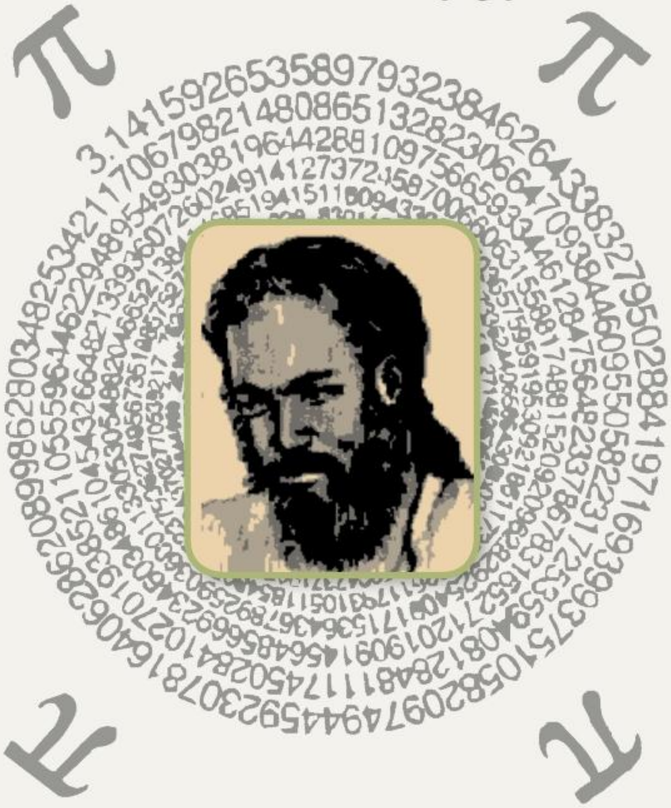
عددهای حقیقی

فصل ۲

«... وَ اَحاطَ بِما لَدَیْهِمْ وَ اَحْصیٰ کُلَّ شَیْءٍ عَدَدًا»

«... و او (خداوند) به آنچه نزد آنهاست احاطه دارد و همه‌چیز را به عدد شمارش کرده است.» (سورهٔ جن، آیهٔ ۲۸)



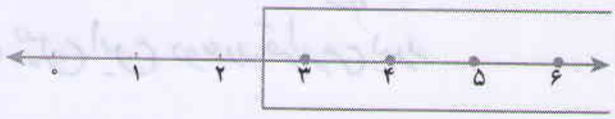
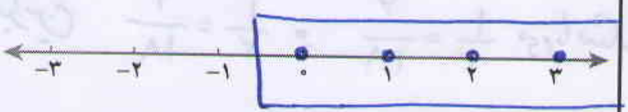
غیاث‌الدین جمشید کاشانی زبردست‌ترین حسابدان، برجسته‌ترین ریاضی‌دان دورهٔ اسلامی و از بزرگ‌ترین مفاخر تاریخ ایران به‌شمار می‌رود. کاشانی به روشی کاملاً خلاقانه و از طریق محاسبه و مقایسه محیط چندضلعی‌های محاطی و محیطی توانست عدد π که عددی **حقیقی** و **گنگ** است را تا ۱۶ رقم بعد از اعشار محاسبه کند که تا حدود ۱۵۰ سال پس از وی کسی در جهان نتوانست با دقت بهتری آن را محاسبه کند. او در ابتدای رسالهٔ محیطیه خود به زبانِ ریاضی به نام خدا را چنین بیان می‌کند:

«به نام او که از اندازهٔ نسبتِ محیط دایره به قطرش آگاه است.»

درس اوّل: عددهای گویا

فعالیت

۱ــ در فصل گذشته با نمایش‌های مختلفِ مجموعه‌های اعداد آشنا شدید. عبارت‌های زیر را مانند نمونه کامل کنید:

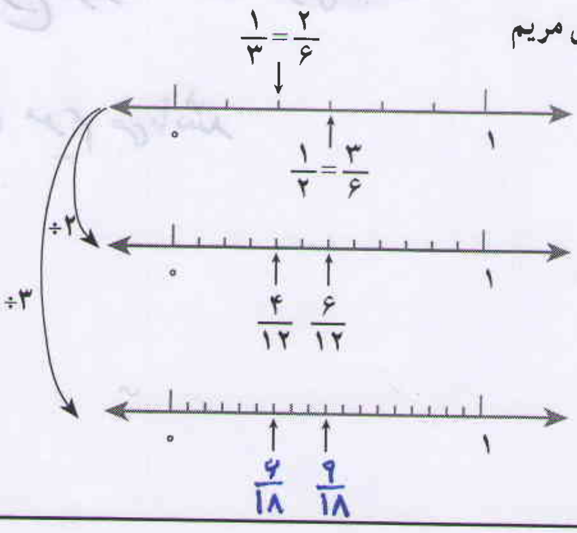
ردیف	عبارت کلامی	زبان نمادین	محور
۱	عددهای طبیعی بیشتر یا مساوی ۳	$\{x\in \mathbb{N} \mid x\geq ۳\}$ $\{۳ , ۴ , ۵ , ...\}$	
۲	عددهای حسابی ~~کوچک‌تر~~ یا مساوی ۲	$\{x\in w \mid x\leq ۲\}$ $\{۰ , ۱ , ۲\}$	
۳	عددهای صحیح بین ۳− و ۲	$\{x\in \mathbb{Z} \mid -۳<x<۲\}$ $\{-۲ , -۱ , ۰ , ۱\}$	
۴	عددهای صحیح بزرگ‌تر از ۱−	$\{x\in \mathbb{Z} \mid x>-۱\}$ $\{۰ , ۱ , ۲ , ۳ , ...\}$	

نامساوی $x\geq ۳$ برای کدام‌یک از عددهای زیر درست است؟ اعداد ۳، ۴ و ۵

نادرست $۱\geq ۳$ ، نادرست $۲\geq ۳$ ‏ ‏ ۱ , ۲ $\boxed{۳ , ۴ , ۵}$ ‏ ‏ $۵\geq ۳$ ، $۴\geq ۳$ و $۳\geq ۳$

۲ــ می‌خواهیم بین $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ چند کسر بنویسیم. روش‌های مختلفی را که چهار دانش‌آموز نوشته‌اند، بررسی و کامل کنید؛ راه حل هر کدام را توضیح دهید. صفحه ۱۹/۱

روش مریم



روش بهار

$$\frac{۱}{۳} < \ ? \ < \frac{۱}{۲}$$

$$\frac{۲}{۶} < \ ? \ < \frac{۳}{۶}$$

$$\xrightarrow{\times ۲} \quad \frac{۴}{۱۲} < \frac{۵}{۱۲} < \frac{۶}{۱۲}$$

$$\xrightarrow{\times ۳} \quad \frac{۶}{۱۸} < \frac{۷}{۱۸} \ , \ \frac{۸}{۱۸} < \frac{۹}{۱۸}$$

فعالیت

روش مریم

۱ـ ابتدا هر دو کسر را هم مخرج کرده و سپس اعداد $\frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$ و $\frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$ را روی محور مشخص کرده است

۲ـ برای بدست آوردن یک عدد بین این دو عدد هر قسمت را به دو قسمت مساوی تقسیم کرده، لذا یک واحد به دوازده قسمت مساوی تقسیم می‌شود بنابراین $\frac{۶}{۱۲} = \frac{۱}{۲}$ و $\frac{۴}{۱۲} = \frac{۱}{۳}$ می‌باشد و کسر $\frac{۵}{۱۲}$ طبق شکل بین این دو عدد قرار می‌گیرد

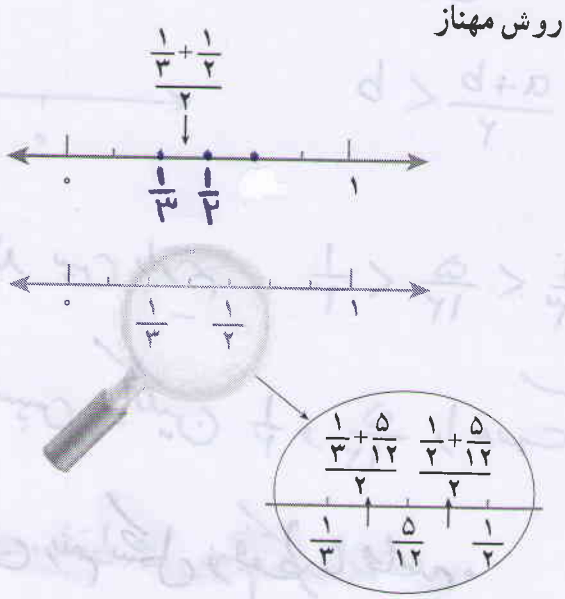
۳ـ در این مرحله به جای تقسیم هر کدام از قسمت‌های کوچک به ۲ قسمت مساوی، هر کدام از آن‌ها را به ۳ قسمت مساوی تقسیم می‌کند؛ لذا واحد به ۱۸ قسمت مساوی تقسیم می‌شود بنابراین $\frac{۹}{۱۸} = \frac{۱}{۲}$ و $\frac{۶}{۱۸} = \frac{۱}{۳}$ می‌باشد و دو کسر $\frac{۷}{۱۸}$ و $\frac{۸}{۱۸}$ بین این دو عدد قرار می‌گیرد

روش بهار

بهار دقیقاً کار مریم را انجام داده است ولی محور رسم نکرده است. روش مریم مفهومی‌تر ولی روش بهار سریع‌تر می‌باشد

