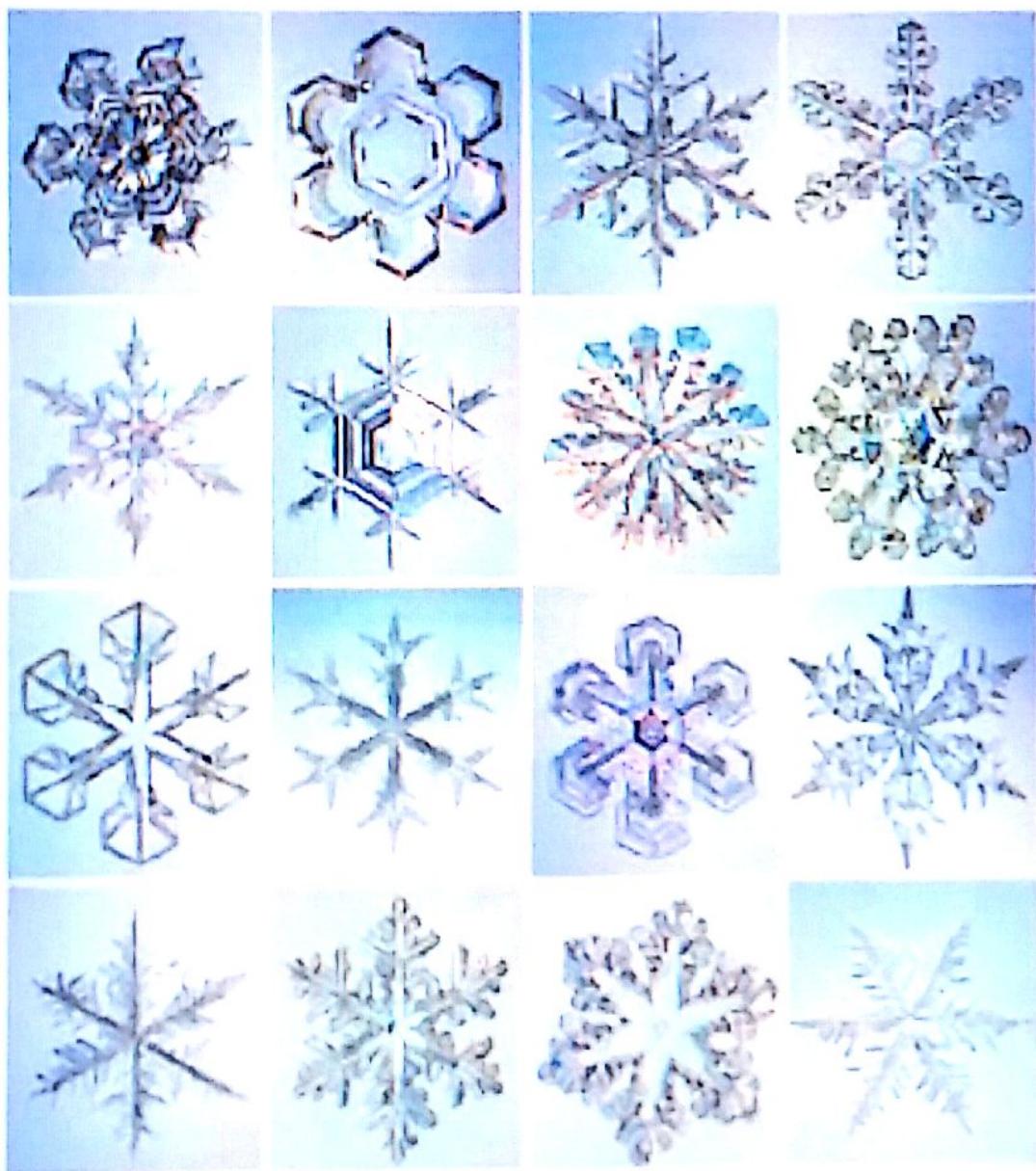


استدلال و اثبات در هندسه



لَدُغَ إِلَى سَبِيلِ زَيْنَكَ بِالْعِكْفَةِ وَ الْقَوْعَذِيَّةِ الْخَسَنَةِ وَ جَادِلُهُمْ بِأَنَّهُ هُنْ أَحْسَنُ ...
بَا حِكْمَتِ وَ الدِّرْزِ لِيَكُوبَهِ رَاهِ پُرورِدَگَارَتْ دَعْوَتْ هَمَا وَ بَا أَلْهَابَهِ لِيَكُوبَرِينْ رَوْشِ استدلال وَ
مَنَاظِرَهِ كَنْ! (سُورَةُ الْحُجَّةِ، آيَةُ ١٢٥)



