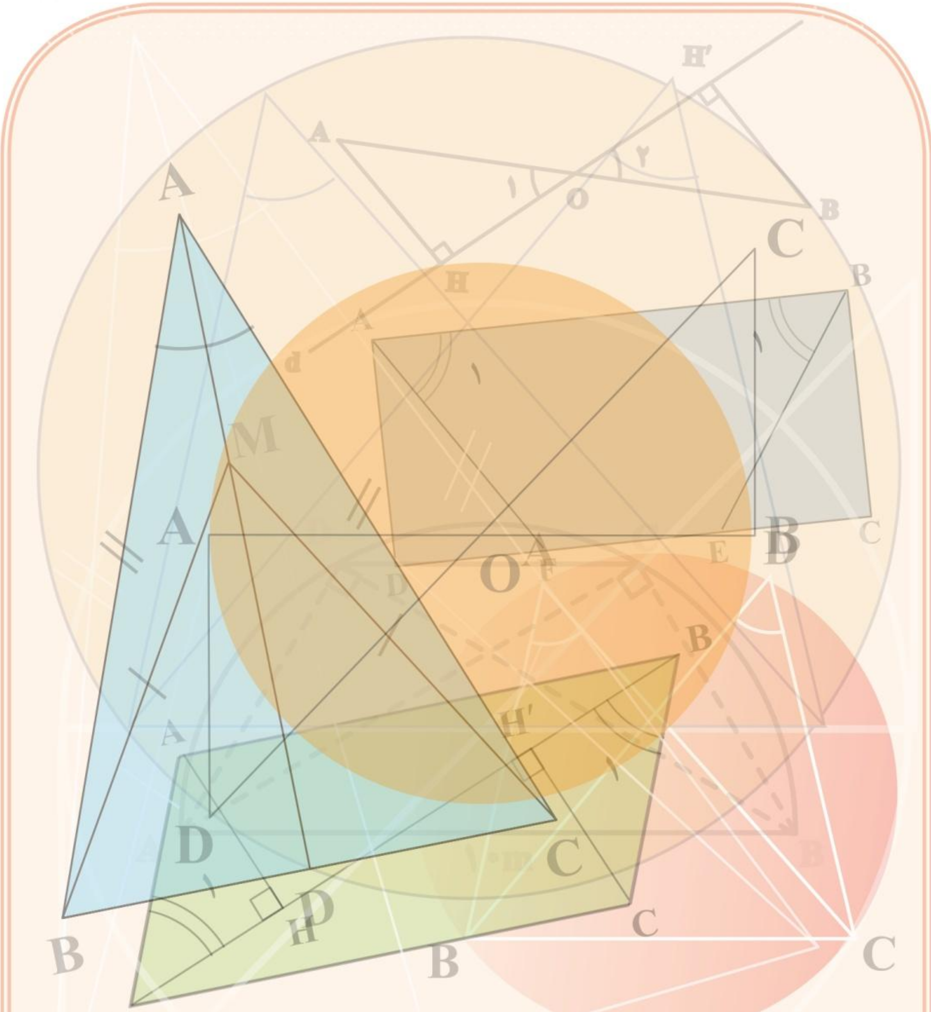
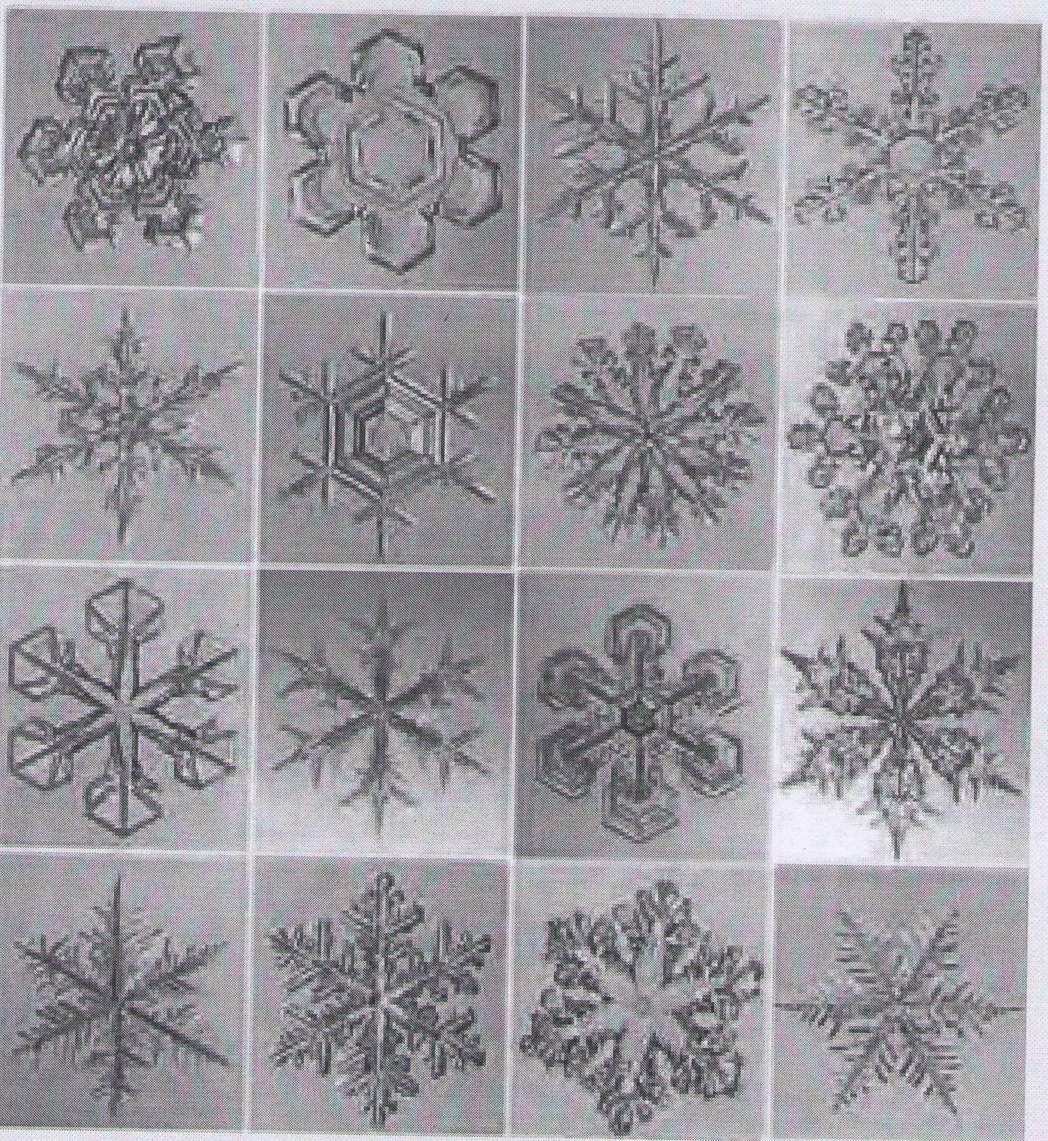
فصل ۳
استدلال و اثبات در هندسه



فصل ۳ استدلال و اثبات در هندسه

اُدعُ اِلیٰ سَبیلِ رَبِّکَ بِالحِکمَةِ وَ المَوعِظَةِ الحَسَنَةِ وَ جادِلهُم بِالَّتی هِیَ اَحسَنُ ...

با حکمت و اندرز نیکو به راه پروردگارت دعوت نما و با آنها به نیکوترین روش استدلال و مناظره کن! (سورهٔ نحل، آیهٔ ۱۲۵)



بارش برف از آسمان، رحمت الهی را با خود به زمین می‌آورد و در عین حال نماد زیبایی زمستان است. اما شاید جالب باشد بدانید که این دانه‌های زیبای متقارن که اغلب شش شاخه هستند، علی‌رغم آنکه میلیاردها دانه‌اند، امّا هر کدام شکل منحصر به خود را دارند و هیچ دو تایی از آنها «همنهشت» نیستند!

نویسنده : سعید جعفری صدر

درس اوّل: استدلال

http://www.math-home.ir

سرای ریاضی

فعالیت

متن‌های زیر را بخوانید و به سؤال‌ها پاسخ دهید :

۱ــ امیر و محسن برای دیدن مسابقه فوتبال به ورزشگاه رفتند. محسن به امیر گفت : «من مطمئن هستم که تیم مورد علاقهٔ من امروز هم می‌بازد.» امیر پرسید : «چگونه با این اطمینان حرف می‌زنی؟» محسن دلیل آورد که : «چون هر بار که به ورزشگاه رفته‌ام، تیم مورد علاقه من باخته است.»

آیا دلیلی که محسن آورده است، درست است؟ چرا؟ خیر، زیرا رفتن محسن به ورزشگاه نمی‌تواند علت باخت تیم مورد علاقهٔ او باشد.

۲ــ عباس یک بیسکویت مستطیل شکل با ابعاد ۴ و ۸ سانتیمتر دارد. بیسکویت باقر از همان نوع، به همان ضخامت و مربع شکل به ضلع ۶ سانتیمتر است. با استفاده از دانش ریاضی خود نشان دهید که مقدار بیسکویت کدام یک بیشتر است.

۳۳/۱

۳ــ دلیلی که محسن در فعالیت ۱ برای ادعای خود آورده است را با دلیلی که شما در فعالیت ۲ آوردید مقایسه کنید. به‌نظر شما کدام قابل اطمینان‌تر است. دلیل ما قابل اطمینان تر است

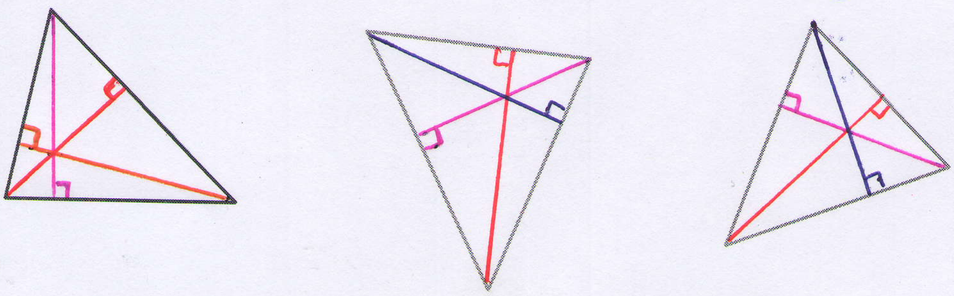
«استدلال» یعنی دلیل آوردن و استفاده از دانسته‌های قبلی، برای معلوم کردن موضوعی که در ابتدا مجهول بوده است.

همان‌گونه که در این موارد مشاهده کردید، حتی در بسیاری از کارهای روزمره نیز به استدلال نیاز پیدا می‌کنیم. راه‌های متفاوتی برای استدلال کردن هست که اعتبار و قابل اعتماد بودن آنها می‌تواند یکسان نباشد. به استدلالی که موضوع موردنظر را به‌درستی نتیجه بدهد، اثبات می‌گوییم.

کار در کلاس

۱ــ مواردی را بازگو کنید که مانند فعالیت ۱ فردی با توجه به رویدادهای گذشته، نتیجه‌ای می‌گیرد که درست نیست. هر وقت تکالیفم را نمی‌نویسم، معلم تکالیفم را نمی‌بیند

۲ــ دو ارتفاع از هر یک از مثلث‌های زیر، رسم کنید :



فعالیت ۱- رفتن محسن به ورزشگاه نمی تواند علت باخت تیم مورد علاقه ی او باشد
و برد یک تیم به عوامل متعددی بستگی دارد که مهم ترین آن ها روحیه و آمادگی بازیکنان
تیم و ضعف تیم مقابل می تواند باشد

۲- با توجه به ضخامت یکسان بیسکویت ها، مقدار بیسکویت فردی بیش تر است
که مساحت بیش تری داشته باشد

باقر $6 \times 6 = 36\ cm^2 \Rightarrow 36 > 32$

عباس $8 \times 4 = 32\ cm^2$

بنابراین مقدار بیسکویت باقر بیش تر است

۳- در فعالیت اول محسن براساس نتایج قبل، نتیجه گیری کرد ولی ما در فعالیت دوم براساس
یافته هایی که درستی آن ها از قبل اثبات شده است نتیجه گیری کردیم

کار در کلاس ۱ الف) هر وقت درسم را می خوانم معلم از من امتحان می گیرد

ب) هر وقت دیر به مدرسه می روم، مدیر من را می بیند

ج) وقتی چتر ندارم، باران می بارد

هـ) اگر ماشینم را تمیز کنم حتما فردا باران می بارد

و) ما که شانس نداریم تا سرمان را بلند می کنیم آقا متوجه می شود (نمی توانیم تقلب کنیم)

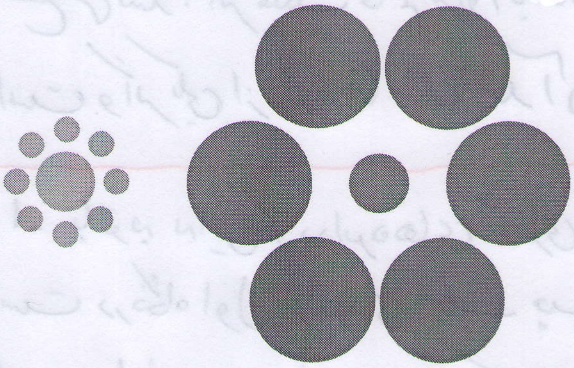
۲ نتیجه ی نادرست: چون ارتفاع ها در این سه مثلث همدیگر را درون مثلث قطع کردند
لذا نتیجه می گیریم در هر مثلث سه ارتفاع یکدیگر را درون مثلث قطع می کنند

آیا با این مثال‌ها می‌توان نتیجه گرفت در هر مثلث، محل برخورد هر دو ارتفاع درون مثلث است؟ خیر

یک مثال بزنید که نتیجهٔ بالا را نقض کند. صفحه ۳۴/۱

اگر فردی با رسم ارتفاع‌های موردنظر در مثلث‌ها چنین نتیجه‌گیری کند که محل برخورد ارتفاع‌های هر مثلث، درون آن مثلث است، استدلال او مشابه کدام استدلال دو قسمت فعالیت قبل است؟ قسمت اول (فعالیت ۱)

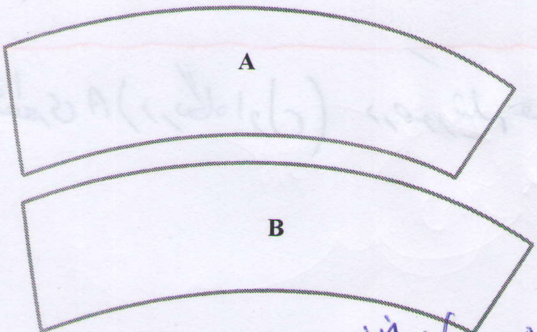
فعالیت



۱ــ کدام یک از دو قرصی که در مرکز قرار گرفته، بزرگ‌تر است؟ ظاهراً مساوی می باشند

الف) با مشاهده تشخیص دهید. سمت چپ

ب) یک کاغذ روی یکی از آنها قرار دهید. دایره محیط آن قرص را بکشید و با گذاشتن تصویر کشیده شده بر شکل دیگر، اندازهٔ آنها را با هم مقایسه کنید. با هم برابرند



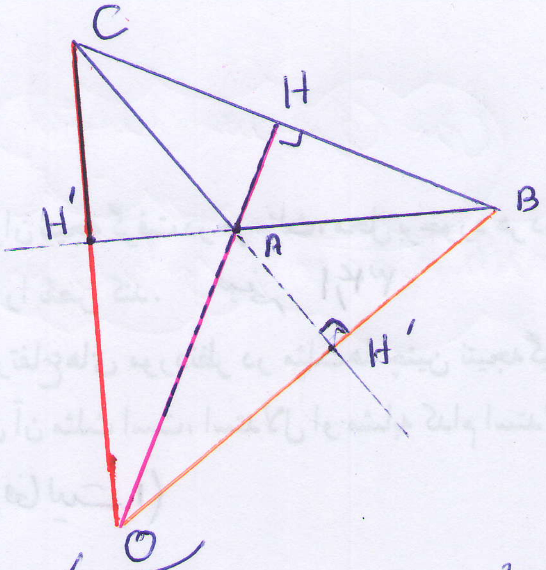
۲ــ اگر قطعه‌های A و B قطعه‌هایی از شیرینی موردعلاقه شما باشد، کدام قطعه را انتخاب می‌کنید؟ (قطعهٔ بزرگ‌تر کدام است؟) A را

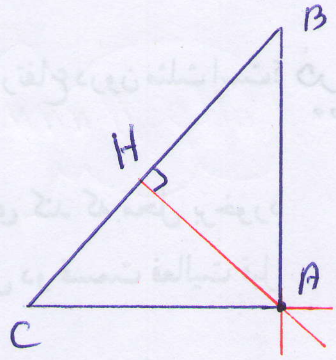
با یک کاغذ شفاف این دو قطعه را مقایسه کنید؟ آیا حدس شما درست بود؟ خیر، هم اندازه می باشند

۳ــ آیا مشاهده کردن و یا استفاده از سایر حس‌های پنج‌گانه برای اطمینان از درستی یک موضوع کافی است؟ چرا؟ خیر، چون مشاهده به تنهایی منجر به نتایج درست نمی شود

هرچند به‌طور معمول در ریاضیات و به‌ویژه در هندسه به‌کار بردن شکل‌ها، ترسیم آنها و استفاده از شهود به تشخیص راه‌حل‌ها و ارائهٔ حدس‌های درست کمک زیادی می‌کند، باید توجه کرد به تشخیصی که براساس این روش‌ها بوده است، نمی‌توانیم به‌طور کامل اطمینان کنیم.

