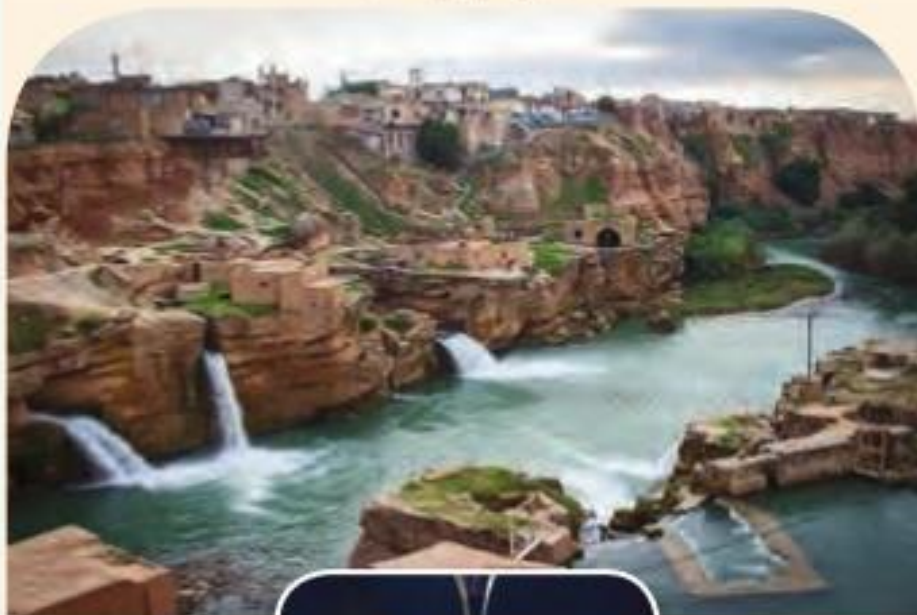




توان و ریشه

وَ جَعَلْنَا مِنَ الْمَاءِ كُلَّ شَيْءٍ حَيٍّ
هر چیز زنده‌ای را از آب پدید آوردیم
(سوره انبیا، آیه ۳۰)



یک قطره آب شامل حدود ۳۳ میلیارد میلیارد مولکول یا به عبارت دیگر
 $۳۳,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰$ مولکول است که می‌توان آن را به صورت $۳/۳ \times 10^{11}$
نمایش داد. هر گونه حیاتی به آب نیاز دارد. قدر این نعمت الهی را بدانیم.

درس اول: توان صحیح

در سال‌های گذشته با توان‌های طبیعی یک عدد آشنا شده‌اید؛ به طور مثال می‌دانید:

$$2^3=8 \quad \text{و} \quad (-5)^2=25 \quad \text{و} \quad \left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{81}{256} \quad \text{و} \quad \left(\frac{-1}{2}\right)^5=\frac{-1}{32}$$

همچنین می‌دانید که اگر a عددی غیر صفر باشد، $a^0=1$.

آیا توان منفی یک عدد (ناصفر) هم معنی دارد؟ مثلاً حاصل 2^{-3} چیست؟ به کمک فعالیت زیر

پاسخ این سؤال را می‌توان پیدا کرد:

فعالیت

جدول زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید:

۱۶	۸	۴	۲	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{16} = \frac{1}{2^4}$	$\frac{1}{32} = \frac{1}{2^5}$
2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}

$$14 \div 2 = 8$$

(الف) عددهای سطر اول جدول با هم چه ارتباطی دارد؟ هر عدد نصف عدد قبلی است

(ب) هر یک از عددهای سطر دوم چه رابطه‌ای با عدد بالای آن دارد؟ با آن برابر است

(ج) توان‌های عددهای سطر دوم تا 2^0 با یکدیگر چه رابطه‌ای دارد؟ در هر مرحله یک واحد از توان کم می‌شود

(د) این الگو را ادامه دهید و در جاهای خالی عددهای مناسب بنویسید. هشتم

(ه) به کمک جدول، تساوی‌های زیر را کامل کنید:

$$2^{-3} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} \quad 2^{-4} = \frac{1}{16} = \frac{1}{2^4} \quad 2^{-5} = \frac{1}{2^5}$$

به طور کلی اگر a یک عدد غیر صفر باشد و n یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

صغیر ۹۰/۱

توضیح صغیر ۹۰/۱

مثال:

الف) $7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$

ج) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^4} = \frac{1}{\frac{16}{81}} = \frac{81}{16}$

ب) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{25}} = 25$

د) $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

اگر n یک عدد صحیح منفی نباشد آن گاه $-n$ یک عدد طبیعی است

$$5^{-(-2)} = 5^2 \quad \left(\frac{3}{5}\right)^{-(-7)} = \left(\frac{3}{5}\right)^7 \quad \text{مثال}$$

نکته: چرا n نمی تواند یک عدد گویای مثبت باشد

$$(-5)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(-5)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{-5}} \notin \mathbb{R} \quad \text{مثال}$$

$\sqrt{-5}$ در مجموعه اعداد حقیقی جواب ندارد

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m, \quad \frac{a}{b} \neq 0, \quad b \neq 0, \quad m \in \mathbb{N}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \frac{1}{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{b^m}{a^m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{1}{\frac{2^3}{3^3}} = \frac{3^3}{2^3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \quad \text{مثال}$$

مثال: حاصل عبارتهای زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-7} \times \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \left(\frac{5}{2}\right)^7 \times \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \left(\frac{5}{2}\right)^{10}$$

$$\frac{2^{-7} \times 3^2}{2^3 \times 3^{-1}} = \frac{\frac{1}{2^7} \times 3^2}{2^3 \times \frac{1}{3^1}} = \frac{\frac{3^2}{2^7}}{\frac{2^3}{3^1}} = \frac{3^2 \times 3^1}{2^7 \times 2^3} = \frac{3^3}{2^{10}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{10}$$

کار در کلاس

۱- با توجه به مثال‌های حل شده زیر، پاسخ موارد بعدی را به صورت یک عدد توان دار با توان

طبیعی بنویسید:

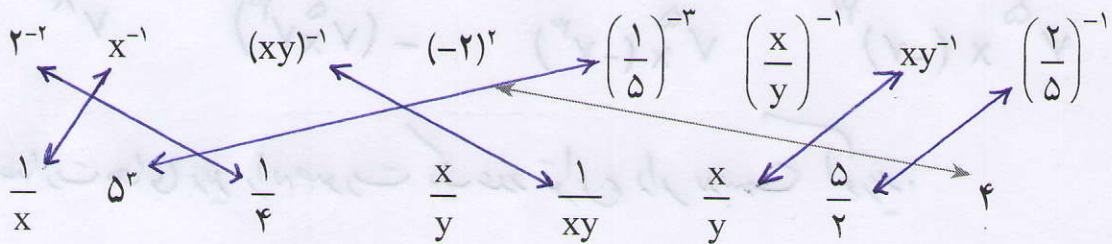
الف) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = \left(\frac{1}{5}\right)^2$

ب) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

ج) $(-6)^{-3} = \frac{1}{(-6)^3} = \frac{1}{-216} = \left(-\frac{1}{6}\right)^3$ د) $\left(-\frac{2}{7}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(-\frac{2}{7}\right)^4} = \frac{1}{\frac{16}{2401}} = \frac{2401}{16} = \left(\frac{7}{2}\right)^4 = \left(-\frac{7}{2}\right)^4$

به طور کلی اگر n یک عدد طبیعی و $a \neq 0$ آن گاه: $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$

۲- عبارت‌های برابر را مانند نمونه به هم وصل کنید: ($x \neq 0, y \neq 0$)



۳- حاصل هر عبارت را به ساده‌ترین صورت بنویسید:

الف) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4} = \left(-\frac{3}{1}\right)^4 = 3^4$

و) $1^{-2} = \frac{1}{1^2} = \frac{1}{1} = 1$

ب) $2^{-1} + 3^{-1} + 4^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6+4+3}{12} = \frac{13}{12}$

ز) $\frac{(-3)^0}{3} = \frac{1}{3}$

ج) $-(-5)^2 = -5^2 = -25$

ح) $-\frac{1}{2^{-2}} = -\frac{1}{\frac{1}{2^2}} = -2^2 = -4$

د) $-(-5)^{-2} = -\frac{1}{(-5)^2} = -\frac{1}{25}$

ط) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} + \frac{25}{4} = \frac{50}{4}$

ه) $-5^{-2} = -\frac{1}{5^2} = -\frac{1}{25}$

ی) $2^0 - 2^{-1} = 1 - \frac{1}{2^1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

نکته: اگر عدد منفی به توان فرد برسد حاصل عددی منفی است و اگر عدد منفی به توان زوج برسد حاصل عددی مثبت است

$$(-a)^{2k} = a^{2k} \quad , \quad (-a)^{2k+1} = -a^{2k+1} \quad , \quad (k \in \mathbb{Z})$$

* در صورتی که $a=0$ باشد توان نباید صفر باشد

$$(-1)^{100} = 1 \quad , \quad (-1)^{101} = -1$$

مثال:

حاصل عبارات زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$(-5)^8 \times 5^{21} = 5^8 \times 5^{21} = 5^{29}$$

$$\frac{(-3)^{11} \times (-3)^7}{2^9 \times (-2)^{12}} = \frac{(-3)^{18}}{2^9 \times 2^{12}} = \frac{3^{18}}{2^{21}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{18}$$

$$\frac{(-7)^{13} \times 7^k}{7^5 \times (-7)^3} = \frac{-7^{13} \times 7^k}{7^5 \times (-7^3)} = \frac{-7^{17}}{-(7^5 \times 7^3)} = \frac{7^{17}}{7^8} = 7^9$$

حاصل عبارات های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$\text{الف) } 10^5 \div 2^{-5} = 10^5 \div \frac{1}{2^5} = 10^5 \times 2^5 = 20^5$$

$$a^m \div b^{-m} = a^m \times b^m = (ab)^m$$

نتیجه

$$\text{ب) } \frac{5^1 \div 2^3}{2^{-3} \div 5^{-3}} = \frac{5^1 \times 2^{-3}}{2^{-3} \times 5^{-3}} = \frac{5^1}{5^{-3}} = 5^4$$

$$\text{ج) } \frac{7^2 \div 3^{-k}}{3^{-k} \times 7^6} = \frac{7^2 \times 3^k}{3^{-k} \times 7^6} = \frac{3^k \times 3^k}{7^2 \times 7^6} = \frac{3^1}{7^8} = \left(\frac{3}{7}\right)^8$$

$a^m \times a^n = a^{m+n}$ اگر m و n دو عدد طبیعی، و a یک عدد دلخواه باشد، داریم:

آیا این رابطه برای توان‌های منفی هم درست است؟ برای توان‌های صحیح چه رابطه‌ای داریم؟ با فعالیت بعدی می‌توان رابطه را برای عددهای صحیح هم حدس زد.