می‌توانیم بگوییم روش بهار نتیجه‌ی روش مریم می‌باشد

۱۹/۱

روش مهناز	روش عطیه
	$\frac{1}{3} < \; ? \; < \frac{1}{2}$ $\frac{1}{3} < \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{2} < \frac{1}{2}$ $\frac{1}{3} < \frac{5}{12} < \frac{1}{2}$

الف) با یکی از روش‌ها توضیح دهید که چرا بین دو کسر می‌توان بیشمار، کسر پیدا کرد. صفحه ۲۰/۱

ب) آیا مجموعهٔ عددهای گویا را می‌توان با نوشتن عضوها نشان داد؟ چرا؟ خیر، چون بین دو عدد گویا

ج) آیا می‌توان مجموعهٔ عددهای گویا را با محور اعداد نمایش داد؟ خیر بی‌شمار عدد گویا وجود دارد

د) عددهای گویا را به زبان نمادین معرفی کنید. $\left\{\frac{a}{b} \mid a,b\in\mathbb{Z},\ b\neq 0\right\}$

$\left\{\frac{a}{b} \mid a\in\mathbb{Z},\ b\in\mathbb{N}\right\}$

کار در کلاس

۱ــ بین $\frac{2}{5}$ و $\frac{3}{4}$ سه کسر پیدا کنید؛ روش خود را توضیح دهید. صفحه ۲۰/۱

۲ــ بین $-\frac{1}{2}$ و ۱- دو کسر پیدا کنید؛ روش خود را توضیح دهید.

روش دوم صفحه ۲۰/۲

$-1=\frac{-2}{2}=-\frac{2\times3}{2\times3}=-\frac{6}{6}<-\frac{5}{6},-\frac{4}{6}<-\frac{1}{2}=-\frac{1\times3}{2\times3}=-\frac{3}{6}$

فعالیت

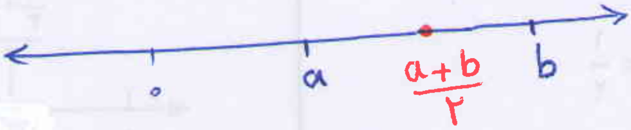
۱ــ می‌خواهیم کسرهای $\frac{3}{5}$ و $\frac{5}{6}$ و $\frac{7}{8}$ و $\frac{5}{9}$ را به ترتیب از کوچک به بزرگ بنویسیم.

روش‌های مختلفی را که دانش‌آموزان به‌کار برده‌اند با هم مقایسه کنید؛ هر کدام را توضیح دهید و در صورت لزوم کامل کنید.

فعالیت

مهناز پس از مشخص کردن جای دو عدد روی محور از خاصیت میانگین دو عدد کمک گرفته است

$a < \frac{a+b}{2} < b$



میانگین دو عدد $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ برابر $\frac{5}{12}$ می باشد پس داریم $\frac{1}{3} < \frac{5}{12} < \frac{1}{2}$

در مرحله ی دوم ابتدا میانگین $\frac{1}{3}$ و $\frac{5}{12}$ و سپس میانگین $\frac{1}{2}$ و $\frac{5}{12}$ را بدست آورده است

عطیه هم دقیقاً از روش مهناز استفاده کرده است، فقط محور رسم نکرده است.

الف) روش مریم

مریم می تواند یک واحد را به ۶ قسمت مساوی تقسیم کند و تعداد زیادی کسر بین این دو عدد بنویسد

اگر هر قسمت را به ۱۰۰ قسمت مساوی تقسیم کند ۹۹ عدد گویا بین این دو کسر می تواند بنویسد

$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{300}{600}$ ، $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{200}{600}$

$\frac{1}{3} < \frac{201}{600}, \frac{202}{600}, \frac{203}{600}, \dots, \frac{299}{600} < \frac{1}{2}$

اگر هر قسمت را به ۱۰۰۰ قسمت مساوی تقسیم کند ۹۹۹ عدد گویا بین این دو کسر می تواند بنویسد

$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{3000}{6000}$ ، $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{2000}{6000}$

$\frac{1}{3} < \frac{2001}{6000}, \frac{2002}{6000}, \frac{2003}{6000}, \dots, \frac{2999}{6000} < \frac{1}{2}$

در روش مهناز نیز می توانیم به دفعات زیادی میانگین دو عدد را محاسبه کنیم

نتیجه: بین دو عدد گویا بی شمار عدد گویا وجود دارد

کار در کلاس

$\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$ ، $\frac{3}{4} = \frac{15}{20} \Rightarrow \frac{2}{5} < \frac{9}{20}, \frac{10}{20}, \frac{11}{20}, \dots, \frac{14}{20} < \frac{15}{20}$

دو کسر را هم مخرج می کنیم و بین $\frac{8}{20}$ و $\frac{15}{20}$ کسرهای $\frac{9}{20}$ و $\frac{10}{20}$ و ... و $\frac{14}{20}$ را می نویسیم

۲۰/۱

کار در کلاس صفحه‌ی ۲۰

کار در کلاس 1 :

می دانیم $a < \frac{a+b}{۲} < b$ لذا داریم

$$\text{کسر وسط} = \frac{\frac{۲}{۵}+\frac{۳}{۴}}{۲} = \frac{\frac{۲۳}{۲۰}}{۲} = \frac{۲۳}{۴۰} \Longrightarrow \frac{۲}{۵} < \frac{۲۳}{۴۰} < \frac{۳}{۴} \quad (۱)$$

با ادامه‌ی روش بالا داریم

$$\frac{\frac{۲}{۵}+\frac{۲۳}{۴۰}}{۲} = \frac{\frac{۳۹}{۴۰}}{۲} = \frac{۳۹}{۸۰} \quad , \quad \frac{\frac{۲۳}{۴۰}+\frac{۳}{۴}}{۲} = \frac{\frac{۵۳}{۴۰}}{۲} = \frac{۵۳}{۸۰} \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Longrightarrow \frac{۲}{۵} < \frac{۳۹}{۸۰} < \frac{۲۳}{۴۰} < \frac{۵۳}{۸۰} < \frac{۳}{۴}$$

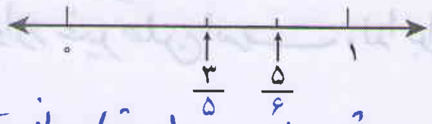
کار در کلاس 2 :

$$\text{کسر وسط} = \frac{-\frac{۱}{۲}+(-۱)}{۲} = \frac{-\frac{۳}{۲}}{۲} = -\frac{۳}{۴} \Longrightarrow -۱ < -\frac{۳}{۴} < -\frac{۱}{۲} \quad (۱)$$

$$\frac{-۱+(-\frac{۳}{۴})}{۲} = \frac{-\frac{۷}{۴}}{۲} = -\frac{۷}{۸} \quad , \quad \frac{-\frac{۳}{۴}+(-\frac{۱}{۲})}{۲} = \frac{-\frac{۵}{۴}}{۲} = -\frac{۵}{۸} \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Longrightarrow -۱ < -\frac{۷}{۸} < -\frac{۳}{۴} < -\frac{۵}{۸} < -\frac{۱}{۲}$$

روش شاهد : شاهد به‌صورت تقریبی کسرهای $\frac{۳}{۵}$ و $\frac{۵}{۶}$ را روی محور مشخص کرده است. آیا به‌نظر شما استفاده از این روش برای نمایش دو کسر دیگر مناسب است؟ خیر ، این روش مناسبی برای مقایسه نیست



روش مرتضی : مرتضی مخرج مشترک کسرها را پیدا کرد و با هم مخرج کردن کسرها، آنها را مقایسه می‌کند. توضیح دهید که عدد ۳۶۰ چگونه به دست می‌آید. کار مرتضی را کامل کنید: [۹،۸،۶،۵]=۳۶۰

$\frac{۵}{۹}=\frac{۲۰۰}{۳۶۰}$ $\frac{۷}{۸}=\frac{۳۱۵}{۳۶۰}$ $\frac{۵}{۶}=\frac{۳۰۰}{۳۶۰}$ $\frac{۳}{۵}=\frac{۲۱۶}{۳۶۰}$

عدد ۳۶۰ کوچک‌ترین مضرب مشترک چهار مخرج می باشد

روش مجید : مجید به کمک ماشین حساب، نمایش اعشاری هر کسر را تا دو رقم اعشار نوشت. شما کار او را کامل، و کسرها را مقایسه کنید :

$\frac{۵}{۹}\simeq ۰/۵۵$ $\frac{۷}{۸}\simeq ۰/۸۷$ $\frac{۵}{۶}\simeq ۰/۸۳$ $\frac{۳}{۵}\simeq ۰/۶۰$

در مورد روش‌های مختلف و ویژگی‌های هر کدام در کلاس گفت‌وگو کنید. صفحه ۲۱/۱

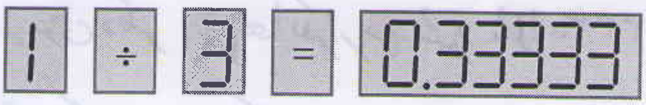
۲ــ با کمک ماشین حساب، نمایش اعشاری کسرهای زیر را تا دو رقم اعشار بنویسید :