کار در کلاس ۲

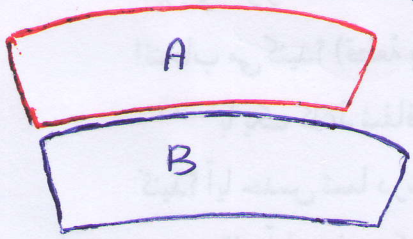




نتیجه: اگر هر سه زاویه‌ی یک مثلث تند (حاده) باشد آنگاه ارتفاع‌ها داخل مثلث یکدیگر را قطع می‌کنند. اگر مثلث قائم الزاویه باشد محل برخورد ارتفاع‌ها راس زاویه‌ی قائمه‌ی مثلث است و اگر یکی از زاویه‌ها باز باشد آن‌گاه محل برخورد ارتفاع‌ها خارج مثلث است

فعالیت ۱- با توجه به این که دایره‌های کناری درسمت چپ کوچک‌تر از دایره‌های کناری درسمت راست است در نگاه اول دایره‌ی سمت چپ بزرگ به نظر می‌رسد در صورتی که هر دو دایره با هم برابر می‌باشند (منظور دایره‌ی مرکزی است)

۲ قطعه‌ی A (در نگاه اول) در صورتیکه هر دو قطعه با هم برابر می‌باشند



-۳

۱ــ سراب یک پدیده‌ی فیزیکی است که در اثر خطای چشم و انعکاس نور از یک هوای گرم در حال حرکت به سمت بالا در مجاورت شن یا زمین سنگی ایجاد می‌شود

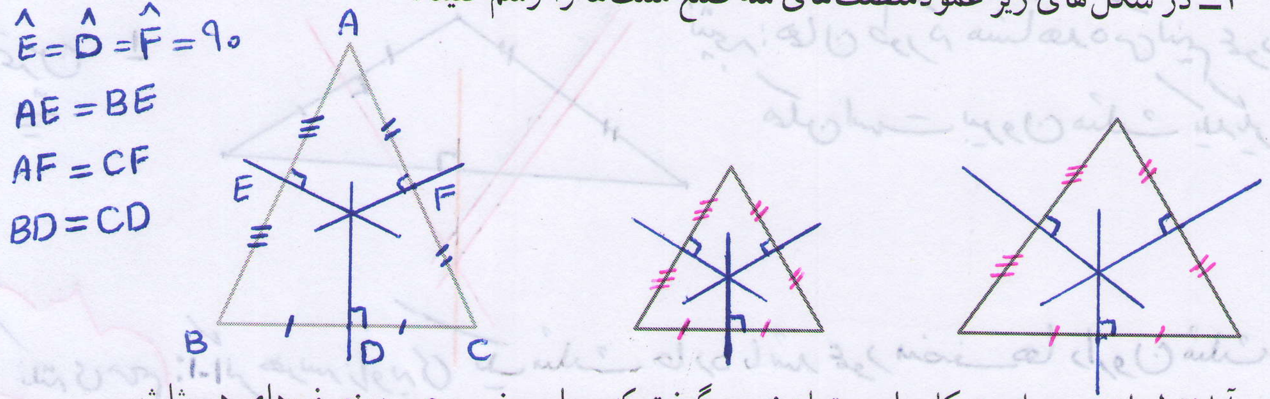
کار در کلاس

۲ــ وقتی از بیرون به آب نگاه می‌کنیم عمق آن را کم‌تر از عمق واقعی آن می‌بینیم

مواردی از درس علوم (مثل آزمایش تشخیص گرما و سرمای آب) مثال بزنید که حواس ما خطا می‌کند. در مورد نتایجی که از این مثال‌ها می‌گیرید با یکدیگر بحث کنید. صفحه ۳۵٫۱

تمرین

۱ــ در شکل‌های زیر عمودمنصف‌های سه ضلع مثلث‌ها را رسم کنید :



آیا فقط با توجه به این شکل‌ها، می‌توان نتیجه گرفت که محل برخورد عمودمنصف‌های هر مثلث همیشه درون مثلث قرار دارد؟ چگونه می‌توانید درستی ادعای خود را نشان دهید؟ خیر صفحه ۳۵٫۱

۲ــ نیما و پژمان مشغول دیدن مسابقات وزنه‌برداری بودند. وزنه‌برداری قصد بلند کردن وزنه‌ای ۱۰۰ کیلویی را داشت. آنها هر دو عقیده داشتند که او نمی‌تواند وزنه را بلند کند؛ برای ادعای خود استدلال‌های متفاوتی می‌کردند.

نیما : زیرا هفتهٔ پیش این وزنه‌بردار تمرینات بهتری انجام داده بود با این‌حال نتوانست وزنهٔ ۹۰کیلویی را بلند کند.

پژمان : امروز دوشنبه است. من بارها مسابقات این وزنه بردار را دیده‌ام. او هیچ‌گاه در روزهای زوج موفق نبوده است.

استدلال کدام یک قابل اعتمادتر است؟ در مورد استدلال‌ها بحث کنید. استدلال نیما صفحه ۳۵٫۱

۳ــ چون من تا به‌حال هیچ‌وقت تصادف نکرده‌ام در سفر آینده نیز تصادف نخواهم کرد.

این استدلال مشابه کدام‌یک از استدلال‌های زیر است؟ استدلال «ج»

الف) چون برخی مثلث‌ها قائم‌الزاویه هستند پس مثلث‌های متساوی‌الاضلاع هم قائم‌الزاویه‌اند.

ب) همهٔ فیلم‌های جنگی که تاکنون دیده‌ام، جذاب بوده‌اند. فیلمی که دیروز دیدم جذاب بود،

کار در کلاس ۱- وقتی به ریل قطار نگاه می‌کنیم، احساس می‌کنیم ریل‌ها همدیگر را قطع می‌کنند

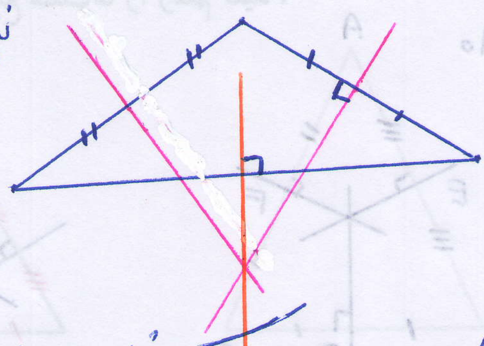
۲- اگر مداد خود را داخل آب یک لیوان فرو ببرید، آن را کوتاه‌تر می‌بینید

۳- سه ظرف محتوی آب سرد، آب گرم و آب ولرم داریم. اگر هم‌زمان دست راست خود را در آب سرد و دست چپ خود را در آب گرم فرو ببریم پس از مدتی هم‌زمان هر دو دست را درون آب ولرم فرو ببریم، دست راست آب ولرم را گرم و دست چپ آب ولرم را سرد احساس می‌کند

۴- چای داغ چندان تلخ احساس نمی‌شود ولی اگر همان چای سرد شود تلخ‌تر احساس می‌شود

تمرین ۱

نتیجه: همان طور که مشاهده می‌کنیم عمود منصف‌ها ممکن است بیرون مثلث یکدیگر را قطع کنند



نکته‌ی مهم: ۱- اگر هر سه زاویه‌ی یک مثلث حاده باشد عمود منصف‌ها داخل مثلث همدیگر را قطع می‌کنند

۲- اگر یکی از زاویه‌های مثلث ۹۰ درجه باشد (مثلث قائم الزاویه) آن‌گاه عمود منصف‌ها روی وتر مثلث یکدیگر را قطع می‌کنند

۳- اگر یکی از زاویه‌های مثلث بیش‌تر از ۹۰ درجه باشد آن‌گاه عمود منصف‌ها بیرون مثلث یکدیگر را قطع می‌کنند

۲ استدلال هیچ‌کدام "کاملاً" دقیق نیست، ولی استدلال نیما منطقی‌تر است. زیرا وقتی یک نفر با تمرینات بهتر، نتوانسته است وزنه‌ی ۹۰ کیلویی را بلند کند، پس با احتمال زیادی وزنه‌ی ۱۰۰ کیلویی را هم نمی‌تواند بالا ببرد. استدلال پژمان، دلیل منطقی ندارد

۳- مشابه استدلال «ج» است. زیرا هر دو بر اساس یافته‌های قبلی، آینده را پیش‌بینی می‌کنند تصادف نکردن یک فرد نمی‌تواند دلیلی محکم برای اتفاقات در سفر آینده باشد. همچنین دختر بودن بچه‌های قبلی نمی‌تواند دلیل محکم و قوی برای دختر یا پسر بودن فرزند خاله‌ی کوچک باشد

پس فیلم جنگی بوده است.

ج) چون تمام بچه‌های خاله‌های من دختر هستند، پس بچهٔ خالهٔ کوچکم هم دختر خواهد بود.

د) چون همهٔ قرص‌های مسکن خواب‌آور است، پس در این قرص‌ها ماده‌ای هست که باعث خواب‌آلودگی می‌شود.

۴ــ دو نفر دربارهٔ چهار برادر به نام‌های علی، حسن، حسین و باقر می‌دانستند که : علی از حسین بزرگ‌تر و حسن از باقر کوچک‌تر است و باقر از علی کوچک‌تر و حسن نیز از حسین کوچک‌تر است. هر دو نفر اعتقاد داشتند که علی از حسن بزرگ‌تر است، اما استدلال‌های متفاوتی می‌کردند.

اولی : در تمام خانواده‌هایی که من دیده‌ام که دو فرزند به نام‌های علی و حسن دارند، فرزند بزرگ‌تر را علی نامیده‌اند.

دومی : چون علی از حسین بزرگ‌تر و حسن از حسین کوچک‌تر است، پس علی از حسن بزرگ‌تر است.

استدلال کدام یک درست است؟ در مورد درستی استدلال‌ها بحث کنید.

۴ استدلال نفر اول غیر منطقی است اگر در چند خانواده چنین حالتی باشد دلیلی بر تعمیم آن نیست زیرا ممکن است خانواده هایی باشند که پسر بزرگ‌تر را حسن و کوچک‌تر را علی نام گذاری کرده باشند

اما استدلال نفر دوم کاملا درست است

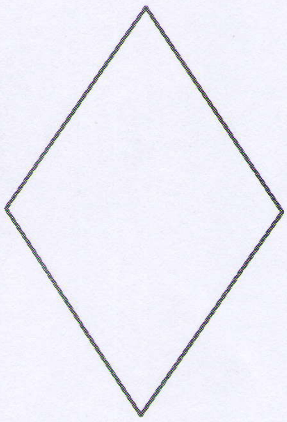
سن حسین < سن علی
سن حسن < سن حسین
⟸ سن حسن < سن علی

چون سن علی از حسین بیش تر و سن حسین هم از سن حسن بیش تر است لذا نتیجه می گیریم سن علی بیش تر از سن حسن است

درس دوم: آشنایی با اثبات در هندسه

در درس گذشته یاد گرفتید که دیدن و استفاده از حواس و یا ارائهٔ مثال‌های متعدد و همچنین توجه به ابعاد ظاهری برای ایجاد اطمینان از درستی یک موضوع کفایت نمی‌کند و باید از دلیل‌های منطقی و قانع‌کننده کمک گرفت و با استدلال، درستی آن موضوع را ثابت کرد. در روند استدلالمان از اطلاعاتِ مسئله (فرض یا داده‌ها) و حقایق و اصولی که درستی آنها از قبل برای ما معلوم شده است برای رسیدن به خواستهٔ مسئله (حکم) استفاده می‌کنیم.

فعالیت



۱ــ به گفت‌وگوی زیر توجه کنید :

مهرداد : آیا در هر لوزی زاویه‌های روبه‌رو با هم برابر است؟

سعید : بله، من در یک کتاب هندسه دیدم که اثبات کرده بود در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های روبه‌رو، با هم مساوی است و لوزی هم نوعی متوازی‌الاضلاع است.

در این مسئله و اثبات آن، فرض، حکم و استدلال را در زیر کامل کنید :

فرض : شکل لوزی است.

حکم : زاویه‌های روبه‌رو باهم برابر است.

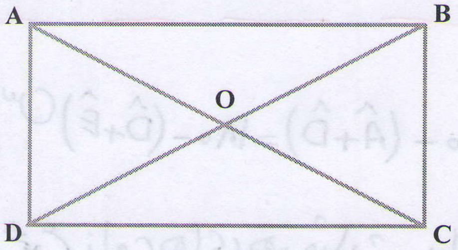
استدلال :

لوزی نوعی متوازی‌الاضلاع است.
در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های روبه‌رو باهم برابر است.
$\Rightarrow$ در لوزی زاویه‌های روبه‌رو باهم برابر است.

۲ــ اولین اقدامی که برای اثبات انجام می‌دهیم، تشخیص فرض، حکم و واقعیت‌های مرتبط با آن مسئله است که از قبل آنها را می‌دانستیم. در مسئلهٔ زیر فرض، واقعیت‌های از قبل ثابت شده یا دانسته و حکم را به زبان ریاضی بنویسید و عبارت‌ها را کامل کنید :

فرض :   ABCD مستطیل است.

حکم :   قطرهای مستطیل، مساوی است.



فرض : $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$ ، AB= DC , AD = BC ، AB|| DC , AD|| BC

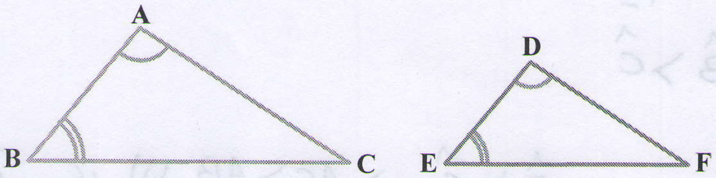
حکم : AC= BD

صفحه ۳۸،۱

کار در کلاس

فرض و حکم را برای مسئله‌های زیر مشخص کنید :

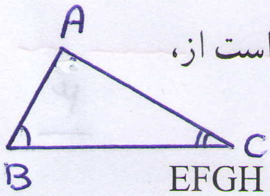
۱ــ در دو مثلث داده شده زوایای برابر در شکل مشخص شده است. ثابت کنید زاویه‌های سوم از دو مثلث نیز با هم برابر است.



فرض : $\hat{A} = \hat{D}$ ، $\hat{B} = \hat{E}$

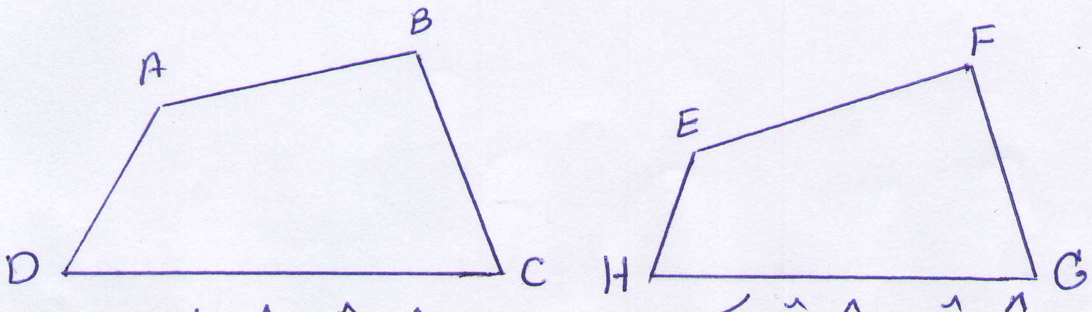
حکم : $\hat{C} = F$

۲ــ اگر در یک مثلث دو زاویه نابرابر باشد، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر.



فرض $\hat{B} > C \Longrightarrow$ حکم: $C > AB$

۳ــ اگر مجموع دو زاویه از چهارضلعی ABCD با مجموع دو زاویه از چهارضلعی EFGH برابر باشد، ثابت کنید مجموع دو زاویهٔ دیگر ABCD با مجموع دو زاویهٔ دیگر EFGH برابر است.



