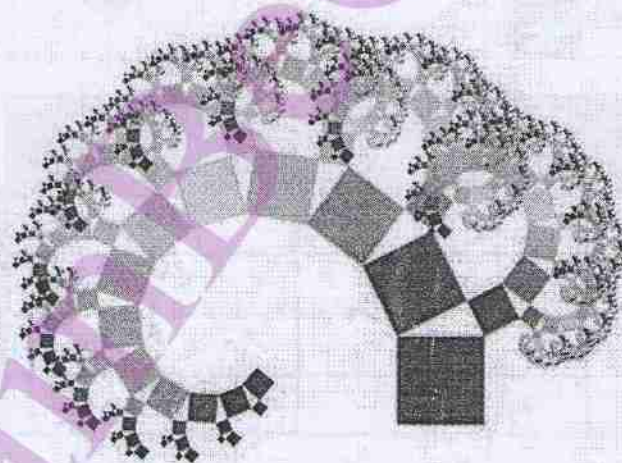


## مثلث

## فصل ۶

قُلْ سِيرُوا فِي الْأَرْضِ فَانظُرُوا كَيْفَ بَدَأَ الْخَلْقَ ... (سوره عنكبوت آیه ۲۰)



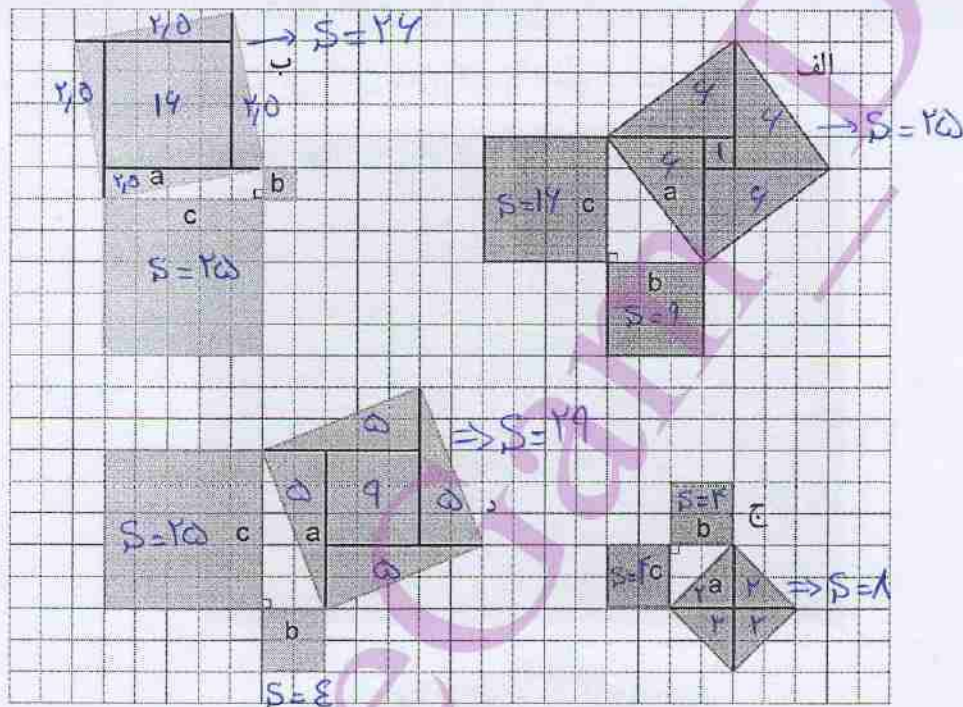
خداوند در جهان هستی نشانه‌هایی خلق کرده است و همواره تفکر و تعقل درباره آنها را از انسان خواسته است.

# رابطه فیثاغورس

## فعالیت



۱- روی هر ضلع مثلث های قائم الزاویه زیر یک مربع رسم کرده ایم. با شمارش مربع های شطرنجی، مساحت هر کدام از مربع های ساخته شده را به دست آورید و جدول را کامل کنید.



مساحت مربع ساخته شده روی ضلع $a$ (وتر): $a'^2$	مساحت مربع ساخته شده روی ضلع $b$ : $b'^2$	مساحت مربع ساخته شده روی ضلع $c$ : $c'^2$	
۲۵	۹	۱۶	الف
۲۶	۱	۲۵	ب
۸	۴	۴	ج
۲۹	۴	۲۵	د

بین عددهای هر سطر چه ارتباطی مشاهده می کنید؟

$$۲۵ = ۹ + ۱۶, ۲۶ = ۱ + ۲۵$$

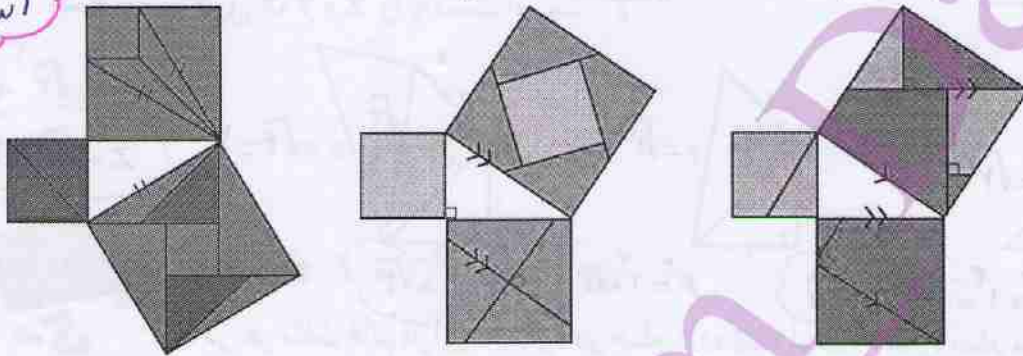
$$۸ = ۴ + ۴, ۲۹ = ۴ + ۲۵$$

عددهای هر سطر برابر مجموع دو عدد دیگر همان سطر است



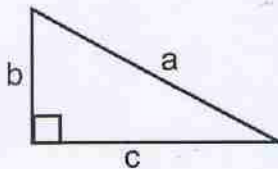
۲- به هر یک از شکل های زیر با دقت نگاه کنید. در هر شکل روشی برای نمایش دادن رابطه میان مساحت مربع های تشکیل شده روی ضلع های مثلث قائم الزاویه آمده است. شما هم روی کاغذ، یک مثلث قائم الزاویه رسم کنید و روی هر ضلع آن مربعی تشکیل دهید. سپس، با استفاده از یکی از این روش ها مربع های ساخته شده روی دو ضلع کوچک آن را طوری به قطعه های کاغذی تقسیم کنید که بتوان با این قطعه ها مربع روی وتر را کاملاً پوشاند.

اثبات شهوی



رابطه فیثاغورس

رابطه میان مجذور (مربع) اندازه ضلع های مثلث قائم الزاویه، به رابطه فیثاغورس معروف است.