لَدُغَ بِرَدِ الْمَسَانِ، رَحْمَتُ الْهَبِ الْمَاجِدِ وَ مَوْسِى مَلَوْنَ، وَ مَرِسِنْ حَلِ مَدَنِي لَلَّى زَمَنِ لَسَتْ نَمَا
تَلَبِّ حَلَبَ تَلَبِّ كَهْ لَيْلَهِي لَيْلَهِي مَنَظَرَنْ كَهْ لَيْلَهِي لَيْلَهِي مَنَظَرَنْ كَهْ لَيْلَهِي لَيْلَهِي مَنَظَرَنْ
مَلَكَ الْأَنَامِ كَهْ لَكَلَّ مَحْمَدَهِ جَهَدَ رَاهَهِ وَ مَعَهُ بَوْتَاهِي لَيْلَهِي لَيْلَهِي مَنَظَرَنْ» بَسَّا

فعالیت

متن‌های زیر را بخوانید و به سوال‌های داده شده پاسخ دهید.

۱- امیر و محسن برای یک مسابقه فوتبال به ورزشگاه رفتند. محسن به امیر گفت: «من مطمئن هستم که تیم مورد علاقه من امروز هم می‌باشد.» امیر پرسید: «چگونه با این اطمینان حرف می‌زنی؟» محسن دلیل آورد که: «چون هر بار که به ورزشگاه رفتم تیم مورد علاقه من باخته است.»

آیا دلیلی که محسن آورده است درست (~~اعتقاب~~) است؟ چرا؟ ناحقیر - چون احتمال دارد نباشد.

۲- عباس یک بیسکویت مستطیل شکل با ابعاد ۴ و ۸ سانتی‌متر دارد. بیسکویت باقی از همان نوع و مربع شکل به ضلع ۶ سانتی‌متر است. با استفاده از دانش ریاضی خود نشان دهید که مقدار بیسکویت کدام یک بیشتر است.

$$4 \times 8 = 32$$

$$6 \times 6 = 36$$

۳- دلیلی که محسن در فعالیت ۱ برای ادعای خود آورده را با دلیلی که شما در فعالیت ۲ آورده مقایسه کنید. به نظر شما کدام معتبرتر و قابل اطمینان‌تر هستند. دلیل فعالیت ۲

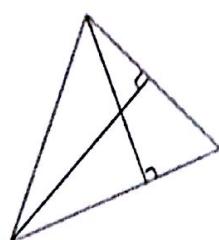
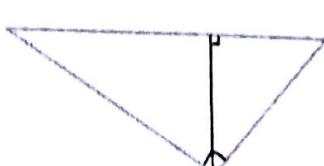
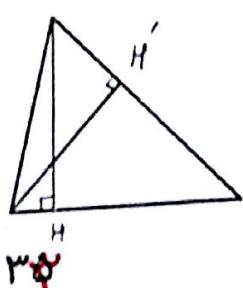
«استدلال» دلیل آوردن و استفاده کردن از دانسته‌های قبلی است برای معلوم شدن موضوعی که در ابتدا مجھول بوده است.

همان‌گونه که در موارد بالا مشاهده کردید حتی در بسیاری کارهای روزمره نیز نیاز به استدلال کردن پیدا می‌کنیم. برای استدلال کردن راه‌های متفاوتی وجود دارد که اعتبار و قابل اعتماد بودن آنها می‌تواند یکسان نباشد. به استدلالی که موضوع موردنظر را به درستی نتیجه بدهد اثبات می‌گوییم.

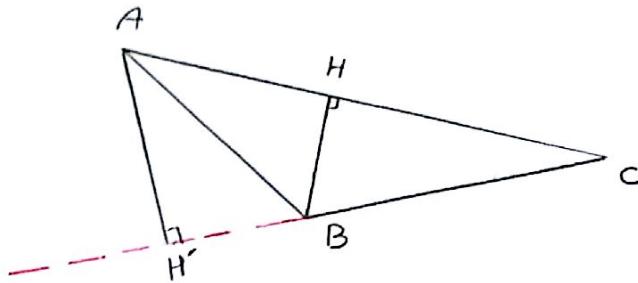
کار در کلاس

۱- مواردی را بازگو کنید که مانند فعالیت ۱ فردی با توجه به آنچه قبلاً اتفاق افتاده نتیجه‌ای می‌گیرد که درست نمی‌باشد.

۲- دو تا از ارتفاعات هر یک از مثلث‌هارا رسم کنید.