فرض: $\hat{B} + \hat{D} = \hat{F} + \hat{H} \Longrightarrow$ حکم: $\hat{A} + \hat{C} = \hat{E} + \hat{G}$

فعالیت

فرض $\hat{D}=\hat{C}=90$

فرض $AD=BC$

$DC=DC$

$\xRightarrow{(\text{ض ز ض})} \overset{\triangle}{ADC} \cong \overset{\triangle}{BCD} \Rightarrow AC=BD$

کار در کلاس

فرض $\hat{A}=\hat{D}$

فرض $\hat{B}=\hat{E}$

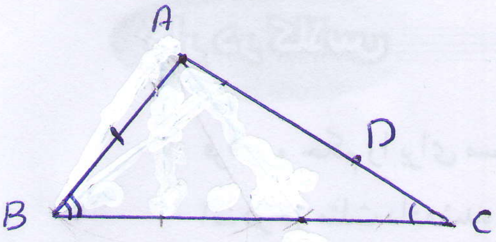
$\Rightarrow \hat{A}+\hat{B}=\hat{D}+\hat{E} \Rightarrow 180-(\hat{A}+\hat{D})=180-(\hat{D}+\hat{E})$

می‌دانیم مجموع زاویه‌های هر مثلث برابر ۱۸۰ درجه است

$\Rightarrow \underbrace{180-(\hat{A}+\hat{D})}_{\hat{C}}=\underbrace{180-(\hat{D}+\hat{E})}_{\hat{F}} \Rightarrow \hat{C}=\hat{F}$

۲

$\underset{\text{فرض}}{AC>AB} \Rightarrow \underset{\text{حکم}}{\hat{B}>\hat{C}}$



روی ضلع بزرگ‌تر یعنی AC به اندازه‌ی AB جدا می‌کنیم

$\Rightarrow AB=AD \Rightarrow \hat{B}_1=\hat{D}_1$

در مثلث $B\hat{D}C$ داریم: $\hat{D}_1=\hat{B}_2+C$

$\Rightarrow \hat{B}_1=\hat{B}_2+\hat{C}$

$\Rightarrow \hat{B}_1>\hat{C}$

$\hat{B}=\hat{B}_1+\hat{B}_2$

$\Rightarrow \hat{B}>\hat{C}$

عکس قضیه‌ی بالا $\hat{B}>\hat{C} \Rightarrow AC>AB$

برهان خلف اگر $AB=AC$ باشد آن‌گاه داریم $\hat{B}=\hat{C}$

اگر $AB>AC$ آن‌گاه طبق قضیه‌ی بالا داریم $\hat{C}>B$ ، بنابراین داریم $AC>AB$

۳

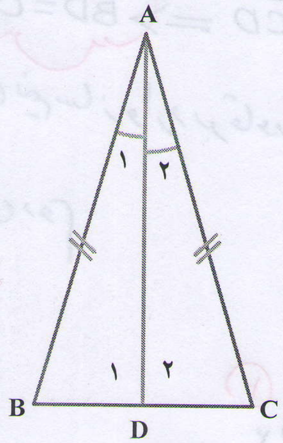
فرض $\hat{B}+\hat{D}=\hat{F}+\hat{H}$

می‌دانیم $\hat{B}+\hat{D}+\hat{A}+\hat{C}=360$

$\hat{F}+\hat{H}+\hat{E}+\hat{\ }=360$

$\Rightarrow \hat{A}+\hat{C}=\hat{E}+$

فعالیت



۱ــ در مسئلهٔ زیر فرض و حکم را بنویسید و اشکال استدلال داده شده را بیابید :

مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ متساوی‌الساقین است و AD نیمساز زاویهٔ A است.

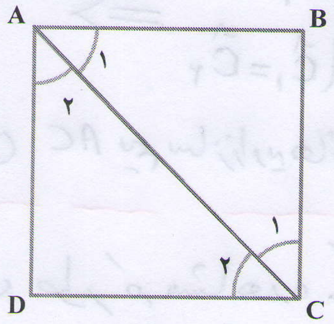
ثابت کنید AD میانه نیز هست :

فرض : $AB=AC$ و $\hat{A}_1=\hat{A}_2$

حکم : $BD=CD$

استدلال : چون AD نیمساز زاویه A است، پس : $\hat{A}_1=\hat{A}_2$ و $\hat{D}_1=\hat{D}_2$ و ضلع AD در دو مثلث مشترک است، پس مثلث‌های ADB و ADC به حالت دو زاویه و ضلع بین (ز ض ز) با هم همنهشتند، پس اجزای متناظر آنها برابر است. درنتیجه : BD=DC صفحه ۳۹/۱

استدلال بالا را اصلاح کنید و نتیجه بگیرید در مثلث متساوی‌الساقین نیمساز وارد بر قاعده، میانه هم هست. آیا در مثلث ABC می‌توان نتیجه گرفت که نیمساز زاویه B نیز میانه ضلع مقابل آن است؟ به عبارتی، آیا می‌توان خاصیت اثبات شده برای نیمساز A را به نیمساز دیگر تعمیم داد. خیر، خیر



۲ــ با استدلال زیر به سادگی می‌توان نتیجه‌گیری کرد که قطر AC از مربع ABCD نیمساز زاویه‌های A و C است. چون دو مثلث ABC و ADC به حالت سه ضلع همنهشت است، زوایای متناظر با هم برابر است؛ بنابراین $\hat{A}_1=\hat{A}_2$ و $\hat{C}_1=\hat{C}_2$ و لذا AC نیمساز است. صفحه ۳۹/۱

آیا می‌توان با استدلالی مشابه، این خاصیت را به قطر دیگر نیز تعمیم داد و گفت به‌طور کلی در مربع هر قطر نیمساز زاویه‌های دو سر آن قطر است؟ بله

۳ــ به‌نظر شما چرا در فعالیت ۱ خاصیت موردنظر قابل تعمیم به نیمسازهای دیگر نبود، اما در فعالیت ۲ خاصیت موردنظر به قطر دیگر تعمیم داده می‌شود؟

وقتی خاصیتی را برای یک عضو از یک مجموعه ثابت کردیم، اگر تمام ویژگی‌هایی که در استدلال خود به‌کار برده‌ایم در سایر عضوهای آن مجموعه نیز باشد، می‌توان درستی نتیجه را به همهٔ عضوهای آن مجموعه تعمیم داد.

با عوض شدن نیم ساز شرایط متفاوت بوجود می آید و نمی توان
میانه بودن را ثابت کردن ولی وقتی قطر عوض می شود شرایط تغییری نمی کند

فعالیت ① پاره خط AD نیم ساز است پس می‌توانیم نتیجه بگیریم $\hat{A}_1=\hat{A}_2$

ولی نمی‌توانیم تساوی بین دو زاویه ی $\hat{D}_1$ و $\hat{D}_2$ را نتیجه بگیریم پس

(این نتیجه‌گیری نادرست است)

AD نیم ساز است $\Longrightarrow \hat{D}_1=\hat{D}_1$

AD نیم ساز $\Longrightarrow \hat{A}_1=\hat{A}_2$

$\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی الساقین $\Longrightarrow AB=AC$

ضلع مشترک $AD=AD$

$\xrightarrow{(ض\ ز\ ض)} \overset{\triangle}{ABD} \cong \overset{\triangle}{ACD} \Longrightarrow BD=CD$

پس نیم ساز وارد بر قاعده میانه نیز می باشد

روش دوم

$\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی الساقین $\Longrightarrow \hat{B}=\hat{C}$
$\hat{A}_1=\hat{A}_2$ ①
$\Longrightarrow \hat{B}_1+\hat{A}_1=\hat{C}+\hat{A}_2$

AD نیم ساز است $\Longrightarrow$ ② $\hat{D}_1=\hat{D}_2$

$\Longrightarrow 180-(\hat{B}_1+\hat{A}_1)=180-(\hat{C}+\hat{A}_2)$

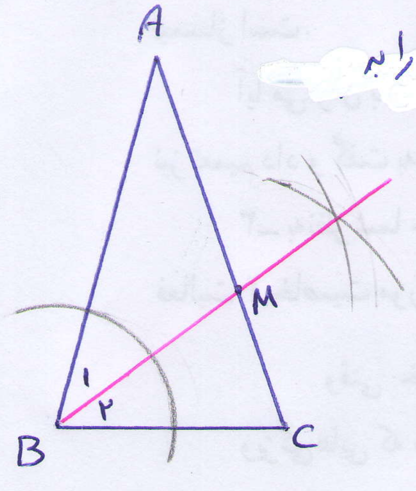
① $\hat{A}_1=\hat{A}_2$
② $\hat{D}_1=\hat{D}_2$
$AD=AD$
$\xrightarrow{(ز\ ض\ ز)} \overset{\triangle}{ABD} \cong \overset{\triangle}{ACD} \Longrightarrow BD=CD$

۲: این خاصیت قابل تعمیم به بقیه زاویه‌ها نمی باشد

۲

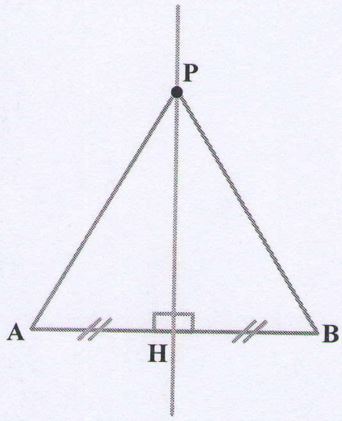
خاصیت مربع $AB=AD$
$CB=CD$
ضلع مشترک $AC=AC$
$\xrightarrow{(ض\ ض\ ض)} \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{ADC} \Longrightarrow \begin{cases}\hat{A}_1=\hat{A}_2\\ \hat{C}_1=\hat{C}_2\end{cases} \Longrightarrow$

پس AC نیم ساز زاویه‌های $\hat{A}$، $\hat{C}$ می باشد



همان طور که مشاهده می‌کنیم نیم ساز زاویه‌ی $\hat{B}$ ضلع AC را به دو قسمت مساوی تقسیم نمی‌کند پس میانه نمی باشد

۳۹/۱



۴ــ نقطه‌ای مانند P، روی عمودمنصف پاره‌خط AB در نظر می‌گیریم و به دو سر پاره‌خط وصل می‌کنیم. چون دو مثلث AHP و BHP به حالت (ض ز ض) همنهشت است، نتیجه می‌شود پاره‌خط‌های PA و PB با هم برابر است.

بنابراین فاصلهٔ نقطهٔ P، که روی عمودمنصف پاره‌خط AB است از دو سر پاره‌خط AB یکسان است.

آیا این اثبات برای اینکه نتیجه بگیریم نتیجهٔ بالا برای «هر» نقطهٔ روی عمودمنصف برقرار است، کافی است؟ چون نقطه‌ی P دلخواه می‌باشد با تغییر مکان نقطه‌ی P روی عمود منصف باز هم شرایط برقرار است، بنابراین برای هر نقطه‌ی روی عمود منصف قابل تعمیم می‌باشد (نقطه‌ی P نماینده‌ی تمام نقاط روی عمود منصف است)

کار در کلاس

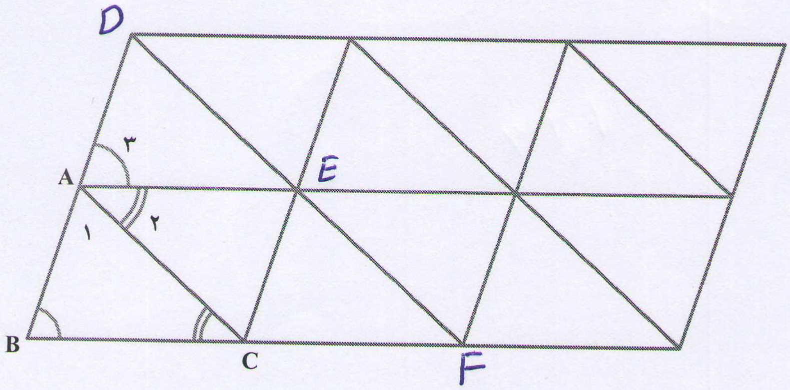
به استدلال‌هایی دقت کنید که چهار دانش‌آموز برای مسئلهٔ زیر آورده‌اند :

مسئله : مجموع زاویه‌های داخلی مثلث °۱۸۰ است.

استدلال حامد : حامد گفت یک مثلث متساوی‌الاضلاع را درنظر می‌گیریم؛ چون سه زاویه دارد و هر زاویه °۶۰ است، مجموع زاویه‌های مثلث °۱۸۰ است. نادرست است، زیرا یک مثلث خاص درنظر گرفته شده است

استدلال حسین : حسین چند مثلث مختلف با حالت‌های گوناگون کشید و زوایای آنها را اندازه گرفت و دید که در همهٔ آنها مجموع زوایای داخلی برابر °۱۸۰ است و نتیجه گرفت که مجموع زوایای داخلی هر مثلث °۱۸۰ است. با بررسی مجموع زاویه‌ها در چند مثلث نمی‌توان آن تعمیم داد. ممکن است نادرست باشد

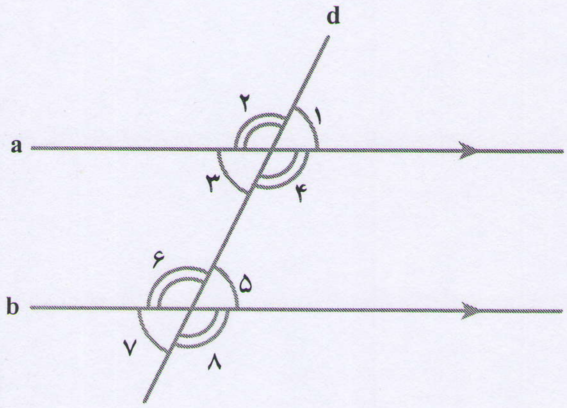
استدلال مهدی : مهدی شکل زیر، که از مثلث‌های همنهشت تشکیل شده است را کشید و با مشخص کردن زاویه‌های مثلث ABC به‌صورت مقابل، استدلالی با استفاده از شکل به‌صورت زیر آورد :



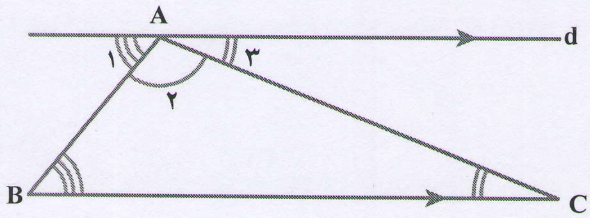
$$\hat{A}_1+\hat{B}+\hat{C}=\hat{A}_1+\hat{A}_3+\hat{A}_2=180^\circ$$

این استدلال نیز نادرست است، زیرا در مورد این که نقاط A , B , D در یک امتداد (در یک راستا) می‌باشند صحبتی نشده است همچنین نقاط (B , C , F)

سؤال : آیا پاره‌خط AB , AD در یک راستا می‌باشند؟



استدلال رضا : رضا گفت می‌دانیم که «هر خطی که دو خط موازی را قطع کند با آنها هشت زاویه می‌سازد که مانند شکل چهار به چهار با هم مساوی است.»



حال مثلثی دلخواه مانند $\overset{\Delta}{ABC}$ را درنظر می‌گیریم؛ مانند شکل مقابل از رأس A خط d را موازی BC رسم می‌کنیم. سه زاویهٔ تشکیل شده در رأس A را با شماره‌های ۱، ۲ و ۳ نشان داده‌ایم که زاویهٔ A_2 همان زاویهٔ A در مثلث است و با درنظر گرفتن AB به‌عنوان مورب داریم $\hat{B}=\hat{A}_1$ و با درنظرگرفتن AC به‌عنوان مورب داریم $\hat{C}=\hat{A}_3$ پس با جای‌گذاری $\hat{A}_1$ و $\hat{A}_3$ به‌ترتیب به جای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ خواهیم داشت : $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\hat{A}_2+\hat{A}_1+\hat{A}_3=180^\circ$

استدلال رضا را می‌توان با استفاده از نمادهای ریاضی به‌صورت مرتب و خلاصه بدین‌صورت نوشت :

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}d \parallel BC\\ \text{و}\\ AB\ \text{مورب}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{B}=\hat{A}_1\\[2ex] \left.\begin{array}{r}d \parallel BC\\ \text{و}\\ AC\ \text{مورب}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{C}=\hat{A}_3\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\hat{A}_2+\hat{A}_1+\hat{A}_3=180^\circ$$

دربارهٔ معتبربودن استدلال‌های این دانش‌آموزان بحث کنید. استدلال رضا کاملاً درست است

و می‌توانیم آن را برای بقیه مثلث‌ها نیز تعمیم دهیم

فعالیت

مسئله : حمید، سعید و بهرام هر کدام مقداری پول دارند. مجموع پول‌های حمید و بهرام برابر ۵۰۰۰ تومان و مجموع پول‌های سعید و بهرام نیز برابر ۵۰۰۰ تومان است. به‌نظر شما پول حمید بیشتر است یا پول سعید؟ دلیل خود را توضیح دهید.

پول حمید + پول بهرام = ۵۰۰۰
پول سعید + پول بهرام = ۵۰۰۰

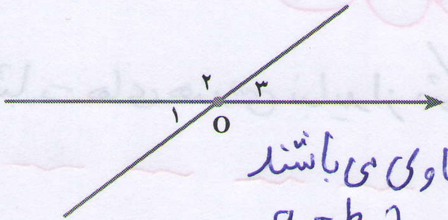
=> پول بهرام + پول سعید = پول بهرام + پول حمید

=> پول بهرام = پول حمید

بین استدلالی که برای مسئلهٔ قبل و مسئلهٔ بعدی هست، چه شباهتی می‌بینید؟ هر دو از یک استدلال استفاده می کنند

مسئله : نشان دهید زاویه‌های متقابل به رأس با هم برابر است.

فرض کنیم $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_3$ مانند شکل زیر متقابل به رأس باشد، داریم :



$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_1+\hat{O}_2=180^\circ\\ \hat{O}_3+\hat{O}_2=180^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{O}_1+\cancel{\hat{O}_2}=\hat{O}_3+\cancel{\hat{O}_2}\Rightarrow \hat{O}_1=\hat{O}_3$$

① دو مقدار مساوی با یک مقدار خودشان نیز با هم مساوی می باشند

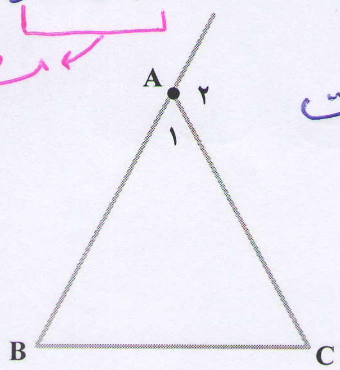
$$\left.\begin{array}{l}a=b\\ c=b\end{array}\right\} \Rightarrow a=c$$

② وقتی در دو عبارت مساوی دو مقدار برابر داریم آن گاه دو مقدار دیگر نیز با هم مساوی می باشند

تمرین

$$\underbrace{a+b=c+b}_{\text{مشترک}} \Rightarrow a=c$$

۱ــ آیا اثبات مسئله زیر معتبر است؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید. خیر، معتبر نیست، چون از حالت خاص استفاده شده است



مسئله : در هر مثلث، اندازهٔ زاویهٔ خارجی با مجموع اندازه‌های دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور با آن برابر است.

