  $(3 \times 3 \times 3 = 27)$  برای تبدیل واحدها می‌توان از همین نکته استفاده کرد.

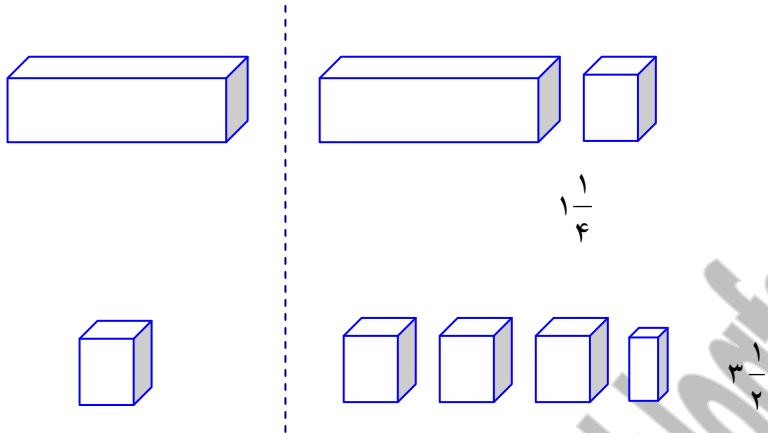
$$\text{سانتی متر} = 1 \text{ متر}$$

$$\text{سانتی متر مربع} = 100 \times 100 = 10000 = 1 \text{ متر مربع}$$

$$\text{سانتی متر مکعب} = 100 \times 100 \times 100 = 1000000 = 1 \text{ متر مکعب}$$

**نکته‌ی ۲:** همان طور که قبلاً گفتیم نکته‌ی مهم در اندازه‌گیری سطح و حجم این است که در اندازه‌گیری سطح ما می‌توانیم از کاشی کاری با مربع، مثلث متساوی الاضلاع و شش ضلعی منتظم استفاده کنیم در صورتی که در اندازه‌گیری حجم اگر بخواهیم از روش دست ورزی این کار را انجام بدهیم فقط از مکعب می‌توانیم استفاده کنیم چون با مکعب‌ها می‌شود فضا را کاشی کاری کرد و پُر نمود.

**نکته‌ی ۳:** همان طور که از فصل اول کتاب یادآوری می‌نماییم واحد چیزی است که قرار داد می‌کنیم حجم شکل‌های زیر با توجه به واحد عبارتند از :



**نکته‌ی ۴:** اگر در ظرفی مثلاً به شکل مکعب مستطیل که آب دارد جسمی را بیندازیم برای محاسبه‌ی حجم آن جسم باید: اندازه‌ی طول و عرض ظرف را در مقدار ارتفاعی که آب بالا می‌آید ضرب کنیم.

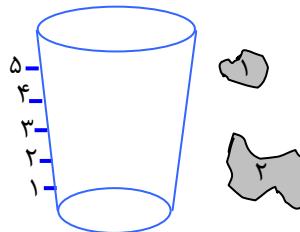
**مثال:** داخل یک آکواریوم به شکل مکعب مستطیل به طول ۳۰ سانتی متر و عرض ۲۰ سانتی متر یک قطعه سنگ می‌اندازیم و ارتفاع آب آکواریوم ۴۰ میلی متر بالا می‌آید، حجم سنگ را محاسبه کنید.