$\frac{۱}{۷}\simeq ۰/۱۴$ $\frac{۱}{۹}\simeq ۰/۱۱$ $\frac{۷}{۶}\simeq ۱/۱۶$

$\frac{۱}{۵}\simeq ۰/۲۰$ $\frac{۱}{۳}\simeq ۰/۳۳$ $\frac{۳}{۸}\simeq ۰/۳۷$

الف) ماشین حساب شما تا چند رقم را روی صفحهٔ نمایش نشان می‌دهد؟ پاسخ یار - ۸ رقم

ب) بین مقدارهای اعشاری این کسرها چه تفاوتی هست؟ صفحه ۲۱/۱



در نمایش اعشاری کسر $\frac{۱}{۳}$ ، رقم ۳ به‌طور متناوب تکرار می‌شود و انتها ندارد؛ ولی نمایش اعشاری کسر $\frac{۱}{۵}$ متناهی یا مختوم است؛ چون تمام رقم‌های اعشار آن مشخص است و به‌انتها می‌رسد. از نماد زیر برای نمایش عددهای اعشاری متناوب استفاده می‌کنیم :

$\frac{۱}{۳}=۰/۳۳۳...=۰/\overline{۳}$ $\frac{۷}{۶}=۱/۱۶۶۶...=۱/۱\overline{۶}$

فعالیت 1 برای مقایسه‌ی اعداد گویا با مخرج‌های مساوی و کوچک استفاده از محور روش مناسبی است. در صورتی که مخرج‌ها بزرگ باشد تقسیم یک واحد به قسمت‌های مساوی کار دشوار و حتی در خیلی موارد غیر ممکن است. لذا برای این سؤال روش شاهد روش مناسبی نیست

★ یکی از روش های مناسب برای مقایسه ی کسرها هم مخرج کردن آن هاست باشد ولی این روش نیز به نوبه‌ی خود محدودیت‌های دارد و در صورتی که مخرج کسرها بزرگ باشد بدست آوردن «ک.م.م» آن‌ها بسیار وقت گیر است

★ مجید از ابزار استفاده کرده است و ابتدا صورت را بر مخرج تقسیم کرده و عدد اعشاری آن‌ها را بدست آورده و سپس آن‌ها را باهم مقایسه کرده. استفاده از ماشین حساب در زندگی روزمره و کسرهای واقعی بسیار مناسب‌تر از دو روش بالا می‌باشد

این روش هم محدودیت‌هایی دارد چون ممکن است ماشین حساب نداشته باشیم

نتیجه: برای شروع کار روش شاهد مناسب‌ترین روش است و در انتها روش مجید در صورت داشتن ماشین حساب بسیار مناسب‌تر است

فعالیت 2 ب) برخی اعداد تعداد رقم‌های اعشاری محدودی دارند مثلاً $\frac{1}{5} = 0/2$ که فقط یک رقم اعشاری دارد. در برخی دیگر رقم‌ها تکرار می‌شود مثلاً $\frac{1}{3} = 0/333...$ که رقم ۳ تکرار می‌شود و برخی از آن‌ها برخی ارقام تکرار و برخی تکرار نشده‌اند مثلاً $\frac{7}{6} = 1/1666...$

کار در کلاس

نمایش اعشاری هر یک از کسرهای زیر را بنویسید :

$\frac{۵}{۶} = ۰/۸\overline{۳}$ $\qquad$ $\frac{۷}{۹} = ۰/\overline{۷}$ $\qquad$ $\frac{۵}{۱۱} = ۰/\overline{۴۵}$

$\frac{۵}{۱۶} = ۰/۳۱۲۵$ $\qquad$ $\frac{۳}{۲۰} = ۰/۱۵$ $\qquad$ $\frac{۷}{۲۲} = ۰/۳\overline{۱۸}$

اگر به نمایش اعشاری کسرهای بالا دقت کنید، خواهید دید که فقط کسرهایی نمایش اعشاری مختوم دارد که (پس از ساده شدن) مخرج آنها شمارنده اوّلی به‌جز ۲ و ۵ ندارد.

تمرین

۱ـ پس از محاسبهٔ هر قسمت، کسر مرکب را تا حدامکان ساده کنید :

$\frac{۵}{۶} \div ۲\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۳} = ۰/\overline{۳}$ $\qquad$ $\frac{۵}{۶} - \frac{۱}{۸} = \frac{۷}{۲۴} = ۰/۲۹۱\overline{۶}$ $\qquad$ $-۱ + \frac{۳}{۴} = -۰/۲۵$ $\qquad$ $۱ + \frac{۳}{۲} = ۲/۵$

۲ـ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

$$\frac{۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۴}}{\frac{۵}{۱۰} - \frac{۳}{۴} - \frac{۱}{۲}} \div ۵\frac{۱}{۳} = \frac{\frac{۵}{۴}}{-\frac{۳}{۴}} \times \frac{۳}{۱۶} = -\frac{۵}{۱۶} = -۰/۳۱۲۵$$

$$(\underbrace{-۲\frac{۵}{۶} + ۳\frac{۱}{۲}}_{-\frac{۲}{۳}}) \div (\underbrace{-۱ - \frac{۱}{۹}}_{-\frac{۱۰}{۹}}) = -\frac{۳}{۵} = -۰/۶$$

$$-۲\frac{۱}{۲} - ۳\frac{۱}{۳} + ۴\frac{۷}{۱۲} = -۲\frac{۶}{۱۲} - ۳\frac{۴}{۱۲} + ۴\frac{۷}{۱۲} = -۱\frac{۳}{۱۲} = -۱/۲۵$$

$$-\frac{۱}{۲} + \frac{-۵}{۶} \div \frac{۷}{۳} \times \frac{۷}{۵} + \frac{۲}{۳}$$ صفحه ۲۲٫۱

$$\frac{۱}{-۱ - \frac{۱}{\cancel{-۱ - \frac{۱}{۳}}}} = \frac{۱}{-۱ + \frac{۳}{۴}} = \frac{۱}{-\frac{۱}{۴}} = -۴$$

$-\frac{۴}{۳}$

$$\frac{۵}{۶} - \frac{۷}{۸} \div (۲ \div \frac{-۶}{۵})$$ صفحه ۲۲٫۱

۳ـ عددهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید :

ب) $\frac{۱۶}{۷}, -\frac{۳}{۴}, ۲/۷۵, -\frac{۵}{۶}, ۴\frac{۳}{۵}, \frac{۵۶}{۱۳}$ $\qquad$ الف) $\frac{۷}{۸}, -\frac{۲}{۳}, \frac{۳}{۴}, ۲, -۳\frac{۵}{۶}$

۴ـ بین هر دو کسر، سه کسر بنویسید.

صفحه ۲۲٫۱ $\qquad$ ب) $۰, -\frac{۱}{۳}$ $\qquad$ الف) $\frac{۱۰}{۱۱}, \frac{۱۲}{۱۳}$

$$\frac{۱۰}{۱۱} = \frac{۱۳۰ \times ۲}{۱۴۳ \times ۲} = \frac{۲۶۰}{۲۸۶} < \frac{۲۶۱}{۲۸۶}, \frac{۲۶۲}{۲۸۶}, \frac{۲۶۳}{۲۸۶} < \frac{۱۲}{۱۳} = \frac{۱۳۲ \times ۲}{۱۴۳ \times ۲} = \frac{۲۶۴}{۲۸۶}$$

تمرین

سؤال ۲

$$-\frac{1}{2}+\overbrace{\frac{-5}{6}\div\frac{7}{3}}^{1}\times\frac{7}{5}+\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}-\overbrace{\frac{5}{14}\times\frac{7}{5}}^{2}+\frac{2}{3}$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}=-0/\overline{3}$$

نکته : ضرب و تقسیم بر جمع و تفریق اولویت دارد ولی چون تقسیم ابتدا آمده مرحله‌ی اول تقسیم و سپس ضرب و در مرحله‌ی سوم جمع و تفریق را باید انجام دهیم

$$\frac{5}{6}-\frac{7}{8}\div\overbrace{\left(2\div\frac{-6}{5}\right)}^{1}=\frac{5}{6}-\frac{7}{8}\div\left(2\times\frac{-5}{6}\right)=\frac{5}{6}-\overbrace{\frac{7}{8}\div\left(-\frac{5}{3}\right)}^{2}$$

$$=\frac{5}{6}-\frac{7}{8}\times\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{5}{6}+\frac{21}{40}=\frac{163}{120}=1/358\overline{3}$$

سؤال ۳ قسمت الف

$-3\frac{5}{6}=-\frac{23}{6}$, $[8,3,4,1,6]=24$

$-\frac{23}{6}=-\frac{92}{24}$, $\frac{2}{1}=\frac{48}{24}$, $\frac{3}{4}=\frac{18}{24}$, $-\frac{2}{3}=-\frac{16}{24}$, $\frac{7}{8}=\frac{21}{24}$

$$\Rightarrow -\frac{92}{24}<-\frac{16}{24}<\frac{18}{24}<\frac{21}{24}<\frac{48}{24}\Rightarrow -3\frac{5}{6}<-\frac{2}{3}<\frac{3}{4}<\frac{7}{8}<2$$

قسمت ب

$\frac{16}{7}=2\frac{2}{7}=2\frac{8}{28}$, $-\frac{5}{6}=-\frac{10}{12}$, $-\frac{3}{4}=-\frac{9}{12}$, $\frac{56}{13}=4\frac{4}{13}=4\frac{20}{65}$

$4\frac{3}{5}=4\frac{39}{65}$, $2/75=2\frac{75}{100}=2\frac{3}{4}=2\frac{21}{28}$

$$-\frac{10}{12}<-\frac{9}{12}<2\frac{8}{28}<2\frac{21}{28}<4\frac{20}{65}<4\frac{39}{65}\Rightarrow -\frac{5}{6}<-\frac{3}{4}<\frac{16}{7}<2/75<\frac{56}{13}<4\frac{3}{5}$$

روش دوم استفاده از ماشین حساب

سؤال ۴

$$-\frac{1}{3}<0\Rightarrow -\frac{1}{3}<-\frac{1}{4},-\frac{1}{5},-\frac{1}{6},\dots<0$$

$$-\frac{1}{3}<\frac{0}{3}\xRightarrow[\times 4]{\times 4}-\frac{4}{12}<\frac{0}{12}\Rightarrow -\frac{4}{12}<-\frac{3}{12},-\frac{2}{12},-\frac{1}{12}<\frac{0}{12}=0$$

۲۲/۱

درس دوم: عددهای حقیقی

حل سؤال ۲ — $\sqrt{2}$ (۰، ۱، ۲، ۳)

فعالیت

۱ــ پنج عدد بین ۱ و ۲ معرفی کنید و آنها را روی محور نمایش دهید.