فعالیت

به حاصل ضرب‌های زیر توجه کنید، چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$3^{-4} \times 3^6 = \frac{1}{3^4} \times 3^6 = \frac{3^6}{3^4} = 3^{6-4} = 3^2$$

$$2^{-5} \times 2^{-2} = \frac{1}{2^5} \times \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^{5+2}} = \frac{1}{2^7} = 2^{-7}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{-5} = (-2)^3 \times (-2)^5 = (-2)^8 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-8}$$

حاصل ضرب مقابل را نیز به همین روش به دست آورید:

$$5^3 \times 5^{-7} = \dots$$

در حالت کلی اگر m و n دو عدد صحیح باشد و a یک عدد دلخواه (غیر صفر)، رابطه

زیر برقرار است:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

صغی ۲۲/۱

مثال:

$$2^3 \times 2^{-5} \times 2^{-4} = 2^{3-5-4} = 2^{-6}$$

$$(2x^{-1}) \times (3x^4) \times (4x^3) = 24x^{-1+4+3} = 24x^6 \quad (x \neq 0)$$

کار در کلاس

حاصل هر یک از عبارات زیر را به صورت یک عبارت توان دار بنویسید: ($b, x, y \neq 0$)

$$5^{-7} \times 5^{10} = 5^3 \quad (-4)^{-9} \times (-4)^{-1} = (-4)^{-10} = 4^{-10} = \left(\frac{1}{4}\right)^{10}$$

$$\left(\frac{-3}{8}\right)^4 \times \left(\frac{-3}{8}\right)^{-9} = \left(-\frac{3}{8}\right)^{-5} = \left(-\frac{8}{3}\right)^5 \quad (\sqrt{2})^4 \times (\sqrt{2})^{-2} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

$$b^{-2} \times b^{-7} = b^{-9} = \left(\frac{1}{b}\right)^9 \quad \left(\frac{x}{y}\right)^{-7} \times \left(\frac{x}{y}\right)^{11} = \left(\frac{x}{y}\right)^4$$

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

چرا m و n باید عدد صحیح باشد

مثال ۱: $(-5)^{\frac{1}{2}} \times (-5)^{\frac{1}{2}} = (-5)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = (-5)^1 = -5$

مردانه $\sqrt{-5} \notin \mathbb{R}$
 $(-5)^{\frac{1}{2}} \times (-5)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-5} \times \sqrt{-5}$

$$(-5)^{\frac{1}{2}} \times (-5)^{\frac{1}{2}} = (-5 \times (-5))^{\frac{1}{2}} = 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$$

اگر m و n متعلق به اعداد صحیح نباشند نمی توانیم از این دستور استفاده کنیم

نتیجه مهم

مثال ۲: $(-3)^{\frac{1}{2}} \times (-3)^{\frac{3}{2}} = (-3)^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = (-3)^2 = (-3)^2 = 9$

در صورتی که $(-3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-3}$ که در مجموعه اعداد حقیقی تعریف نشده است

حاصل عبارت های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$(-7)^{12} \times (-7)^4 \times (-7)^5 = (-7)^{12+4+5} = (-7)^{21}$$

$$(-\frac{3}{10})^6 \times (-\frac{3}{10})^4 = (-\frac{3}{10})^{10} = (\frac{3}{10})^{10} = \frac{3^{10}}{10^{10}}$$

$$(-1\frac{4}{5})^7 \times (-\frac{9}{5})^7 \times (-1\frac{1}{8})^{12} = (-1\frac{1}{8})^{7+7+12} = (-1\frac{1}{8})^{26} = 1\frac{1}{8}^{26}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}, \quad a \neq 0, \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

چرا m و n باید عدد صحیح باشد

$$\left((-4)^2\right)^{\frac{1}{2}} = (-4)^{2 \times \frac{1}{2}} = (-4)^1 = -4 \quad \times \quad \left(\text{با استفاده از دستور بالا}\right)$$

$$\left((-4)^2\right)^{\frac{1}{2}} = (34)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{34} = 6 \quad \checkmark$$

اگر a و b دو عدد مخالف صفر و m و n دو عدد صحیح باشد، روابط زیر برقرار است:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m \div a^n = a^{m-n} ; a^{-m} = \frac{1}{a^m} ; \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m ;$$

$$(a^m)^n = a^{mn} ; (ab)^m = a^m \cdot b^m ; a^0 = 1$$

کار در کلاس

الف) $\frac{v^3}{v^5} = v^{3-5} = v^{-2} = \left(\frac{1}{v}\right)^2$ ب) $2^{-2} \times 5^{-2} = (2 \times 5)^{-2} = 10^{-2} = \left(\frac{1}{10}\right)^2$

ج) $\left(\frac{-2}{3}\right)^{-2} \times 12^{-2} = \left(-\frac{2}{3} \times 12\right)^{-2} = (-8)^{-2}$ د) $\left[\left(\frac{-2}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} = \left(-\frac{2}{5}\right)^{(-2) \times (-1)} = \left(-\frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2$
 $= \left(-\frac{1}{8}\right)^2$

ه) $\frac{2^8 \times 5^0}{2^4 \times 5^6} = \frac{2^8}{2^4} \times \frac{5^0}{5^6} = 2^4 \times 5^{-6} = 10^{-2}$

و) $\frac{x^5 \cdot y^2 \cdot z}{x^{-2} \cdot y^7 \cdot z^3} = x^{5-(-2)} \cdot y^{2-7} \cdot z^{1-3} = x^7 y^{-5} z^{-2} = \frac{x^7}{y^5 z^2}$ $x, y, z \neq 0$

تمرین

۱- برای هر عبارت دو پاسخ داده شده است. پاسخ درست را با ذکر دلیل مشخص کنید.

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

الف) $3^{-2} \begin{cases} \frac{1}{9} \quad \checkmark \\ -6 \end{cases}$

$$3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$$

ب) $3^{-1} \begin{cases} \frac{1}{3} \quad \checkmark \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$

$$3^{-1} \times 4^{-1} = \frac{1}{3^1} \times \frac{1}{4^1} = \frac{1}{12^1} = 12^{-1}$$

ج) $3^{-1} \times 4^{-1} \begin{cases} 12^{-1} \quad \checkmark \\ 7^{-1} \end{cases}$

د) $3^{-1} + 4^{-1} \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \quad \checkmark \\ 7^{-1} \end{cases}$

ه) $5^{-2} \begin{cases} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{25} \quad \checkmark \end{cases}$

و) $3^{-1} \times 4^{-1} = (3 \times 4)^{-1} = 12^{-1}$

ز) $(-2)^3 \begin{cases} 3^{-2} \\ -8 \quad \checkmark \end{cases}$

ح) $3^{-1} + 4^{-1} = \frac{1}{3^1} + \frac{1}{4^1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

ط) $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$

ث) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

حاصل عبارات های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید

$$[12^9 \div (\frac{2}{3})^9] \div 2^9 = (12 \times \frac{3}{2})^9 \div 2^9 = 18^9 \div 2^9 = 9^9$$

$$\frac{(1^7 \times 3^7) \div 24^2}{(2^3 \div 7 \times 5^3) \times 3^3} = \frac{24^7 \div 24^2}{1^3 \times 3^3} = \frac{24^5}{24^3} = 24^2$$

$$2^7 \times 20^4 \times 15^7 \times 3^4 = (2^7 \times 15^7) \times (20^4 \times 3^4) = 40^7 \times 40^4 = 40^{11}$$

$$\frac{17^{15} \times 15^{13}}{15^{20} \times 17^1} = \frac{17^{15} \times 15^{13}}{17^1 \times 15^{20}} = \frac{17^{15}}{17^1} \times \frac{15^{13}}{15^{20}} = 17^4 \times 15^{-7} = \frac{17^4}{1} \times \frac{1}{15^7}$$

$$= \frac{17^4}{15^7} = (\frac{17}{15})^4$$

روش دوم

$$\frac{17^{15} \times 15^{13}}{15^{20} \times 17^1} = \frac{17^4}{15^7} = (\frac{17}{15})^4$$

حاصل هر عبارت را بدست آورید

$$(0.05)^{-4} = \frac{1}{(0.05)^4} = \frac{1}{(\frac{5}{100})^4} = (\frac{1}{\frac{5}{100}})^4 = 20^4 = 160,000$$

$$10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10000} = 0.0001$$

توان منفی از اعداد کوچک نسبت اعداد بزرگ می سازد و از اعداد بزرگ نسبت اعدادی کوچک بین او صفر تولید می کند

نتیجه مهم:

اگر $2^a = 10$ باشد حاصل عبارات زیر را بدست آورید

الف) $2^{a+3} = 2^a \times 2^3 = 10 \times 8 = 80$ ب) $2^{a-1} = \frac{2^a}{2^1} = \frac{10}{2} = 5$