اثبات : مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را درنظر می‌گیریم.

می‌دانیم که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است و زوایای $\hat{A}_1$ و $\hat{B}$ و $\hat{C}$ هر کدام 60° است، بنابراین

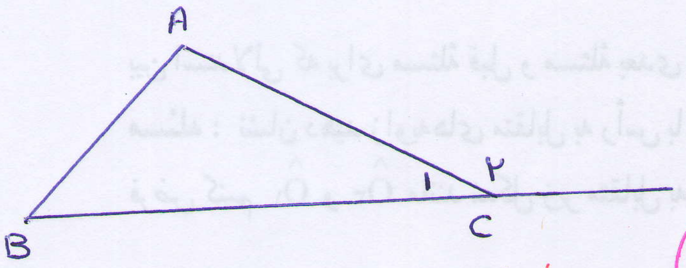
$$\hat{A}_1+\hat{A}_2=180\to\hat{A}_2=180-\hat{A}_1=180-60=120$$

صفحه ۴۲/۱

$$\hat{B}+\hat{C}=60+60=120 \qquad \Rightarrow \hat{A}_2=\hat{B}+\hat{C}$$

۲ــ در سال گذشته با تعریف چند ضلعی‌های محدب آشنا شدید. تعریف چندضلعی محدب را می‌توان بدین صورت هم آورد : «یک چندضلعی محدب است اگر هر پاره‌خطی که دو نقطهٔ دلخواهِ درون آن چندضلعی را به‌هم وصل می‌کند، به‌طور کامل درون آن چند ضلعی قرار بگیرد.» چند ضلعی که محدب نباشد، مقعر است. آیا تشخیص‌های دو دانش‌آموز در مورد محدب و مقعر بودن چندضلعی‌های زیر و دلایلی که ارائه کرده‌اند با توجه به تعریف بالا درست است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

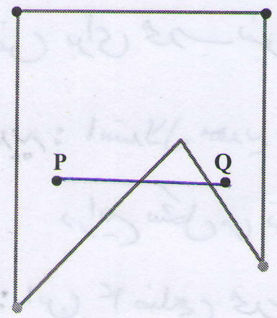
تمرین برای اثبات یک مسئله باید آن را در یک شکل دلخواه انجام دهیم و اثبات در یک شکل خاص مورد قبول نمی باشد



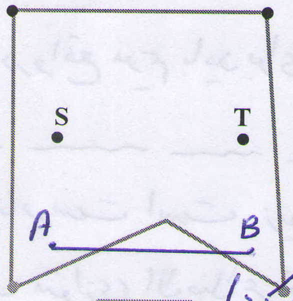
$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}_1=۱۸۰\\ \hat{C}_۲+\hat{C}_1=۱۸۰\end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow A+B+\cancel{\hat{C}_1}=\hat{C}_۲+\cancel{\hat{C}_1} \Longrightarrow \hat{A}+\hat{B}=\hat{C}_۲$$

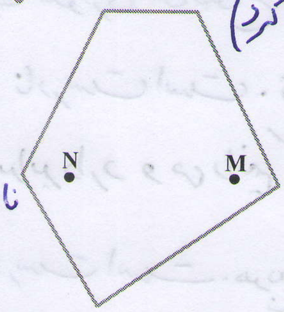
در اثبات های هندسی نباید از شکل خاص کمک بگیریم



نرگس : چند ضلعی مقابل محدب نیست، زیرا نقاط P و Q درون آن قرار دارد اما پاره‌خطی که آنها را به‌هم وصل می کند به‌طور کامل در آن قرار نمی‌گیرد. کاملاً درست است و یک مثال نقض برای محدب نبودن این چهار ضلعی است، چون تمام نقاط این پاره‌خط درون ۴ ضلعی نیست



مهدیه : چندضلعی مقابل محدب است، زیرا نقاط T و S درون آن قرار دارد و پاره‌خطی که آنها را به‌هم وصل می کند نیز به‌طور کامل در آن قرار دارد. نادرست است، زیرا این خاصیت را باید برای هر دو نقطه‌ی دلخواه بررسی کرد برای مثال تمام نقاط پاره‌خط AB درون ۴ ضلعی نمی باشند (با یک مثال یا چند مثال نمی توان نتیجه گیری کرد)



ناقص است

مریم : چندضلعی مقابل محدب است، زیرا نقاط M و N درون آن قرار دارد و پاره‌خطی که آنها را به‌هم وصل می کند نیز به‌طور کامل در آن قرار دارد. نادرست است، ۴ ضلعی محدب است ولی استدلال

۳ـ آیا استدلال‌های زیر درست است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

الف) هر مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است.
چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است. ⇐ ABCD مستطیل است.

صفحه ۴۳/۱

ب) در هر مربع، ضلع‌ها با هم برابرند.
ABCD مربع نیست. ⇐ همهٔ ضلع‌های ABCD، با هم برابر نیستند.

صفحه ۴۳/۱

ج) در هر مربع، ضلع‌ها با هم برابرند.
در چهارضلعی ABCD ضلع‌ها برابر نیستند. ⇐ ABCD مربع نیست.

صفحه ۴۳/۱

۴ـ ثابت کنید هر نقطه که روی نیمساز زاویه قرار دارد از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

یادآوری : فاصلهٔ یک نقطه از یک خط برابر است با طول پاره‌خطی که از آن نقطه بر خط عمود می‌شود.

صفحه ۴۳/۱

راهنمایی : یک زاویهٔ دلخواه بکشید و نیمساز آن را رسم، و یک نقطه روی این نیمساز مشخص کنید. ثابت کنید فاصلهٔ این نقطه از دو ضلع زاویه با هم برابر است و سپس علت اینکه این نتیجه برای همهٔ نقاطِ روی نیمساز درست است را بیان کنید.

تمرین نرگس: برای اثبات محدب بودن باید وضعیت هر دو نقطه‌ی دلخواه را بررسی کنیم ولی یک مثال نقض برای محدب نبودن کافی است و در واقع نرگس پاره خط PQ را به عنوان مثال نقض برای محدب نبودن آورده است

هدیه: استدلال هدیه نادرست است زیرا این خاصیت باید برای هر دو نقطه‌ی دلخواه بررسی شود در این شکل می‌توان پاره خطی رسم کرد که نادرستی استدلال هدیه را نشان دهد (مثال: $\overline{AB}$)

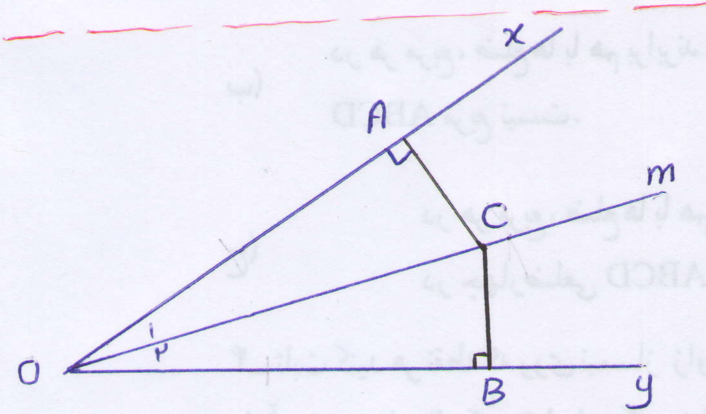
مریم: این ۴ ضلعی محدب است ولی استدلال مریم ناقص است (درست نیست) در واقع مریم باید برای هر دو نقطه‌ی دلخواه این خاصیت را بررسی کند

---

۳ الف) نادرست است. زیرا هر متوازی الاضلاع لزوماً یک مستطیل نیست در صورتیکه هر مستطیل یک متوازی الاضلاع است

ب) نادرست است. زیرا این ۴ ضلعی می‌تواند لوزی باشد. لوزی چهار ضلعی است که ۴ ضلع برابر دارد و می‌دانیم یک لوزی لزوماً یک مربع نیست در صورتیکه تمام مربع‌ها لوزی می‌باشند

ج) درست است. مربع یک چهارضلعی است که چهار ضلع مساوی و چهار زاویه‌ی مساوی دارد چون چهار ضلع این چهار ضلعی برابر نیست لذا می‌توان نتیجه گرفت $ABCD$ مربع نمی‌باشد



۴ زاویه‌ی دلخواه $x\hat{O}y$ را در نظر می‌گیریم و نیم ساز آن را رسم می‌کنیم. نقطه‌ی C را به دلخواه روی آن در نظر می‌گیریم و از نقطه‌ی C دو عمود بر اضلاع Ox و Oy رسم می‌کنیم

OA نیم ساز است $\xRightarrow{\text{تعریف}} \hat{O}_1 = \hat{O}_2$

$OC = OC$ وتر مشترک

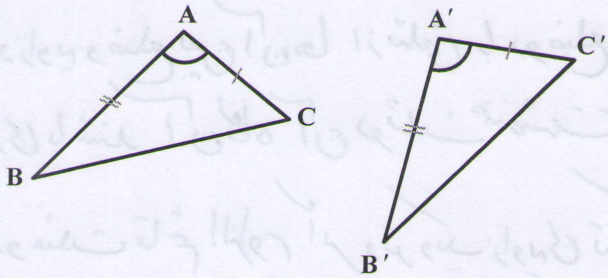
$\hat{A} = \hat{B} = 90$

$\xRightarrow{(و\ ز)} O\overset{\triangle}{A}C \cong O\overset{\triangle}{B}C \xRightarrow{\text{اجزاء متناظر}} AC = BC$

چون نقطه‌ی C دلخواه است. بنا براین نتیجه می‌گیریم برای هر نقطه‌ی دلخواه روی نیم ساز این خاصیت برقرار است پس هر نقطه روی نیم ساز از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است

یادآوری

با مفهوم همنهشتی مثلث‌ها از سال گذشته آشنایی دارید. اکنون می‌خواهیم این حالت‌ها را با استفاده از نمادهای ریاضی خلاصه نویسی کنیم؛ مثلاً حالت همنهشتی(ض ز ض) را این گونه نمایش می‌دهیم :



$$\left.\begin{aligned} AB &= A'B' \\ AC &= A'C' \\ \hat{A} &= \hat{A'} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

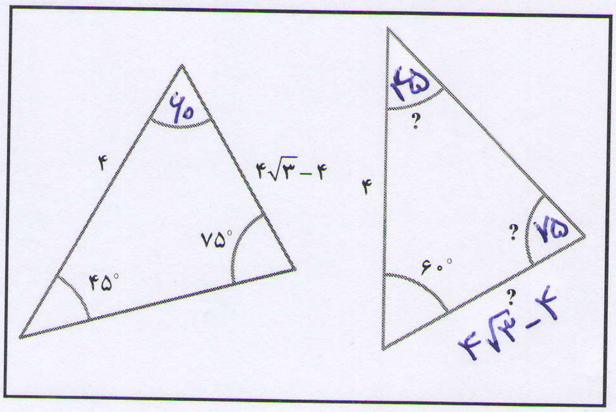
برای یادآوری، دو حالت دیگر همنهشتی مثلث‌ها و دو حالت همنهشتی ویژهٔ مثلث‌های قائم‌الزاویه را به همین صورت بیان کنید.

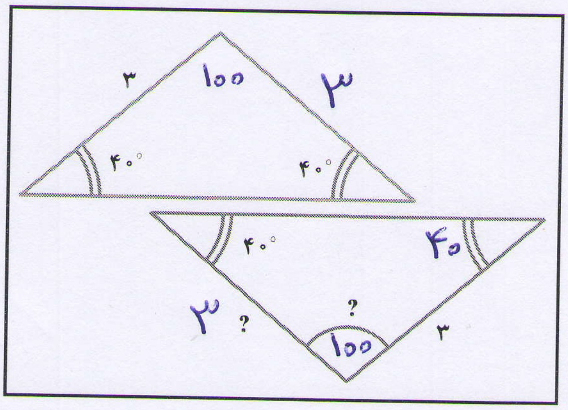
صفحه ۴۴/۱

(ض ض ض)، (ض ز ض)، (ز ض ز)، وترویک زاویه‌ی تند (و ز)
وترویک ضلع زاویه‌ی قائمه (و ض)

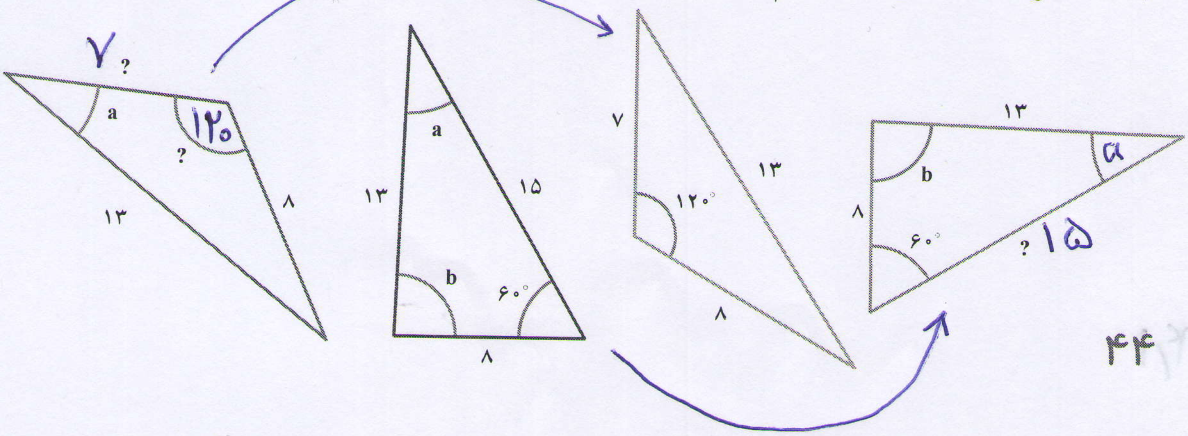
فعالیت

۱ـ در شکل‌های زیر، دو مثلثِ داخل هر کادر با یکدیگر همنهشت‌اند. اندازهٔ پاره‌خط‌ها و زاویه‌های مجهول را روی شکل مشخص کنید :





۲ـ در شکل زیر چهارمثلث رسم شده که دو به دو با یکدیگر همنهشت‌اند. ابتدا مثلث‌های همنهشت را مشخص کنید و سپس اندازه‌های مجهول را که با «؟» مشخص شده، تعیین نمایید (زاویه‌هایی که با یک حرف مشخص شده با هم مساوی است).