- من هر وقت درس می‌خونم معلم از من درس نمی‌پرسد.



آیا با این مثال‌ها می‌توان نتیجه گرفت در هر مثلث محل برخورد هر دو ارتفاع درون مثلث می‌باشد؟ **نخیر**

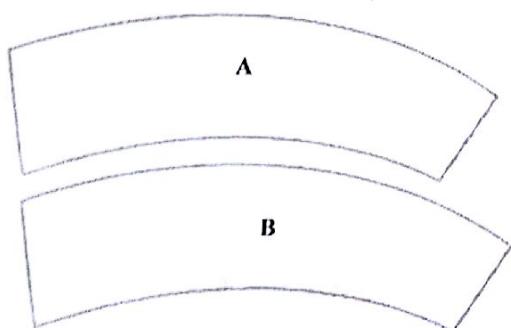
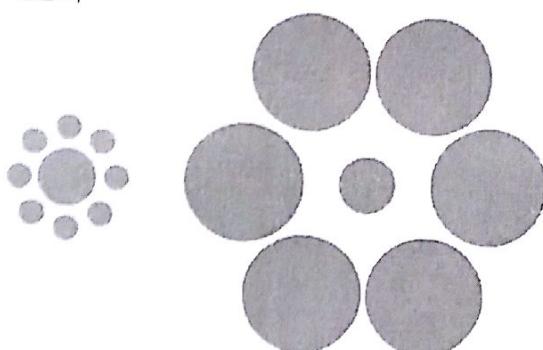
یک مثال بزنید که نتیجه بالا را نقض کند.

اگر فردی با رسم ارتفاع‌های موردنظر در مثلث‌ها چنین نتیجه گیری کند که محل برخورد ارتفاع‌های هر مثلث، درون آن مثلث است. استدلالی که او استفاده کرده است مشابه استدلال کدام

یک از دو قسمت فعالیت قبل است؟ قسمت ۱

فعالیت

الف



۱- کدام یک از دو قرصی که در مرکز قرار گرفته‌اند، بزرگ‌ترند؟ **الف**

(الف) با مشاهده تشخیص دهید. **الف**

(ب) یک کاغذ روی یکی از آنها قرار دهید.

دایره محیط آن قرص را بکشید و با گذاشتن تصویر کشیده شده بر شکل دیگر اندازه آنها را با هم مقایسه کنید. با یعنی **برابر**

۲- قطعه‌های A و B قطعه‌هایی از یک شیرینی موردعلاقه شما هستند. کدام قطعه را

انتخاب می‌کنید؟ (قطعه بزرگ‌تر کدام است؟) **B**
با یک کاغذ شفاف این دو قطعه را مقایسه

کنید؟ آیا حدس شما درست بود؟ **نخیر**

۳- آیا مشاهده کردن و یا استفاده از سایر حس‌های پنج‌گانه برای اطمینان از درستی یک موضوع کافی است؟ چرا؟ **نخیر** - حیوان احتمال خطا را دارد.

هر چند معمولاً در ریاضیات و به ویژه در هندسه به کار بردن شکل‌ها و ترسیم آنها و

استفاده از شهود کمک زیادی به تشخیص راه حل‌ها و ارائه حدس‌های درست می‌کند

لهم باشد توجه داشته باشیم که هیچ گاه نمی‌توانیم با اطمینان بگوییم که تشخیص ما حتماً

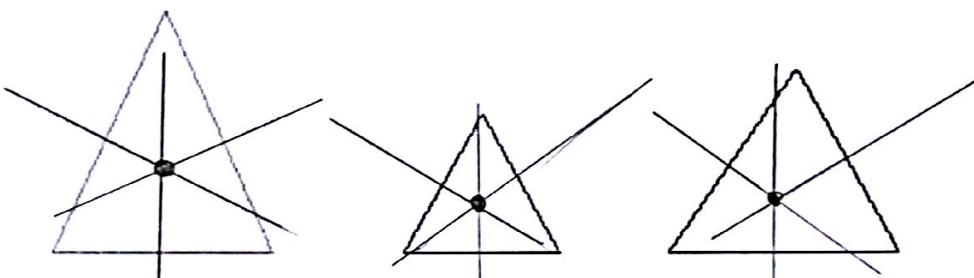
درست بوده است.

کار در کلاس

مواردی از درس علوم (مثل آزمایش تشخیص گرما و سرمای آب) مثال بزنید که حواس ما خطای کند. در مورد تابعی که از این مثال‌ها می‌گیرید با یکدیگر بحث کنید.