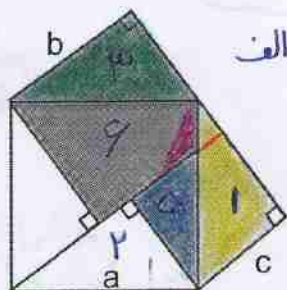
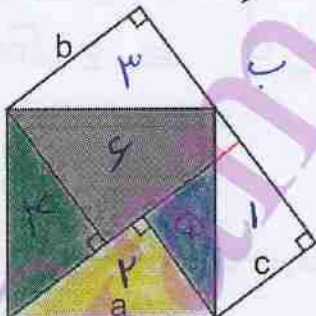
این رابطه بیان می کند که در هر مثلث قائم الزاویه، مجذور وتر با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر برابر است.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

عکس این رابطه هم درست است؛ یعنی، اگر در مثلثی مجذور یک ضلع با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر آن برابر شد، آن مثلث قائم الزاویه است.

خواندنی

ابوالعباس نیریزی، ریاضی دان ایرانی، در حدود هزار سال پیش درستی رابطه فیثاغورس را به صورت زیر نشان داد.



در شکل، چهار مثلث قائم الزاویه هم نهشت<sup>۱</sup> دیده می شود.

در سمت راست، مساحت دو مربعی را که روی ضلع های زاویه قائمه مثلث ساخته شده اند، و در سمت چپ مربعی را که روی وتر ساخته شده است، رنگ کرده ایم. چرا مساحت ناحیه رنگی در این دو شکل برابر است؟

الف: در شکل الف داریم

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

ب: در شکل ب داریم

$$S' = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

۱ →  $S_1 = S_2$

۱ →  $S_3 = S_4$

پس مجموع مساحت مربع های که روی دو ضلع زاویه قائمه هستند می شود مساحت مربعی که روی وتر ساخته می شود برابر است.

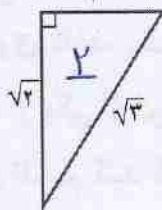
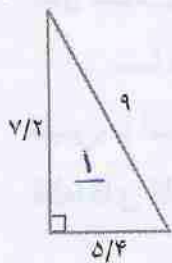


$$\textcircled{1} \quad \left. \begin{aligned} \sqrt{1}^2 + \sqrt{5}^2 &= \sqrt{1}^2 + \sqrt{5}^2 = 1 + 5 = 11 \\ 9^2 &= 11 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{1}^2 + \sqrt{5}^2 = 9^2$$

$$\textcircled{2} \quad \left. \begin{aligned} 1^2 + \sqrt{2}^2 &= 1 + 2 = 3 \\ \sqrt{3}^2 &= 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1^2 + \sqrt{2}^2 = \sqrt{3}^2$$

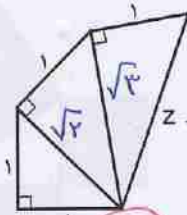
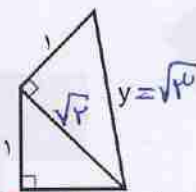
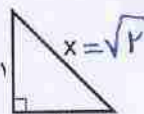
$$\textcircled{3} \quad \left. \begin{aligned} 12^2 + 5^2 &= 144 + 25 = 169 \\ 13^2 &= 169 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 12^2 + 5^2 = 13^2$$

## کاردر کلاس



۱- درستی رابطه فیثاغورس را در هر یک از مثلث‌های قائم‌الزاویه زیر بررسی کنید.

۲- به ترتیب طول  $x$ ،  $y$  و  $z$  را به دست آورید.



$$\begin{aligned} z^2 &= \sqrt{2}^2 + 1^2 = 4 \\ z &= \sqrt{4} = 2 \end{aligned}$$

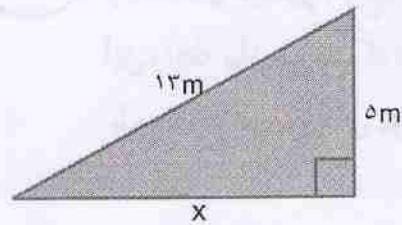
$$\begin{aligned} x^2 &= 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2} \\ y^2 &= 1^2 + \sqrt{2}^2 = 3 \Rightarrow y = \sqrt{3} \end{aligned}$$

## فعالیت

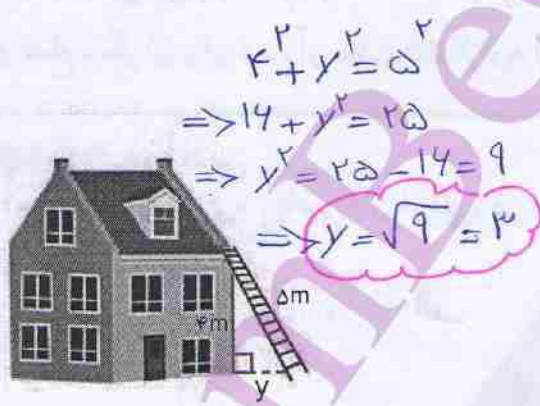


۱- در هر مثلث قائم‌الزاویه، اندازه دو ضلع داده شده است. اندازه ضلع مجهول را

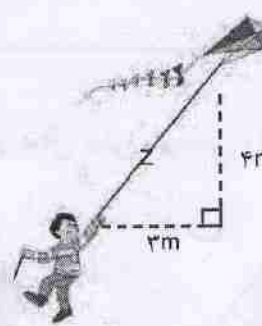
مانند نمونه پیدا کنید.



$$\begin{aligned} 13^2 &= x^2 + 5^2 \\ 169 &= x^2 + 25 \\ x^2 &= 169 - 25 = 144 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

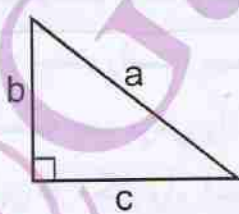


$$\begin{aligned} 4^2 + y^2 &= 5^2 \\ \Rightarrow 14 + y^2 &= 25 \\ \Rightarrow y^2 &= 25 - 14 = 9 \\ \Rightarrow y &= \sqrt{9} = 3 \end{aligned}$$

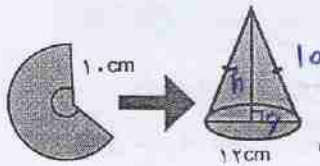


$$\begin{aligned} z^2 &= 4^2 + 3^2 \\ \Rightarrow z^2 &= 14 + 9 \\ \Rightarrow z^2 &= 25 \\ \Rightarrow z &= \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

۲- تساوی‌های جبری زیر را کامل کنید.