یادآوری ۱- اگر سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگری نظیر به نظیر مساوی باشند آن‌گاه آن دو مثلث باهم همنهشت می‌باشند (ض ض ض)

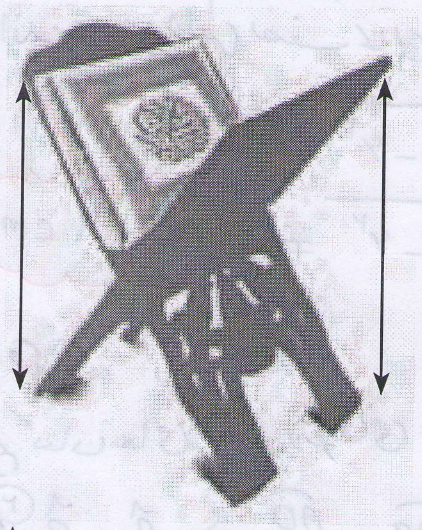
۲- اگر دو ضلع و زاویه‌ی بین آن‌ها از مثلثی با دو ضلع و زاویه‌ی بین آن دو ضلع از مثلث دیگری برابر باشند آن‌گاه آن دو مثلث باهم همنهشت می‌باشند (ض ز ض)

۳- اگر دو زاویه و ضلع بین آن‌ها از مثلثی با دو ضلع و زاویه‌ی بین آن‌ها از مثلث دیگری نظیر به نظیر مساوی باشند آن‌گاه آن دو مثلث همنهشت می‌باشند (ز ض ز)

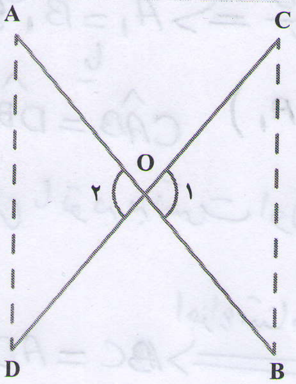
۴- در دو مثلث قائم‌الزاویه اگر وتر و یک زاویه‌ی تند یکی با وتر و زاویه‌ی تند مثلث دیگر برابر باشند آن دو مثلث همنهشت می‌باشند (و ز)

۵- در دو مثلث قائم‌الزاویه اگر وتر و یک ضلع زاویه‌ی قائمه با وتر و یک ضلع زاویه‌ی قائمه مثلث دیگر برابر باشند آن‌گاه آن دو مثلث همنهشت می‌باشند (و ض)

فرض مسئله اطلاعاتی است که طراح سؤال به ما می‌دهد و ما بدون چون و چرا تساوی آن‌ها را می‌پذیریم؛ در واقع ما مسئله را برای حالتی حل می‌کنیم که فرض درست باشد



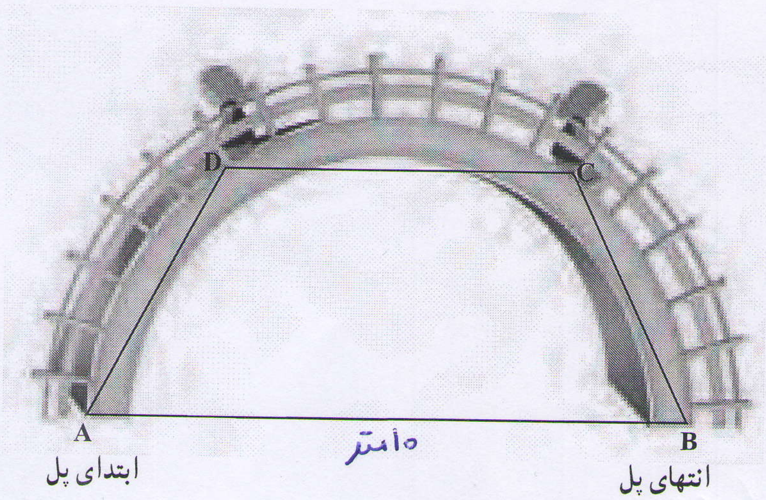
مثال : با رحل‌های قرآنی، حتماً آشنایی دارید. یک نمونه از آنها داریم که دو لایهٔ چوبی آن از وسط هم گذشته است. می‌خواهیم نشان دهیم که این تکیه‌گاه در هر وضعیتی که باشد، مطابق شکل، همواره فاصلهٔ دو لبهٔ کناری آن در دو طرف با هم برابر است. به زبان ریاضی، یعنی در شکل زیر، فرض مسئله این است که : $OA=OB$ و $OC=OD$ ~~(چرا؟)~~ و حکم این است که : $AD=BC$. زوایای $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2$ برابرند (چرا؟)، پس مثلث‌های OAD و OBC همنهشت هستند و از آنجا درستی حکم به‌دست می‌آید، یعنی : بالا



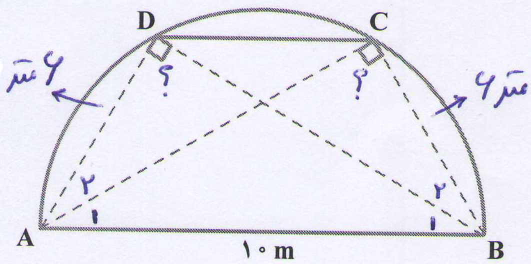
$$\left.\begin{array}{l} OA=OB \\ OC=OD \\ \hat{O}_1=\hat{O}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{OBC} \cong \overset{\Delta}{OAD} \Rightarrow AD=BC$$

فرض
فرض
متقابل به راس
(ض ز ض)

فعالیت



در نزدیکی منزل ترانه و شهرزاد، پارکی هست که در آن یک پل فلزی به شکل نیم‌دایره هست که بچه‌ها برای بازی از پله‌های آن بالا می‌روند. می‌دانیم فاصلهٔ ابتدای پل (نقطهٔ A) از انتهای آن (نقطهٔ B) ۱۰ متر است. ترانه روی پلهٔ C نشسته است که از انتهای پل ۶ متر فاصله دارد (BC=۶) و شهرزاد روی پلهٔ D نشسته است که از ابتدای پل همین مقدار فاصله دارد. آنها حدس می‌زنند که باید فاصله‌شان از پایه‌های مقابل برابر باشد؛ یعنی AC=BD. درستی حدس آنها را به دو روش ثابت کنید.



صفحه ۴۵٫۱

فعالیت

۱

AB قطر دایره است $\Longrightarrow \hat{C} = \hat{D} = \frac{180}{2} = 90$

می دانیم زاویه ی محاطی نصف کمان مقابل به آن می باشد بنابراین داریم

$\hat{C} = 90 \Longrightarrow AC^2 = AB^2 - BC^2 \Longrightarrow AC = \sqrt{10^2 - 6^2} \Longrightarrow AC = 8$

$\hat{D} = 90 \Longrightarrow BD^2 = AB^2 - AD^2 \Longrightarrow BD = \sqrt{10^2 - 6^2} \Longrightarrow BD = 8\ cm$

۲

روش دوم:

می دانیم کمان های نظیر وترهای مساوی با هم مساوی اند بنابراین داریم

$(BC = AD = 6\ cm) \Longrightarrow \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AD} \Longrightarrow \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} \Longrightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1$ ۲

یا $C\hat{A}B = D\hat{B}A$

(A_1 و $\hat{B}_1$ دو زاویه محاطی روبه رو به کمان های BC و AD است)

از طرفی با توجه به قسمت اول (سؤال ۱) داریم $\hat{C} = \hat{D} = 90°$ بنابراین داریم

$$\left.\begin{array}{l} ①\ \hat{C} = \hat{D} = 90° \\ ②\ \hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \\ AB = AB = 10 \end{array}\right\} \xrightarrow{(وز)} A\hat{B}C \cong A\hat{B}D \xrightarrow{\text{اجزاء متناظر}} AC = AD$$

سؤال ۲

فرض: $CD=BC \Rightarrow \frac{CD}{2}=\frac{BC}{2} \Rightarrow DM=BN$

فرض (خواص لوزی): $\hat{D}=\hat{B}$

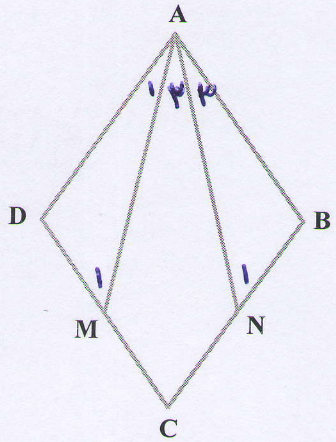
فرض: $AD=AB$

$\xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \overset{\Delta}{ADM} \cong \overset{\Delta}{ABN}$

۱ــ نشان دهید زاویه‌های $\hat{C}$ و $\hat{D}$ در شکل، قائمه است. طول‌های AC و BD را به کمک قضیهٔ فیثاغورس محاسبه کنید و نشان دهید: AC=BD   صفحه ۴۵،۱

۲ــ به کمک همنهشتی مثلث‌های ACB و ADB، نشان دهید AC=BD.   صفحه ۴۵،۱

فعالیت



در شکل مقابل ABCD لوزی است و نقطه‌های M و N وسط‌های اضلاع CD و CB هستند. می‌خواهیم نشان دهیم $\overset{\Delta}{ADM} \cong \overset{\Delta}{ABN}$

۱ــ با توجه به ویژگی‌های لوزی، تساوی‌های زیر را کامل کنید:

فرض $\begin{cases} AD=AB=CD=BC, & BN=\frac{BC}{2} \\ \hat{A}=\hat{C}, \hat{B}=\hat{D}, & DM=\frac{CD}{2} \end{cases}$

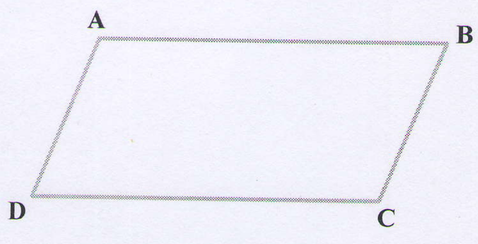
حکم: $\overset{\Delta}{ADM} \cong \overset{\Delta}{ABN}$

۲ــ با توجه به نتیجهٔ قسمت (۱) و تساوی‌های قسمت اوّل ثابت کنید مثلث‌های ABN و ADM همنهشت‌اند.   بالای صفحه

۳ــ حال با توجه به همنهشتی دو مثلث ABN و ADM، اجزای متناظر آنها را بنویسید.

$\overset{\Delta}{ADM} \cong \overset{\Delta}{ABN} \Longrightarrow \begin{cases} AM=AN \\ \hat{A}_1=\hat{A}_3 \text{ یا } D\hat{A}M=B\hat{A}N \\ \hat{M}_1=\hat{N}_1 \text{ یا } A\hat{M}D=A\hat{N}B \end{cases}$

کار در کلاس



می‌خواهیم ثابت کنیم که در هر متوازی‌الاضلاع مانند شکل روبه‌رو، ضلع‌های مقابل، همواره با هم برابر است.

مفروضات و داده‌های مسئله چیست؟ تمام آنها را بنویسید؛ حکم مسئله چیست؟ برای حل این مسئله در ادامه، نظر چند دانش‌آموز را ببینید و با توجه به آنها به سؤال‌ها پاسخ دهید.

فرض $\begin{cases} AB \parallel DC \\ AD \parallel BC \end{cases}$

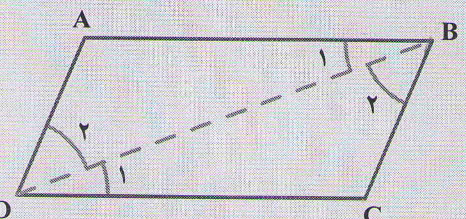
حکم $\begin{cases} AB=DC \\ AD=BC \end{cases}$

شهرزاد : معلوم است که ضلع‌های روبه‌رو با هم مساوی است، با چشم هم می‌توان دید!

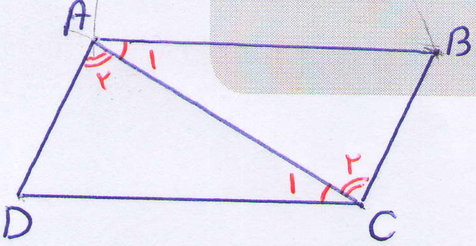
شبنم : در تعریف متوازی‌الاضلاع، برابری ضلع‌های روبه‌رو را می‌دانستیم. علاوه بر آن با اندازه‌گیری هم می‌توانیم این موضوع را نشان دهیم.

● آیا می‌توانیم در حل مسائل هندسه فقط به چشم‌هایمان اعتماد کنیم؟ چرا؟ خیر، زیرا خطا داریم

● به تعریف متوازی‌الاضلاع در کتاب سال گذشته مراجعه کنید. آیا برابری اضلاع مقابل در این تعریف وجود داشت؟ آیا اگر با اندازه‌گیری اضلاع مقابل، برابری آنها را ببینیم، درستی حکم را ثابت کرده‌ایم؟ چرا؟ خیر ← خیر، زیرا اندازه‌گیری همواره با خطا دارد (خطای انسانی، خطای ابزار)



ترانه : به نظر من باید دو مثلث همنهشت بیابیم و با اثبات همنهشتی آنها به برابری اضلاع مقابل در متوازی‌الاضلاع برسیم، امّا در شکل دو مثلث نداریم، پس با اضافه کردن یک خط، یعنی یکی از قطرها، دو مثلث ایجاد می‌کنیم.



اثبات را به‌صورت زیر کامل کنید :

$AB \parallel CD$، مورب $BD \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1$

$AD \parallel BC$ و مورب $BD \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{D}_2$

$BD = BD$ (ضلع مشترک)

$\Rightarrow \overset{\triangle}{ABD} \cong \overset{\triangle}{CBD}$ (ز ض ز) $\xRightarrow{\text{اجزاء متناظر}} \begin{cases} AB = CD \\ \hat{A} = \hat{C} \\ AD = BC \end{cases}$

با توجه به همنهشتی دو مثلث ABD و CBD، تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$\overset{\triangle}{ABD} \cong CBD \Longrightarrow \begin{cases} AD = BC \\ AB = DC \end{cases}$

~~دیدیم که $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$ بنابراین داریم :~~ حذف شود

~~و $\hat{B}_2 = \hat{D}_2$ بنابراین داریم :~~

● چرا برای اثبات همنهشتی مثلث‌های ایجاد شده، نمی‌توانیم از حالت‌های (ض ز ض) و (ض ض ض) استفاده کنیم؟ چون ما فقط یک ضلع برابر داریم

نیاز به دو ضلع برابر دارد

نیاز به سه ضلع برابر دارد

● با توجه به مباحث درس قبل (هندسه و استدلال) بگویید آیا می‌توانستیم همین نتیجه را با رسم قطر AC به‌دست آوریم؟ بله

$(AB \parallel CD$، مورب $AC) \Longrightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1$

$(AD \parallel BC$، مورب $AC) \Longrightarrow \hat{A}_2 = \hat{C}_2$

ضلع مشترک $AC = AC$

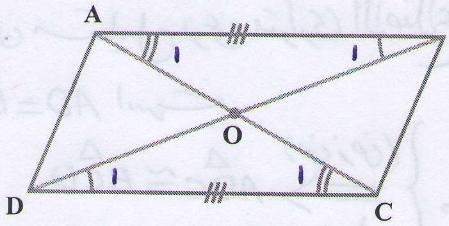
$\xRightarrow{\text{(ز ض ز)}} \overset{\triangle}{ADC} \cong \overset{\triangle}{CBA}$

$\xRightarrow{\text{اجزاء متناظر}} \begin{cases} AD = BC \\ \hat{B} = \hat{D} \\ AB = CD \end{cases}$

● از همنهشتی مثلث‌های ایجاد شده در متوازی‌الاضلاع به‌جز برابری ضلع‌های مقابل، نتیجهٔ دیگری هم دربارهٔ زاویه‌های متوازی‌الاضلاع به‌دست می‌آید؛ این نتیجه را بنویسید.

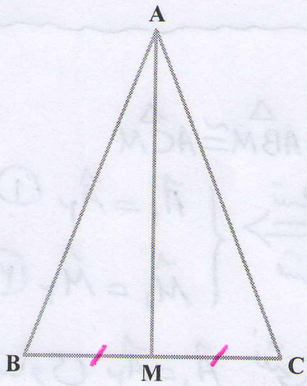
● در هر متوازی‌الاضلاع زاویه‌های روبه‌رو، مساوی‌اند.

تمرین



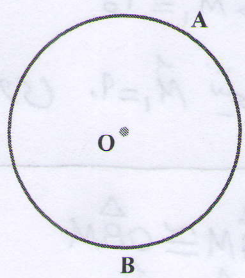
۱ــ ثابت کنید قطرهای هر متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند. یعنی در شکل مقابل نشان دهید : $OA = OC$ و $OB = OD$. صفحه ۴۸٫۱

۲ــ ثابت کنید در هر مستطیل، قطرها با یکدیگر برابرند. (مستطیل نوعی متوازی‌الاضلاع است!) صفحه ۴۸٫۱



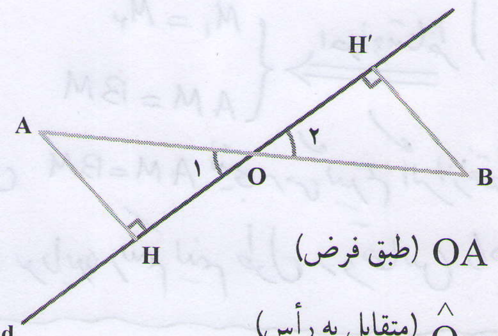
۳ــ در مثلث متساوی‌الساقین ABC، میانهٔ AM را رسم کرده‌ایم. مثلث‌های AMB و AMC به چه حالتی همنهشت هستند؟ چرا AM نیمساز زاویهٔ $\hat{A}$ است؟ چرا AM بر BC عمود است؟

صفحه ۴۸٫۱



۴ــ از نقطهٔ M خارج از دایره، دو مماسِ MA و MB را بر دایره رسم کنید. آیا اندازهٔ این دو مماس با هم برابر است؟ آری برابراست

درستی ادعای خود را نشان دهید. (**راهنمایی** : از مرکز دایره به نقطه‌های M ، A و B وصل کنید.) صفحه ۴۸٫۱



۵ــ در شکل مقابل خط d از وسط پاره‌خط AB گذشته و A و B از d به یک فاصله‌اند ($AH=BH'$) ثابت کنید $OH=OH'$. در مورد درستی یا نادرستی استدلال زیر برای تساوی $OH=OH'$ بحث کنید :

صفحه ۴۸٫۱

$$\left.\begin{array}{ll} OA = OB & \text{(طبق فرض)} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 & \text{(متقابل به رأس)} \\ AH = BH' & \text{(فرض)} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \overset{\Delta}{OAH} \cong \overset{\Delta}{OBH'} \Rightarrow OH = OH'$$

اثبات نادرست است؛ زیر زاویه $\hat{O}_1$ بین OA و AH نیست و زاویه‌ی $\hat{O}_2$ هم بین OB و OH' نیست

تمرین ۱

$(AB \parallel CD,\ \text{مورب } AC) \Longrightarrow \hat{A}_1=\hat{D}_1$

$(AB \parallel CD,\ \text{مورب } BD) \Longrightarrow \hat{B}_1=\hat{D}_1$

(خواص قبلی متوازی الاضلاع) $AB=DC$

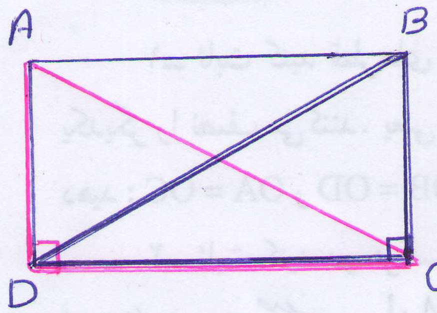
$\xrightarrow{(\text{ز ض ز})} \triangle ADB \cong \triangle DOC \Longrightarrow$

$\xrightarrow[\text{متناظر}]{\text{تساوی اجزای}}$ { $OA=OC \Longrightarrow$ O وسط AC است ؛ $OB=OD \Longrightarrow$ O وسط BD است }