تمرین

۱- در شکل‌های زیر عمودمنصف‌های سه ضلع مثلث‌ها را رسم کنید:



آیا فقط با توجه به این شکل‌ها، می‌توان نتیجه گرفت که محل برخورد عمودمنصف‌های هر مثلث همیشه درون مثلث قرار دارد؟ چگونه می‌توانید درستی ادعای خود را نشان دهید؟ لغ خیر. بارسم مثلث باز دارد. ۲- نیما و پژمان مشغول دیدن مسابقات وزنه برداری بودند. وزنه برداری قصد بلند کردن وزنای ۱۰۰ کیلویی را داشت. آنها هر دو عقیده داشتند که او نمی‌تواند وزنه را بلند کند؛ برای ادعای خود استدلال‌های متفاوتی می‌کردند.

نیما: زیرا هفته پیش این وزنه بردار تمرینات بهتری انجام داده بود با این حال توانست وزنه ۹۰ کیلویی را بلند کند.

پژمان: امروز دوشنبه است. من بارها مسابقات این وزنه بردار را دیده‌ام. او هیچ‌گاه در روزهای زوج موفق نبوده است.

استدلال کدام یک قابل اعتمادتر است؟ در مورد استدلال‌ها بحث کنید. نیما بحث شود ۳- چون من نا به حال هیچ وقت تصادف نکرده‌ام در سفر آینده نیز تصادف نخواهم کرد. این استدلال مشابه کدام‌پک از استدلال‌های زیر است؟

(الف) چون برخی مثلث‌ها قائم‌الزاویه هستند پس مثلث‌های متساوی الاضلاع هم قائم‌الزاویه‌اند.
ب) همه فیلم‌های جنگی که تاکنون دیده‌ام، جذاب بوده‌اند. فیلمی که دیروز دیدم جذاب بود،

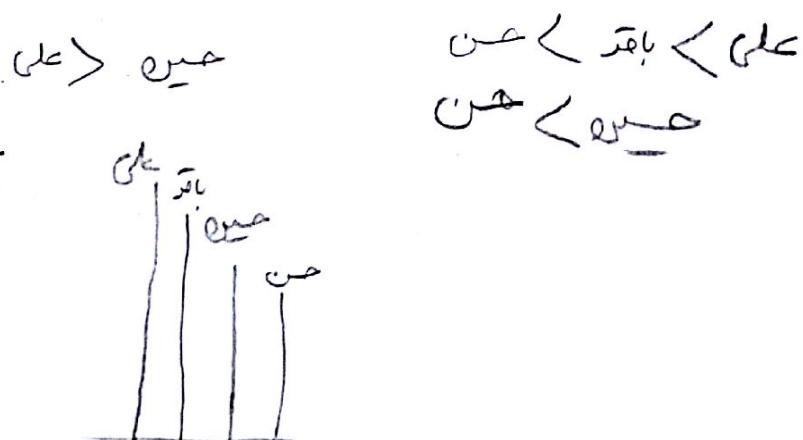
پس فیلم جنگی بوده است.

- سرج) چون تمام بجهه‌های خاله‌های من دختر هستند، پس بجهه خاله کوچکم هم دختر خواهد بود.
د) چون همه قرص‌های مسکن خواب‌آور است، پس در این قرص‌ها ماده‌ای هست که باعث خواب‌آلودگی می‌شود.

۴- دونفر درباره چهار برادر به نام‌های علی، حسن، حسین و باقر می‌دانستند که: علی از حسین بزرگ‌تر و حسن از باقر کوچک‌تر است و باقر از علی کوچک‌تر و حسن نیز از حسین کوچک‌تر است. هر دو نفر اعتقاد داشتند که علی از حسن بزرگ‌تر است، اما استدلال‌های متفاوتی می‌کردند.
اولی: در تمام خانواده‌هایی که من دیده‌ام که دو فرزند به نام‌های علی و حسن دارند، فرزند بزرگ‌تر را علی نامیده‌اند.

دومی: چون علی از حسین بزرگ‌تر و حسن از حسین کوچک‌تر است، پس علی از حسن بزرگ‌تر است.

استدلال کدام یک درست است؟ در مورد درستی استدلال‌ها بحث کنید. دوچون - چون استدلال‌های
قابل اثبات نیست.



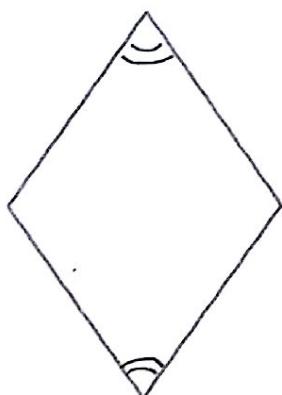
اطلاعات دارد مسئله را فرض و خواسته مسئله را حکم می نامند.