A B C D E

$A=\frac{7}{6}\ ,\ B=\frac{8}{6}\ ,\ C=\frac{9}{6}\ ,\ D=\frac{10}{6}\ ,\ E=\frac{11}{6}$

۲ــ با توجه به اینکه مقدار تقریبی $\sqrt{۲}$ مساوی ۱/۴ است، آن را روی محور نشان دهید.

۳ــ معلّم از دانش‌آموزان خواست با ماشین حساب، مقدار تقریبی عدد $\sqrt{۲}$ را بنویسند. با توجه به اینکه دانش‌آموزان از ماشین‌حساب‌های مختلف استفاده می‌کردند، تعداد رقم‌هایی که نوشته بودند متفاوت بود. سه نمونه از صفحه نمایش ماشین‌حساب‌ها را در زیر می‌بینید. با توجه به آنها به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

1.4142136   1.414213562

+1

1.41421356237

ــ چرا در ماشین حساب ۸ رقمی، رقم آخر با رقم مشابه در ماشین حساب ۱۲ رقمی تفاوت دارد. گرد شده است — صفحه ۲۳/۱

ــ چرا این تفاوت در ماشین حساب‌های ۱۰ رقمی و ۱۲ رقمی دیده نمی‌شود؟ گرد شده است

ــ با توجه به عددی که ماشین حساب ۱۲ رقمی نشان می‌دهد، آیا تناوب (تکرار منظم) در رقم‌های اعشاری دیده می‌شود؟ خیر

ــ مقدار تقریبی $\sqrt{۲}$ ، تا ۱۵ رقم اعشار محاسبه، و در زیر نوشته شده است:

1.414213562373095

آیا در ۱۵ رقم نشان‌داده شده برای $\sqrt{۲}$ ، تناوبی می‌بینید؟ خیر

اعداد گنگ

عددهایی مانند $\sqrt{۲}$ ، $\sqrt{۱۰}$ ، ...۰/۰۱۰۰۱۰۰۰۱۰۰۰۰۱ و π را، که تعداد ارقام اعشاری آنها بی‌شمار و دارای دورهٔ تناوب نیست، گنگ (اصم) می‌گوییم. مجموعه‌ای که این عددها در آن قرار دارد، مجموعه عددهای گنگ می‌نامیم و آن را با Q' یا Q^c نمایش می‌دهیم.

$\sqrt{۲}$ عددی گنگ است. اثبات این مطلب را در سال‌های آینده می‌خوانید. صفحه ۲۳/۱

فعالیت ۳

★ با توجه به اینکه رقم نهم ۶ می باشد وقتی این رقم حذف می شود یک واحد به رقم هشتم یعنی عدد ۵ اضافه می شود (چون ۶≥۵ است)

$1/4142135\boxed{6} \longrightarrow 1/41421356$

★ چون رقم یازدهم برابر ۳ می باشد وقتی این رقم حذف می شود رقم قبلی تغییری نمی کند (چون ۳<۵ است)

$1/4142135623\boxed{3} \longrightarrow 1/414213562$

اثبات کنید چرا $\sqrt{2}$ گنگ است.

اثبات: فرض می کنیم $\sqrt{2}$ گویا باشد پس وجود دارد کسری مانند $\frac{a}{b}$ $(a, b \in Z, b \neq 0)$

به طوری که داریم $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ و $\frac{a}{b}$ یک کسر ساده نشدنی است یعنی $(a, b) = 1$

$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \xRightarrow{\text{به توان ۲}} 2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow$ a^2 عددی زوج است

چون a^2 زوج است لذا a عددی زوج است پس $a = 2k$ (k عددی طبیعی است) ①

$a^2 = 2b^2 \xRightarrow{a=2k} (2k)^2 = 2b^2 \Rightarrow 4k^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2k^2$

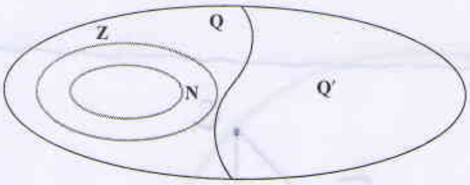
بنابراین b^2 عددی زوج است پس b هم عددی زوج است ②

از ① و ② داریم $(a, b) \neq 1$ چون هر دو زوج می باشند پس کسر $\frac{a}{b}$ یک کسر ساده شدنی است. چون فرض گرفته بودیم $\frac{a}{b}$ ساده نشدنی است پس فرض مان باطل است یعنی کسر ساده نشدنی نداریم که $\sqrt{2}$ با آن برابر باشد پس $\sqrt{2}$ عددی گنگ است

عدد π نیز گنگ است. در زیر عدد π تا ۳۰ رقم اعشار نوشته شده است؛ امّا در محاسبات، معمولاً تا دو رقم اعشار π استفاده می‌شود : $\pi \simeq ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۳۸۴۶۲۶۴۳۳۸۳۲۷۹$

دقیق

به‌طور کلی جذر عددهایی که ~~مربع~~ کامل نیستند، گنگ است؛ مانند $\sqrt{۱۵}$ ، $\sqrt{۶}$ ، ... (عددهایی مانند ۱، ۴، ۹، ۱۶ و ... مربع کامل است.)



مثال : مجموعه‌های $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ و Q و Q' به کمک نمودار ون، مشخص شده است.

مثال : $۰/۲۰۰۲۰۰۰۲۰۰۰۰۲... \in Q'$ $\quad ۰ \in Q$ $\quad \sqrt{۸} \in Q'$ $\quad \sqrt{۳} \in Q'$ $\quad -\frac{۳}{۴} \notin Q'$

کار در کلاس

کدام عبارت، درست و کدام عبارت، نادرست است؟

$\mathbb{Z} \subseteq Q'$ ($Z \subseteq Q$ است) $\quad \mathbb{Z} \subseteq Q$ $\quad \mathbb{N} \subseteq Q'$ $\quad Q \cap Q' = \varnothing$

نادرست است — درست — نادرست — درست

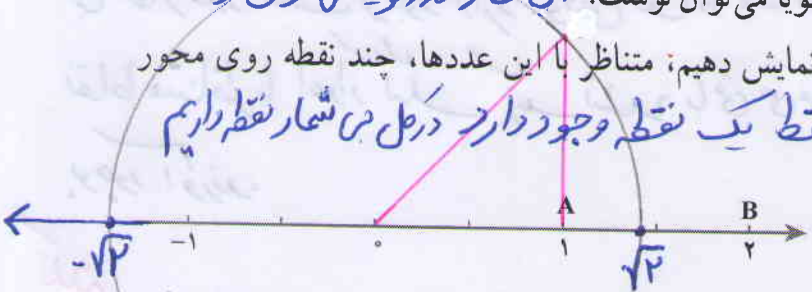
$N \subseteq Q$ است

فعالیت

صفحه ۲۴،۱

الف) بین دو عدد ۱ و ۲ چند عدد گویا می‌توان نوشت؟ بی شمار عدد گویا می توان نوشت

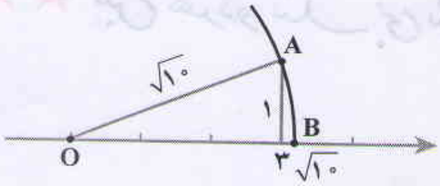
ب) اگر این عددها را روی محور نمایش دهیم؛ متناظر با این عددها، چند نقطه روی محور می‌توان پیدا کرد؟ متناظر با هر عدد فقط یک نقطه وجود دارد در کل بی شمار نقطه داریم



ج) روی محور نقطهٔ نمایش $\sqrt{۲}$ را پیدا کنید.

د) اگر نقاطی را رنگ کنیم که عددی گویا را نمایش می‌دهد، آیا همهٔ نقاط پاره‌خط AB رنگ می‌شود؟ خیر آیا $\sqrt{۲}$ نیز رنگ می‌شود؟ خیر آیا این نقاط، که هر کدام نمایش یک عددگویا است، یک پاره‌خط به‌وجود می‌آورد؟ خیر چرا؟ خیر، زیرا بین هر دو عدد گویا بی شمار عدد گنگ داریم که رنگ نمی شود

مثال : نقطه نمایش عدد گنگ $\sqrt{۱۰}$ روی محور به‌صورت زیر است :



به مرکز O و به شعاع OA کمان رسم می‌کنیم. نقطه B روی محور عدد $\sqrt{۱۰}$ را نمایش می‌دهد.