$2^a = 10$

$$100 \text{ kg} = 100 \times 1000 \text{ g} = 10^2 \times 10^3 = 10^5 \text{ گرم}$$

$$10^5 \div 10^0 = 10^5 = 10^5 \quad 10^5 - (-24) = 10^{5+24} = 10^{29}$$

۲- جرم یک اتم هیدروژن حدود 10^{-24} گرم است. جرم یک وزنه 100 کیلوگرمی چند برابر

جرم یک اتم هیدروژن است؟ **ما برابر جرم یک اتم هیدروژن است**

۳- عددهای 16^4 و 8^4 و 2^{11} را با یکدیگر مقایسه کنید. **صفر ۴۴/۱**

۴- در جاهای خالی علامت $>$ ، $<$ ، یا $=$ قرار دهید:

الف) $3^{-1} \otimes 3^{-2}$
 $\frac{1}{3} > \frac{1}{9}$

ب) $2^{-5} \otimes 2^{-6}$
 $1 > \frac{1}{32}$

ج) $(0/5)^{-2} \otimes (0/6)^{-2}$
 $(\frac{5}{0})^{-2} = (\frac{1}{0})^{-2} = 2^2 = 4 \otimes (\frac{6}{0})^{-2} = (\frac{0}{6})^2 = \frac{0}{36} = \frac{25}{9}$

د) $5^{-1} \otimes 0$
 $\frac{1}{5} > 0$

ه) $(\frac{-8}{15}) \otimes 1$

و) $5^{-2} \otimes (-5)^{-2}$
 عدد مثبت \otimes عدد منفی

۵- در هر یک از تساوی های زیر x چه عددی است؟

الف) $5^x \times 5^{-2} = 5^2 \Rightarrow x = 7$

ب) $5^x \div 5^{-2} = 5^2 \quad x - (-2) = 2 \Rightarrow x = 1$

۶- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

الف) $a^2 \times a^5 = a^7$ **درست**

ه) $(-3)^0 + (3^{-1})^{-1} = 4$ **درست** $1 + 3 = 4$

ب) $a^2 \times a^5 = a^7$ **درست**

و) $3^{-1} \times 4^{-1} = 12^{-2}$ **نادرست**

ج) $(a^m)^n = (a^n)^m \quad a > 0$ **درست (صفر ۴۴/۱)**

ز) $6^{-2} = -\frac{2}{6}$ **نادرست**

د) $3^{-2} = -9$ **نادرست**

ح) $3^{-1} < 3^{-1}$ **درست**

۷- حاصل هر عبارت را به دست آورید. **صفر ۴۴/۱**

الف) $(\frac{1}{3})^{-1} \times 27^{-3} = 3^{10}$

ب) $(0/2)^{-2} \times 25^{-2}$

ج) $(\frac{15}{14})^{-2} \times (\frac{45}{28})^2$

د) $(-5^{-2})^{-1}$

۸- عددهای داده شده را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

2^{-2} و 1^{-9} و $(-1)^{21}$ و $(-7)^2$ و $(-\frac{1}{2})^{-2}$ و 2^2 و 5^{-2} و 2^{-2}

۹- عبارت نادرست را مشخص کنید.

$(0/987)^0 < 1^0$ **درست** $(1/2)^7 < (1/0.2)^7$ **نادرست** $(\frac{5}{4})^2 < (0/7)^2$ **نادرست** $(\frac{3}{4})^2 > (0/75)^2$ **درست**

۱۰- حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{(\frac{2}{3})^3 \times (\frac{8}{3})^{-3}}{-2^5 \times 2^{-8}}$

ب) $\left[-\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \right]^{-1} = \left[-\left(\frac{3}{2}\right)^2 \right]^{-1} = \left(-\frac{9}{4} \right)^{-1} = -\frac{4}{9}$

$= \frac{(\frac{2}{3})^3 \times (\frac{3}{8})^3}{-(2^5 \times 2^{-8})} = \frac{(\frac{2}{3} \times \frac{3}{8})^3}{-2^{-3}} = \frac{(\frac{1}{4})^3}{-2^{-3}} = -2^3 \times (\frac{1}{4})^3 = -(2 \times \frac{1}{4})^3$ **۶۴**

$= -(\frac{1}{4})^3 = -(\frac{1}{4})^3$

$$8^k = (2^3)^k = 2^{12}, \quad 16^k = (2^4)^k = 2^{16} \Rightarrow 2^{11} < 8^k = 16^k$$

۶- به طور کلی نمی توانیم اعداد کنیم

$$(a^m)^n = (a^n)^m \text{ است}$$

$$\left((-3)^{\frac{1}{4}}\right)^2 \neq \left((-3)^2\right)^{\frac{1}{4}}$$

زیرا:

طرف اول (سمت چپ) در مجموعه اعداد حقیقی تعریف نشده است

$$\left(-3\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{-3} \notin \mathbb{R}$$

زیرا عدد -3 در مجموعه اعداد حقیقی ریشه ی دوم ندارد

و سمت راست برابر 3 می شود

$$\left((-3)^2\right)^{\frac{1}{4}} = \left(+9\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{9} = 3$$

$$\left(\left(-3\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2 = -3$$

حاصل سمت چپ برابر -3 می شود

نتیجه

در سال های آینده علت این که حاصل برابر -3 می شود را می خوانید

الف) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-10} \times 27^{-3} = 3^{10} \times (3^3)^{-3} = 3^{10} \times 3^{-9} = 3^1 = 3$

ب) $\left(\frac{5}{2}\right)^{-k} \times 25^{-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-k} \times \left(\frac{1}{25}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^k \times \left(\frac{1}{5}\right)^k = \left(2 \times \frac{1}{5}\right)^k = 1^k = 1$

ج) $\left(\frac{15}{14}\right)^{-k} \times \left(\frac{14}{15}\right)^k = \left(\frac{14}{15}\right)^k \times \left(\frac{14}{15}\right)^k = \left(\frac{14}{15} \times \frac{14}{15}\right)^k = \left(\frac{196}{225}\right)^k$

د) $\left(-5^{-2}\right)^{-1} = \left(-\frac{1}{5^2}\right)^{-1} = \left(-\frac{1}{25}\right)^{-1} = (-25)^1 = -25$

$$(-1)^{21} = -1 < -2^{-k} = -\frac{1}{16} < 5^{-3} = \frac{1}{125} < 2^{-3} = \frac{1}{8} < 1^{-90} = 1 < \left(-\frac{1}{4}\right)^{-2} = 4 < 2^3 = 8 < (-7)^2 = 49$$

$$(0.987)^{10} < 1^0 \Rightarrow (0.987)^{10} < 1$$

$$1.2 > 1.02 \Rightarrow (1.2)^7 > (1.02)^7$$

$$\frac{5}{4} > 0.7 \Rightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^2 > (0.7)^2$$

$$\frac{3}{4} = 0.75 \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^2 > (0.75)^2$$

۱ آیا تساوی $(-7^2)^3 = (-7^3)^2$ درست است؟

$$(-7^2)^3 = (-49)^3 = -117649$$

$$(-7^3)^2 = (-343)^2 = 117649$$

جواب: خیر زیرا

در واقع عدد $(-7^3)^2$ عددی مثبت و عدد $(-7^2)^3$ عددی منفی است

۲ اگر a عددی مثبت و m, n اعدادی صحیح باشند و $m > n$

الف) $0 < a < 1 \Rightarrow a^m < a^n$

ب) $a = 1 \Rightarrow a^m = a^n$

ج) $a > 1 \Rightarrow a^m > a^n$

$$\dots < \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} < \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} < \left(\frac{1}{4}\right)^0 < \frac{1}{4} < \left(\frac{1}{4}\right)^1 < \left(\frac{1}{4}\right)^2 < \left(\frac{1}{4}\right)^3 < \left(\frac{1}{4}\right)^4 < \dots$$

نتیجه: هرچه قدر توان عدد $\frac{1}{4}$ بزرگ تر می شود حاصل کوچک تر و هرچه قدر توان آن کوچک تر می شود حاصل عددی بزرگ تر است.

۳ حاصل عبارت زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید

$$[(14^3)^2]^3 = 14^{3 \times 2 \times 3} = 14^{18} = (2^4)^{18} = 2^{72}$$

۴ حاصل عبارات $(5^2)^3$ و 5^{2^3} را به صورت یک عدد توان دار بنویسید

(زیر عدد $2^3 = 8$ است) $5^{2^3} = 5^8$ و $(5^2)^3 = 5^{2 \times 3} = 5^6$

$$(5^2)^3 = 5^2 \times 5^2 \times 5^2 = 5^{2+2+2} = 5^{2 \times 3} = 5^6$$

$$5^{2^3} = 5^{2 \times 2 \times 2} = 5^8$$

$$a^m \neq (a^m)^n$$

نتیجه مهم

۵- اعداد 2^{43} و 3^{42} را با هم مقایسه کنید

$$2^{43} = (2^3)^{14} = 8^{14} \quad \text{و} \quad 3^{42} = (3^2)^{21} = 9^{21}$$

$$\Rightarrow 9^{21} > 8^{21} \Rightarrow 3^{42} > 2^{43}$$

۲- حاصل عبارتهای زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$1) \frac{\Lambda^{-11} \times (\frac{1}{2})^{-3}}{2^{-9} \times 4^5} = \frac{(2^3)^{-11} \times (\frac{1}{2})^{-3}}{2^{-9} \times (2^2)^5} = \frac{2^{-33} \times 2^3}{2^{-9} \times 2^{10}} = \frac{2^9 \times (2^2)^3}{2^{33} \times 2^{10}} = \frac{2^9 \times 2^6}{2^{43}} = \frac{2^{15}}{2^{43}} = 2^{-28} = (\frac{1}{2})^{28}$$