$$40 \div 10 = 0.4$$

$$\text{سانتی متر مکعب} = 30 \times 20 \times 0.4 = 240$$



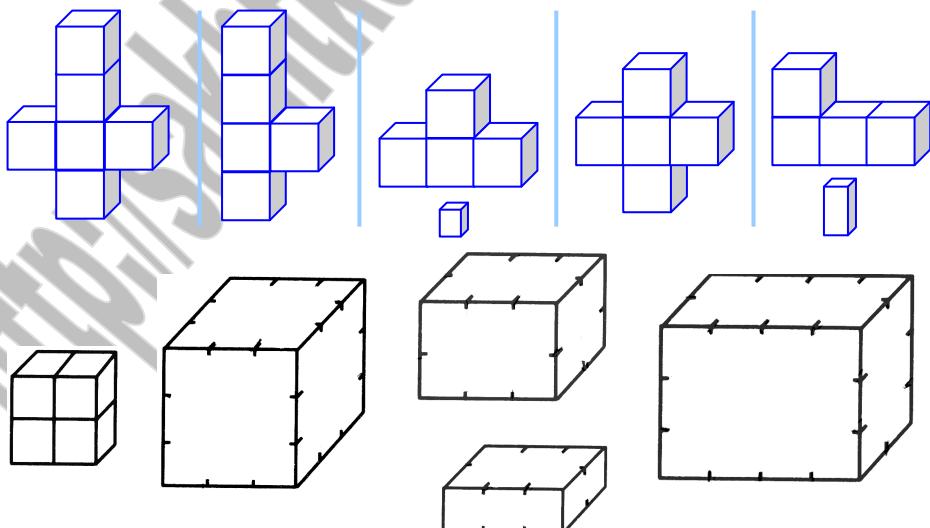
## کار در خانه



- ۱- سحر و ساغر هر کدام یک قطعه آهنی کوچک در دست دارند که می خواهند حجم این دو قطعه را با روشی غیر استاندارد بدست آورند.  
با توجه به شکل هایی که کشیده شده:  
الف) توضیح دهید چگونه می توانند حجم قطعه ها را مشخص کنند؟

- ب) آیا این روش برای اندازه گیری حجم اجسام روش خوبی است؟  
ج) اگر به جای این دو قطعه آهن به طور مثال دو گوشی موبایل یا دو کله قند باشد هم می توانند از این روش استفاده کنند؟ چرا؟

- ۲- هر یک از اجسام ( اشکال) زیر از چند مکعب ( چینه) ساخته شده است؟



۳- مانند نمونه عمل کنید.

$$\begin{aligned} 1000 \text{ میلی متر مکعب} &= 10 \text{ میلی متر} \times 10 \text{ میلی متر} \times 10 \text{ میلی متر} = 1 \text{ سانتی متر} \times 1 \text{ سانتی متر} \times 1 \text{ سانتی متر} = 1 \text{ متر مکعب} \\ \text{سانتی متر مکعب} &= ..... \times ..... \times ..... = ..... \times ..... \times ..... = 1 \text{ متر مکعب} \\ \text{متر مکعب} &= ..... \times ..... \times ..... = ..... \times ..... \times ..... = 1 \text{ کیلومتر مکعب} \\ \text{دسی متر مکعب} &= ..... \times ..... \times ..... = ..... \times ..... \times ..... = 1 \text{ متر مکعب} \end{aligned}$$

۴- هر یک از واحدهای داده شده را به جسم مربوطه وصل کنید ( واحد مناسب برای حجم هر جسم )

$$\text{میلی متر مکعب} - \text{سانتی متر مکعب} - \text{متر مکعب}$$

جبهه دستمال کاغذی - آبنبات - کارتون بستنی - جامدادی - کوپه قطار - دکه‌ی نگهبانی - نگین انگشت‌خوار

۵- مانند نمونه برای هر یک از حجم‌های نوشته شده دو مثال بنویسید ( اندازه‌ها تقریبی است )

۱۸ سانتی متر مکعب: گوشی تلفن همراه، تراش رومیزی

۱۱۰ سانتی متر مکعب:

۹ متر مکعب:

۲۷۰ متر مکعب:

۶- مانند نمونه هر یک از واحدهای داده شده را به واحد خواسته شده تبدیل کنید.

$$2/5 \text{ متر مکعب} = ..... \text{ دسی متر مکعب}$$

$$\text{دسی متر مکعب} = 10 \times 10 \times 10 = 1000 \text{ متر}$$

متر مکعب  
دسی متر مکعب

1	2/5
1000	

$$\boxed{\phantom{00}} = \frac{2/5 \times 1000}{1} = 2500$$

۴/۵ دسی متر مکعب = ..... سانتی متر مکعب

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} = \boxed{\phantom{00}} =$$

۱ دسی متر مکعب = ..... سانتی متر مکعب

۵/۳۲۵ کلیومتر مکعب = ..... متر مکعب

۰/۰۳۷ متر مکعب = ..... سانتی متر مکعب

۴۳۰ دسی متر مکعب = ..... متر مکعب

**حوزه بزرگ**

۷- مقدار فضایی را که یک کمد می گیرد ..... کمد می گویند.