نتیجه: بنابراین قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند

---

۲ چون مستطیل نوعی متوازی الاضلاع می‌باشد پس داریم $AD=BC$ است



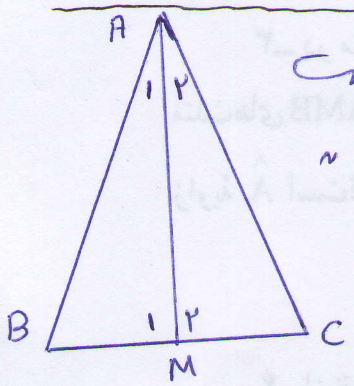
فرض $AD=BC$

فرض $\hat{D}=\hat{C}=90$

ضلع مشترک $DC=DC$

$\xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \triangle ADC \cong \triangle BCD \xrightarrow{\text{اجزاء متناظر}} AC=BD$

۳



$ABC: AB=AC$ متساوی الساقین است

$: \hat{B}=\hat{C}$

$AM: BM=CM$ میانه است

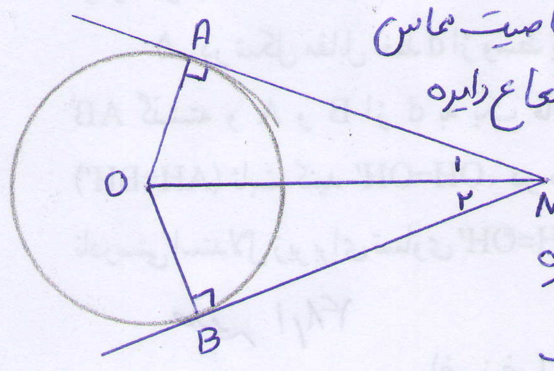
$\xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \triangle ABM \cong \triangle ACM \xrightarrow[\text{متناظر}]{\text{تساوی اجزای}}$ { $\hat{A}_1=\hat{A}_2$ (1) ؛ $\hat{M}_1=\hat{M}_2$ (2) }

از تساوی $\hat{A}_1=\hat{A}_2$ نتیجه می‌گیریم که AM نیم‌ساز زاویه‌ی A است

$\hat{M}_1+\hat{M}_2=180^\circ \xrightarrow[\hat{M}_1=M_2]{\text{طبق رابطه‌ی ۲}} \hat{M}_1+\hat{M}_1=180 \Longrightarrow 2\hat{M}_1=180 \Longrightarrow \hat{M}_1=90$

از تساوی $\hat{M}_1=90$ نتیجه می‌گیریم $AM \perp BC$

۴



خاصیت مماس $\hat{A}=\hat{B}=90$

شعاع دایره $OA=OB$

$OM=OM$

$\xrightarrow{(\text{وض})} \triangle OAM \cong \triangle OBM \xrightarrow{\text{اجزاء متناظر}}$ { $\hat{M}_1=\hat{M}_2$ ؛ $AM=BM$ }

از تساوی $AM=BM$ نتیجه می‌گیریم اگر از نقطه‌ای خارج دایره دو مماس بر دایره رسم کنیم طول دو مماس با هم برابر است

۵

d از وسط AB گذشته است $\Longrightarrow OA=OB$

متقابل به راس $\hat{O}_1=\hat{O}_1$

۴۸/۱

$\hat{H}=\hat{H}'=90$

$\xrightarrow{(\text{و ز})} \triangle AHO \cong \triangle BH'O \Longrightarrow \xrightarrow{\text{اجزاء متناظر}} OH=OH'$

روش دوم $(OA=OB,\ AH=BH',\ H=H'=90) \xrightarrow{(\text{وض})} \triangle AHO \cong \triangle BH'O \Longrightarrow OH=OH'$

درس چهارم: حل مسئله در هندسه

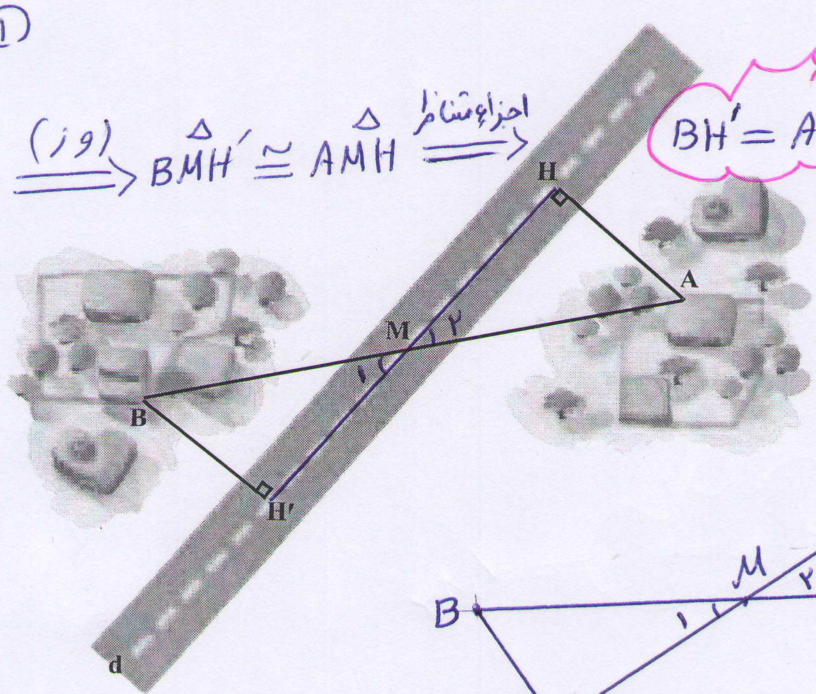
برای حل مسائل هندسی، راه حل کلّی وجود ندارد؛ امّا می‌توان مراحلی را مشخص کرد که برای هر مسئلهٔ هندسه، آنها را توصیه می‌کنند. این مراحل را در حل یک مثال کاربردی در عمل معرفی می‌کنیم.

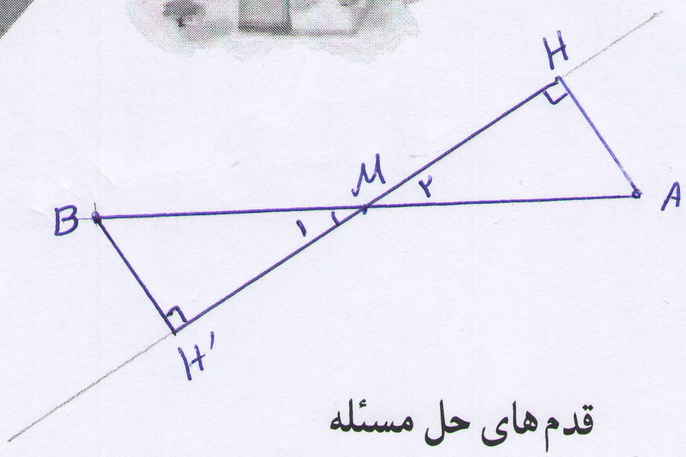
مثال : دو روستای A و B با یک جادّهٔ خاکی مستقیم به هم وصل هستند. در آن منطقه یک جادّهٔ آسفالته مستقیم ساخته شد که دو روستا در دو طرف آن واقع شد و جادهٔ آسفالته درست از وسط جادّهٔ خاکی عبور می‌کرد. ادارهٔ راه‌سازی تصمیم گرفته است که از هر روستا، یک جادّهٔ آسفالته با کوتاه‌ترین فاصلهٔ ممکن تا جادّهٔ اصلی بسازد. بنابراین از روستای A یک جادّهٔ مستقیم، عمود بر این جادّهٔ اصلی و به طول چهار کیلومتر ساخته شد. برای برآورد هزینه‌های ساخت جادّهٔ دیگر از روستای B، مهندسان پیش‌بینی کرده‌اند که فاصلهٔ روستای B از جاده نیز همین مقدار است؛ یعنی AH=BH′. چون جاده‌ی آسفالت از وسط جاده‌ی خاکی عبور می‌کند پس داریم

$BM = AM$ (1)

(1) $BM = AM$
متقابل به راس $M_1 = M_2$
$\hat{H'} = \hat{H} = 90$

$\xrightarrow{(وز)} \overset{\triangle}{BMH'} \cong \overset{\triangle}{AMH} \xrightarrow{اجزاء متناظر} BH' = AH$





قدم‌های حل مسئله

۱ــ صورت مسئله را به‌دقت بخوانید و مفاهیم تشکیل‌دهندهٔ آن را بشناسید. در این مسئله با مفاهیمی همچون خط، پاره خط و فاصلهٔ نقطه تا خط سروکار داریم. آیا با آنها آشنایی دارید؟ آری

۲ــ اگر مسئله فاقد شکل است با توجه به‌صورت مسئله، یک شکل مناسب برای آن رسم کنید.

در اینجا شکل این مسئله را با توجه به طرح بالا رسم کنید :

۳ــ داده‌های مسئله (فرض) و خواسته‌های آن (حکم) را تشخیص داده و در یک جدول بنویسید. در اینجا فرض‌های اصلی این است که M وسط AB است؛ یعنی MA=MB و AH و BH′ بر d عمود و حکم این است که : AH=BH′

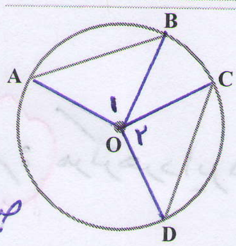
فرض	MA=MB , $\hat{H} = \hat{H'} = ۹۰^\circ$
حکم	AH=BH′

۴ــ برای رسیدن از فرض به حکم راه حلی پیدا کنید. روش‌های مختلفی برای این کار هست که آنها را به مرور می‌آموزید. یکی از راه‌های اثبات برابری دو پاره‌خط، استفاده از مثلث‌های همنهشت است. در این شکل، کدام دو مثلث، برای این منظور مناسب است؟

با توجه به فرض و حکم مسئله، اثبات را با نمادهای ریاضی کامل کنید :

$$\left.\begin{array}{r} MA = MB \text{ (طبق فرض)} \\ \hat{H} = \hat{H'} = ۹۰^\circ \\ \hat{M_1} = \hat{M_2} \text{ (متقابل به راس)} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(وتر و یک زاویهٔ حاده)}} \overset{\Delta}{AMH} \cong \overset{\Delta}{BMH'} \Rightarrow AH = BH'$$

فعالیت

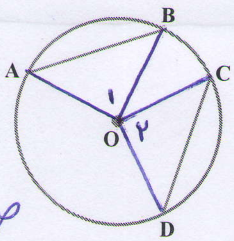


در شکل مقابل وترهای AB و CD با هم مساوی است.

۱ــ نشان دهید کمان‌های $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ مساوی است.

صفحه ۵۰/۱

فرض : AB = CD   حکم : $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

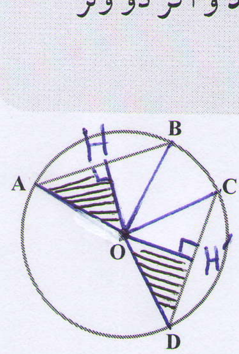


۲ــ در شکل مقابل کمان‌های $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ مساوی است. نشان دهید وترهای AB و CD با هم برابرند.

صفحه ۵۰/۱

فرض $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ حکم : AB = CD

در یک دایره اگر دو کمان برابر باشند، وترهای نظیر آنها با هم برابرند و اگر دو وتر برابر باشند، کمان‌های نظیر آنها نیز با هم برابرند.



۳ــ از سال گذشته می‌دانید خطی که از مرکز دایره بر هر وتر عمود شود، وتر را نصف می‌کند. با توجه به این موضوع، نشان دهید مرکز دایره از دو وتر مساوی به یک فاصله است.

صفحه ۵۰/۱

نکته : مرکز هر دایره از دو وتر مساوی آن دایره، به یک فاصله است

کار در کلاس ۱

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(طبق فرض)} & AB = CD \\ \text{(شعاع دایره)} & OA = OD \\ \text{(شعاع دایره)} & OB = OC \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض ض ض)}} \overset{\triangle}{OAB} \cong \overset{\triangle}{OCD} \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{O}_1 = \overset{\frown}{AB} \\ \hat{O}_2 = \overset{\frown}{CD} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

نکته: می دانیم زاویه ی مرکزی و کمان مقابل آن با هم برابر می باشند (از نظر درجه)

نتیجه: کمان های نظیر وترهای مساوی از یک دایره با هم مساوی اند.

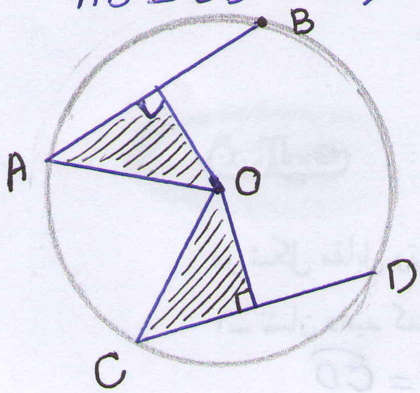
۲

$$\left.\begin{array}{ll} \text{فرض} & \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \Longrightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ \text{(شعاع دایره)} & OA = OD \\ \text{(شعاع دایره)} & OB = OC \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \overset{\triangle}{OAB} \cong \overset{\triangle}{OCD} \Longrightarrow AB = CD$$

نتیجه: وترهای نظیر کمان های مساوی از یک دایره با هم برابرند.

۳

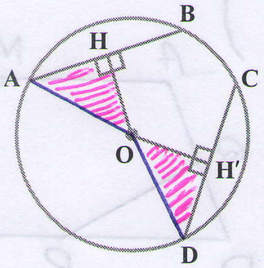
$$\left.\begin{array}{l} AB = CD \Longrightarrow \frac{AB}{2} = \frac{CD}{2} \Longrightarrow AH = DH' \\ \text{شعاع دایره} \quad OA = OD \\ \hat{H} = \hat{H}' = 90 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(و ض)}} \overset{\triangle}{OAH} \cong \overset{\triangle}{ODH'}$$



$$\xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} OH = OH'$$

نتیجه: مرکز هر دایره از دو وتر مساوی آن، به یک فاصله است

۴ــ در شکل مقابل می‌دانیم مرکز دایره از دو وتر AB و CD به یک فاصله است (OH=OH′). مرکز دایره را به A و D وصل کنید و با پرکردن جاهای خالی نشان دهید که طول‌های دو وتر AB و CD با هم برابر است :

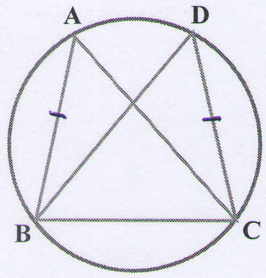


$$\left.\begin{array}{l} OA = OD = \text{شعاع} \\ \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ \\ (\text{فرض})\ OH = OH' \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{OAH} \cong \overset{\triangle}{ODH'} \ (\text{وض}) \Rightarrow AH = DH' \Rightarrow$$

$$2AH = 2DH' \Rightarrow AB = CD$$

نکته : اگر دو تر در یک دایره از مرکز به یک فاصله باشند، آن دو وتر با هم مساوی اند.

کار در کلاس



در شکل مقابل می‌دانیم AB=CD،

۱ــ چرا $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ ؟ زیرا وترهای نظیر کمان های مساوی با هم برابرند

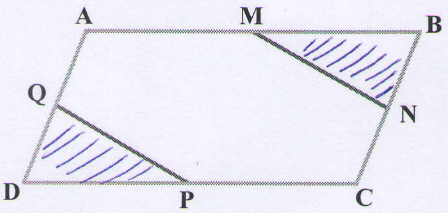
۲ــ جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پرکنید :

$$\begin{cases} \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \\ \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BC} \end{cases}$$

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{BC} \Rightarrow \overset{\frown}{ABC} = \overset{\frown}{DCB}$$

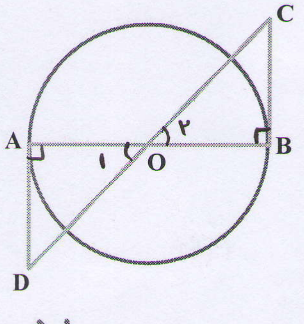
۳ــ چرا AC=BD؟ می دانیم وترهای نظیر کمان های مساوی با هم برابرند

تمرین



۱ــ در شکل مقابل ABCD متوازی‌الاضلاع است و M و N و P و Q وسط‌های اضلاع متوازی‌الاضلاع است، ثابت کنید : MN=PQ

صفحه ۵۱/۱



۲ــ در شکل مقابل O مرکز دایره است و BC و AD بر دایره مماس است، نشان دهید که AD و BC برابرند.