$$2) 2^7 + 2^7 + 2^7 = 3 \times 2^7 = 3^1 \times (3^3)^2 = 3 \times 3^6 = 3^7$$

$$3) 10 \times 2^{14} + 12 \times 2^{14} + 3 \times 2^{14} = (10+12+3) \times 2^{14} = 25 \times 2^{14} = 5^2 \times 2^2 \times 2^{14} = 5^2 \times 2^{16} = 10 \times 2^{16}$$

$$4) \frac{120^{11} \times 10^{-4} \times (\frac{1}{2})^{14}}{20^5 \times 4^{-5} \times (\frac{1}{2})^{-2}} = \frac{(2^3 \times 3 \times 5)^{11} \times (2^2 \times 5)^{-4} \times 2^{14} \times 2^{-14}}{(2^2 \times 5)^5 \times (2 \times 3)^{-5} \times 2^2} = \frac{2^{33} \times 3^{11} \times 5^{11} \times 2^{-14} \times 5^{-4} \times 2^{14} \times 2^{-14}}{2^{10} \times 5^5 \times 2^{-5} \times 3^5 \times 2^2} = \frac{2^{33+(-14)+14} \times 3^{11+(-14)} \times 5^{11+(-4)}}{2^{10+(-5)} \times 5^5 \times 3^5 \times 2^2} = \frac{2^{33} \times 3^{-3} \times 5^7}{2^7 \times 5^5 \times 3^5 \times 2^2} = \frac{2^{33} \times 5^7}{2^9 \times 5^5 \times 3^5} = \frac{2^{24} \times 5^2}{3^5} = 2^8 \times 5^2 \times 3^{-5}$$

$$5) 2^{22} \times 3^{33} = 2^{2 \times 11} \times 3^{3 \times 11} = (2^2)^{11} \times (3^3)^{11} = 4^{11} \times 27^{11} = 108^{11}$$

$$6) 5 \times 2^{11} = 5^1 \times 2^{4 \times 2.75} = (5^1)^4 \times (2^{2.75})^4 = 5^4 \times 10^4 = 50000$$

$$7) \frac{14^4 \times 125^2}{25^2 \times 32^2} = \frac{(2^7)^4 \times (5^3)^2}{(5^2)^2 \times (2^5)^2} = \frac{2^{28} \times 5^6}{5^4 \times 2^{20}} = \frac{2^8 \times 5^2}{2^0 \times 5^0} = 2^8 \times 5^2 = 10000$$

اگر عددی را در توانی از ۱۰ ضرب کنیم، اگر توان مثبت باشد به تعداد توان عدد ۱۰، همیزه سمت راست تغییر مکان می‌دهد و اگر آن را بر توانی از ۱۰ تقسیم کنیم (توان مثبت) به تعداد توان عدد ۱۰، همیزه سمت چپ تغییر مکان خواهد داد

درس دوم: نماد علمی

فعالیت

۱- در جدول زیر تعدادی عدد داده شده و حاصل ضرب آنها در توان‌های 10^0 یا حاصل تقسیم آنها بر توان‌های 10^0 خواسته شده است. جاهای خالی را پر کنید و توضیح دهید که هنگام ضرب یا تقسیم، مکان ممیز چگونه تغییر می‌کند؟

عدد	تقسیم بر 10^0	ضرب در 10^0	تقسیم بر 10^1	ضرب در 10^1	تقسیم بر 10^2	ضرب در 10^2	تقسیم بر 10^3	ضرب در 10^3
۱۵	15	15	1.5	150	0.15	1500	0.0015	15000
0.02	0.02	0.02	2	0.0002	20	0.00002	2000	0.0000002
$9/3$	93	93	0.93	9300	0.0093	93000	0.000093	930000

۲- سرعت نور $300,000,000$ متر بر ثانیه است. فاصله‌ای که نور در 100 ساعت می‌پیماید، چند متر است؟ راه حل این مسئله در ادامه داده شده است. توضیح دهید که حل چگونه به دست آمده است.

فاصله‌ای که نور در 100 ساعت می‌پیماید $= 300,000,000 \times 360000 = 3 \times 10^8 \times 3.6 \times 10^5 = 108 \times 10^{13} = 1.08 \times 10^{14}$ متر است.
 ثانیه $3600 = 1$ ساعت
 ثانیه $360000 = 100$ ساعت

واضح است که ضرب دو عدد بالا به این صورت دشوار است. در محاسبات ریاضی ابتدا هر کدام از این عددها را به صورت یک عدد اعشاری مثبت با یک رقم صحیح در توانی از عدد 10 نمایش می‌دهند که آن را «نماد علمی» آن عدد می‌گویند، بنابراین:

$$300,000,000 = 3 \times 10^8$$

$$\Rightarrow 3 \times 10^8 \times 3.6 \times 10^5 = 108 \times 10^{13} = 1.08 \times 10^{14}$$

$$360000 = 3.6 \times 10^5$$

دقت کنید که حاصل ضرب نیز با نماد علمی نمایش داده شده است. این گونه نمایش به جز سادگی در نوشتن، محاسبات را آسان‌تر می‌کند و در ضمن نوعی نظم و هماهنگی در نمایش عددهای بزرگ (یا کوچک) به شمار می‌آید.

نماد علمی

مثال :

$$۱۲۴۰۰۰۰ = ۱/۲۴ \times ۱۰^۵$$

$$۱۷۰۰۰۰۰۰۰۰ = ۱/۷ \times ۱۰^۹$$

$$۱۳۹۳ = ۱/۳۹۳ \times ۱۰^۳$$

$$۹۲۰۴۰۰۰۰ = ۹/۲۰۴ \times ۱۰^۶$$

$$۱۲۵/۳۹ = ۱/۲۵۳۹ \times ۱۰^۲$$

قطر متوسط یک سلول گلبول قرمز $۰/۰۰۰۰۰۰۷$ میلیمتر است. همانند عددهای بزرگ، عددهای

کوچک مانند $۰/۰۰۰۰۰۰۷$ را هم می توان به صورت نماد علمی نمایش داد؛ یعنی :

$$۰/۰۰۰۰۰۰۷ = ۷ \times ۱۰^{-۶}$$

ضخامت یک برگه کاغذ حدود $۰/۰۰۱۶$ سانتیمتر است که با نماد علمی، آن را به صورت

$$۱/۶ \times ۱۰^{-۲}$$
 نمایش می دهیم.

به طور کلی نماد علمی هر عدد اعشاری مثبت به صورت $a \times ۱۰^n$ است که در آن

$۱ \leq a < ۱۰$ و n عددی صحیح است.

$$۰/۰۰۰۰۰۱۲۷۵ = ۱/۲۷۵ \times ۱۰^{-۵}$$

$$۱۲۳ = ۱/۲۳ \times ۱۰^۲$$

مثال :

$$۰/۰۱۳۷ = ۱/۳۷ \times ۱۰^{-۲}$$

$$۲۹۰۰۰۰ = ۲/۹ \times ۱۰^۴$$

کار در کلاس

۱- هر یک از عددهای داده شده را با نماد علمی نمایش دهید :

$$۲۴۵۰۰۰۰ = ۲,۴۵ \times ۱۰^۵$$

$$۱۵۰,۰۰۰,۰۰۰ = ۱,۵ \times ۱۰^۸$$

$$۰/۰۰۰۵ = ۵ \times ۱۰^{-۳}$$

$$۰/۰۰۰۰۰۶۱ = ۶,۱ \times ۱۰^{-۵}$$

$$۱۴۰۴ = ۱,۴۰۴ \times ۱۰^۳$$

$$۰/۱۲۷۵ = ۱,۲۷۵ \times ۱۰^{-۱}$$

۲- نمایش اعشاری عددهای زیر را بنویسید :

$$۵/۲ \times ۱۰^{-۳} = ۰,۰۰۵۲$$

$$۷/۳۰۴ \times ۱۰^{-۵} = ۰,۰۰۰۰۷۳۰۴$$

$$۲/۲۸ \times ۱۰^۸ = ۲۲۸,۰۰۰,۰۰۰$$

$$۹/۴۶۱۲ \times ۱۰^۹ = ۹,۴۶۱,۲۰۰,۰۰۰$$

$$۶/۰۲ \times ۱۰^{-۲} = ۰,۰۴$$

$$۱/۱ \times ۱۰^۴ = ۱۱۰۰۰$$

تمرین

۱- حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید :

الف) $\frac{3^{-5} \times 10^{-5} \times 25}{4^{-5} \times 15^{-5}}$

ب) $\frac{8^{-1} \times 4^2}{2^{-4} \times \frac{1}{8}}$

۲- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

$1/0.2 \times 10^{-5} = 0.00000102$

$5/9 \times 10^{-1} = 0.59$

$4/3 \times 10^2 = 4300$

$7/0.04 \times 10^{-2} = 0.7004$

$6/18 \times 10^7 = 61800000$

$8/2570 \times 10^4 = 82570$

۳- شعاع خورشید تقریباً 695000 کیلومتر است؛ این عدد را با نماد علمی نمایش دهید. 6.95×10^5

۴- اندازه یک باکتری 5×10^{-7} متر است؛ این عدد را با نماد علمی نمایش دهید. 5×10^{-7}

۵- قطر خورشید حدود $1/4 \times 10^9$ متر و قطر زمین حدود $1/3 \times 10^7$ متر است. قطر خورشید

تقریباً چند برابر قطر زمین است؟ $47,1$ بقیه

۶- حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید و به صورت نماد علمی نمایش دهید :

$2 \times 10^{-7} \times 4 \times 10^9$

$\frac{12/5 \times 10^{-4}}{25 \times 10^{-19}}$

$47,1$ بقیه

۷- فاصله مریخ از زمین $9/17 \times 10^7$ کیلومتر و فاصله کیوان از زمین $6/287 \times 10^8$ کیلومتر

است. با مقایسه این دو عدد مشخص کنید کدام سیاره به زمین نزدیک تر است؟

۸- در جاهای خالی حداقل ۳ عدد صحیح مختلف قرار دهید تا نامساوی درست باشد.

