

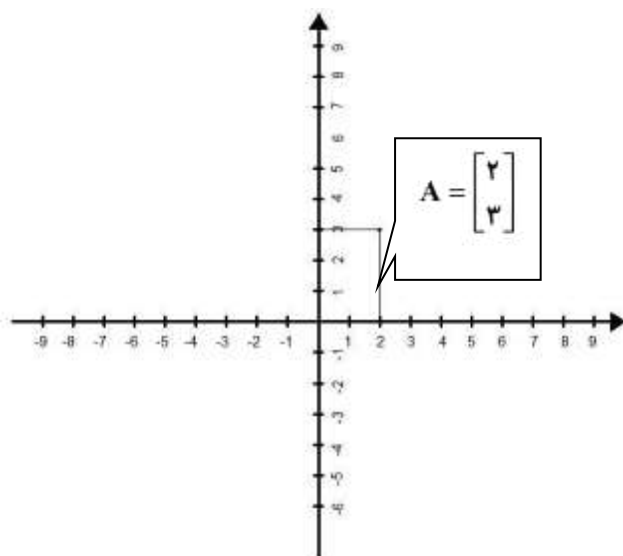
بردار و مختصات

فصل ۵

مختصات و بردار

مختصات

برای مشخص کردن یک نقطه در صفحه (مانند نقطه A) آن را با دو عدد به صورت $A = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ نشان دهیم. به a طول نقطه A و به b عرض آن گفته می شود. برای نشان دادن نقاط در صفحه می توانیم این نقاط را روی محور مختصات قرار دهیم. محور مختصات در صفحه شامل دو محور عمود بر هم با مبدا مشترک است. با وجود دستگاه مختصات، هر نقطه با مختصاتش نشان داده می شود. مختصات نقطه $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ بر روی دستگاه مختصات به شکل زیر است:



در این دستگاه مختصات، نقطه $O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ مبدا مختصات است. در دستگاه مختصات سمت راست مبدا در محور افقی و سمت بالای مبدا در محور عمودی، اعداد مثبت را نشان می دهند و سمت چپ محور افقی و پایین محور عمودی، اعداد منفی را نمایش می دهند. در دستگاه مختصات، محور افقی محور X ها (طول ها) و محور عمودی محور

Yها (عرضها) است. در دستگاه مختصات نقطه $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ، عدد ۲ طول نقطه A و عدد ۳ عرض نقطه A است.

برداری

یک خط جهت دار (فلش) است، که علاوه بر داشتن جهت، مختصات نیز دارد. برداری مانند \overline{AB} را در نظر بگیرید. این بردار از دو نقطه عبور کرده است که به نقطه A ابتدای بردار و به نقطه B انتهای بردار می گویند. اگر مختصات نقطه A برابر $A = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ باشد و مختصات نقطه B برابر $B = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ باشد آنگاه مختصات بردار \overline{AB} برابر است با:

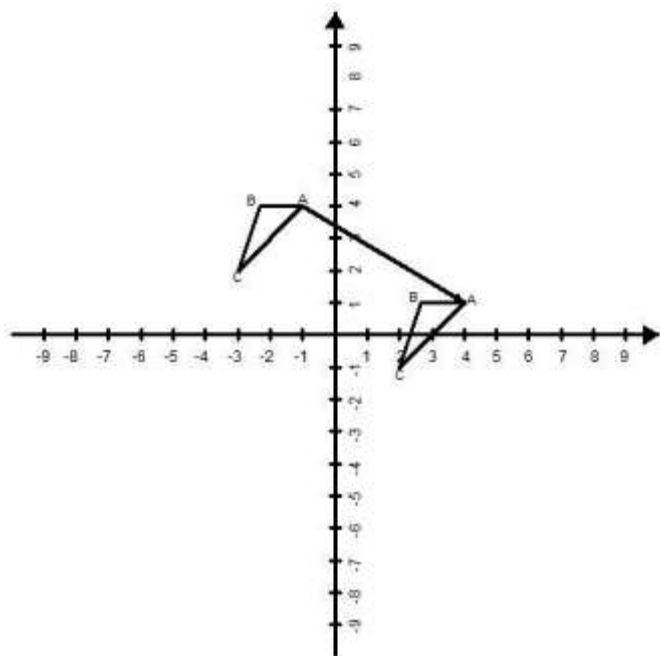
$$\overline{AB} = \begin{bmatrix} c - a \\ d - b \end{bmatrix}$$

مختص اول بردار (طول بردار) نشان دهنده‌ی میزان جابجایی در راستای محور افقی و مختص دوم بردار (عرض بردار) نشان دهنده‌ی میزان جابجایی بردار در راستای محور عمودی است.