$OA^۲ = ۳^۲ + ۱^۲ = ۱۰ \Rightarrow OA = \sqrt{۱۰}$

فعالیت

الف) بین هردو عدد گویا بیشمار عدد گویا وجود دارد

$$1 < 1\frac{1}{n} ، \dots ، 1\frac{1}{6} ، 1\frac{1}{5} ، 1\frac{1}{4} ، 1\frac{1}{3} ، 1\frac{1}{2} < 2$$

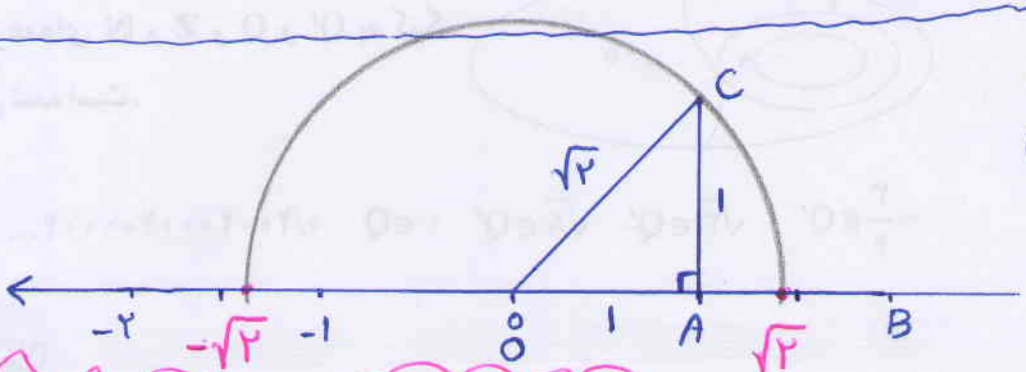
$$1 < \frac{n+1}{n}, \dots, \frac{7}{6}, \frac{6}{5}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2} < 2$$

ج)

$OC^2 = OA^2 + AC^2$

$OC^2 = 1^2 + 1^2$

$OC = \sqrt{2}$



$\Rightarrow -1/5 < -\sqrt{2} < -1$ ، $1 < \sqrt{2} < 1/5$

د) بین دو عدد ۱ و ۲ بیشمار عدد گنگ و بیشمار عدد گویا وجود دارد. وبین هردو عدد گویا بی شمار عدد گنگ وجود دارد. وقتی نقاط متناظر با اعداد گویا بین ۱ و ۲ را رنگ می‌کنیم نقاط متناظر با اعداد گنگ رنگ نشده باقی می‌ماند در نتیجه این نقاط نمی‌توانند پاره خط بوجود آورند.

نکته

★ بین هردو عدد گویا بی شمار عدد گویا وجود دارد

★★ بین هردو عدد گویا بی شمار عدد گنگ وجود دارد

★★★ بین هردو عدد گنگ بی شمار عدد گنگ وجود دارد

★★★★ بین هردو گنگ بی شمار عدد گویا وجود دارد

مثال : $\sqrt{۷}$ بین دو عدد صحیح ۲ و ۳ قرار دارد.

می‌دانیم ۴ و ۹ دو عدد مجذور کامل قبل و بعد از ۷ است؛ یعنی :

$$۴<۷<۹ \Rightarrow \sqrt{۴}<\sqrt{۷}<\sqrt{۹} \Rightarrow ۲<\sqrt{۷}<۳$$

کار در کلاس

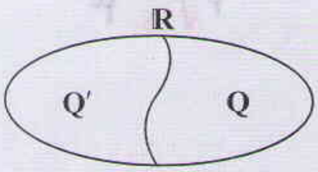
۱ــ بین $\sqrt{۵}$ و $\sqrt{۱۰}$، چهار عدد گنگ بنویسید.
$\sqrt{۵/۱}\ ,\ \sqrt{۶}\ ,\ \sqrt{۷}\ ,\ \sqrt{۸}\ ,\ \sqrt{۸/۱}$

۲ــ بین دو عدد ۲ و ۳، چهار عدد گنگ بنویسید.
$۲=\sqrt{۴}<\sqrt{۵},\sqrt{۶},\sqrt{۷},\sqrt{۸}<\sqrt{۹}=۳$

۳ــ الف) مجموعه A به‌صورت $A=\{x\in Q \mid ۲\le x\le ۳\}$ را در نظر بگیرید. آیا نمایش A به صورت زیر درست است؟ خیر صفحه ۲۵/۱

ب) نقطهٔ نمایش $\sqrt{۵}$ را روی محور مشخص کنید.

عددها به دو دسته، عددهای گویا و عددهای گنگ دسته‌بندی می‌شود. اجتماع مجموعهٔ عددهای گویا و عددهای اصم را مجموعه عددهای حقیقی می‌نامیم و آن را با $\mathbb{R}$ نمایش می‌دهیم. تساوی $\mathbb{R}=Q\cup Q'$ بین سه مجموعهٔ Q و Q' و $\mathbb{R}$ برقرار است.



مثال :

$۰/۷۵\in \mathbb{R}$ $\quad -\frac{۵}{۶}\in Q$ $\quad \sqrt{۱۰}\in \mathbb{R}$ $\quad ۰\in \mathbb{R}$

$\frac{۵}{\sqrt{۲}}\in \mathbb{R}$ $\quad \pi\in \mathbb{R}$ $\quad ۰/۰۲۰۲۲۰۲۲۲۰۲۲۲۲...\in \mathbb{R}$

کار در کلاس

۱ــ داخل ○ علامت $\in$ یا $\notin$ بگذارید :

$\frac{\sqrt{۷}}{\sqrt{۲}} \in \mathbb{R}$ $\quad \sqrt{۱۸}\in \mathbb{R}$ $\quad ۰/۲\in Q$ $\quad ۴\in \mathbb{Z}$

$\frac{۰}{۶}=۰$ $\quad \frac{۰}{-۶}\in \mathbb{R}$ $\quad ۵=\sqrt{۲۵}\notin Q'$ $\quad -\frac{۷}{۳}\notin Z$ $\quad -۵\in \mathbb{R}$

$\frac{۹}{-۱}=-۹$ $\quad \frac{۹}{-۱}\in \mathbb{Z}$ $\quad \sqrt{۰/۰۹}\in Q$ $\quad \sqrt{۰/۹}\in Q'$ $\quad \sqrt{۳/۵}\in Q'$

$\sqrt{۰/۰۹}=۰/۳$

کار در کلاس

(۱

$\sqrt{5} < \sqrt{5{,}1}\,,\ \sqrt{5{,}2}\,,\ \sqrt{5{,}3}\,,\ \dots\,,\ \sqrt{6}\,,\ \sqrt{6{,}1}\,,\ \dots\,,\ \sqrt{8{,}9}\,,\ \sqrt{9{,}1}\,,\ \sqrt{9{,}2}\,,\ \dots < 10$

این سؤال پاسخ باز است

تذکر: $\sqrt{9}$ گنگ نیست

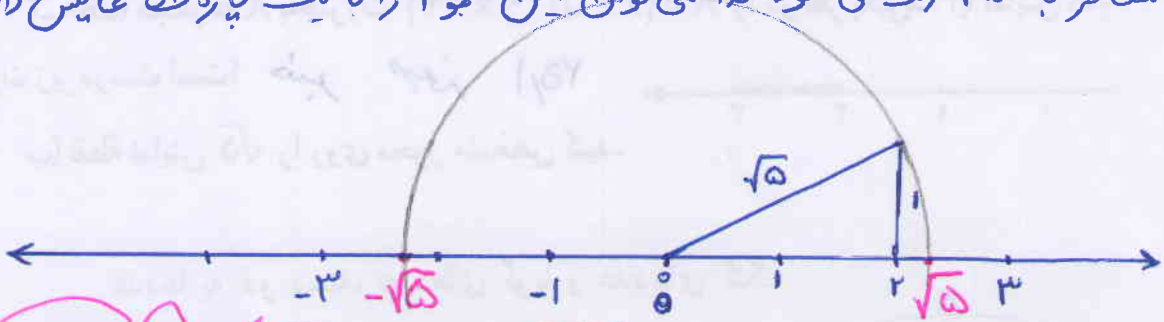
۲

این سؤال پاسخ باز است

$2=\sqrt{4} < \sqrt{4{,}1}\,,\ \sqrt{4{,}2}\,,\ \sqrt{4{,}3}\,,\ \sqrt{4{,}4} < \sqrt{9}=3$

۳

مجموعه‌ی A شامل تمام اعداد گویا از ۲ تا ۳ می‌باشد (دو سر را نیز شامل می‌شود) ولی شامل اعداد گنگ نمی‌شود مثلاً $3 > \sqrt{5} > 2$ یک عدد گنگ است و نقطه‌ی متناظر با $\sqrt{5}$ رنگ نمی‌شود لذا نمی‌توان این مجموعه را با یک پاره خط نمایش داد



$-3 < -\sqrt{5} < -2$

$2 < \sqrt{5} < 3$

نکته

۱- دو مجموعه‌ی Q و Q' جدا از هم می‌باشند زیرا $Q \cap Q' = \varnothing$

۲- $R - Q = Q'$ و $R - Q' = Q$

۳- اجتماع این دو مجموعه، مجموعه‌ی اعداد حقیقی را درست می‌کند یعنی: $Q \cup Q' = R$

۲ـ مجموعه‌های سطر اوّل را به مجموعهٔ مناسب در سطر دوم وصل کنید. هر مجموعه در سطر اوّل با یک مجموعه در سطر دوم مساوی است.