$2/7 \times 10^0 > 0.2$

$0.3 > 0.003 \times 10^0$

۹- عددهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید :

$1/5 \times 10^{-2}$, $1/2 \times 10^6$, $5/35 \times 10^{-3}$, $3/7 \times 10^{-2}$

$$\text{الف) } \frac{3^{-5} \times 10^{-5} \times 25}{4^{-5} \times 10^{-5}} = \frac{30^{-5} \times 5^2}{40^{-5}} = \left(\frac{30}{40}\right)^{-5} \times 5^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^{-5} \times 25 = \underline{\underline{1}}$$

$$= 2^5 \times 25 = 32 \times 25 = 100$$

$$\text{ب) } \frac{1^{-1} \times 4^2}{2^{-4} \times \frac{1}{1}} = \frac{2^4 \times (2^2)^2}{1 \times 1^{-1}} = \frac{2^4 \times 2^4}{1^0} = \frac{2^8}{1} = 256$$

$$\frac{\text{قطر خورشید}}{\text{قطر زمین}} = \frac{1,4 \times 10^9}{1,3 \times 10^7} = \frac{14 \times 10^8}{13 \times 10^6} = \frac{14}{13} \times 10^2 \approx 1,07 \times 10^2 = 107$$

قطر خورشید 107 برابر زمین است

$$2 \times 10^{-2} \times 4 \times 10^9 = 8 \times (10^{-2} \times 10^9) = 8 \times 10^7$$

$$\frac{12,5 \times 10^{-4}}{25 \times 10^{-19}} = \frac{125 \times 10^{-5}}{25 \times 10^{-19}} = 5 \times \frac{10^{19}}{10^5} = 5 \times 10^{14}$$

$$9,287 \times 10^8 = 92,87 \times 10^7 \Rightarrow 9,17 \times 10^7 \Rightarrow \text{مربخ به زمین نزدیک تر است}$$

$$0,02 < 2,7 \times 10^{-2} < 2,7 \times 10^{-1} < 2,7 \times 10^0 < 2,7 \times 10^1 < 2,7 \times 10^2 < \dots$$

$$0,0003 > 0,003 \times 10^0 > 0,003 \times 10^1 > 0,003 \times 10^2 > 0,003 \times 10^3 > \dots$$

$$1,5 \times 10^{-2} = 15 \times 10^{-3}, \quad 1,2 \times 10^4 = 1,200,000, \quad 5,35 \times 10^{-3}$$

$$3,7 \times 10^{-2} = 37 \times 10^{-3}$$

$$5,35 \times 10^{-3} < 15 \times 10^{-3} < 37 \times 10^{-3} < 1,200,000$$

$$\Rightarrow 5,35 \times 10^{-3} < 1,5 \times 10^{-2} < 3,7 \times 10^{-2} < 1,2 \times 10^4$$

فعالیت

۱- حاصل هر یک از عبارات های زیر را مانند نمونه ها به دست آورید :

$$(-3)^2 = 9 \quad (\sqrt{5})^2 = 5 \quad \left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49} \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$(-\sqrt{5})^2 = 5 \quad \left(-\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49} \quad 4^2 = 16 \quad (-4)^2 = 16$$

مربع (توان دوم) عددها ۳ و -۳ برابر ۹ است. اعداد ۳ و -۳ را ریشه های دوم عدد ۹ می نامند. همان گونه که در سال های گذشته دیده اید، ریشه های دوم ۹ را با $\sqrt{9}$ و $-\sqrt{9}$ نمایش می دهند و داریم:

$$\sqrt{9} = 3 \quad \text{و} \quad -\sqrt{9} = -3$$

۲- جاهای خالی را در جدول زیر کامل کنید :

عدد	۳	-۳	۴	-۴	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\sqrt{5}$	$-\sqrt{5}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\sqrt{4}$	$-\sqrt{4}$
مربع عدد (توان دوم)	۹		۱۶		$\frac{4}{9}$		۵		$\frac{1}{49}$		۶	

ریشه های دوم عدد $\frac{4}{9}$ ، اعداد $\frac{2}{3}$ و $-\frac{2}{3}$ هستند. ریشه های دوم ۷، عددهای $\sqrt{7}$ و $-\sqrt{7}$ هستند. ریشه دوم صفر، همان صفر است و داریم $\sqrt{0} = 0$.

به طور کلی اگر b یک عدد حقیقی مثبت باشد، \sqrt{b} و $-\sqrt{b}$ را ریشه های دوم b می نامند. همان طور که می دانید عددهای منفی ریشه دوم ندارند.

۳- جاهای خالی را در جدول زیر کامل کنید.

عدد	۲	-۲	۳	-۳	۴	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{2}$	۵	$-\frac{2}{3}$	۰
مکعب عدد (توان سوم)	۸	-۸	۲۷	-۲۷	۶۴	$\frac{1}{125}$	$-\frac{1}{8}$	۱۲۵	$-\frac{8}{27}$	۰

مکعب (توان سوم) عدد ۲ برابر ۸ است؛ یعنی $2^3=8$. ریشه سوم عدد ۸ عددی است که وقتی به توان ۳ برسد، برابر ۸ می شود؛ پس، ریشه سوم عدد ۸ برابر ۲ است و می نویسیم $\sqrt[3]{8}=2$. همچنین چون $(-2)^3=-8$ ریشه سوم عدد ۸ برابر ۲- است و می نویسیم $\sqrt[3]{-8}=-2$ ؛ به عبارت دیگر با اینکه عددهای منفی ریشه دوم ندارند، ولی ریشه سوم دارند. به کمک جدول قبل دیده می شود که ریشه سوم عدد ۶۴ برابر $\sqrt[3]{64}=4$... و ریشه سوم عدد $-\frac{1}{27}$ عدد $-\frac{1}{3}$ است.

۴- طرف دوم تساوی های زیر را بنویسید:

$$(\sqrt[3]{8})^3 = 8 \quad \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2} \quad \sqrt[3]{125} = 5 \quad \sqrt[3]{-27} = -3$$

به طور کلی اگر b یک عدد حقیقی باشد، ریشه سوم آن را با $\sqrt[3]{b}$ نمایش می دهیم.

هر عدد فقط یک ریشه سوم دارد.

کار در کلاس

۱- حاصل هر عبارت را به دست آورید:

$$\sqrt{81} = 9 \quad \sqrt{4^2} = 4 \quad \sqrt{(-4)^2} = |-4| = 4 \quad \sqrt[3]{-1} = -1$$

$$\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{3}{5} \quad \sqrt[3]{6^3} = 6 \quad \sqrt[3]{-\frac{8}{1000}} = -\frac{2}{10} \quad \sqrt[3]{(-7)^3} = -7$$

۲- به کمک رابطه $\sqrt{x^2} = |x|$ ، که در فصل ۲ آموخته اید، حاصل عبارت های زیر را به دست آورید:

$$\sqrt{(-6)^2} = |-6| = 6 \quad \sqrt{8^2} = |8| = 8 \quad \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \left|-\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5}$$

$$\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1 \quad \sqrt{(2-9)^2} = |2-9| = |-7| = 7 \quad \sqrt{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \left|1-\frac{1}{3}\right| = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

۳- حاصل عبارت $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}$ را در هر یک از حالت های زیر به دست آورید؛ یکی از حالت ها

حل شده است.

الف) x و y هر دو مثبت هستند ($x > 0, y > 0$). $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| = x + y$

ب) x مثبت و y منفی است ($x > 0, y < 0$). $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| = x - y$

ج) x منفی و y مثبت است ($x < 0, y > 0$). $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| = -x + y$

د) x و y هر دو منفی هستند ($x < 0, y < 0$). $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| = -x - y$

۱- حاصل را بدست آورید

$$\text{الف) } \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} = \underbrace{|\sqrt{3}-\sqrt{2}|}_{\text{مثبت}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$\text{ب) } \sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} = \underbrace{|\sqrt{2}-\sqrt{3}|}_{\text{منفی}} = -(\sqrt{2}-\sqrt{3}) = -\sqrt{2}+\sqrt{3} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$\text{ج) } \sqrt[3]{(2-\sqrt{5})^3} = 2-\sqrt{5}$$

$$\text{د) } \sqrt{(x-1)^2} = |x-1| = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ -(x-1) = -x+1 & x < 1 \end{cases}$$

۲- حاصل را بدست آورید

$$۱) \sqrt[4]{5^4} = |5| = 5$$

$$۲) \sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$$

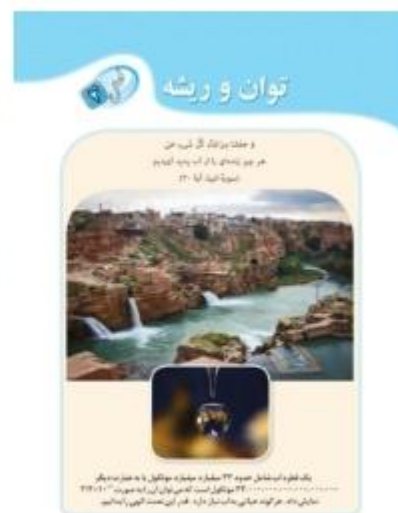
$$۳) \sqrt[4]{(-5)^4} = |-5| = 5$$

$$۴) \sqrt[6]{(2-\sqrt{5})^6} = |2-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-2$$

تهیه کننده : سعید جعفری صرمی

سرای ریاضی (خانه ی ریاضی)

<http://www.math-home.ir>



ضرب و تقسیم رادیکال‌ها

در سال گذشته برای دو عدد مثبت a و b رابطه‌های زیر را یاد گرفتید:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

به کمک فعالیت زیر می‌توان حدس زد که این روابط چگونه برای ریشه سوم برقرار است:

فعالیت

با توجه به عدد‌های داده شده a و b جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید. با مقایسه دو ستون آخر

جدول چه حدسی می‌زنید؟

a	$\sqrt[3]{a}$	b	$\sqrt[3]{b}$	ab	$\sqrt[3]{ab}$	$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$
۸	۲	۱۲۵	۵	۱۰۰۰	۱۰	$۲ \times ۵ = ۱۰$
۲۷	۳	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{۲۷}{۸}$	$\frac{۳}{۲}$	$۳ \times \frac{1}{۲} = \frac{۳}{۲}$
-۸	-۲	۲۷	۳	-۲۱۶	-۶	$-۲ \times ۳ = -۶$

به طور کلی برای هر دو عدد a و b داریم: $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$ ، همچنین اگر

$b \neq 0$ داریم:

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

کار در کلاس

۱- آیا تساوی زیر برقرار است؟ توضیح دهید.

$$\sqrt[3]{۸} + \sqrt[3]{۲۷} = \sqrt[3]{۸+۲۷}$$

خیر

می‌توانید از استدلال زیر برای بیان نادرست بودن این تساوی استفاده کنید.