وزن کمد  جرم کمد  مساحت کل کمد  حجم کمد

۸- برای اندازه گیری حجم اشکال فضایی به روش دست ورزی باید از ..... استفاده کرد.

مکعب  مکعب مستطیل  مرربع  هیچکدام

۹- مکعب عدد ۳ بیش تر است یا مرربع عدد ۵ ؟

مکعب عدد ۵  مرربع عدد ۳  هر دو برابرند  قابل مقایسه با هم نیستند

۱۰- ظرفی مدرج ۵ واحد آب دارد و بعد از این که ۵ جبهه قند در آن انداختیم سطح آب به ۷ واحد رسید

حجم قندها چند واحد بوده است؟

۵ واحد  ۱۰ واحد  ۲ واحد  ۲۵ واحد



## حجم اشکال هندسی

### هدف‌های این درس



محاسبه‌ی حجم مکعب‌هایی که  
قسمتی از آن‌ها جدا شده است

جدا کردن قسمتی از یک شکل فضایی  
و چگونگی شکل گسترده‌ی آن

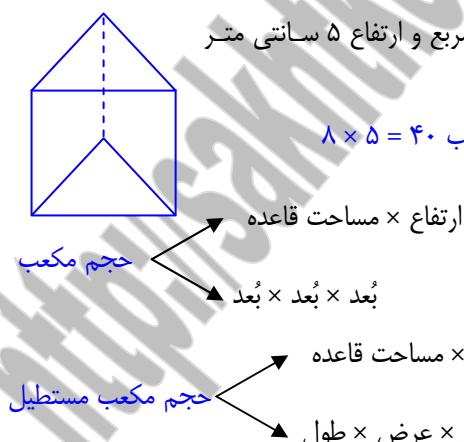
تصویر از بالا و محاسبه‌ی حجم  
جسم به طور تقریبی

همان طور که در درس قبل گفته شد به مقدار فضایی که جسم اشغال می‌کند، حجم آن جسم گفته می‌شود به عبارت دیگر مکعبی با ابعاد ۱ سانتی متر در نظر بگیرید که حجمش ۱ سانتی متر مکعب ( $1 \text{ cm}^3$ ) می‌باشد، تعداد مکعب‌هایی که در یک جسم جا می‌گیرند، معروف حجم آن جسم هستند. اگر تمام یک جسم را با ماده ای نرم و شکل پذیر مانند مووم یا خمیر مجسمه سازی، پر کنیم در واقع حجم آن جسم برابر است با مقدار خمیری که آن شکل را پُر کرده است. در واقع حجم جسم برابر است با حاصل ضرب مساحت قاعده در ارتفاعی که خمیر مجسمه سازی آن را کاملاً پُر کرده است.

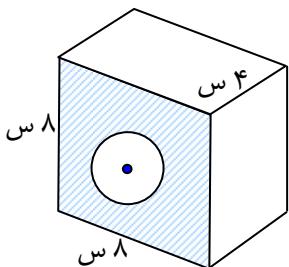
$$\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} = \text{حجم یک جسم}$$

مثال: اگر در شکل مقابل مساحت مثلث ۸ سانتی متر مربع و ارتفاع ۵ سانتی متر باشد، حجم جسم را بدست بیاورید.

$$8 \times 5 = 40$$



در درس قبل با بعضی از اشکال فضایی دیگر مانند هرم، منشور، استوانه و ... آشنا شدید.



