فصل ۶
مثلث

رابطه ی فیثاغورس:

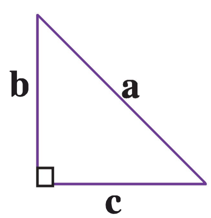
مثلث ABC یک مثلث قائم الزاویه است. زاویه A قائمه (راست)، AC,AB اضلاع قائم و BC وتر مثلث است.

B

C

رابطه ی فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه به صورت زیر بیان می شود :

مربع ضلع قائم دیگر+ مربع یکی از ضلع های قائم = مربع وتر

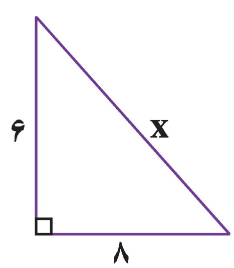


$$a^{۲} = b^{۲} + C^{۲}$$

عکس این رابطه هم درست است یعنی اگر در مثلثی مجذور یک ضلع با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر آن برابر شد، آن مثلث قائم الزاویه است.

◀ مثال : «۱»

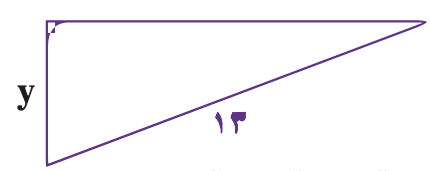
در شکل های زیر مقادیر y,x را به دست آورید.



$$x^{۲} = ۶^{۲} + ۸^{۲}$$

$$x^{۲} = ۳۶ + ۶۴ = ۱۰۰$$

$$x = \sqrt{۱۰۰} = ۱۰ \Rightarrow \boxed{x = ۱۰}$$



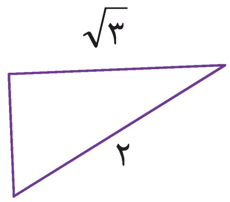
$$۱۳^{۲} = y^{۲} + ۱۲^{۲}$$

$$۱۶۹ = y^{۲} + ۱۴۴$$

$$y^{۲} = ۱۶۹ - ۱۴۴ = ۲۵$$

$$y = \sqrt{۲۵} = ۵ \Rightarrow \boxed{y = ۵}$$

◀مثال : «۲»



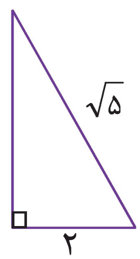
آیا مثلث زیر قائم الزاویه است؟ چرا؟ بله زیرا :

$$۲^۲ = (\sqrt{۳})^۲ + ۱^۲$$
$$۴ = ۳ + ۱$$
$$۴ = ۴$$

* رسم پاره خطی به طول $\sqrt{b}$: ابتدا دو عدد پیدا می کنیم که اگر به توان دو رسانده و باهم جمع کنیم، عدد زیر رادیکال به دست می آید. سپس مثلث قائم الزاویه ای به اضلاع این دو عدد رسم می کنیم. وتر مثلث به اندازه ی عدد داده شده می باشد.

◀مثال : «۱»

پاره خطی به طول $\sqrt{۵}$ سانتی متر رسم کنید.



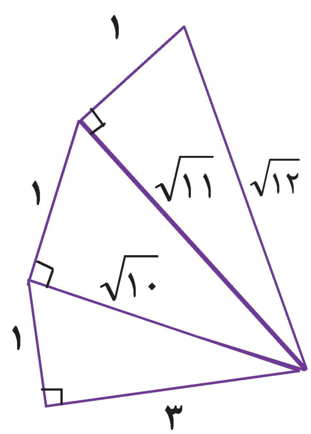
مثلثی به اضلاع ۱ و ۲ سانتی متر رسم می کنیم زیرا : $۵ = ۴ + ۱ = ۲^۲ + ۱^۲$ پس وتر مثلث جواب مسئله است.

مهسا با ماشین حساب $\sqrt{۵}$ را محاسبه کرد و حاصل تقریباً ۲/۳۶ شد سپس پاره خطی به طول ۲۳ میلی متر رسم کرد. آیا روش کار مهسا درست است؟

◀مثال : «۲»

پاره خطی به طول $\sqrt{۱۲}$ سانتی متر رسم کنید.

بزرگ ترین عددی که مجذور آن از ۱۲ کمتر باشد، عدد ۳ است. لذا مثلثی به اضلاع قائم ۳ و ۱ رسم کرده، سپس با عمود کردن ضلع های یک واحدی بر وترها، کار را ادامه داده تا به $\sqrt{۱۲}$ برسیم.



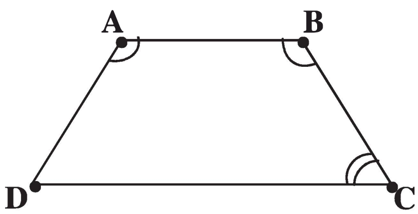
شکل های هم نهشت

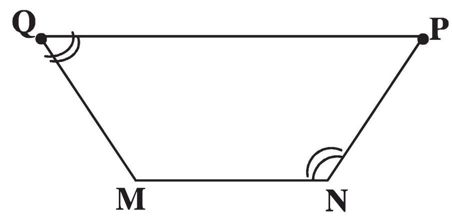
اگر بتوانیم شکلی را با یک یا چند تبدیل هندسی (تقارن، دوران و انتقال) بر شکل دیگری منطبق کنیم به طوری که کاملاً یکدیگر را بپوشانند، می گوییم این دو شکل **هم نهشت هستند**.