تمرین ۱

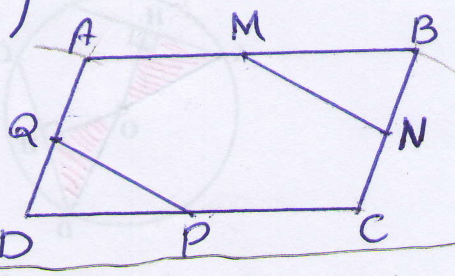
فرض $AD=BC \Longrightarrow \frac{AD}{2}=\frac{BC}{2} \Longrightarrow DQ=BN$

فرض $CD=AB \Longrightarrow \frac{CD}{2}=\frac{AB}{2} \Longrightarrow DP=BM$

خواص متوازی الاضلاع : $\hat{D}=\hat{B}$

$\xrightarrow{(\text{ض ز ض})}$

$\Longrightarrow D\hat{Q}P \cong B\hat{N}M \xrightarrow[\text{متناظر}]{\text{تساوی اجزای}} PQ=MN$



۲

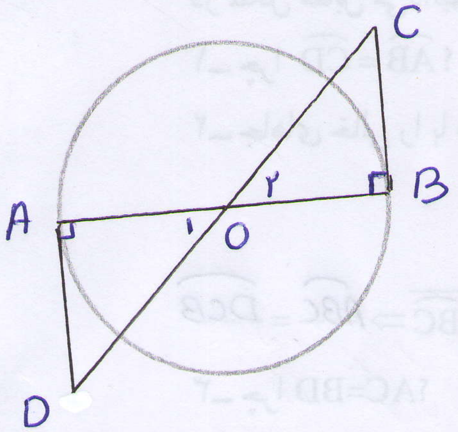
$\hat{A}=\hat{B}=90$

(شعاع دایره) $OA=OB$

(متقابل به راس) $\hat{O}_1=\hat{O}_2$

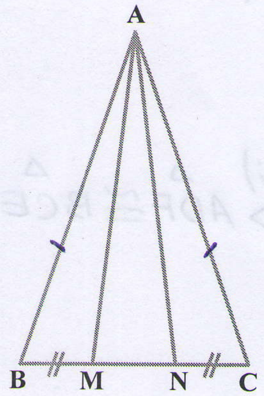
$\xrightarrow{(\text{ز ض ز})} O\hat{A}D \cong O\hat{B}C \xrightarrow[\text{متناظر}]{\text{تساوی اجزای}} AD=BC$

نکته: می دانیم خط مماس بر دایره در نقطه ی تماس بر آن، بر شعاع دایره عمود است



۳ـ در شکل مقابل، مثلث ABC متساوی‌الساقین است و M و N روی قاعدهٔ BC طوری قرار دارد که BM=NC.

نشان دهید مثلث AMN هم متساوی‌الساقین است.



① $\Rightarrow AB = AC$

① $\Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$

فرض $BM = CN$

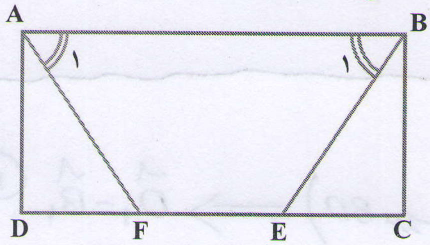
$\xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \overset{\triangle}{ABM} \cong \overset{\triangle}{ACN}$

$\xrightarrow{\text{تساوی اجزاء متناظر}} AM = AN$

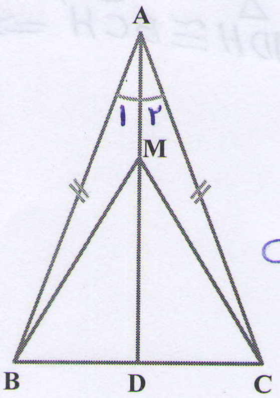
از تساوی AM و AN نتیجه می‌گیریم مثلث AMN متساوی الساقین است

۴ـ در مستطیل ABCD، پاره‌خط‌های BE و AF طوری رسم شده که دو زاویهٔ A_1 و B_1 برابرند، ثابت کنید BE و AF مساوی‌اند.

صفحه ۵۲/۱



۵ـ نشان دهید در هر مثلث متساوی‌الساقین، فاصلهٔ هر نقطهٔ دلخواه روی نیمساز زاویهٔ رأس از دو سر قاعده، برابر است: MB=MC.



① (طبق فرض) $AB = AC$

نیم‌ساز است AD $\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$

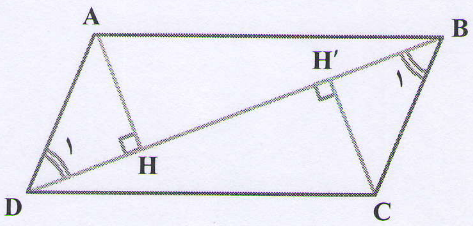
ضلع مشترک $AM = AM$

$\xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \overset{\triangle}{ABM} \cong \overset{\triangle}{ACM}$

$\xrightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر}} BM = CM$

۶ـ در شکل مقابل ABCD متوازی‌الاضلاع است و AH و CH′ فاصله‌های نقاط A و C از قطر BD است. دلیل برابری دو زاویهٔ B_1 و D_1 را توضیح دهید.

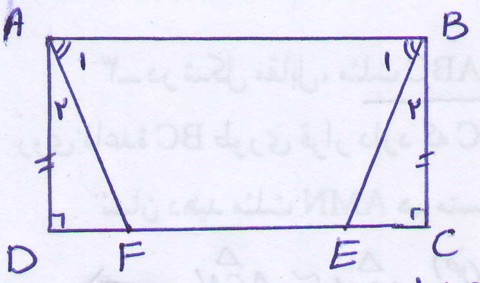
نشان دهید مثلث‌های ADH و BCH′ همنهشتند و از آنجا برابری AH و CH′ را نتیجه بگیرید، سپس جمله زیر را کامل کنید:



صفحه ۵۶۱

در هر متوازی‌الاضلاع، هر دو رأس مقابل، از قطر بین آنها به یک فاصله‌اند.

تمرین ۴



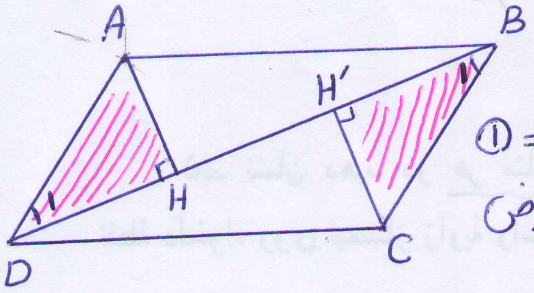
فرض: $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 \Longrightarrow 90 - \hat{A}_1 = 90 - \hat{B}_1 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \hat{A}_2 = \hat{B}_2$ (1)

$$\left.\begin{array}{r} (1) \Longrightarrow \hat{A}_2 = \hat{B}_2 \\ \text{تعریف مستطیل} \quad \hat{D} = \hat{C} = 90 \\ \text{طبق فرض} \quad AD = BC \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{زض ز})} \overset{\triangle}{ADF} \cong \overset{\triangle}{BCE}$$

$\xrightarrow[\text{اجزای متناظر}]{\text{تساوی بین}}$ $AF = BE$

۶



$(AD \parallel BC \,,\ \text{مورب}\ BD) \Longrightarrow \hat{D}_1 = \hat{B}_1$ (1)

$$\left.\begin{array}{r} (1) \Longrightarrow \hat{D}_1 = \hat{B}_1 \\ \text{فرض} \quad AD = BC \\ \hat{H} = \hat{H}' = 90 \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{و ز})} \overset{\triangle}{ADH} \cong \overset{\triangle}{BCH'} \Longrightarrow$$

$\xrightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر}}$ $AH = CH'$

درس پنجم: شکل‌های متشابه

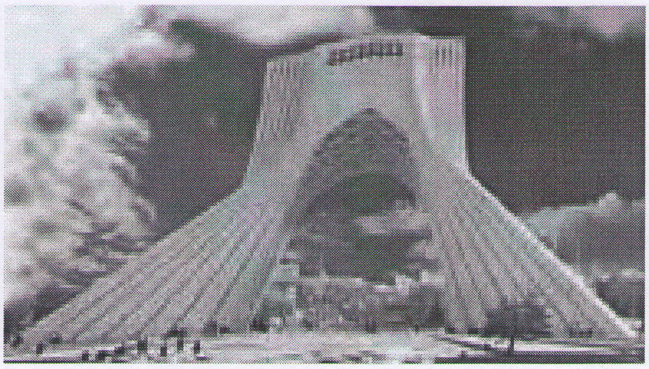
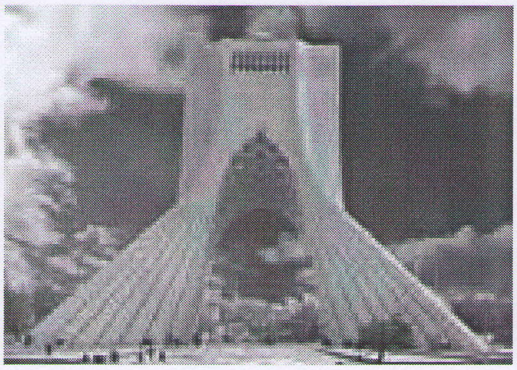
ــ در تصویرهای زیر، دو گل شبیه به هم را می‌بینید. آیا هر دو گل به‌طور کامل مثل هم است؟ خیر


ــ در تصویرهای زیر دو عکس از یک کودک را می‌بینید. تفاوت این دو تصویر در چیست؟ در اندازه‌ی تصویر

عکس شماره‌ی (۲) تصویر کوچک شده‌ی شماره‌ی (۱) می‌باشد

ــ تصویرهای زیر، عکس‌هایی از میدان آزادی تهران است. کدام یک به برج آزادی شبیه‌تر است؟

تصویر سمت چپ شبیه‌تر است

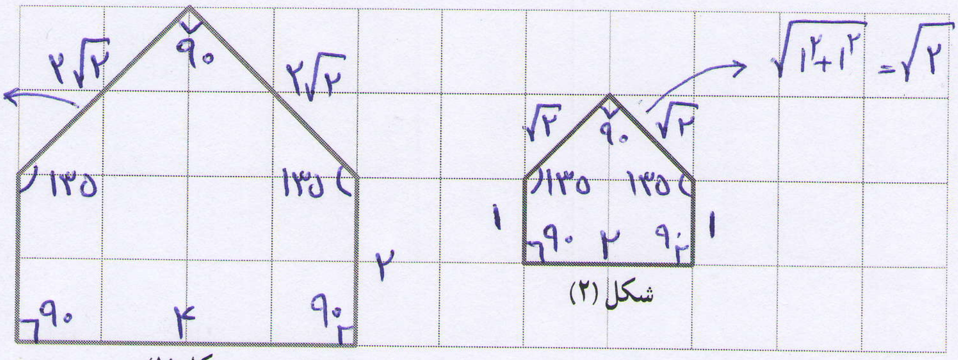
اضلاع شکل سمت راست (۲) نصف ضلع های متناظرشان سمت چپ (۱) می باشند

فعالیت

۱ــ مربع های صفحهٔ شطرنجی زیر به ضلع یک سانتیمتر است :

$\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$



شکل (۱)

شکل (۲)

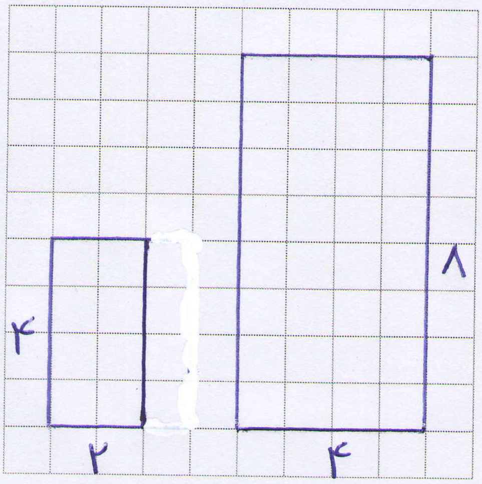
اندازهٔ ضلع ها و زاویه‌های هر دو شکل را بنویسید : ← بالا

چه رابطه‌ای بین ضلع های متناظر دو شکل وجود دارد؟

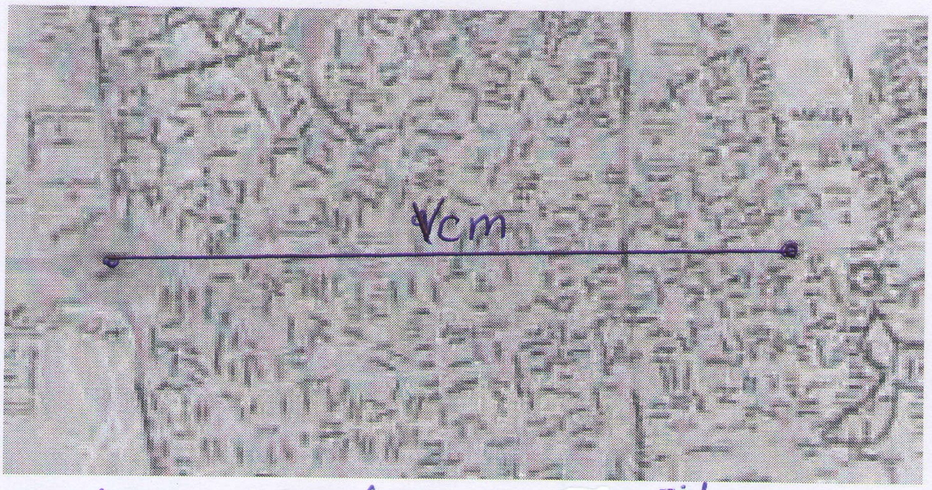
چه رابطه‌ای بین زاویه‌های متناظر دو شکل وجود دارد؟ ← برابر می باشند

اندازهٔ ضلع های شکل (۱) چند برابر اندازهٔ ضلع های شکل (۲) است؟ دو برابر

در صفحه شطرنجی مقابل یک چند ضلعی رسم کنید و چند ضلعی دیگری مانند آن بکشید به‌طوری که اندازهٔ ضلع هایش ۲ برابر شکل اوّل باشد.



۲ــ در تصویر زیر، نقشهٔ قسمتی از شهر تهران را می‌بینید. مقیاس نقشه ۱ به ۱۰۰,۰۰۰ است؛ یعنی هر یک سانتیمتر روی نقشه با ۱۰۰,۰۰۰ سانتیمتر مقدار واقعی برابر است. فاصلهٔ دو میدان انقلاب و آزادی را پیدا کنید. فاصله در کتاب نهم حدود ۷ سانتیمتر است

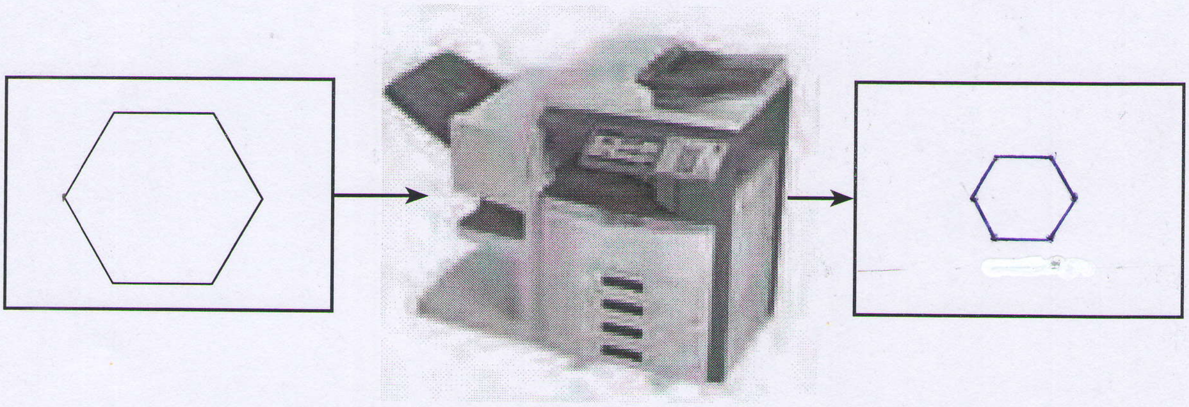


$7\times 100,000=700,000$ سانتی متر

$700,000\div 100=7000$ متر

$7000\div 1000=7$ کیلومتر

۳ــ شکل زیر را با دستگاه کپی کوچک کرده‌ایم. عدد روی دستگاه ۵۰٪ را نشان می‌داد. تصویر خروجی را شما رسم کنید.



سهم

هرگاه در دو چندضلعی همهٔ ضلع‌ها به یک نسبت تغییر کرده باشد (کوچک یا بزرگ شده، و یا بدون تغییر باشد.) و اندازهٔ زاویه‌ها تغییر نکرده باشد، آن دو چند ضلعی با هم متشابهند.