$Q \cap Q'$ ⟷ $\varnothing$　　$Q \cap \mathbb{Z}$ ⟷ $\mathbb{Z}$　　$\mathbb{Z} \cap \mathbb{N}$ ⟷ $\mathbb{N}$　　$Q' \cap \mathbb{R}$ ⟷ Q'　　$Q \cup Q'$ ⟷ $\mathbb{R}$

فعالیت

با توجه به اینکه مجموعهٔ عددهای حقیقی تمام عددها را شامل می‌شود، مجموعه‌های زیر را مانند نمونه روی محور نشان دهید :

$A=\{x \in \mathbb{R} \mid ۲ \le x < ۳\}$


$B=\{x \in R \mid x < -۲\}$


$C=\{x \in R \mid -۱ \le x \le ۵\}$


$D=\{x \in R \mid x \ge ۶\}$


با توجه به مجموعهٔ A چرا نقطهٔ ۲ روی محور توپر و نقطهٔ ۳ روی محور توخالی است؟

نامساوی $۳ > x$ برای این معنی است که x باید از ۳ کم‌تر باشد و مجموعه شامل عدد ۳ نمی‌باشد و نامساوی $۲ \le x$ یعنی مجموعه شامل ۲ و اعداد بزرگ‌تر از آن می‌باشد

کار در کلاس

۱ـ مجموعه‌های زیر را روی محور نشان دهید و یا با توجه به محور، مجموعهٔ متناظر آن را بنویسید :

الف) $A=\{x \in R \mid x > -۱\}$


ب) $B=\{x \in R \mid -۲ \le x \le ۳\}$


ج) $C=\{x \in R \mid x \le ۲\}$


۲ـ با توجه به سه مجموعه A و B و C در سؤال ۱ عبارات درست را با علامت ✓ مشخص کنید :

$\sqrt{۱۳} \in A$ ✓　　$۰/۲۵۲۵۵۲۵۵۵... \in B$ ✓　　$۰/۷۵ \in A$ ✓

$-۱۰۰۰ \in C$ ✓　　$\sqrt{۱} \in A$ ✓　　$\sqrt{۷} \in C$ ✗

۳ـ کدام‌یک از مجموعه‌های زیر با مجموعهٔ نقاط روی شکل زیر، برابر است؟

الف) $\{-۱, ۰, ۱, ۲, ۳\}$

ب) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -۲\}$

ج) $\{x \in \mathbb{R} \mid -۲ < x < ۳\}$ ✓

مجموعه‌ی مشخص شده شامل تمام نقاط بین ۲- و ۳ است یعنی تمام اعداد حقیقی بزرگ‌تر ۲- و کوچک‌تر از ۳ .

نکته: اگر $A \subseteq B$ باشد آنگاه داریم: $A \cap B = A$ و $A \cup B = B$

$Q' \subseteq R \Longrightarrow Q' \cap R = Q'$

$N \subseteq Z \Longrightarrow Z \cap N = N$

$Z \subseteq Q \Longrightarrow Q \cap Z = Z$

نکته: $A = \{x \mid x \in R,\ b < x \leq a\}$

نامساوی $x \leq a$ یعنی تمام اعداد کوچک‌تر و مساوی a ، پس این مجموعه شامل عدد a نیز می‌شود و نامساوی $b < x$ به این معنی است که x بزرگ‌تر از b است و شامل عدد b نمی‌شود.

تمرین

۱ــ با توجه به مجموعه‌های داده شده، سایر سطرها را مانند سطر اوّل کامل کنید :

مجموعهٔ اعداد	$\sqrt{۳/۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	π	$-\frac{۳}{۴}$	۰/۲۹۲۲۹۲۲۲۲۹....	۱۰−	$\frac{۶}{۲}$
طبیعی $\mathbb{N}$	×	×	×	×	×	×	×	✓
حسابی W	×	×	✓	×	×	×	×	✓
صحیح $\mathbb{Z}$	×	×	✓	×	×	×	✓	✓
گویا Q	×	✓	✓	×	✓	×	✓	✓
گنگ Q'	✓	×	×	✓	×	✓	×	×
حقیقی $\mathbb{R}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

۲ــ در هر یک از حالت‌های الف و ب تفاوت دو مجموعه را با ذکر دلیل بنویسید : صفحه ۲۷/۱

الف) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid ۱/۵ < x < ۵\}$, $B = \{x \in Q \mid ۱/۵ < x < ۵\}$

ب) $C = \{۴,۵,۶,۷,۸\}$, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid ۳ < x < ۹\}$

۳ــ طرف دوم تساوی‌های زیر را کامل کنید :

۱) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = Z$ ۲) $\mathbb{R} - Q' = Q$ ۳) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N} = N$ $\mathbb{R} \cap Q' = Q'$

۴ــ عدد $\sqrt{۵}+۱$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟ ۳, ۴ صفحه ۲۷/۱

۵ــ بین هر دو عدد، چهار عدد گنگ بنویسید :

الف) ۲− و ۵ ب) ۶ و ۷ ج) $\sqrt{۳}$,۶ د) $\sqrt{۲},\sqrt{۴/۱}$

۶ــ عبارات درست را با ✓ و عبارات نادرست را با × مشخص کنید. برای عبارات درست مثال بزنید.

☑ ۱) عددی وجود دارد که صحیح و گویا باشد. تمام اعداد صحیح گویا هستند

☒ ۲) عددی وجود دارد که گویا و گنگ باشد. $Q \cap Q = \varnothing$

☑ ۳) عددی وجود دارد که حقیقی و گنگ باشد. $Q' \subseteq R$ $\sqrt{۲} \in R$, $\sqrt{۲} \in Q'$

☑ ۴) عددی وجود دارد که حقیقی و طبیعی باشد. $N \subseteq R$ تمام اعداد طبیعی، حقیقی می‌باشند

۷ــ در نمایش اعشاری عدد $\sqrt{۱۰}$ و عدد $\frac{۳}{۱۱}$ چه تفاوتی هست؟

$\frac{۳}{۱۱} = ۰/\overline{۲۷}$, $\sqrt{۱۰} = ۳/۱۶۲۲۷۷۶۶۰۱۶۸۳۷۹$

درنمایش اعشاری $\frac{۳}{۱۱}$ دوره‌ی تناوب وجود دارد و ۲۷ تکرار می‌شود

ولی درنمایش اعشاری $\sqrt{۱۰}$ دوره‌ی تناوب وجود ندارد

تمرین ۲

الف) مجموعه ی A شامل همه ی اعداد بین ۱٫۵ و ۵ است (اعداد گویا و گنگ) ولی مجموعه ی B فقط شامل اعداد گویای بین این دو عدد می باشد

ب) مجموعه ی D شامل تمام اعداد گویا و گنگ بین ۳ و ۹ می باشد ولی مجموعه ی C فقط شامل اعداد طبیعی بین ۳ و ۹ می باشد

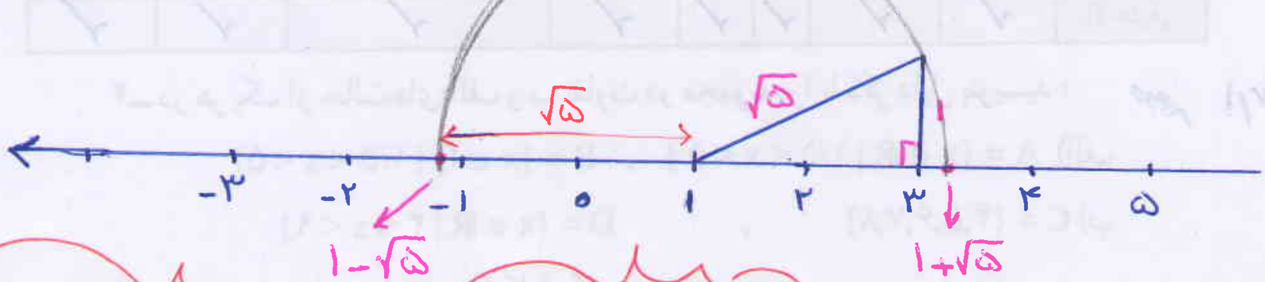
۳/

$N \subseteq Z \Rightarrow \begin{cases} N \cup Z = Z \\ N \cap Z = N \end{cases} \quad , \quad Q' \subseteq R \Rightarrow R \cap Q' = Q'$

$R \; \boxed{Q \;/\; Q'} \Rightarrow R - Q' = Q$

۴/

$4 < 5 < 9 \Rightarrow \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} \Rightarrow 2 < \sqrt{5} < 3 \xrightarrow{+1} 3 < 1+\sqrt{5} < 4$



$-2 < 1-\sqrt{5} < -1 \quad , \quad 3 < 1+\sqrt{5} < 4$

۵/

الف) $-2 = -\sqrt{4} < -\sqrt{3}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3} < \sqrt{25} = 5$

ب) $6 = \sqrt{36} < \sqrt{37}, \sqrt{38}, \sqrt{39}, \sqrt{40}, \ldots, \sqrt{48} < \sqrt{49} = 7$

ج) $\sqrt{3} < \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12} < \sqrt{36} = 6$

د) $\sqrt{2} < \sqrt{2.1}, \sqrt{2.2}, \sqrt{2.3}, \sqrt{2.4} < \sqrt{4.1}$

۷/ نکته ی مهم

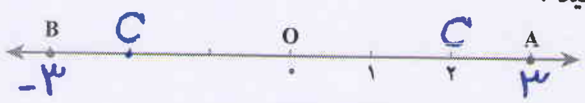
نماد اعشاری هر عدد گویا یکی از دو حالت زیر می باشد

۱- نماد اعشاری تحقیق (مختوم) ۲- نماد اعشاری متناوب (ساده و مرکب)

درس سوم: قدر مطلق و محاسبهٔ تقریبی

فعالیت

۱ــ با توجه به شکل به سؤالات زیر پاسخ دهید :



نقاط A و B چه عددی را نمایش می‌دهد؟

فاصلهٔ نقطه A از O یا طول پاره‌خط OA چقدر است؟ $\overline{OA} = ۳$

فاصلهٔ نقطه B از O یا طول پاره‌خط OB چقدر است؟ $OB = ۳$

می‌خواهیم نقاطی را روی محور بیابیم که فاصله آن از O برابر ۲ باشد.