با دوران ۱۸۰ درجه مرکزی دو شکل مقابل برهم منطبق می شوند پس هم نهشت اند.

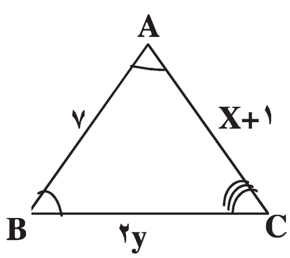
اجزای متناظر :

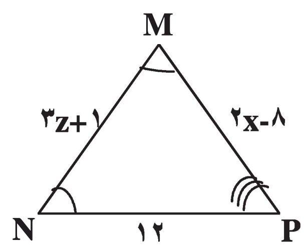
$$AB=\overline{MN},\ \overline{AD}=\overline{PN},\ \overline{BC}=MQ,\ \hat{A}=M,\ B=\hat{M},\ \hat{C}=\hat{Q},\ \hat{D}=\hat{P},\ \overline{DC}=PQ$$





◀ مثال : دو مثلث MNP,ABC هم نهشت اند (انتقال). اندازه ی مجهول را به دست آورید.





$\overline{BC}=\overline{NP}$

$۲y=۱۲$

$y=\frac{۱۲}{۱۲}=۶$

$\boxed{y\ \ ۶}$

$\overline{AC}=\overline{MP}$

$x+۱=۲x-۸$

$۱+۸=۲x-x$

x=۹

$\overline{AB}=\overline{MN}$

$۷=۳z+۱$

$۷-۱=۳z$

$۶=۳z$

$z=\frac{۶}{۳}=۲$

❋ حالت های هم نهشتی در مثلث ها :

۱. سه ضلع (ض ض ض)

۲. دو ضلع و زاویه بین (ض ز ض)

۳. دو زاویه و ضلع بین (زض ز)

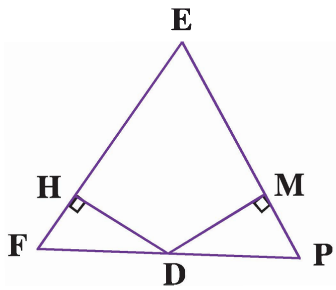
برای همه ی مثلث ها

۴. وتر و یک ضلع (و ض)

۵. وتر و یک زاویه تند (و ز)

مخصوص مثلث قائم الزاویه

مثال : مثلث EFP متساوی الاضلاع و نقطه D وسط FP است چرا دو مثلث FHD و DPM هم نهشت اند؟



$FD = DP$ (D وسط FP)

$\xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه تند}} \overset{\Delta}{FHD} \cong \overset{\Delta}{DMP}$

$\hat{B} = \hat{C} = ۶۰^\circ$ (مثلث متساوی الاضلاع)

نکته «۱» :

برخی از اعداد فیثاغورسی عبارتند از : (۱۰و ۸ و۶) ، (۵ و۴ و۳) ، (۳۰و۲۴ و۱۸)، (۱۳و۱۲ و۵)، (۲۶و ۲۴و۱۰)، (۱۷و۱۵و ۸)، (۲۶و ۲۴و ۷)، (۲۵و۲۰ و۱۵)

نکته «۲» :

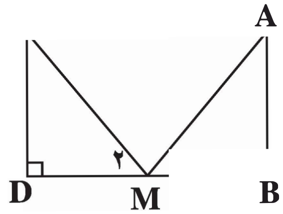
هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.

نکته «۳» :

هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است.

اشتباهات رایج :

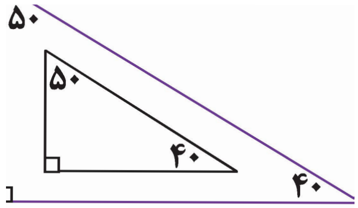
۱) در شکل مقابل زاویه های M_1, M_2 متقابل به رأس نیستند.



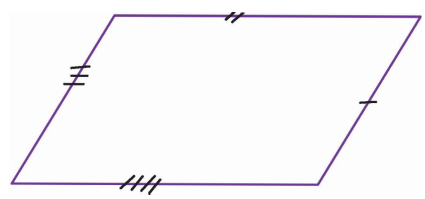
۲) اگر سه زاویه از مثلثی با سه زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، ممکن است دو مثلث هم نهشت نباشند.

◀ مثال :

مثلث های زیر هم نهشت نیستند.



۳) حالت های هم نهشتی ۵ گانه مطرح شده مخصوص مثلث ها هستند و در شکل های دیگر مثل چهارضلعی ها برای اثبات هم نهشتی آن ها کاربرد ندارند مثلاً در چهارضلعی های زیر هر چهارضلع متناظر باهم برابرند، اما دو شکل هم نهشت نیستند.



شگفتی اعداد:

۱۳×۱۳+۱ =۱۷۰

۱۳۳×۱۳۳+۱۱=۱۷۷۰۰

۱۳۳۳×۱۳۳۳+۱۱۱=۱۷۷۷۰۰۰

۱۳۳۳۳×۱۳۳۳۳+۱۱۱۱=۱۷۷۷۷۰۰۰۰