مختصات ابتدای بردار - مختصات انتهای بردار = مختصات بردار

تساوی دو بردار: بردارهایی که هم اندازه و هم جهت و موازی باشند، را بردارهای مساوی گویند. منظور از هم اندازه بودن یعنی اینکه مختصات بردارها با هم برابر باشد.

انتقال نقاط با بردار



در شکل زیر مثلث ABC را با بردار AA' انتقال داده‌ایم. برای رسیدن از A به A' باید ۵ واحد در جهت مثبت Xها و ۳ واحد در جهت منفی Yها حرکت کنیم. یعنی طول نقطه A را با ۵ و عرض آن را با ۳- جمع کنیم. پس مختصات بردار AA' برابر $AA' = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$. جمع متناظر با این بردار برابر است با:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

در واقع هر بردار نقطه ابتدایش را به انتهایش منتقل می‌کند که گاهی این مطلب به شکل زیر نمایش داده می‌شود.

مختصات بردار

مختصات ابتدای بردار → مختصات انتهای بردار

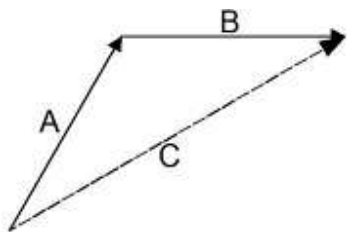
مثال: در رابطه زیر نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ توسط بردار $\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$ را به نقطه $\begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}$ انتقال می‌دهیم.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+(-2) \\ -3+(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -7 \end{bmatrix}$$

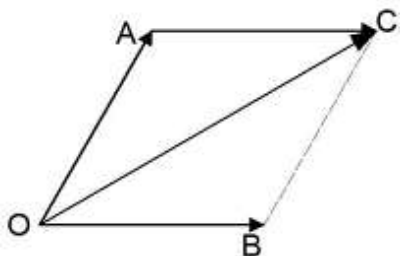
نکته: برای هر بردار رابطه زیر برقرار است:

مختصات ابتدای بردار + مختصات بردار = مختصات انتهای بردار

جمع بردارها



روش مثلثی: برای جمع دو بردار می توان آنها را طوری رسم کرد که ابتدای هر کدام (به غیر از بردار اول) روی انتهای بردار قبلی قرار گیرد، به این ترتیب حاصل جمع دو بردار برابر است، با برداری که از ابتدای بردار اول به انتهای بردار آخر رسم شود. بردار C حاصل جمع دو بردار A و B است.



روش متوازی الاضلاع: از این روش فقط برای جمع دو بردار استفاده می شود. این روش برای جمع بردارهایی استفاده می شود که ابتدای مشترک داشته باشند.

نحوه بدست آوردن جمع دو بردار با روش متوازی الاضلاع : برای بدست آوردن حاصل جمع دو بردار \vec{OA}, \vec{OB} ابتدا از

نقطه A برداری مساوی \vec{OB} رسم می کنیم و آن را \vec{AC} می نامیم. اینک حاصل جمع دو بردار \vec{OA} و \vec{OB} با حاصل جمع دو بردار \vec{OA} و \vec{AC} یکی است. \vec{OC} بردار جمع است. $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC}$

جمع مختصاتی دو بردار: برای جمع مختصاتی دو بردار کافیتست، مختص اول هر دو بردار با هم جمع شود و مختص دوم بردارها هم با هم جمع شود. مثلاً اگر بخواهیم دو بردار A و B را با هم جمع کنیم به صورت زیر عمل می کنیم:

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \vec{B} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = \begin{bmatrix} a + c \\ b + d \end{bmatrix}$$

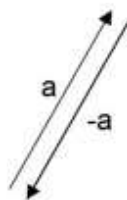
ضرب عدد در بردار

برای ضرب یک عدد در بردار کافیست آن عدد را در هر دو مختص بردار ضرب کنیم.

$$a \times \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \times b \\ a \times c \end{bmatrix}$$

نکته : با ضرب عدد منفی در یک بردار جهت بردار برعکس می شود.
نکته : با ضرب عدد مثبت در بردار جهت بردار ثابت مانده و تغییر نمی کند.

نکته : دو بردار a و $-a$ - قرینه یکدیگر هستند.