$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 \\ b^2 &= a^2 - c^2 \\ c^2 &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$



## کار در کلاس



۱- علی با قسمتی از دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی متر، مخروطی به قطر قاعده ۱۲ سانتی متر ساخته است. ارتفاع این مخروط چقدر است؟  
 $R = 12 \div 2 = 6 \Rightarrow h^2 = 10^2 - 6^2 \Rightarrow h^2 = 64 \Rightarrow h = 8$

۲- معلم ریاضی از دانش آموزان خواست پاره خطی به طول  $\sqrt{10}$  سانتی متر رسم کنند. در اینجا پاسخ سه دانش آموز آمده است. راه حل هر کدام را توضیح دهید و درباره ویژگی‌های آنها گفت و گو کنید. کدام دانش آموز از روش هندسی و کدام یک از روش حسابی استفاده کرده است؟  
**روش هندسی (طلوزی)**

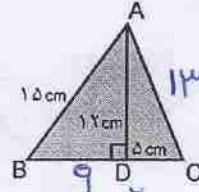
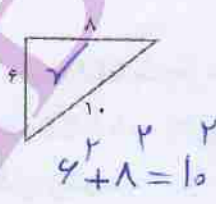
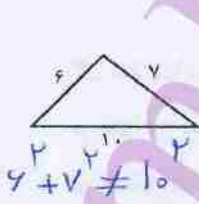
مهسا:	سپاس:	زهرا:
<p><b>روش حسابی</b></p> <p>به کمک ماشین حساب <math>\sqrt{10}</math> را حساب می‌کنم.</p> <p><math>\sqrt{10} \approx 3.16</math></p> <p>حالا به کمک خط کشی یک پاره خط به طول تقریباً <math>3.1</math> سانتی متر رسم می‌کنم.</p>	<p><b>روش هندسی</b></p> <p>مثلثی قائم الزاویه با ضلع‌های ۱ و ۳ سانتی متر رسم می‌کنم.</p> <p><math>1^2 + 3^2 = 10</math></p> <p>پس وتر آن <math>\sqrt{10}</math> سانتی متر خواهد شد.</p>	<p><b>روش هندسی (طلوزی)</b></p> <p>به همین ترتیب، ساختن مثلث‌های قائم الزاویه را ادامه می‌دهم تا <math>\sqrt{10}</math> ساخته شود.</p>

**روش مهسا ساده و ولی به صورت تقریبی است و از رقم‌های بعد از صدمه نظر شده است**

## تمرین برای روش خلافت (سخت)



۱- محیط مثلث ABC را حساب کنید. ۲- کدام مثلث قائم الزاویه است؟



$$AC^2 = 12^2 + 5^2 = 149 \Rightarrow AC = 13$$

$$BD^2 = 15^2 - 12^2 = 81 \Rightarrow BD = 9$$



۲- شکل رو به رو نمایی از یک پارکینگ طبقاتی را نشان می‌دهد. طول مسیری که هر طبقه را به طبقه بعدی می‌رساند، چقدر است؟

$$x^2 = 1.5^2 + 4^2 \Rightarrow x^2 = 2.25 + 16 = 18.25 \Rightarrow x = \sqrt{18.25} \approx 4.27$$



### تعریف هم نهشتی

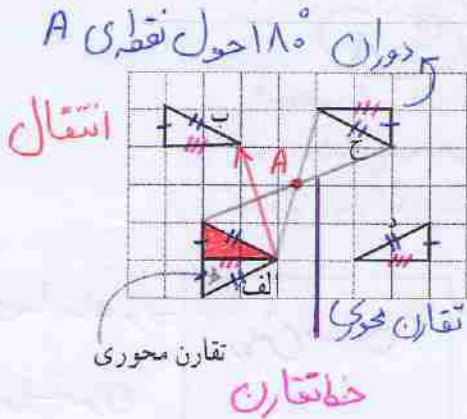
شکل های هم نهشت

اگر بتوانیم شکلی را با یک یا چند تبدیل هندسی (تقارن، دوران و انتقال) طوری بر شکل دیگر منطبق کنیم که کاملاً یکدیگر را بپوشانند، می توانیم بگوییم که این دو شکل با یکدیگر هم نهشت اند.

### فعالیت (دست ورزی)



مهم



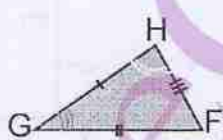
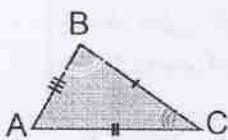
۱- در شکل روبه رو، مثلث های الف، ب، ج و د از انتقال، تقارن یا دوران مثلث قرمز به دست آمده اند و با آن هم نهشت اند. مانند نمونه مشخص کنید از کدام یک تبدیل های انتقال، تقارن یا دوران استفاده شده است.  
ضلع ها و زاویه های مساوی در این پنج مثلث را با علامت گذاری روی شکل نشان دهید.

$$\triangle ABC \cong \triangle GHF$$

۲- این دو مثلث با یکدیگر هم نهشت اند:

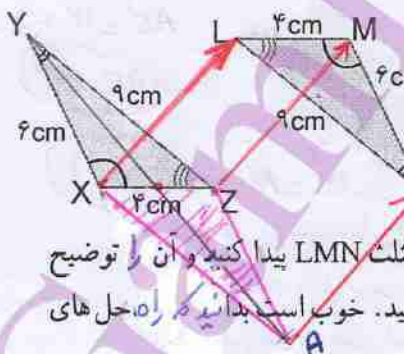
پس اجزای متناظر آنها نیز با هم مساوی هستند.

با توجه به علامت های روی شکل ها، تساوی ضلع ها و زاویه های متناظر این دو مثلث را کامل کنید.



$$\hat{A} = \hat{F} \quad \hat{B} = \hat{H} \quad \hat{C} = \hat{G}$$

$$\overline{BC} = \overline{GH} \quad \overline{AB} = \overline{HF} \quad \overline{AC} = \overline{FG}$$



۳- مثلث های XYZ و LMN با یکدیگر هم نهشت اند.

می خواهیم بینیم مثلث XYZ با چه تبدیلی یا تبدیلی هایی

بر مثلث LMN منطبق می شود.

راه حل دو دانش آموز در اینجا آمده است.

شما هم راه دیگری برای منطبق کردن مثلث XYZ بر مثلث LMN پیدا کنید و آن را توضیح

دهید. سپس راه حل خود را با راه حل های دوستانتان مقایسه کنید. خوب است بدانید که راه حل های

درستی شماری برای این مسئله وجود دارد.

### در دو مرحله

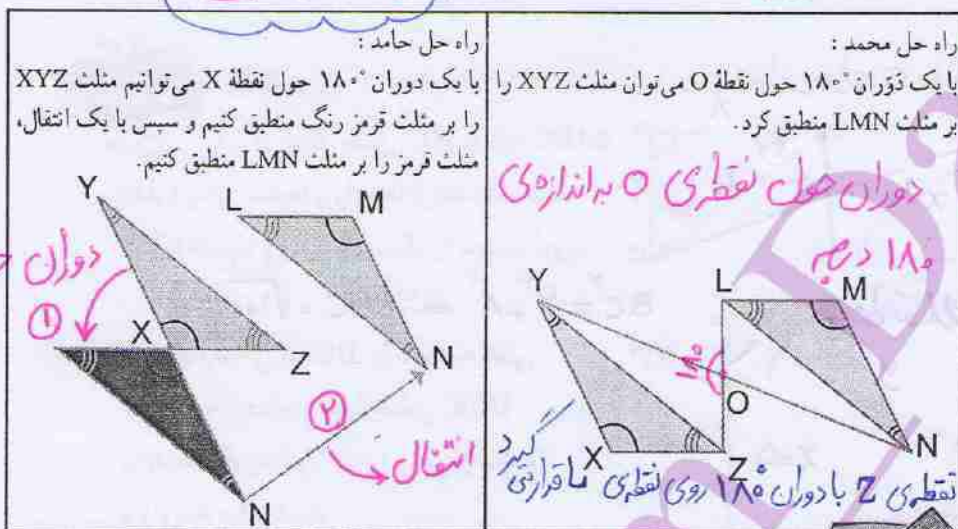


مرحله ۱: دوران حول نقطه A  
مرحله ۲: انتقال با بردار  $\vec{AN}$   
نکته: می توانیم دوران را حول هر ضلع دیگر انجام دهیم و سپس باید انتقال  
مثلث XYZ را بر مثلث LMN منطبق کنیم