۲ــ نقطه C را روی محور نمایش دهید به‌طوری که طول OC برابر ۲ باشد؛ چند نقطه می‌توان یافت؟ دو نقطه

فاصلهٔ نقطهٔ نمایش عدد a را از مبدأ، قدر مطلق a می‌نامیم و با علامت |a| (بخوانید قدر مطلق a) نمایش می‌دهیم؛ بنابراین در مثال بالا می‌توان نوشت : $|-۲| = |۲| = ۲$

مثال : فاصله نقاط نظیر دو عدد $\frac{۲}{۳}$ و $-\frac{۲}{۳}$ تا مبدأ برابر $\frac{۲}{۳}$ است؛ پس قدر مطلق هر دو عدد $\frac{۲}{۳}$ و $(-\frac{۲}{۳})$ برابر $\frac{۲}{۳}$ است؛ یعنی : $|\frac{۲}{۳}| = |-\frac{۲}{۳}| = \frac{۲}{۳}$

مثال : قدر مطلق $-\sqrt{۵}$ را به‌صورت $|-\sqrt{۵}|$ نشان می‌دهیم که مساوی $\sqrt{۵}$ است. قدرمطلق ۰/۰۴ را به‌صورت |۰/۰۴| نشان می‌دهیم که مساوی ۰/۰۴ است.

قدر مطلق صفر، مساوی صفر و قدر مطلق عددهای مثبت برابر خود آن عدد است. قدر مطلق هر عدد منفی، قرینه آن است. اگر a یک عدد حقیقی باشد :

$a = ۰ \Rightarrow |a| = ۰$

$a > ۰ \Rightarrow |a| = a$

$a < ۰ \Rightarrow |a| = -a$ اگر $a = -۳ \Rightarrow |-۳| = -(-۳)$

مثال : به محاسبات زیر توجه کنید :

$|۱۰ - ۲۰ + ۵| = |-۵| = ۵$

$|(-۶) \times (+۱۰)| = |-۶۰| = ۶۰$

کار در کلاس

۱ــ جملات سمت راست را به عبارات مناسب در سمت چپ وصل کنید :

الف) دو عدد a و b مثبت است.	۱) $a > 0, b < 0$
ب) عدد a نامنفی است.	۲) $a > 0, b > 0$
ج) دو عدد a و b منفی است.	۳) $a \geq 0$
د) عدد a مثبت و عدد b منفی است.	۴) $a < 0, b < 0$
هـ) عدد a نامثبت است.	۵) $a \leq 0$

۲ــ هر عبارت سمت راست، نتیجه منطقی یک عبارت در سمت چپ است. عبارات مناسب را به‌هم وصل کنید :

۱) $ab < 0$	الف) $a > 0, b > 0$
۲) $ab > 0, a + b > 0$	ب) $a < 0, b < 0$
۳) $ab > 0, a + b < 0$	ج) $a < 0, b > 0$

۳ــ هر عبارت سمت راست، نتیجه منطقی یک عبارت در سمت چپ است. عبارات مناسب را به‌هم وصل کنید :

۱) $\lvert a\rvert = -a$	الف) $a > 0$
۲) $\lvert a\rvert = a$	ب) $a > 0, b > 0$
۳) $\lvert a + b\rvert = a + b$	ج) $a < 0$
۴) $\lvert a + b\rvert = -(a + b)$	د) $a < 0, b < 0$

۴ــ عبارات زیر را به زبان ریاضی بنویسید و برای هر کدام مثال بنویسید :

۱) قدر مطلقِ حاصلضربِ دو عدد، مساوی با حاصلضرب قدر مطلقِ آنهاست.   صفحه ۲۹۱

۲) قدر مطلقِ مجموع دو عدد، از مجموع قدرمطلق‌های آن دو عدد، کوچک‌تر یا مساوی است.

فعالیت

مقدار تقریبی عددهای زیر تا یک رقم اعشار نوشته شده است :

$\sqrt{8} \simeq 2/8 \quad \sqrt{7} \simeq 2/6 \quad \sqrt{6} \simeq 2/4 \quad \sqrt{5} \simeq 2/2 \quad \sqrt{3} \simeq 1/7 \quad \sqrt{2} \simeq 1/4$

کار در کلاس ۴

1) $|ab| = |a||b|$

$|(-۲)\times(-۵)| = |-۲| \times |-۵|$, $|(-۳)\times ۴| = |-۳| \times |۴|$

$\Rightarrow |+۱۰| = ۲ \times ۵$ $\Rightarrow |-۱۲| = ۳ \times ۴$

$۱۰ = ۱۰$ ✓ $۱۲ = ۱۲$ ✓

$|a+b| \leqslant |a| + |b|$

مثال ۱

$|۳+۴| \leqslant |۳| + |۴|$

$۷ \leqslant ۳ + ۴$

$۷ \leqslant ۷$ ✓

مثال ۲

$|(-۱۵) + ۲۰| \leqslant |-۱۵| + |۲۰|$

$|۵| \leqslant ۱۵ + ۲۰$

$۵ \leqslant ۳۵$ ✓

مثال ۳

$|-۱۷ + ۷| \leqslant |-۱۷| + |۷|$

$|-۱۰| \leqslant ۱۷ + ۷$

$۱۰ \leqslant ۲۴$ ✓

با توجه به مقادیر تقریبی صفحهٔ قبل، تساوی‌های زیر را مانند نمونه کامل کنید و دلیل خود را توضیح دهید :

$$|۱-\sqrt{۲}|=-(۱-\sqrt{۲})=-۱+\sqrt{۲}=\sqrt{۲}-۱$$

دلیل : $\sqrt{۲}\simeq ۱/۴$ پس $۱-\sqrt{۲}$ عددی منفی می‌شود :

۱) $|۲-\sqrt{۳}|=۲-\sqrt{۳}$ دلیل : $\sqrt{۳}\simeq ۱٫۷$ پس $۲-\sqrt{۳}$ مثبت می‌شود

۲) $|\sqrt{۷}-\sqrt{۸}|=-(-\sqrt{۷}-\sqrt{۸})=\sqrt{۸}-\sqrt{۷}$ میدانیم $\sqrt{۷}-\sqrt{۸}<۰$ دلیل : چون $\sqrt{۷}<\sqrt{۸}$ است

۳) $|۲\sqrt{۵}-\sqrt{۵}|=|\sqrt{۵}|=\sqrt{۵}$ دلیل :

۴) $|-۴-\sqrt{۳}|=-(-۴-\sqrt{۳})=۴+\sqrt{۳}$ $-۴-\sqrt{۳}<۰$ دلیل :

هر دو عدد -۴ و $-\sqrt{۳}$ منفی است پس $-۴-\sqrt{۳}<۰$ است

مثال : اگر $a=\frac{۱}{۲}$ و $b=\sqrt{۲}$ و $c=-۳$ باشد، حاصل عبارت $|a+b+c|$ را به‌دست می‌آوریم :

$$|a+b+c|=|\frac{۱}{۲}+\sqrt{۲}+(-۳)|=|\underbrace{-۲/۵+\sqrt{۲}}^{\text{عدد منفی}}|$$

چون $-۲/۵+\sqrt{۲}$ عددی منفی است $(\sqrt{۲}\simeq ۱/۴)$، پس حاصل عبارت مساوی با $-(-۲/۵+\sqrt{۲})$ یعنی $۲/۵-\sqrt{۲}$ است.