**مثال ۱:** حجم جسم مقابل را محاسبه کنید (قطر دایره = ۶ سانتی متر)

$$\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} = \text{حجم جسم}$$

$$\text{مساحت دایره} - \text{مساحت مربع} = \text{مساحت قاعده}$$

$$\text{شعاع دایره} = 3$$

$$(3 \times 3) \times 3/14 = 28/26$$

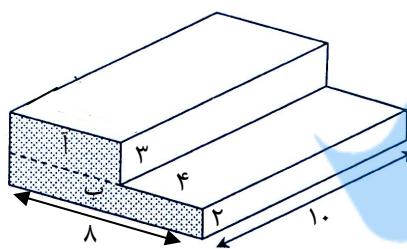
$$\text{مساحت قسمت دایره ای}$$

$$8 \times 8 = 64 \Rightarrow \text{مساحت قاعده شکل} = 35/26 = 64 - 28/26$$

$$35/26 \times 4 = 142/96$$

$$\text{حجم جسم}$$

**مثال ۲:** حجم جسم مقابل را محاسبه کنید.



$$8 - 4 = 4$$

طول مستطيل آ

$$4 \times 3 = 12$$

مساحت مستطيل آ

$$8 \times 2 = 16$$

مساحت مستطيل ب

$$12 + 16 = 28$$

مساحت قاعده

$$28 \times 10 = 280$$

$$\text{حجم جسم}$$

**نکته ۱:** هرگاه به کوچک ترین بعد یک مکعب مستطیل مقداری اضافه شود، بیش ترین تغییر حجم و اگر به بزرگ ترین بعدش همان مقدار را اضافه کنیم، کم ترین تغییر حجم را خواهیم داشت.

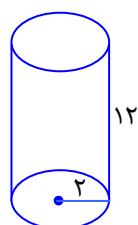
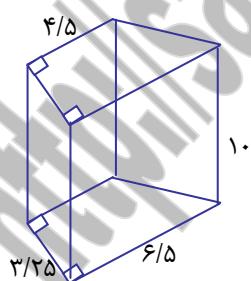
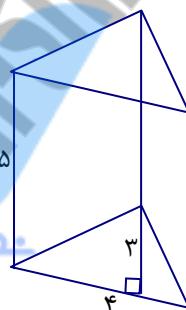
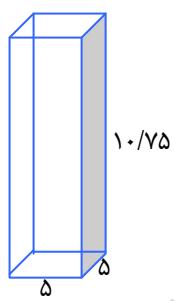
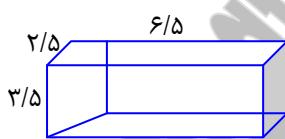
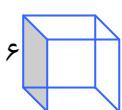
**نکته ۲:** اگر بعد مکعبی  $100\%$  افزایش یابد به این معنی است که بعدش را ۲ برابر کردہ‌ایم؛ لذا حجم آن  $2 \times 2 \times 2$  یعنی ۸ برابر خواهد شد؛ یعنی  $700\%$  افزایش می‌یابد.



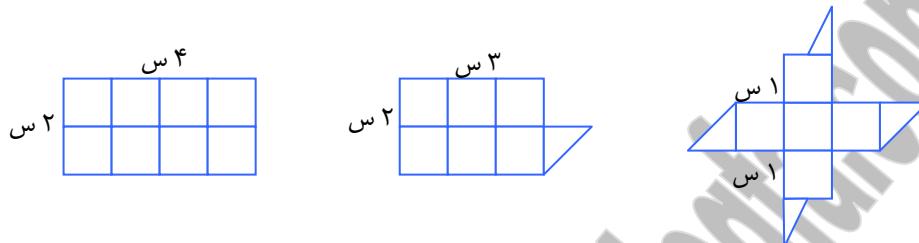
# کار در خانه

پایه های پنجم و ششم ابتدایی ساخته کوششان

۱- حجم هر یک از شکل های زیرا را محاسبه کنید. ( اندازه ها بر حسب سانتی متر است)



۲- فرض کنید از پایین (زیر) یا بالای چند جسم به آن ها نگاه می کنید و آن ها را به اشکال زیر می بیند اگر ارتفاع این شکل ها ۸ سانتی متر باشد حجم آن ها را محاسبه کنید.