«سمت چپ تساوی برابر ۵ می‌باشد، در حالی که سمت راست آن کمتر از ۴ است.»

$$\sqrt[3]{۸} + \sqrt[3]{۲۷} = ۲ + ۳ = ۵$$

$$\sqrt[3]{۸+۲۷} = \sqrt[3]{۳۵} < \sqrt[3]{۶۴} = ۴ \Rightarrow \sqrt[3]{۳۵} < ۵$$

۷۰

۲- در تساوی‌های زیر جاهای خالی را کامل کنید:

$$\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{44} = 4$$

$$3\sqrt{-2} \times 5\sqrt[3]{4} = 15\sqrt{-8} = 15 \times (-2) = -30$$

$$\sqrt{128} = \sqrt{64} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$\sqrt{20} = \sqrt{4} \times \sqrt{5}$$

$$\sqrt{\frac{125}{64}} = \frac{\sqrt{125}}{\sqrt{64}} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{\sqrt{-54}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{-54}{2}} = \sqrt{-27} = -3$$

تمرین

۱- ریشه‌های دوم عددهای زیر را بیابید:

$$\frac{49}{16}, \frac{1}{81}, 15, 144, 12, 18$$

۲- ریشه سوم عددهای زیر را به دست آورید:

$$216, 7^3, -5, -\frac{1}{216}, 10$$

۳- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟ صفحه ۷/۱

$\otimes \sqrt{(-1)^2} = -1$	$\checkmark \sqrt[3]{(-1)^3} = -1$	$\checkmark \sqrt{(-5)^2} = -5 = 5$	$\checkmark \sqrt[3]{(-5)^3} = -5$
$\checkmark -\sqrt{\frac{49}{256}} = -\frac{7}{16}$	$\checkmark \sqrt{1/44} = 1/2$	$\otimes (\sqrt{-1})^2 = 1$	$\checkmark \sqrt{-64} = -4$

$\sqrt{-1}$ تعریف نشده

۴- حاصل هر عبارت را به عدد مساوی آن در سطر دوم، وصل کنید:

$\sqrt[3]{125} \times \sqrt{36}$	$\sqrt{-1} \times \sqrt{81}$	$\sqrt[3]{\frac{81}{3}}$	$\sqrt{-25} \times \sqrt{5}$
$\rightarrow 30$	$\rightarrow 9$	$\rightarrow 3$	$\rightarrow -5$

$$\sqrt[3]{125} \times \sqrt{36} = 5 \times 6 = 30, \quad \sqrt{-1} \times \sqrt{81} = (-1) \times 9 = -9, \quad \sqrt[3]{\frac{81}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$$

$$\sqrt[3]{-25} \times \sqrt{5} = \sqrt[3]{-125} = -5$$

تقریب

$$\frac{49}{14} \xrightarrow{\text{ریشه ی دوم}} \frac{7}{2}, -\frac{7}{2}, \frac{1}{11} \xrightarrow{\text{ریشه ی دوم}} \frac{1}{9}, -\frac{1}{9}$$

1

$$15 \xrightarrow{\text{ریشه ی دوم}} \pm\sqrt{15}, 12 \xrightarrow{\text{ریشه ی دوم}} \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}, 144 \xrightarrow{\text{ریشه ی دوم}} \pm\sqrt{144} = \pm 12$$

$$144 \xrightarrow{\text{ریشه ی دوم}} \pm\sqrt{144} = \pm 12, 18 \xrightarrow{\text{ریشه ی دوم}} \pm\sqrt{18} = \pm 3\sqrt{2}$$

$$214 \xrightarrow{\text{ریشه ی سوم}} 6, \sqrt[3]{-5} \xrightarrow{\text{ریشه ی سوم}} \sqrt[3]{-5}, -5 \xrightarrow{\text{ریشه ی سوم}} \sqrt[3]{-5}$$

2

$$-\frac{1}{214} \xrightarrow{\text{ریشه ی سوم}} -\frac{1}{6}, 10 \xrightarrow{\text{ریشه ی سوم}} \sqrt[3]{10}$$

$$\sqrt{(-3)^2} = 3, (\sqrt{-3})^2 = \text{تعریف نکرده}$$

3

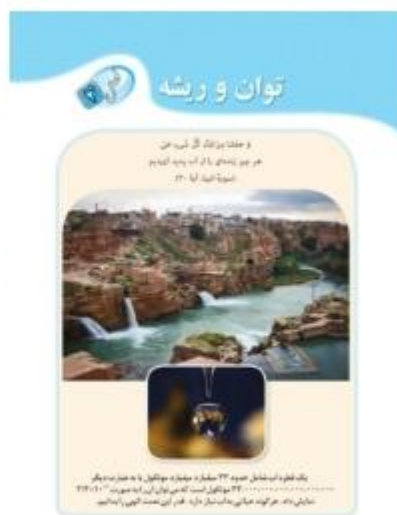
$$\sqrt{(-3)^2} \neq (\sqrt{-3})^2$$

نتیجه

تهیه کننده : سعید جعفری صرامی

سرای ریاضی (خانه ی ریاضی)

<http://www.math-home.ir>



۷۱/۱

۵- حداقل سه عدد صحیح مختلف مثال بزنید که اگر به جای a قرار دهیم، نامساوی زیر درست باشد:

$$\sqrt[3]{a} < \sqrt{4} \Rightarrow \sqrt[3]{a} < 2 \Rightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{8} \Rightarrow a < 8$$

۶- رابطه $\sqrt{(-x)^2} = x$ به چه شرطی درست است؟ مثال بزنید.

۷- اگر مساحت کل یک مکعب $96a^2$ باشد، حجم آن را بر حسب a به دست آورید.

۸- اگر $x > 0$ و $y < 0$ باشد، حاصل $\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}$ را ساده کنید و بدون قدرمطلق بنویسید.

۹- عبارت‌های زیر را مانند نمونه ساده کنید: $\sqrt{90} = \sqrt{2 \times 3^2 \times 5} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{10} = 3\sqrt{10}$

$$\sqrt{150}, \quad \sqrt{80}, \quad \sqrt{24}, \quad \sqrt[3]{125^2}$$

۱۰- آیا تساوی‌های زیر درست است؟

$$(\sqrt[3]{-2})^3 = -2$$

$$\sqrt[3]{-4} = -\sqrt[3]{4}$$

۱۱- حاصل را به دست آورید:

$$2\sqrt[3]{16} \times 3\sqrt[3]{4} = \frac{\sqrt{1} \times \sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{18} \times \sqrt[3]{60}}{\sqrt[3]{5}}$$

$$2\sqrt[3]{14} \times 3\sqrt[3]{4} = 4 \times \sqrt[3]{14 \times 4} = 4\sqrt[3]{44} = 4 \times (+4) = 24$$

$$\frac{\sqrt{1} \times \sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{1 \times 5}{10}} = \sqrt{\frac{5}{10}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{18} \times \sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\frac{18 \times 40}{5}} = \sqrt[3]{216} = 6$$

$$\sqrt{(-x)^2} = \sqrt{x^2} = |x|, \quad \sqrt{(-x)^2} = x \quad \underline{\underline{9}}$$

$$\sqrt{(-2)^2} = 2, \quad \sqrt{(-(-2))^2} \neq -2 \text{ باشد } x \geq 0 \text{ پس } |x| = x \text{ در صورتی}$$

\downarrow $x=2$ \downarrow $x=-2$

$$\sqrt[3]{S} = 94a^2 \Rightarrow \text{مقدار } S = 94a^2 \div 4 = 14a^2 \quad \underline{\underline{9}}$$

مقدار a مثبت است یا منفی
 اندازه ی ضلع $= \sqrt{14a^2} = 4|a|$

$$V = (\text{اندازه ی ضلع})^3 = (4|a|)^3 = 64a^2|a| \xrightarrow{a > 0} V = 64a^3$$

$$x > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = |x| = x \quad \Rightarrow \sqrt{x^2} - \sqrt{y^2} = |x| - |y| = x - (-y) \quad \underline{\underline{1}}$$

$$y < 0 \Rightarrow \sqrt{y^2} = |y| = -y$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2} - \sqrt{y^2} = x + y$$

$$\sqrt{150} = \sqrt{2 \times 3 \times 5^2} = \sqrt{2 \times 3} \times \sqrt{5^2} = \sqrt{6} \times 5 = 5\sqrt{6} \quad \underline{\underline{9}}$$

$$\sqrt{180} = \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 5} = \sqrt{2^2 \times 3^2} \times \sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

$$\sqrt{24} = \sqrt{2^3 \times 3} = \sqrt{2^2 \times 2 \times 3} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$$

$$\sqrt[3]{1250^2} = \sqrt[3]{(5^3)^2} = \sqrt[3]{5^6} = \sqrt[3]{(5^3)^2} = 5^2 = 25$$

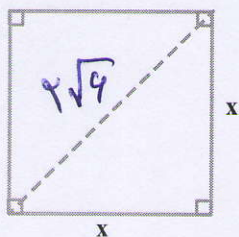
$$(\sqrt[3]{-2})^3 = (\sqrt[3]{-2} \times \sqrt[3]{-2} \times \sqrt[3]{-2}) = \sqrt[3]{(-2)(-2)(-2)} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2 \quad 10$$

$$\sqrt[3]{-4} = \sqrt[3]{(-1) \times 4} = \sqrt[3]{-1} \times \sqrt[3]{4} = -1 \times \sqrt[3]{4} = -\sqrt[3]{4}$$

$$\sqrt[3]{0} = 0, \quad \sqrt[3]{-1} = -1, \quad \sqrt[3]{1} = 1 \quad \text{حداکثر}$$

فعالیت

زمینی به شکل مربع داریم که طول قطر آن $2\sqrt{6}$ متر است. می‌خواهیم مساحت و محیط این زمین را به دست آوریم. راه حل ارائه شده را توضیح دهید و در صورت لزوم آن را کامل کنید.