۱. فرض کنیم دو مربع دلخواه با اضلاع a و b داریم چون همه‌ی زاویه‌ها برابر ۹۰ است و نسبت اندازه‌های اضلاع آن‌ها برابر $\frac{a}{b}$ می‌باشد پس این دو مربع دلخواه متشابه می‌باشند

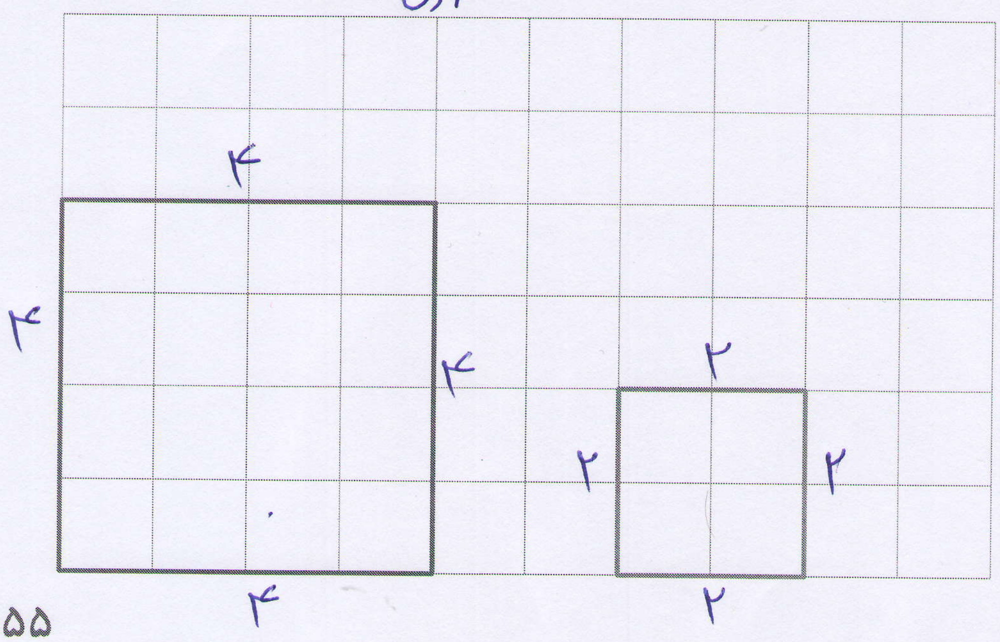
کار در کلاس

آری

۱ــ آیا دو مربع زیر متشابه است؟ اندازهٔ ضلع‌ها و زاویه‌های هر کدام را بنویسید. چه رابطه‌ای بین ضلع‌ها و زاویه‌های دو شکل وجود دارد؟ ضلع‌های مربع بزرگ‌تر ۲ برابر ضلع‌های مربع کوچک‌تر است

آیا می‌توان گفت هر دو مربع دلخواه با هم متشابهند؟ چرا؟

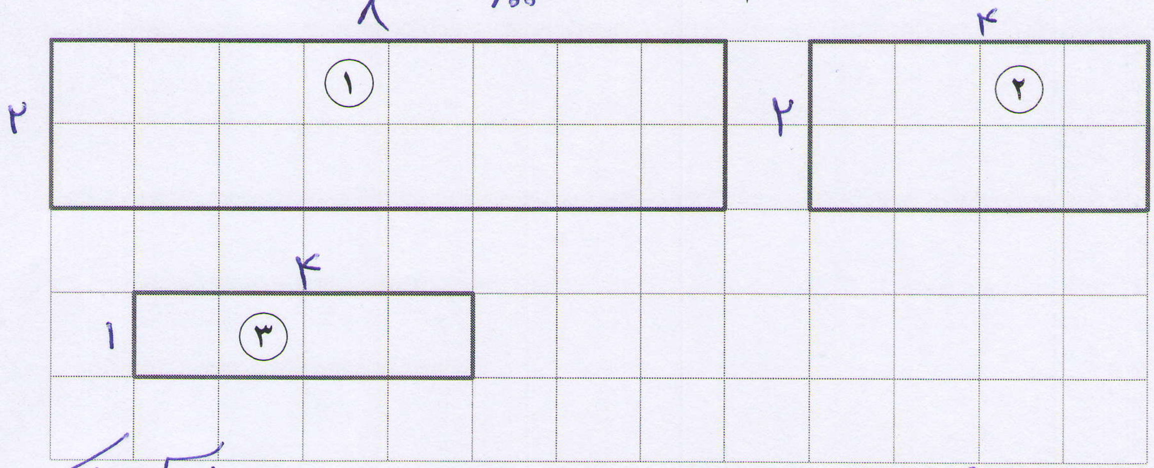
آری



۲) زیرا زاویه‌ها همگی برابر 90° است و نسبت اضلاع متناظر آنها برابر $\frac{1}{2}$ یا $\frac{2}{1}$ می‌باشد

۲ــ از مستطیل‌های زیر کدام با هم متشابهند؟ چرا؟ شماره ۱ و ۳

آیا هر دو مستطیل دلخواه با هم متشابه است؟ خیر



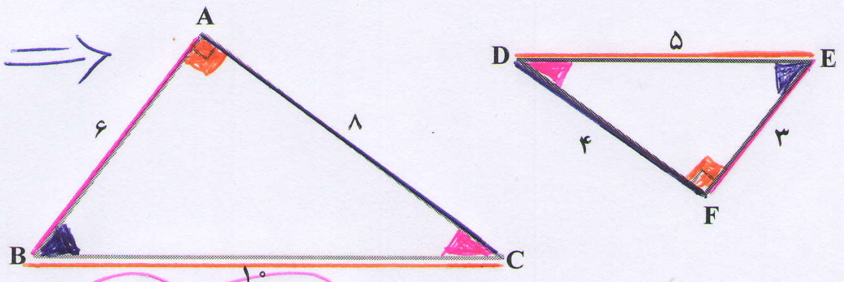
مستطیل شماره ۲ و ۱ متشابه نیستند زیرا نسبت اضلاع متناظر آن‌ها یکی نیست

$\frac{\text{عرض م بزرگ}}{\text{عرض م کوچک}} \neq \frac{\text{طول م بزرگ}}{\text{طول م کوچک}}$ ؛ $\frac{8}{4} \neq \frac{2}{2}$

فعالیت

دو مثلث زیر با هم متشابه است. ضلع‌های متناظر و زاویه‌های متناظر را همرنگ کنید. نسبت ضلع‌های متناظر را بنویسید. آیا سه کسر برابر به‌دست آمد؟

$$\left.\begin{array}{l}\frac{AB}{FE} = \frac{6}{3} = \frac{1}{2} \\ \frac{AC}{FD} = \frac{8}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{BC}{ED} = \frac{10}{5} = \frac{1}{2}\end{array}\right\} \Longrightarrow$$



$$\frac{AB}{FE} = \frac{AC}{FD} = \frac{BC}{ED} = \frac{1}{2}$$

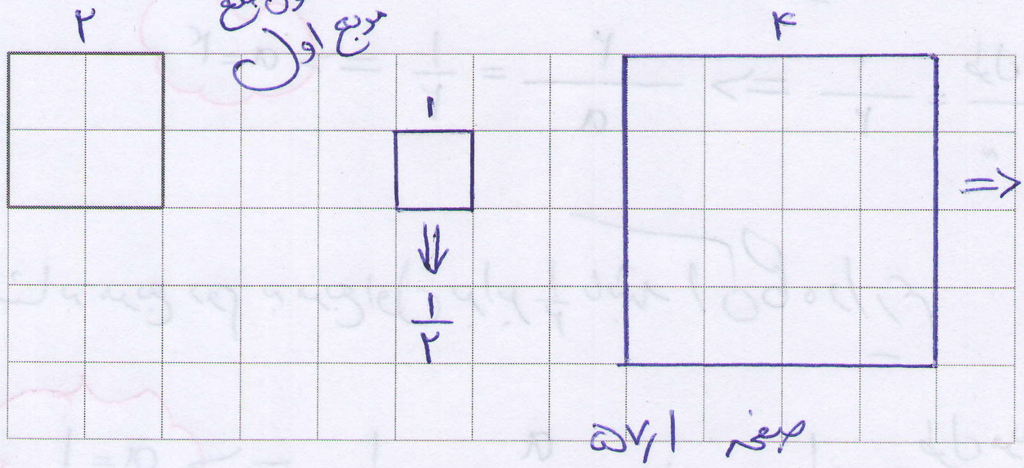
به نسبت دو ضلع متناظر در دو شکل متشابه، نسبت تشابه می‌گویند.

کار در کلاس

۱ــ با توجه به مربع صفحهٔ بعد، مربع دیگری رسم کنید به‌گونه‌ای که نسبت تشابه دو مربع $\frac{1}{2}$ باشد. این سؤال چند پاسخ دارد؟ چرا؟ دو پاسخ دارد می‌توانیم ضلع مربع دوم را دو برابر یا نصف کنیم درهرصورت نسبت تشابه دو مربع برابر $\frac{1}{2}$ است

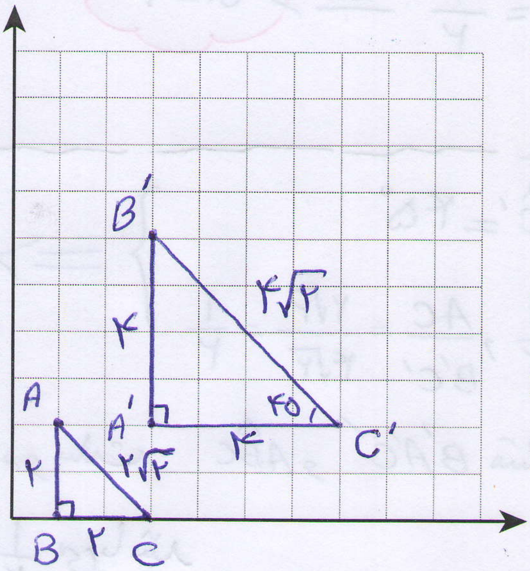
$\text{نسبت تشابه} = \frac{۱}{۲} = \frac{a}{۲} \Rightarrow a = ۱$ $\qquad$ $\frac{۱}{۲} = \frac{۲}{a} \xrightarrow{\text{طول مربع اول}} a = ۴$

طول ضلع مربع اول



$\Rightarrow \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$

صفحه ۵۷/۱



۲ــ در صفحهٔ مختصات، نقاط زیر را پیدا کنید :

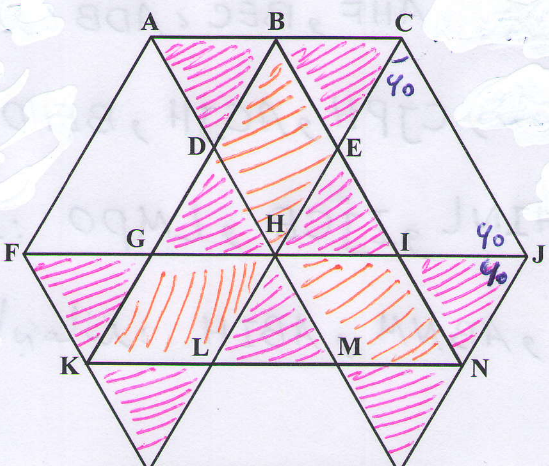
مثلث ABC $\quad C = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۰ \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$

مثلث $A'B'C'$ $\quad C' = \begin{bmatrix} ۷ \\ ۲ \end{bmatrix} \quad B' = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۶ \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$

طول ضلع‌های دو مثلث را بنویسید و تشابه آنها را بررسی کنید، در صورت متشابه بودن، نسبت تشابه را پیدا کنید.

تمرین

۱ــ چندضلعی‌های متشابهی که در شکل زیر تشخیص می‌دهید، نام ببرید. صفحه ۵۷/۱



کار در کلاس ۱ اگر نسبت تشابه مربع اول به دوم $\frac{1}{2}$ باشد آنگاه داریم

$$\frac{\text{طول مربع اول}}{\text{طول مربع دوم}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 4$$

اگر نسبت تشابه مربع دوم به مربع اول برابر $\frac{1}{2}$ باشد آنگاه داریم

$$\frac{\text{طول مربع دوم}}{\text{طول مربع اول}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 1$$

۲

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} = \hat{A'} = 45^\circ ,\ \hat{B} = \hat{B'} = 90^\circ ,\ \hat{C} = \hat{C'} = 45^\circ \\ \frac{AB}{B'A'} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} ,\ \frac{BC}{A'C'} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} ,\ \frac{AC}{B'C'} = \frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

پس دو مثلث $A\hat{B}C$ و $B'\hat{A'}C'$ متشابه می‌باشند و نسبت تشابه آنها برابر $\frac{1}{2}$ می‌باشد

تمرین در این شکل تعداد زیادی مثلث و تعداد لوزی و ذوزنقه و متوازی الاضلاع متشابه وجود دارد

۱- مثلث‌های متشابه مانند: $A\hat{D}B$ ، $B\hat{E}C$ و $A\hat{H}F$ و ...

۲- لوزی‌های متشابه مانند $BEHD$ ، $ACJH$ و $CJPH$ و ...

۳- ذوزنقه‌های متشابه مانند: $LMPO$ و $IJCE$ و $HINL$ و ...

۴- متوازی الاضلاع‌های متشابه مانند: $ABIH$ و $ABNM$ و ...

۲ـ آیا هر دو شکل همنهشت با هم، متشابه نیز هستند؟ بله

در صورت متشابه بودن نسبت تشابه چند است؟ نسبت تشابه برابر یک است

۳ـ آیا هر دو لوزی متشابهند؟ چرا؟ خیر صفحه ۵۸/۱

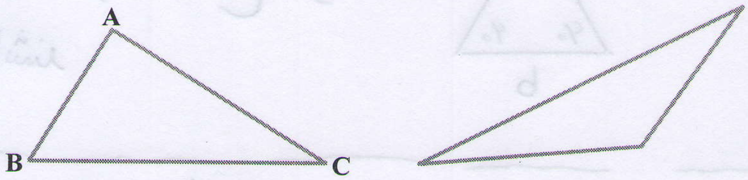
۴ـ در یک نقشه، مقیاس ۲۰۰ : ۱ است. فاصلهٔ دو نقطه روی نقشه ۳/۵ سانتیمتر است. فاصلهٔ این دو نقطه در اندازهٔ واقعی چقدر است؟

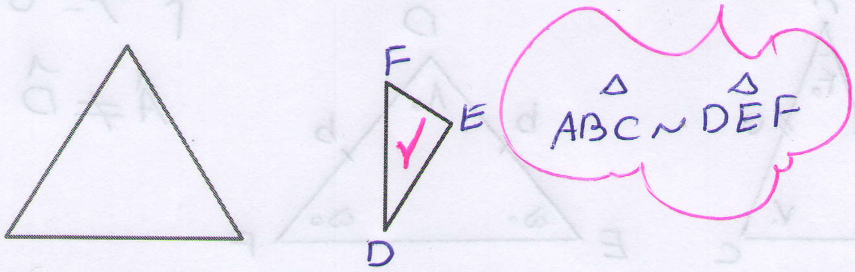
۵ـ آیا هر دو مثلث متساوی الاضلاع متشابهند؟ چرا؟ آری صفحه ۵۸/۱

۶ـ آیا هر دو مثلث متساوی‌الساقین متشابهند؟ چرا؟ خیر

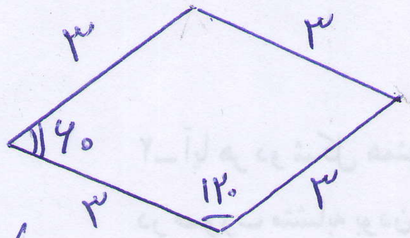
۷ـ مثلث ABC به ضلع های ۴ و ۵ و ۸ با مثلث DEF به ضلع $x-1$ و ۱۰ و $x+7$ با هم متشابه هستند (اندازهٔ ضلع های مثلث‌ها، از کوچک به بزرگ نوشته شده است) مقدار x را پیدا کنید.

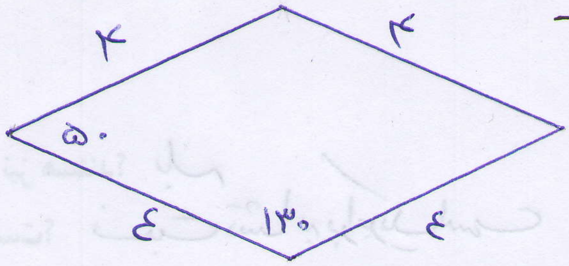
۸ـ کدام مثلث با مثلث ABC متشابه است؟





تمرین ۳





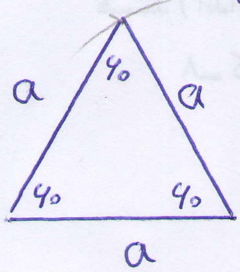
در دو لوزی دلخواه نسبت اضلاع نظیر با هم برابر است ولیکن اندازه‌ی زاویه‌های نظیر لزوماً یکی نیست

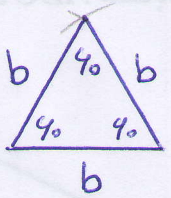
۴

$$\frac{\text{مقدار روی نقشه}}{\text{مقدار واقعی}} = \frac{1}{200} = \frac{3/5}{x} \Rightarrow x = 3/5 \times 200 = 700\ cm$$

۵

در دو مثلث متساوی الاضلاع دلخواه به اضلاع a و b اندازه‌ی تمام زاویه‌ها برابر 60° است و نسبت اضلاع نظیر $\frac{a}{b}$ یا $\frac{b}{a}$ می باشد لذا دو مثلث متساوی الاضلاع دلخواه همیشه متشابه می باشند

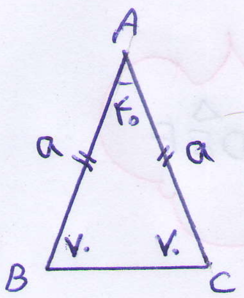


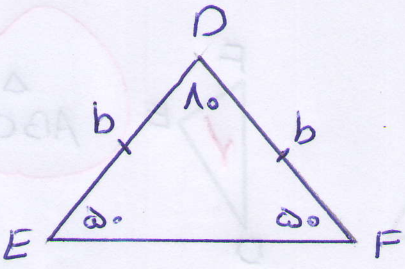


۶

خیر زیرا ممکن است زاویه‌های نظیر باهم برابر نباشد

$\hat{A} \neq \hat{D}$





۷

دو مثلث متشابه اند $\Rightarrow \frac{x-1}{4} = \frac{10}{5} = \frac{x+7}{8}$

$$\frac{x-1}{4} = \frac{10}{5} = \frac{2}{1} \Rightarrow x-1 = 8 \xrightarrow{+1} x = 9$$

$$\frac{10}{5} = \frac{x+7}{8} \Rightarrow 80 = 5x + 35 \xrightarrow{-35} 45 = 9x \xrightarrow{\div 9} 5 = x$$

نویسنده: سعید جعفری صدری

۵۸/۱

http://www.math-home.ir

سرای ریاضی