راه چهارم: ① مثلث XYZ را توسط بردار  $\vec{XM}$  انتقال در دهیم  
 ② مثلث انتقال یافته را با یک دوران  $180^\circ$  حول M بر مثلث  $\triangle LMN$  منطبق می‌کنیم

ترتیب دوتبدیل

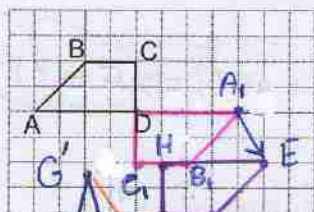
دست‌ورزی



دوران حول نقطه X

دوران حول نقطه O به اندازه  $180^\circ$

کاردر کلاس



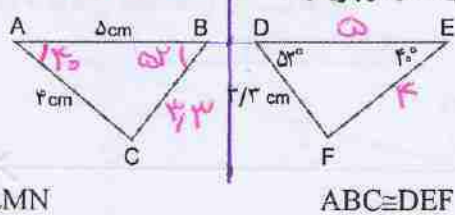
۱- تصویر دوزنقه ABCD را پس از دوران  $180^\circ$  حول نقطه D رسم کنید و آن را  $A_1B_1C_1D_1$  بنامید.  
 سپس آن را با بردار  $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$  انتقال دهید.  
 شکل جدید را نام‌گذاری کنید و عبارت هم‌نهشتی شکل‌ها را کامل کنید.

$ABCD \cong A_1B_1C_1D_1 \cong EFGH$

۲- با توجه به هم‌نهشتی شکل‌های هر قسمت، در صورت امکان اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های متناظر را

خط‌نقارن

پیدا کنید و بنویسید.



$GHIJ \cong KLMN$

$ABC \cong DEF$

۳- دیواره‌های کنار پل از مثلث‌های قائم‌الزاویه هم‌نهشت ساخته شده‌اند.

زاویه‌های مساوی را با علامت‌گذاری مشخص و اندازه هر یک از زاویه‌های یکی از مثلث‌ها را بنویسید.

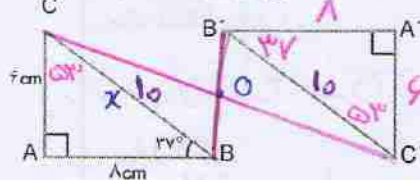
$$\angle = 40^\circ$$

$$\angle = 50^\circ$$





دوران حول O به اندازه ۱۸۰ درجه



۱- در شکل مقابل  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

اندازه برخی ضلع‌ها و زاویه‌ها نوشته شده است.

اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های دیگر را به دست آورید.

$$BC^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow BC = \sqrt{16+9} = 5$$

۲- چهارضلعی DEFG را نسبت به خطی

افقی قرینه کرده‌ایم و چهارضلعی HIJK

را به دست آورده‌ایم. اندازه برخی از ضلع‌ها

و زاویه‌ها معلوم است.

اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های دیگر این چهارضلعی

را به دست آورید.

$$\hat{F} = 360 - (90 + 90 + 117) = 63 \Rightarrow F = 63$$

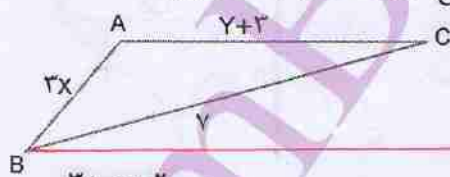
دربارۀ رابطه‌هایی که از آنها در این دو سؤال

استفاده کرده‌اید، با هم گفت‌وگو کنید.

کلامی

۳- مثلث ABC را می‌توان با انتقال، بر مثلث A'B'C' منطبق کرد.

مانند نمونه، با تشکیل و حل معادله، اندازه ضلع‌های مثلث‌ها را به دست آورید.



$$2x = x + 2$$

$$2x - x = 2$$

$$x = 2$$

$$x = 1$$

$$AB = 2x = 2$$

$$A'B' = x + 2 = 3$$

$$AC = A'C' \Rightarrow$$

$$y + 3 = 5y - 5 \Rightarrow 1 = 4y \Rightarrow y = \frac{1}{4}$$

$$AC = 5, A'C' = 5$$

$$BC = B'C' \Rightarrow Z = Y$$

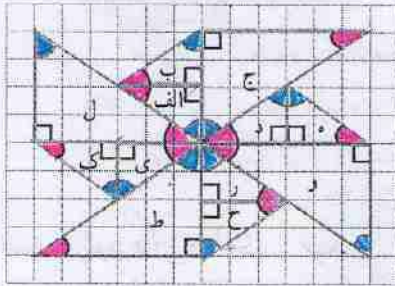
مثلث ABC با

انتقال BB' بر روی مثلث

A'B'C' منطبق می‌شود



د → تقارن محوری → ه → دوران  $180^\circ$  → الف  
 ک → تقارن محوری → ی → انتقال → ح → تقارن محوری → ه → دوران  $180^\circ$  → الف  
 ی → تقارن محوری → ک → انتقال → الف  
 و → دوران → ل → تقارن نسبت به ضلع کوچک زاویه قائمه → پ → دوران → ج  
 سپس انتقال



۱- در شکل رو به رو زاویه های مساوی را با رنگ های یکسان مشخص کرده ایم. کدام مثلث ها با مثلث الف هم نهشت اند؟ مانند نمونه مشخص کنید که با چه تبدیل یا تبدیلی می توان مثلث الف را بر مثلث های هم نهشت با آن منطبق کرد. چهار مورد دیگر بنویسید. پاسخ هایتان را با پاسخ های دوستانتان مقایسه کنید.

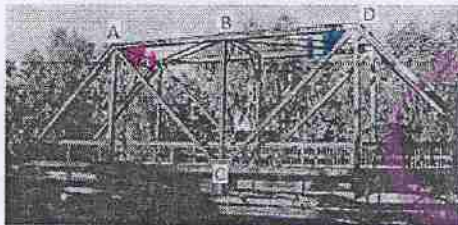


جواب: مثلث های ب، ی، ک، ه، ح و د با الف هم نهشت هستند

دوران  $180^\circ$  (الف) ← (ه)

تقارن محوری (الف) ← (ب) ← (د)

۲- شازه های مثلثی که در این پل به کار رفته اند، توانایی تحمل نیروهای کششی و فشاری زیادی را دارند و مانع خمیدگی پل می شوند.