مثال :

$$|\underbrace{۳-\sqrt{۵}}_{\text{مثبت}}|+|\underbrace{-۲-\sqrt{۵}}_{\text{منفی}}|=(۳-\sqrt{۵})-(-۲-\sqrt{۵})$$

$$=۳-\sqrt{۵}+۲+\sqrt{۵}=۵$$

فعالیت

جدول زیر را کامل کنید :

$\sqrt{a^۲}$	$\sqrt{(-۳)^۲}$	$\sqrt{۳^۲}$	$\sqrt{۶^۲}$	$\sqrt{(-۶)^۲}$	$\sqrt{(-۷)^۲}$	$\sqrt{(-۱۲۷)^۲}$	$\sqrt{۳۲۵^۲}$
حاصل	۳	۳	۶	۶	۷	۱۲۷	۳۲۵

از فعالیت بالا چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ حاصل $\sqrt{a^۲}$ همیشه مثبت و بر $|a|$ برابر می‌باشد

با توجه به فعالیت بالا و مفهوم قدرمطلق، می‌توانیم بنویسیم : $\sqrt{a^۲}=|a|$

مثال : برای محاسبه $\sqrt{(۱-\sqrt{۳})^۲}$ خواهیم داشت :

$$\sqrt{(۱-\sqrt{۳})^۲}=|\underbrace{۱-\sqrt{۳}}_{\text{منفی}}|=-(۱-\sqrt{۳})=-۱+\sqrt{۳}$$

نکته‌ی مهم

$0 < a < 1 \Rightarrow a < a^2 < a^3 < a^4 < \dots < a^n$

$0 < 0/2 < 1 \Rightarrow 0/2^5 < 0/2^6$

کار در کلاس

۱ــ عبارت‌های زیر را با هم مقایسه کنید :

الف) $|-7|^2 \; = \; |(-7)^2|$ $\qquad |-7^2| = |-49| = 49 \quad , \quad |-7|^2 = (7)^2 = 49$

ب) $|-8| + |5| \; > \; |-8 + 5|$ $\qquad |-8+5| = |-3| = 3 \quad , \quad |-8| + 5 = 8 + 5 = 13$

ج) $|3| - |9| \; < \; |3-9|$ $\qquad |3-9| = |-6| = 6 \quad |3| - |9| = 3 - 9 = -6$

۲ــ عبارات زیر را بدون استفاده از قدرمطلق بنویسید :

$|0/2^5 - 0/2^6| = \underbrace{0/2^5 - 0/2^6}_{\text{مثبت}}$ $\qquad |7^3 - 7^4| = \qquad |-\frac{4}{3}| = \frac{4}{3} \qquad |0| = 0$

$0 < 0/2 < 1 \Rightarrow 0/2^5 > 0/2^6$

$= |7^3 - 7^4| = -(7^3 - 7^4) = 7^4 - 7^3$

۳ــ حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید :

الف) $\sqrt{(-2595)^2} = |-2595| = 2595$ $\qquad$ ب) $\sqrt{(1394)^2} = 1394$

ج) $\sqrt{(\underbrace{-3 + \sqrt{10}}_{\text{مثبت}})^2} = |-3 + \sqrt{10}| = \sqrt{10} - 3$ $\qquad$ د) $\sqrt{(\underbrace{2 - \sqrt{5}}_{\text{منفی}})^2} = |2 - \sqrt{5}| = -(2 - \sqrt{5})$

$= -2 + \sqrt{5} = \sqrt{5} - 2$

تمرین

۱ــ اگر $a = 0/25$ ، $b = -\frac{1}{4}$ ، $c = 2\frac{1}{2}$ باشد، حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید :

$|a+b| + 2|a-b-c|$

۲ــ عبارات زیر را بدون استفاده از قدرمطلق بنویسید :

الف) $|-3\sqrt{5}|$ $\qquad$ ب) $|7 - 5\sqrt{3}|$ $\qquad$ ج) $|0 + \sqrt{5}|$

۳ــ جای خالی را با عدد مناسب پر، و جواب‌هایتان را در کلاس با سایر دوستانتان مقایسه کنید :

$|5-12| > 1 + \square$

۴ــ مقدار عددی عبارت $|a|+a$ را به ازای $a=-2$ ، $a=0$ و $a=2$ به‌دست آورید. آیا می‌توانید عددی حقیقی به‌جای a قرار دهید که حاصل $|a|+a$ منفی باشد؟ خیر

۵ــ با ارائهٔ یک مثال، نادرست بودن تساوی $\sqrt{a^2} = a$ را نشان دهید.

۶ــ حاصل عبارات روبه‌رو را به‌دست آورید : $\sqrt{(1-\sqrt{10})^2}$ $\qquad \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$

تمرین ۱

$$|a+b|+۲|a-b-c| = \left|۰/۲۵+(-\tfrac{۱}{۴})\right| + ۲\left|۰/۲۵-(-\tfrac{۱}{۴})-۲\tfrac{۱}{۲}\right|$$

$$= \left|\overbrace{\tfrac{۱}{۴}-\tfrac{۱}{۴}}^{۰}\right| + ۲\left|\tfrac{۱}{۴}+\tfrac{۱}{۴}-۲\tfrac{۱}{۲}\right| = ۰ + ۲\left|\tfrac{۱}{۲}-\tfrac{۵}{۲}\right| = ۲|-۲| = ۲\times۲ = ۴$$

۲/

$$\underbrace{|-۳\sqrt{۵}|}_{\text{منفی}} = -(-۳\sqrt{۵}) = ۳\sqrt{۵} \quad , \quad |۷-۵\sqrt{۳}| = |\sqrt{۴۹}-\sqrt{۲۵\times۳}|$$

$$= |\sqrt{۴۹}-\sqrt{۷۵}| = -(\sqrt{۴۹}-\sqrt{۷۵}) = \sqrt{۷۵}-\sqrt{۴۹} = ۵\sqrt{۳}-۷$$

منفی

$$۷=\sqrt{۴۹} \quad , \quad ۵\sqrt{۳} = \sqrt{۲۵}\times\sqrt{۳} = \sqrt{۷۵} \Rightarrow ۷ < ۵\sqrt{۳} \Rightarrow |۷-۵\sqrt{۳}| = ۵\sqrt{۳}-۷$$

ج) $|۰+\sqrt{۵}| = |\sqrt{۵}| = \sqrt{۵}$

۳/

$$|\overset{-۷}{\cancel{۵}-۱۲}| > ۱+\square$$

$$\Rightarrow ۷ > ۱+\square \xrightarrow{-۱} ۶ > \square$$

پس $\square$ هر عدد کوچکتر از ۶ می‌تواند باشد

۴/

a	-۲	۰	۲
$\|a\|+a$	$۲+(-۲)=۰$	۰	$۲+۲=۴$

$$a<۰ \Rightarrow |a|+a = -a+a = ۰ \Rightarrow |a|+a \geq ۰$$

$$a\geq۰ \Rightarrow |a|+a = a+a = ۲a$$

۵/

$$\sqrt{(-۷)^۲} = \sqrt{۴۹} = ۷ \Rightarrow \sqrt{a^۲} \neq a$$

$$\sqrt{a^۲} = a \xrightarrow{a=۷} \sqrt{(-۷)^۲} = -۷$$

۶/

$$\sqrt{(\sqrt{۲}-۱)^۲} = |\sqrt{۲}-۱| = \sqrt{۲}-۱$$

زیرا $\sqrt{۲}>۱$ است و $\sqrt{۲}-۱>۰$ است

$$\sqrt{(۱-\sqrt{۱۰})^۲} = -|۱-\sqrt{۱۰}| = -۱+\sqrt{۱۰} = \sqrt{۱۰}-۱$$

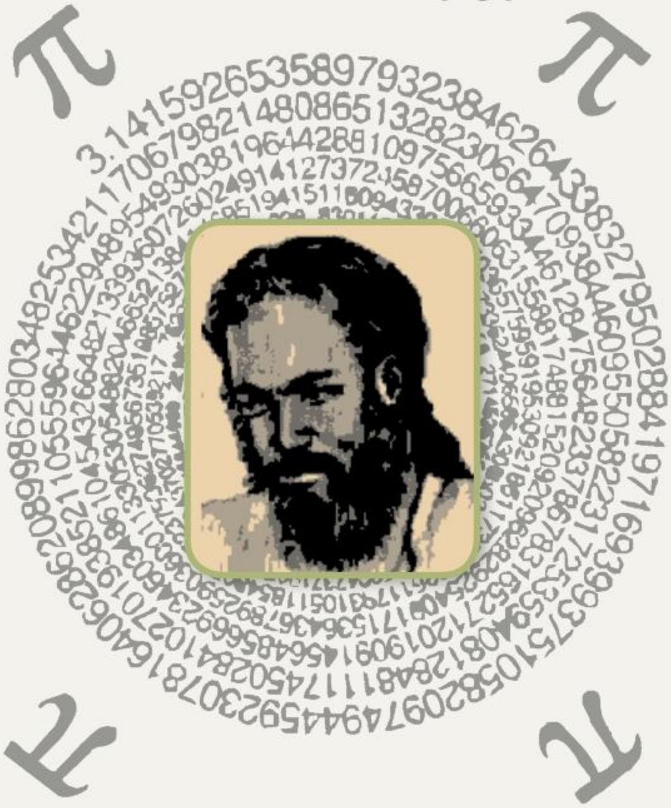
زیرا $\sqrt{۱۰}>۱$ پس $۱-\sqrt{۱۰}<۰$ است

عددهای حقیقی

فصل ۲

«... وَ اَحاطَ بِما لَدَیْهِمْ وَ اَحْصیٰ کُلَّ شَیْءٍ عَدَداً»

«... و او (خداوند) به آنچه نزد آنهاست احاطه دارد و همه‌چیز را به عدد شمارش کرده است.» (سورهٔ جن، آیهٔ ۲۸)



غیاث‌الدین جمشید کاشانی زبردست‌ترین حسابدان، برجسته‌ترین ریاضی‌دان دورهٔ اسلامی و از بزرگ‌ترین مفاخر تاریخ ایران به‌شمار می‌رود. کاشانی به روشی کاملاً خلاقانه و از طریق محاسبه و مقایسه محیط چندضلعی‌های محاطی و محیطی توانست عدد π که عددی **حقیقی** و **گنگ** است را تا ۱۶ رقم بعد از اعشار محاسبه کند که تا حدود ۱۵۰ سال پس از وی کسی در جهان نتوانست با دقت بهتری آن را محاسبه کند. او در ابتدای رسالهٔ محیطیه خود به زبانِ ریاضی به نام خدا را چنین بیان می‌کند:

«به نام او که از اندازهٔ نسبتِ محیط دایره به قطرش آگاه است.»

تهیه کننده : سعید جعفری صرمی