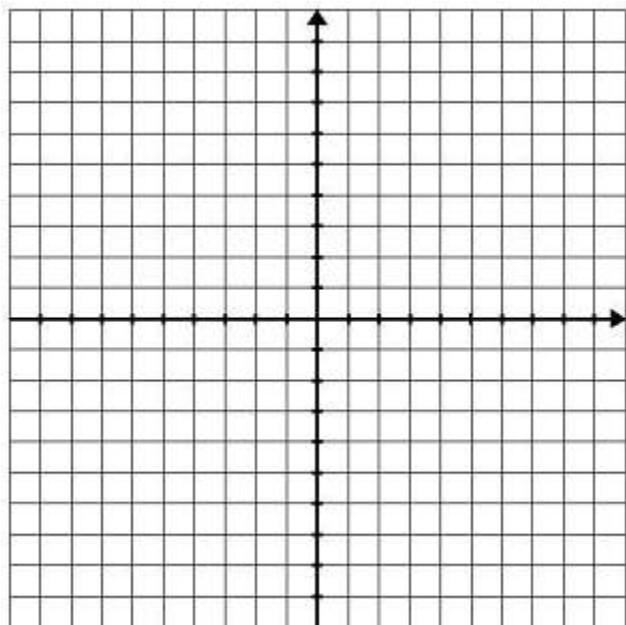
بردارهای واحد در مختصات

بردارهای $i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $j = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ را بردارهای واحد در مختصات می گویند. هر برداری از صفحه را می توانیم بر حسب این بردارها بدست آوریم. بردار $\vec{A} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ را بر حسب بردارهای واحد به صورت $\vec{A} = a\vec{i} + b\vec{j}$ است.

$$\vec{A} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a\vec{i} + b\vec{j}$$

❖ **تمرین در کلاس**

(۱) با نقطه های A، B و C بردارهای AB، AC، BC و CB را در دستگاه مختصات رسم کنید و مختصات بردارها را بنویسید.



$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(۲) در هر یک از قسمت های زیر مختصات نوشته نشده را بنویسید؟ (انتقال نقطه)

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12 \\ -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

۳) حاصل جمع های زیر را بدست آورید.

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \end{bmatrix} = \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -13 \end{bmatrix} = \quad \begin{bmatrix} -23 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 45 \\ -6 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} = \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} =$$

۴) اگر بردار A را داشته باشیم آنگاه بردارهای B، C، D و F را بدست آورید؟

$$A = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

الف: $B=2A$

ب: $C=-3A$

ج: $D=B+C$

د: $F=2B-3D$

۵) در هر یک از معادله های زیر مختصات بردار X را بدست آورید؟

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$-3X = \begin{bmatrix} 12 \\ -18 \end{bmatrix}$$

۶) اگر بردارهای a و b را داشته باشیم مختصات بردارهای x و y را بدست آورید؟

$$a = 3i + (-4)j \quad b = 3i + 5j$$

$$x = 5a + 2b \quad y = -3a + 6b$$

۷) گزینه صحیح و یا غلط را انتخاب نمایید.

- اندازه بردار \overline{AB} با اندازه بردار \overline{BA} برابر است. ص غ
- حاصل جمع هر بردار با قرینه اش برابر بردار صفر است. ص غ
- بردارهای مساوی حتماً با هم موازی هستند. ص غ
- بردار $a = -2j$ با بردار $a = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ برابر است. ص غ
- اگر $a = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $b = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$ باشد آنگاه $b = -3a$ است. ص غ

۸) اگر $a = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $b = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$:

الف) مختصات بردار $c = 3a + b$ را بدست آورید.

ب) بردار c را رسم کنید.

$$(9) \text{ اگر } a = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} , b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} :$$

الف) مختصات بردار $c = 2a - b$ را بدست آورید.

ب) بردار c را رسم کنید.

$$(10) \text{ اگر } a = -3i \text{ و } b = 3i + j :$$

الف) مختصات بردار $c = -2a + 2b$ را بدست آورید.

ب) بردارهای a و b را رسم کنید.

$$(11) \text{ اگر } a = -2i - j \text{ و } b = -3a :$$

الف) مختصات دو بردار a و b را بنویسید.

(۱۲) اگر مختصات $a = 3i - 2j$ و $b = 4j - i$ باشند :

✓ مختصات بردارهای a و b را بنویسید.

✓ بردارهای a و b را از مبدا رسم کنید.

(۱۳) در معادلات زیر مختصات بردار x را بدست آورید.

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} + x = \begin{bmatrix} -5 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$4x = \begin{bmatrix} 16 \\ -20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} + x = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$-3x = \begin{bmatrix} 15 \\ -21 \end{bmatrix}$$

$$-4x + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$3x + \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \end{bmatrix}$$

۱۴) هر یک از بردارهای زیر را بر حسب بردارهای واحد بنویسید.

$$a = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

۱۵) مختصات هر یک از بردارهای زیر را بنویسید.

$$a = 4i - 3j$$

$$b = 5i - 2j$$

$$c = 4i$$

$$d = -2j$$

$$e = -i - j$$

$$f = -i - \frac{2}{3}j$$

$$k = -i + j$$

$$g = -9i - j$$

۱۶) حاصل هر یک از عبارتهای زیر را بنویسید.

$$\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix} =$$

$$3 \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \end{bmatrix} =$$

$$-4 \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} =$$

$$-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix} =$$