می دانیم  $\triangle ABC \cong \triangle BCD$

الف) کدام زاویه مثلث ABC روبه روی ضلع BC است؟  $\hat{A}_1$

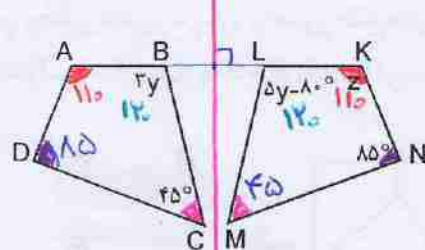
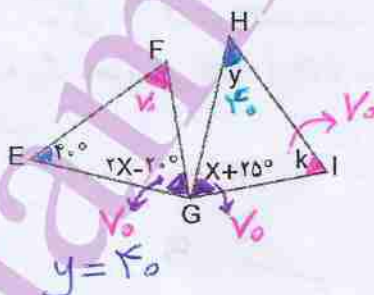
ب) کدام زاویه مثلث BCD روبه روی ضلع BC است؟  $\hat{D}_1$

ج) مثلث ABC را بر مثلث BCD منطبق می کنیم. کدام زاویه این مثلث با زاویه  $\hat{A}_1$  متناظر است؟  $\hat{D}_1$

۳- زاویه های مجهول را بیابید.

الف) مثلث HIG حاصل دَوَران  $90^\circ$  درجه EFG حول نقطه G است.

ب) چهارضلعی KLMN حاصل تقارن چهارضلعی ABCD نسبت به خطی عمودی است.



$$2x - 20 = x + 25$$

$$x = 45$$

$$\hat{F} = \hat{I} \Rightarrow k = 180 - (70 + 45)$$

$$\Rightarrow k = 70$$

$$3y = 5y - 10$$

$$\Rightarrow 10 = 2y \Rightarrow 50 = y$$

$$\hat{B} = \hat{L} = 120$$

$$z = 340 - (120 + 150 + 45) = 110$$



مثلث های هم نهشت

فعالیت

نتیجه: با مساوی بودن سه زاویه یکی توان هم نهشتی دو مثلث را نتیجه گرفت

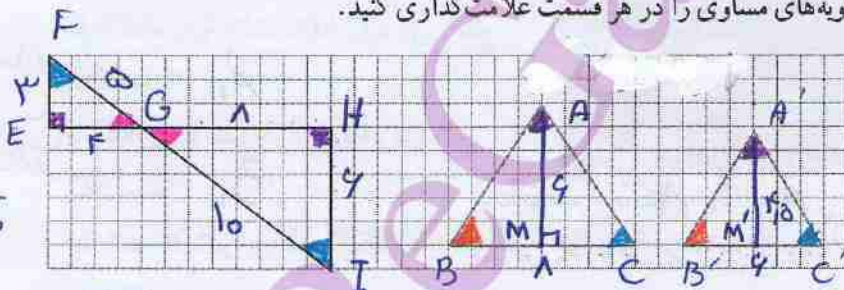
آرمان و سامان مشغول انجام دادن فعالیت های هندسه بودند. معلم ریاضی مثلثی روی کاغذ رسم کرد. سپس، تصویر زاویه های آن را روی سه برگه کاغذ پوستی کشید و از آنها خواست به کمک هم مثلثی بسازند که زاویه هایش با آن سه زاویه برابر باشد. آنها مثلث خواسته شده را به ترتیب رویه رو ساختند.

زاویه های مثلث ب با زاویه های مثلث الف برابر است ولی اضلاع آن بزرگتر از اضلاع مثلث الف است

فکر می کنید مثلثی که آنها ساخته اند با مثلث اولیه، که معلم ریاضی رسم کرده، هم نهشت است؟  
آیا آنها می توانند مثلثی بسازند که با مثلث اولیه هم نهشت باشد؟  
خیر (در گزارشی نوشته شده)  
با این روش، خیر نمی توانند

کاردر کلاس سه زاویه مساوی است اما ضلع ها برابر نیست

۱- زاویه های مساوی را در هر قسمت علامت گذاری کنید.



$$\begin{aligned} \hat{A} &= \hat{A}' \\ \hat{B} &= \hat{B}' \\ \hat{C} &= \hat{C}' \end{aligned}$$

$$\frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \frac{5}{15}$$

$$\Rightarrow \frac{EF}{HI} = \frac{EG}{GH} = \frac{FG}{IG}$$

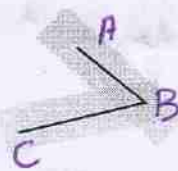
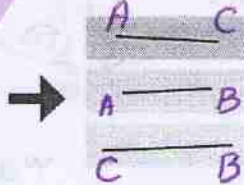
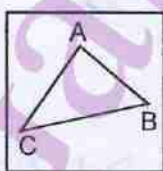
۲- شکل های سؤال قبل را نام گذاری کنید و تساوی زاویه ها را بنویسید.

$$\frac{4}{4} = \frac{4}{10} \Rightarrow$$

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AM}{A'M'}$$

۱- در فعالیت بعدی، معلم ریاضی مثلثی رسم کرد و تصویر ضلع های آن را روی

سه برگ کاغذ پوستی کشید. آن گاه از بچه ها خواست مثلثی بسازند که ضلع هایش با این سه ضلع برابر باشد.



۹۳

نتیجه: اگر اضلاع دو مثلث تطبیق پذیر مساوی باشند آن گاه می توان نتیجه گرفت  
آن دو مثلث هم نهشت می باشند

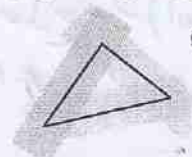


مرحله اول



سامان مثلث مورد نظر را به این ترتیب ساخت :

مرحله دوم



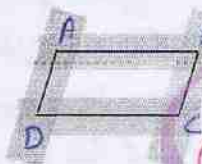
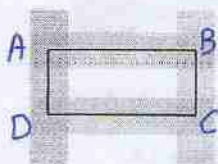
آرمان مطمئن بود مثلی که سامان ساخته است، با مثلث معلم ریاضی هم نهشت است. شما هم این فعالیت را انجام دهید و درباره آن فکر کنید.

۲- سامان پرسید : « فکر می کنی اگر ضلع های دو شکل با یکدیگر مساوی باشند، آن دو شکل

حتماً با یکدیگر هم نهشت اند؟ » **خیر**

آرمان گفت : « نه، من می گویم اگر ضلع های دو مثلث با هم مساوی باشند، آن دو مثلث حتماً با یکدیگر هم نهشت اند. مثلاً این دو چهارضلعی را ببین؛ با اینکه ضلع هایشان مساوی است، با یکدیگر هم نهشت نیستند. »

سپس، با کاغذ پوستی دو چهارضلعی زیر را ساخت و به سامان نشان داد.



**تعریف میانه**

کارد در کلاس



۱- در شکل زیر نقطه M وسط BC است. پاره خطی مانند AM که رأس مثلث را به وسط ضلع مقابل وصل می کند میانه می نامیم.

عبارت های زیر را کامل کنید و نشان دهید چرا ضلع های دو مثلث ایجاد شده با هم برابرند.

$AB = AC$  چون ساق های مثلث متساوی الساقین ABC هستند.

$BM = CM$  چون **AM میانه می باشد** (M وسط BC است)

AM هم ضلع مشترک دو مثلث است.

هم نهشتی این دو مثلث را با یک عبارت نشان دهید.  $\triangle ABM \cong \triangle ACM$

۲- الف) لوزی مقابل را نام گذاری کنید و یکی از قطرهای آن را رسم کنید.