حل: به کمک رابطه پیتاگورس داریم: $x^2 + x^2 = (2\sqrt{6})^2$

در نتیجه: $2x^2 = 24$ و از آنجا $x^2 = 12$

بنابراین مساحت این زمین ۱۲ متر مربع است.

از اینجا می‌توان نتیجه گرفت که انوار ضلع مربع $\sqrt{12}$ متر یا $2\sqrt{3}$

متر است.

همچنین: متر $8\sqrt{3} = 4 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} =$ محیط مربع

اگر قسمت رادیکالی دو عبارت پس از ساده کردن کاملاً یکسان باشد، می‌توان آنها را با هم جمع یا تفریق کرد؛ مثلاً دو عبارت $3\sqrt{2}$ و $7\sqrt{2}$ دارای قسمت‌های رادیکالی یکسان هستند و داریم:

$$7\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 10\sqrt{2} \quad \text{و} \quad 7\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

همچنین:

$$\sqrt{12} + 9\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 11\sqrt{3}$$

اما قسمت‌های رادیکالی عبارات $2\sqrt{5}$ و $\sqrt{2}$ یا عبارات $7\sqrt{2}$ و $\sqrt{2}$ یکسان نیستند.

کار در کلاس

حاصل جمع هر ستون را مانند نمونه‌ها در سطر آخر بنویسید:

$3\sqrt{7}$	$\frac{3}{2}\sqrt{6}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$3\sqrt{a}$	\sqrt{xy}	$\sqrt{2}$
$-4\sqrt{5}$	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{5}$	$2\sqrt{b}$	$2\sqrt{x}$	$\sqrt{3}$
$8\sqrt{7}$	$8\sqrt{2}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{10}$	$-\frac{1}{5}\sqrt{a}$	$-7\sqrt{x}$	$\sqrt{5}$
$2\sqrt{5}$	$-5\sqrt{2}$	$-2\sqrt{10}$	$-7\sqrt{b}$	$4\sqrt{xy}$	$6\sqrt{2}$
$11\sqrt{7} - 2\sqrt{5}$	$\frac{9}{2}\sqrt{2} + \sqrt{2}$	$\frac{5}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{3}\sqrt{10}$	$\frac{14}{5}\sqrt{a} - 5\sqrt{b}$	$5\sqrt{xy} - 5\sqrt{x}$	$7\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$

ساده کردن عبارات‌های رادیکالی

فعالیت

حاصل عبارات زیر را ساده کنید.
راه حل‌ها را توضیح دهید و آنها را کامل کنید.

الف) $\sqrt{72} - \sqrt{32} + \sqrt{18}$

ابتدا حاصل هر یک از رادیکال‌ها را به دست می‌آوریم:
(جاهای خالی را کامل کنید.)

$$\sqrt{72} = \sqrt{6^2 \times 2} = 6\sqrt{2}$$

$$\sqrt{32} = \sqrt{4^2 \times 2} = 4\sqrt{2}$$

$$\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \times 2} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{72} - \sqrt{32} + \sqrt{18} = 6\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

بنابراین:

ب) $\sqrt{50} + \sqrt{24} + \sqrt{81} = \sqrt{5^2 \times 2} + \sqrt{2^2 \times 3} + \sqrt{3^2 \times 3}$

$$= 5\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 5\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$$

مثال ۱: حاصل $\sqrt{48}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ را به دو روش به دست آورده‌ایم؛ آنها را با هم مقایسه کنید.

الف) $\sqrt{48}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \sqrt{48 \times 3} + \sqrt{48 \times 2} = \sqrt{4^2 \times 3^2} + \sqrt{4^2 \times 3 \times 2}$

$$= \sqrt{(4 \times 3)^2} + 4\sqrt{6} = 12 + 4\sqrt{6}$$

ب) $\sqrt{48}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \sqrt{4^2 \times 3}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 4\sqrt{3}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 12 + 4\sqrt{6}$

مثال ۲: حاصل $(\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48}) \div \sqrt{3}$ را به دست آورید.

$$\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

بنابراین حاصل تقسیم برابر ۱ است. (چرا؟)

$$(\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48}) \div \sqrt{3} = \sqrt{3} \div \sqrt{3} = 1$$

۱- حاصل را بدست آورید

$$۱) \sqrt{۳} \times \sqrt{۲۷} = \sqrt{۳ \times ۲۷} = \sqrt{۸۱} = ۹$$

$$۲) \sqrt[۳]{-۲} \times \sqrt[۳]{۴} = \sqrt[۳]{(-۲) \times ۴} = \sqrt[۳]{-۸} = -۲$$

$$۳) \sqrt{۳-\sqrt{۸}} \times \sqrt{۳+\sqrt{۸}} = \sqrt{(۳-\sqrt{۸})(۳+\sqrt{۸})} = \sqrt{۹ + \underbrace{۳\sqrt{۳} - ۳\sqrt{۸}}_{\text{صفر}} - \sqrt{۸ \times ۸}}$$
$$= \sqrt{۹ - ۸} = \sqrt{۱} = ۱$$

$$۴) \sqrt{\sqrt{۲}} \times \sqrt{\sqrt{۸}} = \sqrt{\sqrt{۲} \times \sqrt{۸}} = \sqrt{\sqrt{۱۶}} = \sqrt{۴} = ۲$$

$$۵) \sqrt[۳]{۲-\sqrt{۵}} \times \sqrt[۳]{۲+\sqrt{۵}} = \sqrt[۳]{(۲-\sqrt{۵})(۲+\sqrt{۵})} = \sqrt[۳]{۴ + \cancel{۲\sqrt{۵}} - \cancel{۲\sqrt{۵}} - \sqrt{۲۵}}$$
$$= \sqrt[۳]{۴-۵} = \sqrt[۳]{-۱} = -۱$$

$$۶) \frac{\sqrt{۱۲} \times \sqrt{۱۵}}{\sqrt{۲۰}} = \frac{\sqrt{۱۲ \times ۱۵}}{\sqrt{۲۰}} = \sqrt{\frac{۱۸۰}{۲۰}} = \sqrt{۹} = ۳$$

۲- عبارت های زیر را ساده کنید

$$۱) ۵\sqrt{۱۱} + ۴\sqrt{۱۱} - ۳\sqrt{۱۱} = (۵+۴-۳)\sqrt{۱۱} = ۶\sqrt{۱۱}$$

$$۲) ۲\sqrt{۱۸} - ۳\sqrt{۳۲} + \sqrt{۱۲} - \sqrt{۳} - \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۹ \times ۲} - ۳\sqrt{۱۶ \times ۲} + \sqrt{۴ \times ۳} - \sqrt{۳} - \sqrt{۴ \times ۲}$$
$$= ۲ \times ۳\sqrt{۲} - ۳ \times ۴\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۳} - \sqrt{۳} - ۲\sqrt{۲} = ۶\sqrt{۲} - ۱۲\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۳} - \sqrt{۳} - ۲\sqrt{۲}$$
$$= (۶-۱۲-۲)\sqrt{۲} + (۲-۱)\sqrt{۳} = -۸\sqrt{۲} + \sqrt{۳} = \sqrt{۳} - ۸\sqrt{۲}$$

$$۳) (\sqrt{۳} + \sqrt{۲})^۲ - (\sqrt{۳} - \sqrt{۲})^۲ = (\sqrt{۳} + \sqrt{۲})(\sqrt{۳} + \sqrt{۲}) - (\sqrt{۳} - \sqrt{۲})(\sqrt{۳} - \sqrt{۲})$$
$$= \sqrt{\frac{۹}{۳}} + \sqrt{۴} + \sqrt{۴} + \sqrt{\frac{۴}{۳}} - (\sqrt{\frac{۹}{۳}} - \sqrt{۴} - \sqrt{۴} + \sqrt{\frac{۴}{۳}})$$
$$= ۵ + ۲\sqrt{۴} - (۵ - ۲\sqrt{۴}) = ۵ + ۲\sqrt{۴} - ۵ + ۲\sqrt{۴} = ۴\sqrt{۴}$$

کار در کلاس

حاصل عبارت‌های زیر را ساده کنید. صفحه ۷۵/۱

۱) $\sqrt{98} - \sqrt{50} + \sqrt{128}$

۴) $\sqrt{4 + \frac{1}{81} + \frac{4}{9}}$

۲) $\sqrt{27} - \sqrt{12} - \sqrt{75} + \sqrt{48}$

۳) $5\sqrt{2} + 3\sqrt{54} - 4\sqrt{128}$

۵) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(3\sqrt{2} - \sqrt{3})$

گویا کردن مخرج کسرها؛ وقتی مخرج کسر را برای اینکه کار با آن‌ها آسان‌تر شود

گاهی اوقات برای ساده کردن یک عبارت رادیکالی و یا آسان‌تر کردن محاسبات، لازم است مخرج یک کسر را از حالت رادیکالی خارج کنیم؛ به‌طور مثال برای محاسبه $\frac{20}{\sqrt{2}}$ باید عدد ۲۰ را بر $\sqrt{2}$ تقسیم کنیم در حالی که می‌توانیم مخرج کسر را به‌صورت زیر گویا کنیم:

$$\frac{20}{\sqrt{2}} = \frac{20}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{20\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$$

فعالیت

توضیح دهید که مخرج هر یک از کسرهای زیر چگونه گویا شده است. هر جا لازم است حل را کامل کنید.