۳- طول و عرض و عمق یک استخر به ترتیب ۸، ۵ و ۳ متر است، اگر برای رنگ آمیزی هر متر مربع ۰/۳ کیلوگرم رنگ لازم باشد:

الف) برای رنگ کردن این استخر چند کیلوگرم رنگ مورد نیاز است؟

ب) گنجایش این استخر چند لیتر است؟

۴- حوضی به شکل مکعب مستطیل و به ابعاد  $4 \times 3 \times 1/5$  متر است، این حوض خالی است و می خواهد آن را توسط شیر آبی که هر دقیقه ۶۰ لیتر آب از آن وارد حوض می شود، پر کنند، این حوض چند ساعته پر می شود؟

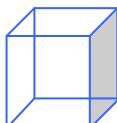
۵- حجم مخزنی  $\frac{3}{4}$  متر مکعب است.  $\frac{3}{4}$  این مخزن آب دارد، چند لیتر دیگر باید در آن آب بریزیم تا

مخزن پر شود؟

۶- پدر مهری بیمار بود و در بیمارستان به او سرم وصل کرده بودند. مادرش از خانم پرستار پرسید: چقدر طول می کشد تا این سرم تمام شود؟ خانم پرستار در حالی که داشت می رفت گفت در هر ۴ ثانیه ۱۰ قطره از این سرم وارد بدن بیمار می شود! به مهری کمک کنید تا حساب کند چه مدت طول خواهد کشید که تمام سرم خالی شود؟



۷- مجموع یال های شکل مقابل  $48$  سانتی متر است.  
الف) مساحت جانبی آن را محاسبه کنید.



ب) حجم این منبع چند سانتی متر مکعب است؟

۸- اگر حجم یک مکعب  $1$  سانتی متر مکعب باشد.  
الف) محیط گسترده‌ی آن چند سانتی متر است؟

ب) مساحت کل این مکعب چند سانتی متر مربع است؟

۹- از جسمی به شکل مکعب، مکعب کوچک تری جدا می کنیم که هر بعده  $\frac{1}{2}$  بعد جسم اولیه است.

حجم باقی مانده چه کسری از حجم اولیه است؟

$\frac{1}{3}$

$\frac{7}{8}$

$\frac{3}{4}$

$\frac{1}{2}$

۱۰- کدام یک از اشکال زیر ۲ بعدی است؟

مربع

مخروط

استوانه

کره

۱۱- گسترده‌ی هر مکعب چند ضلع دارد؟

شش ضلع     دوازده ضلع     چهارده ضلع     شانزده ضلع

۱۲- هر مکعب ..... رأس و ..... یال دارد.

۱۳- هر مکعب دارای ..... است و ..... زاویه‌ی قائمه نیز دارد.

۱۴- مهران با ۴۰ گالن ۲۰ لیتری که فقط نصف هر کدام گازوئیل داشت منبع سوخت مرغداری پدرش را پر نمود. گنجایش این منبع چند متر مکعب می باشد؟

۸۰۰

۰/۴

۴۰۰

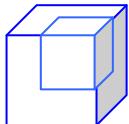
۴۰.....



## سخت کوشانه (یادآوری فصل ۷)

- ۱- توضیح دهید که محاسبه کردن سطح کل یک مکعب با یک مکعب مستطیل چه تفاوتی دارد؟
- ۲- از چهار گوشه‌ی یک مقوای مستطیل شکل به طول ۲۴ سانتی متر و عرض ۱۸ سانتی متر، مربع‌هایی به ضلع ۵ سانتی متر بریده ایم، با بقیه مقوای یک جعبه‌ی سر، باز ساخته ایم  
 الف) مساحت مقوای باقی مانده را محاسبه کنید.  
 ب) حجم جعبه را بدست بیاورید.

- ۳- یک قطعه پنیر به شکل مکعب و به حجم ۱۰۰۰ سانتی متر مکعب داریم می‌خواهیم از یک گوشه‌ی آن یک تکه پنیر به شکل مکعب که ابعادش نصف ابعاد اولیه است ببریم، چقدر از پنیر باقی می‌ماند؟



- ۴- آیا برای اندازه‌گیری حجم یک مکعب می‌توانید از مربع یا مثلث متساوی الاضلاع استفاده کنید؟ چرا؟
- ۵- روش حل مسئله با راهکار حذف حالت‌های نامطلوب را شرح دهید.
- ۶- در فصل ۷ کتاب ریاضی ششم مبحث و موضوع، «تصویر اجسام از بالا» مطرح شده است؟ منظور چیست؟