ب) دلیل تساوی ضلع های دو مثلث ایجاد شده را بنویسید.

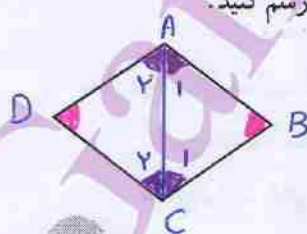
ج) زاویه های مساوی را با علامت گذاری مشخص کنید.

ب) چون چهارضلعی ABCD لوزی است

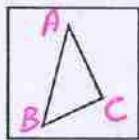
پس ضلع های دو مثلث با هم برابر می باشند

$$A_1 = A_2 = C_1 = C_2, B = D$$

سه ضلع مثلث با هم برابرند



اصلاح شود (اندازه AB اشتباه است)



منثلی رسم کنید.

سپس دو ضلع آن و زاویه

بین آن دو ضلع را روی سه برگ

کاغذ پوستی بکشید.

مرحله اول



مرحله دوم



اکنون سعی کنید منثلی بسازید که دو ضلع آن با این

دو ضلع برابر باشد و زاویه بین این دو ضلع هم

برابر زاویه رسم شده باشد.

کلاهی توضیح داده شود

آیا این مثلث با مثلث اولیه هم نهشت است؟

بله

آیا با این شرایط می توانید منثلی بسازید که با مثلث اولیه هم نهشت نباشد؟

خیر

کار در کلاس



در شکل مقابل نیمساز زاویه روبه رو به قاعده مثلث متساوی الساقین

ABC را رسم کرده ایم.

عبارت های زیر را کامل کنید و به کمک آنها نشان دهید دو مثلث

ABD و ADC با هم هم نهشت هستند و دو زاویه مجاور قاعده با هم برابرند.

چون  $\overline{AB} = \overline{AC}$ ؛ مثلث ABC متساوی الساقین است

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ ؛ چون AD نیمساز است.

AD هم ضلع مشترک دو مثلث است.

هم نهشتی این دو مثلث را با یک عبارت نشان دهید. چون دو ضلع و زاویه بین آن دو از این دو مثلث

$$ABD \cong ACD$$

برابرند پس

فعالیت



منثلی رسم کنید و این بار دو زاویه و ضلع بین آنها را روی سه برگ کاغذ پوستی بکشید.

سعی کنید منثلی بسازید که دو زاویه و ضلع بین این دو زاویه در آن با مثلث اولیه مساوی باشد.

آیا این مثلث با مثلث اولیه هم نهشت است؟

بله

آیا می توانید منثلی بسازید با همین شرایط که با مثلث اولیه هم نهشت نباشد؟

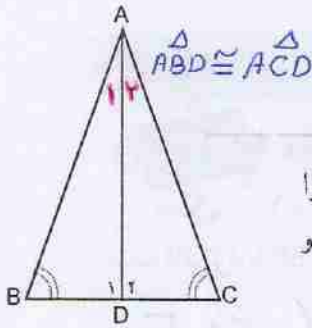
خیر



$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{D}_1 &= 180^\circ \\ \hat{A}_2 + \hat{C} + \hat{D}_2 &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{D}_2$$

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$  و  $\hat{B} = \hat{C}$  طبق فرض

چون AD نیمساز است



کار در کلاس: چون  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$  و  $\hat{B} = \hat{C}$  و مجموع سزاویدی  $\hat{C}$ ،  $\hat{A}_2$  و  $\hat{D}_2$  برابر  $180^\circ$  است و مجموع سزاویدی  $\hat{B}$ ،  $\hat{A}_1$  و  $\hat{D}_1$  هم برابر  $180^\circ$  است پس  $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$

(۲) ضلع AD بین هر دو مثلث مشترک است

(۳)  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$  چون AD نیمساز است

(۱)، (۲)، (۳) طبق دوازده و ضلع بین دایره

کار در کلاس

در شکل مقابل زاویه های B و C با هم برابرند و نیمساز زاویه A را رسم کرده ایم. نشان دهید دو مثلث ABD و ACD هم نهشت هستند و دو ضلع AB و AC با هم برابرند. دلایل کلایی بیان شود

(راهنمایی: ابتدا برای مساوی بودن  $\hat{D}_1$  و  $\hat{D}_2$  دلیل بیاورید.)

نتیجه: اگر در مثلثی دو زاویه برابر باشند آن مثلث متساوی الساقین است.

سه حالت هم نهشتی دو مثلث:

- برابری سه ضلع
  - برابری دو ضلع و زاویه بین
  - برابری دو زاویه و ضلع بین
- یا به اختصار: (ض ض ض) یا به اختصار: (ض ض ض) یا به اختصار: (ض ض ض)

تمرین



۱- در هر قسمت، بعضی از ضلع ها و زاویه های مساوی مشخص شده اند. مواردی را که اطلاعات داده شده برای تشخیص هم نهشتی دو مثلث کافی است، پیدا کنید و حالت هم نهشتی را بنویسید.



۲- در هر شکل، مساوی بودن برخی از اجزای دو مثلث را می توان از روابط میان پاره خط ها، زاویه ها، تعریف دایره یا چهارضلعی های خاص نتیجه گرفت. اجزای مساوی را پیدا کنید و با علامت گذاری مناسب مشخص کنید. سپس، حالت هم نهشتی دو مثلث را بنویسید.

(ض ض ض)، (ض ض ض)، (ض ض ض)



الف) هر دو مثلث متساوی الاضلاع اند.

(ض ض ض)



ب) قطر متوازی الاضلاع رسم شده است.

(ض ض ض)، (ض ض ض)، (ض ض ض)



ج) دو قطر یکدیگر را در مرکز مشترک دو دایره قطع کرده اند.

(ض ض ض)

۳- شکل روبه رو کدام نسبت را نمایش می دهد؟

اگر دو زاویه و یک ضلع غیر بین از یک مثلث با دو زاویه و یک ضلع غیر بین از مثلثی دیگر برابر باشند،

الف) دو مثلث با یکدیگر هم نهشت اند.

ب) ممکن است دو مثلث هم نهشت نباشند.

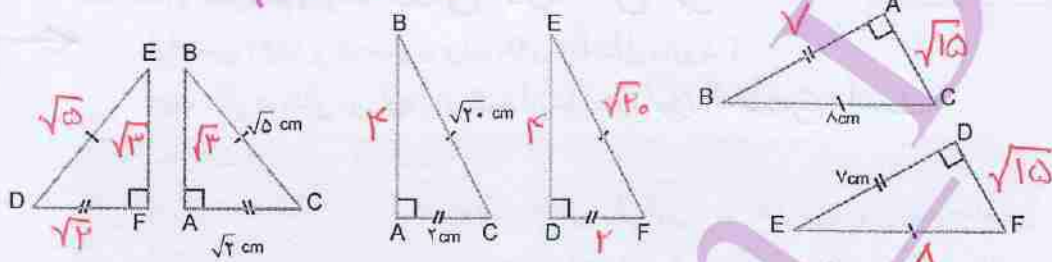


## هم نهشتی مثلث های قائم الزاویه

فعالیت



۱- در هر قسمت، وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه ABC با وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه DEF برابر است. ← (من، من، من)



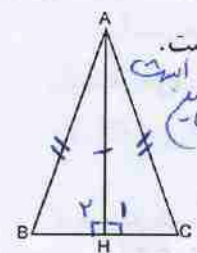
اندازه ضلع سوم هر یک از مثلث ها را پیدا کنید.