الف) $\frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$

ب) $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

ج) $\frac{4}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{6}}{2}$

د) $\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{28}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{49}}{2} = \sqrt{49}$

ه) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2x}}{x}$
($x > 0$)

و) $\frac{5}{\sqrt{z^2}} \times \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{z}} = \frac{5\sqrt{z}}{z}$
($z \neq 0$)

$$1) \sqrt{98} - \sqrt{50} + \sqrt{128} = \sqrt{7^2 \times 2} - \sqrt{5^2 \times 2} + \sqrt{8^2 \times 2} = 7\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

$$2) \sqrt{27} - \sqrt{12} - \sqrt{75} + \sqrt{48} = \sqrt{3^2 \times 3} - \sqrt{2^2 \times 3} - \sqrt{5^2 \times 3} + \sqrt{4^2 \times 3} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 0$$

$$3) 5\sqrt{2} + 3\sqrt{50} - 4\sqrt{128} = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{5^2 \times 2} - 4\sqrt{2^4 \times 2} = 5\sqrt{2} + 3 \times 5\sqrt{2} - 4 \times 4\sqrt{2} = 5\sqrt{2} + 15\sqrt{2} - 16\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$4) \sqrt{4 + \frac{1}{11} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{396 + 1 + 44}{11}} = \sqrt{\frac{441}{11}} = \frac{21}{\sqrt{11}}$$

$$5) (\sqrt{2} + \sqrt{3})(3\sqrt{2} - \sqrt{3}) = 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} - \sqrt{2} \times \sqrt{3} + 3\sqrt{2} \times \sqrt{3} - \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{2^2} - \sqrt{6} + 3\sqrt{6} - \sqrt{3^2} = 3\sqrt{4} - \sqrt{6} + 3\sqrt{6} - \sqrt{9} = 4\sqrt{4} + 2\sqrt{6} - 3 = 4 + 2\sqrt{6} - 3 = 1 + 2\sqrt{6}$$

مخرج کسرها را برابر کنید

$$1) \frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{\sqrt{25} - \sqrt{15} + \sqrt{15} - \sqrt{9}} = \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{5 - 3} = \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{2} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$$

$$2) \frac{5}{\sqrt{2} + 1} = \frac{5}{\sqrt{2} + 1} \times \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{5(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{2} - 1} = \frac{5(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2} - 1} = 5\sqrt{2} - 5$$

$$3) \frac{4}{3 + \sqrt{5}} = \frac{4}{3 + \sqrt{5}} \times \frac{3 - \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} = \frac{4(3 - \sqrt{5})}{9 - 3\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - \sqrt{25}} = \frac{4(3 - \sqrt{5})}{9 - 5} = \frac{4(3 - \sqrt{5})}{4} = 3 - \sqrt{5}$$

$$4) \frac{9}{\sqrt{11} - \sqrt{5}} = \frac{9}{\sqrt{11} - \sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{11} + \sqrt{5}}{\sqrt{11} + \sqrt{5}} = \frac{9(\sqrt{11} + \sqrt{5})}{\sqrt{121} + \sqrt{55} - \sqrt{55} - \sqrt{25}} = \frac{9(\sqrt{11} + \sqrt{5})}{11 - 5} = \frac{9(\sqrt{11} + \sqrt{5})}{6}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{9(\sqrt{11} + \sqrt{5})}{6} = \frac{3(\sqrt{11} + \sqrt{5})}{2}$$

کار در کلاس

مخرج کسره‌های زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{6}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{4\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{4\sqrt[3]{4}}{2} = 2\sqrt[3]{4}$ ب) $\frac{2}{\sqrt{32}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \times \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{4}}{2\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{4}}{2 \times 2} = \frac{\sqrt{4}}{4}$

ج) $\frac{12}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{4}}{\sqrt{36}} = \frac{12\sqrt{4}}{6} = 2\sqrt{4}$ د) $\frac{5}{\sqrt[3]{3x}} \times \frac{\sqrt[3]{9x^2}}{\sqrt[3]{9x^2}} = \frac{5\sqrt[3]{9x^2}}{\sqrt[3]{27x^3}} = \frac{5\sqrt[3]{9x^2}}{3x}$ ($x \neq 0$)

تمرین

۱- عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف) $2\sqrt{50} + \sqrt{32} + 2\sqrt{72}$ ج) $\sqrt[3]{27^2}$ هـ) $(\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{10} + \sqrt{2})$

ب) $\sqrt{8} + \sqrt{128} - \sqrt{50}$ د) $\sqrt[3]{\frac{-27}{64}}$ و) $2\sqrt{48} - 3\sqrt{27}$

$2\sqrt{x^2} - x$

۲- اگر $x < 0$ باشد حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

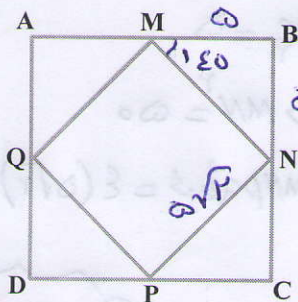
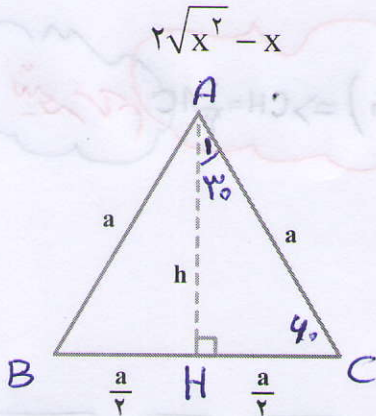
۳- محیط و مساحت مربعی به طول ضلع $3\sqrt{5}$ سانتیمتر را به دست

آورید.

۴- شکل مقابل یک مثلث متساوی‌الاضلاع را به ضلع a نشان

می‌دهد. اندازه ارتفاع h را بر حسب a به دست آورید؛ سپس مساحت

آن را بر حسب a بنویسید.



۵- نقاط M, N, P, Q وسط‌های اضلاع مربع $ABCD$

هستند. اگر مساحت مربع $ABCD$ ، 100 مترمربع باشد، محیط مربع

$MNPQ$ چقدر است؟

الف) $2\sqrt{50} + \sqrt{32} + 2\sqrt{72} = 2\sqrt{25 \times 2} + \sqrt{16 \times 2} + 2\sqrt{36 \times 2} = 10\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 12\sqrt{2} = 26\sqrt{2}$

ب) $\sqrt{8} + \sqrt{128} - \sqrt{50} = \sqrt{4 \times 2} + \sqrt{64 \times 2} - \sqrt{25 \times 2} = 2\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

ج) $\sqrt[3]{27 \times 27} = \sqrt[3]{(3^3)^2} = \sqrt[3]{(3^2)^3} = \sqrt[3]{9^3} = 9$

د) $\sqrt[3]{\frac{-27}{48}} = \sqrt[3]{\frac{(-3)^3}{4^3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{-3}{4}\right)^3} = -\frac{3}{4}$

هـ) $(\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{10} + \sqrt{2}) = \sqrt{20} + \sqrt{4} - \sqrt{50} - \sqrt{10} = \sqrt{4 \times 5} + 2 - \sqrt{25 \times 2} - \sqrt{10} = 2\sqrt{5} + 2 - 5\sqrt{2} - \sqrt{10}$

و) $2\sqrt{48} - 3\sqrt{27} = 2\sqrt{16 \times 3} - 3\sqrt{9 \times 3} = 2 \times 4\sqrt{3} - 3 \times 3\sqrt{3} = 8\sqrt{3} - 9\sqrt{3} = -\sqrt{3}$

$2\sqrt{x^2} - x = 2|x| - x \stackrel{x < 0}{=} -2x - x = -3x$

بج = $2 \times 3\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$ ، $مساحة = 3\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 9\sqrt{25} = 9 \times 5 = 45$

$AH^r = AC^r - HC^r \Rightarrow h^r = a^r - \left(\frac{a^r}{r}\right)^r \Rightarrow h^r = a^r - \frac{a^r}{r} = \frac{ra^r - a^r}{r} = \frac{(r-1)a^r}{r}$

$\Rightarrow h^r = \frac{r-1}{r} a^r \Rightarrow h = \frac{\sqrt{r-1}}{r} a$ ($\hat{H} = 90^\circ, A_1 = 30^\circ \Rightarrow CH = \frac{1}{2} AC$)

($\hat{H} = 90^\circ, \hat{C} = 45^\circ$) $\Rightarrow AH = \frac{\sqrt{2}}{2} AC$

ABCD $مساحة = 100 \Rightarrow AB = \sqrt{100} = 10 \Rightarrow BM = AM = \frac{10}{2} = 5$

$\triangle BMN : \hat{B} = 90^\circ \Rightarrow MN^r = BM^r + BN^r \Rightarrow MN^r = 5^r + 5^r \Rightarrow MN^r = 50$

$\Rightarrow MN = \sqrt{50} \Rightarrow MN = \sqrt{25 \times 2} \Rightarrow MN = 5\sqrt{2} \Rightarrow MNPq \text{ محيط} = 4(5\sqrt{2}) = 20\sqrt{2}$

($\hat{B} = 90^\circ, \hat{M}_1 = \hat{N}_1 = 45^\circ$) $\Rightarrow MN = \sqrt{2} BM$

نتيجه صحيح