آیا در هر قسمت، سه ضلع مثلث ABC با سه ضلع مثلث DEF مساوی است؟ **بله**  
آیا این دو مثلث با یکدیگر هم نهشت اند؟ در چه حالتی؟ **بله (من، من، من) یا (من، من، من)**

۲- می دانیم وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه ای با وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه

دیگری برابر است. آیا می توان نتیجه گرفت که این دو مثلث با یکدیگر هم نهشت اند؟ چرا؟ توضیح دهید. **بله**

از رابطه فیثاغورس ضلع سوم را هم بدست می آوریم در نتیجه سه ضلع دو مثلث با هم **کارد در کلاس** برابر می شوند



۱- پاره خط AH، ارتفاع وارد بر قاعده مثلث متساوی الساقین ABC است.

چرا مثلث های ایجاد شده با یکدیگر هم نهشت اند؟

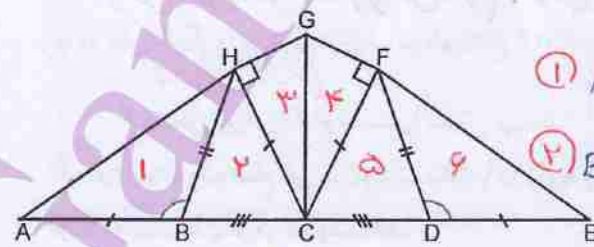
①  $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$  **بله**  $AB = AC$  چون  $ABC$  متساوی الساقین است

②  $AH$  ضلع مشترک پس به حالت وتر و یک ضلع مشترک

بگیریم دو مثلث هم نهشت می باشند  $\triangle ABH \cong \triangle ACH$

۲- با توجه به علامت های شکل زیر، مثلث های هم نهشت را پیدا کنید و بنویسید. حالت

هم نهشتی هر جفت مثلث را بیان کنید.



①  $\triangle ABH \cong \triangle FDE$  (من، من، من)

②  $\triangle BHC \cong \triangle DFC$  (من، من، من)

③  $\triangle CGH \cong \triangle CGF$  (وتر و ضلع زاویه قائم)

از قسمت ① و ② داریم  $\triangle FCE \cong \triangle HCA$  ← (من، من، من)

حالت (من، من، من)، (من، من، من)، (من، من، من)

(وز) و (وز)

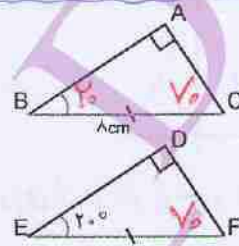
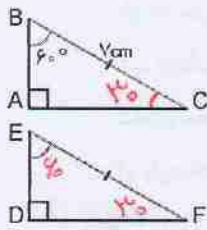


## فعالیت



۱- در هر قسمت، وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه ABC با وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه DEF برابر است.

(از منظر)



زاویه دیگر هر یک از مثلث ها را پیدا کنید.

آیا در هر قسمت دو مثلث با یکدیگر هم نهشت اند؟ در چه حالتی؟ **بلم**، به حالت دو زاویه و ضلع بین آن دو

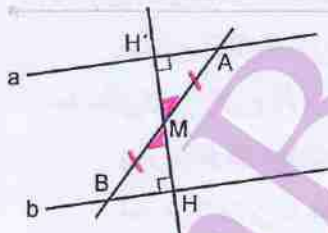
۲- وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه ای با وتر و یک زاویه تند از مثلث قائم الزاویه دیگری

برابر است. آیا می توان نتیجه گرفت که این دو مثلث با یکدیگر هم نهشت اند؟ چرا؟ توضیح دهید. **بلم**، در این حالت می توانیم

دو حالت دیگر برای هم نهشتی دو مثلث قائم الزاویه: **دو زاویه تند** (از منظر) **دو مثلث هم نهشت می باشند**

- برابری وتر و یک ضلع
- برابری وتر و یک زاویه تند
- یا به اختصار (وض)
- یا به اختصار (وز)

## کار در کلاس



۱- از نقطه M، وسط پاره خط AB، بر دو خط موازی a و b عمود رسم کرده ایم. **کلاسی**

دو مثلث ایجاد شده به چه حالتی با یکدیگر هم نهشت اند؟

**وتر و یک زاویه تند (وز)**

۲- در شکل روبه رو، هر شانزده زاویه کوچک وسط شکل با هم مساوی و هشت پاره خط آبی نیز با هم مساوی اند. **کلاسی**

شانزده مثلث قائم الزاویه شکل مقابل به چه حالتی هم نهشت اند؟

**وتر و یک زاویه تند (وز)**

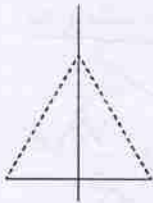


## نیاز به دلیل آوردن

فعالیت



شادی و مهتاب داشتند یک کتاب هندسه را مطالعه می کردند که به این جمله برخوردند:



«هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط

از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است.»

۱- مهتاب پرسید: «چرا این جمله درست است؟»

شادی سعی کرد مثالی برای درستی آن جمله پیدا کند.

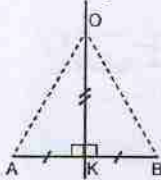
او پاره خطی کشید و عمود منصف آن را رسم کرد. نقطه ای را روی آن در نظر گرفت و فاصله

آن نقطه را از دو سر پاره خط اندازه گرفت؛ فاصله ها مساوی بود.

(یادآوری: فاصله دو نقطه از هم برابر طول پاره خطی است که آن نقاط را به هم وصل می کند.)

فکر می کنید شادی توانسته است دلیلی برای درستی جمله مورد نظر بیاورد؟ خیر، چون فقط یک نقطه را بررسی کرده

۲- مهتاب گفت: «از کجا بفهمیم این جمله در مورد همه نقاط روی عمود منصف درست است؟»



شادی سعی کرد دلیلی برای درستی آن جمله پیدا کند.

او به شکلی که کشیده بود نگاه کرد. آن را مانند

شکل رو به رو علامت گذاری کرد و گفت: «برای همه نقاط روی عمود منصف AB، مانند نقطه

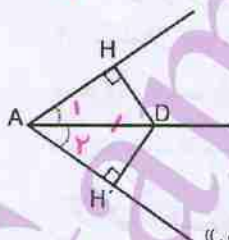
O، زاویه K زاویه ای قائمه است. (چرا؟) چون OK عمود بر AB است»

همچنین  $AK=KB$  (چرا؟) OK هم ضلع مشترک دو مثلث است. پس  $\triangle AOK \cong \triangle BOK$  (در

چه حالتی؟) چون OK منصف AB است - (ض: ض: ض)

و در نتیجه  $OA=OB$  (چرا؟) چون دو مثلث هم نهشت هستند

فکر می کنید این بار شادی توانسته است برای درستی جمله مورد نظر دلیلی بیاورد؟ بله



۳- برای درستی جمله زیر دلیل بیاورید:

① AD وتر مشترک هر دو مثلث است

② AD نیم سازه است پس داریم  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

③ هر دو مثلث قائم الزامی باشند

«هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.»

(یادآوری: فاصله یک نقطه از یک خط برابر طول پاره خطی است که از آن نقطه بر آن خط عمود می شود.)

۹۸

نتیجه می گیریم به حالت وتر و یک زاویه دو مثلث هم نهشت می باشند ①، ②، ③

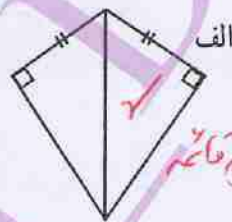
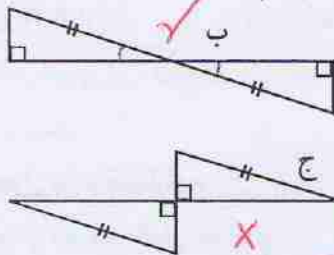
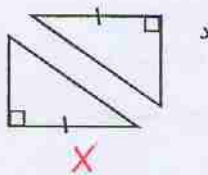


## تمرین



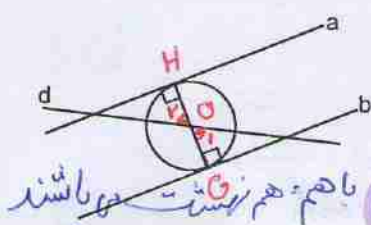
۱- در هر شکل، بعضی از ضلع‌ها و زاویه‌های مساوی مشخص شده‌اند. مواردی را که اطلاعات داده شده برای تشخیص هم نهشتی دو مثلث کافی است، پیدا کنید و بنویسید دو مثلث در چه حالتی هم نهشت‌اند.

وتر یک زاویه کند



وتر یک ضلع زاویه قائمه

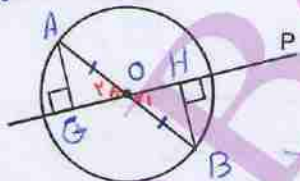
۲- در هر شکل، از روابط میان پاره خط‌ها، زاویه‌ها، تعریف دایره یا چهارضلعی‌های خاص می‌توانیم نتیجه بگیریم که برخی از اجزای دو مثلث با هم مساوی‌اند. اجزای مساوی را پیدا کنید و با علامت گذاری مناسب مشخص کنید. سپس، حالت هم نهشتی دو مثلث را بنویسید.



الف) خط d از مرکز دایره می‌گذرد و دو خط a و b بر قطر دایره عمودند. ①  $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$  متقابل بر راس

②  $OA = OB$  شعاع‌های دایره ③  $\hat{H} = \hat{G} = 90^\circ$

①، ②، ③ نتیجه می‌دهد دو مثلث به حالت (موضعی) با هم هم نهشت می‌باشند

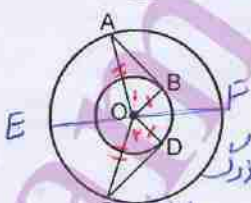


ب) خط p از مرکز دایره گذشته است.

①  $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$  متقابل بر راس ②  $OA = OB$  شعاع‌های دایره

③  $\hat{H} = \hat{G} = 90^\circ$  ①، ②، ③ نتیجه می‌دهد دو مثلث به حالت

وتر یک زاویه کند با هم هم نهشت می‌باشند



ج) نقطه O مرکز مشترک دو دایره و پاره خط‌های AB و CD

بر دایره کوچک مماس می‌باشند. ①  $\hat{B} = \hat{D} = 90^\circ$

②  $OB = OD$  شعاع‌های دایره کوچک ③  $OA = OC$  شعاع‌های دایره بزرگ

①، ②، ③ نتیجه می‌دهد دو مثلث به حالت (موضعی) هم نهشت می‌باشند

۳- در هریک از موارد تمرین (۲)، مشخص کنید یک مثلث را با چه تبدیلی می‌توان بر مثلث

دیگر منطبق کرد.

الف ← دوران  $180^\circ$  نسبت به نقطه O

ب ← دوران  $180^\circ$  نسبت به نقطه O

ج ← تقارن نسبت به قطر EF



در شکل n ام رابع

$$n \text{ زوج باشد} \Rightarrow \text{محيط} = 2 \times 5 + 4n = 4n + 10$$

$$n \text{ فرد باشد} \Rightarrow \text{محيط} = 5 + 2 + 4n = 4n + 7$$

## مرور فصل ۶

### شناخت و مهارت ها

در این فصل واژه های زیر به کار رفته اند. مطمئن شوید که می توانید با جمله های خود آنها را توصیف کنید و برای هر کدام مثالی بزنید.

• اجزای متناظر

• رابطه فیثاغورس

• حالت های هم نهشتی دو مثلث

• هم نهشتی مثلث های قائم الزاویه

در این فصل، روش های اصلی زیر مطرح شده اند. هر کدام را با یک مثال توضیح دهید و در دفتر خود خلاصه درس را بنویسید.

• پیدا کردن ضلع مجهول مثلث قائم الزاویه

• بررسی قائم الزاویه بودن مثلث با داشتن سه ضلع آن

• نوشتن اجزای متناظر دو شکل هم نهشت

• هم نهشتی دو مثلث در حالت سه ضلع، دو ضلع و زاویه بین و حالت دو زاویه و ضلع بین

• هم نهشتی دو مثلث قائم الزاویه در حالت وتر و یک زاویه و حالت وتر و یک ضلع

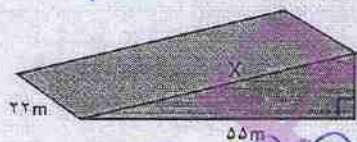
• حل مسئله های مربوط به هم نهشتی مثلث ها به کمک حالت های بالا

### کاربرد

در نقشه های مهندسی و برای پیدا کردن اندازه ضلع ها و زاویه های مجهول، از هم نهشتی شکل ها و تساوی اجزای متناظر استفاده می کنیم.

$$x^2 = 15^2 + 55^2 \Rightarrow x = \sqrt{3250} \approx 57.008$$

### تمرین های ترکیبی



۱- در شکل روبه رو سطح شیب داری را می بینید.

طول این سطح شیب دار را به دست آورید.

۲- الگوی زیر با مثلث های هم نهشت ساخته می شود.

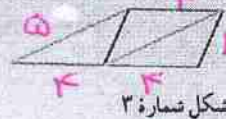
اصلاح شود

الف) دو شکل بعدی را رسم کنید.

ب) محیط هر شکل را پیدا کنید.

ج) محیط شکل شماره ۶ چقدر می شود؟

د) محیط شکل شماره ۷ چقدر؟



۲

۳

۴

۵

$$\text{محيط} = 5 + 4 + 1 = 10$$

$$2 \times 5 + 2 \times 4 = 18$$

$$5 + 3 \times 4 + 2 = 19$$

$$2 \times 5 + 4 \times 4 = 24$$

$$5 + 2 + 5 \times 4 = 27$$