درس دوم: آشنایی با اثبات در هندسه

فعالیت

در درس گذشته یاد گرفتید که دیدن و استفاده از حواس و یا بیان مثال‌های متعدد و همچنین اندازه گرفتن برای ایجاد اطمینان از درستی یک موضوع کفايت نمی‌کند و باید از دلیل‌های منطقی و درست کمک گرفت و با استدلال کردن درستی آن موضوع را ثابت کرد. در روند استدلال‌المان از اطلاعات داده شده مسئله (فرض یا داده‌ها) و حقایق و اصولی که درستی آنها از قبل برای ما معلوم شده است، برای رسیدن به خواسته مسئله (حکم) استفاده می‌کنیم.

فعالیت



۱- به گفت و گوی زیر توجه کنید.

مهرداد: آیا زاویه‌های رو به رو بهم، در هر لوزی با هم برابرند؟
سعید: بله، چون ما از قبل می‌دانستیم که در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های رو به رو، با هم مساوی هستند. لوزی هم نوعی متوازی‌الاضلاع است.

در این مسئله و اثبات آن، فرض، حکم و استدلال را به شکل زیر کامل کنید.

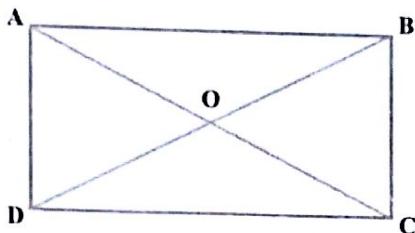
فرض	شکل لوزی است
حکم	زاویه‌های رو به رو برابرند

استدلال:

لوزی نوعی متوازی‌الاضلاع است
در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های رو به رو برابرند

در لوزی زاویه‌های رو به رو برابرند \Rightarrow

۲- اولین اقدامی که برای اثبات یک مسئله انجام می‌دهیم، تشخیص فرض و حکم و حقایق مرتبط با آن مسئله است که از قبل آنها را می‌دانستیم. در مسئله زیر فرض، حکم و حقایق از قبل ثابت



شده یا دانسته را به زبان ریاضی بنویسید و عبارت‌ها را
کامل کنید.

فرض	ABCD مستطیل است
حکم	قطرهای مستطیل، مساوی هستند

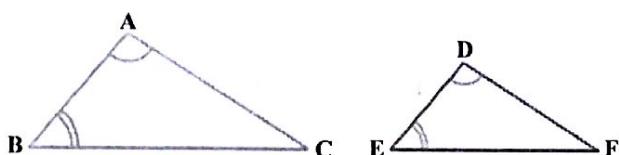
$$\begin{array}{l} \text{فرض: } \left\{ \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ \\ AB = CD \\ AB \parallel CD \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} AD = BC \\ AD \parallel BC \end{array} \\ \text{حکم: } AC = BD \end{array}$$

گاردر کالج

فرض و حکم را برای مسئله‌های زیر مشخص کنید.

الف) در دو مثلث داده شده زوایای برابر در شکل مشخص شده‌اند. ثابت کنید زاویه‌های سوم

از دو مثلث نیز با هم برابرند.



$$\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{D} \\ \hat{B} = \hat{E} \end{array} \quad \text{فرض:}$$

$$\hat{C} = \hat{F} \quad \text{حکم:}$$

ب) اگر در یک مثلث دو زاویه نابرابر باشند، ضلع رویه رو به زاویه بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است.

ج) اگر مجموع دو زاویه از چهارضلعی ABCD با مجموع دو زاویه از چهارضلعی

EFGH برابر باشد ثابت کنید مجموع دو زاویه دیگر ABCD با مجموع دو زاویه دیگر EFGH برابرند.

$$\hat{A} + \hat{B} = \hat{E} + \hat{F}$$

$$\hat{C} + \hat{D} = \hat{G} + \hat{H}$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = \hat{E} + \hat{F} + \hat{G} + \hat{H} = 360^\circ$$

فعالیت

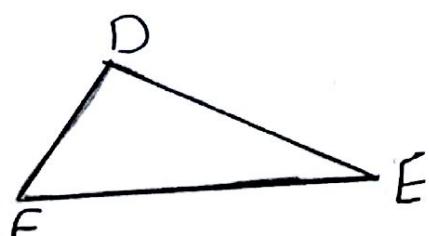
۱- در مسئله زیر توضیح دهد چرا استدلال نوشته شده درست نیست.

۳۸

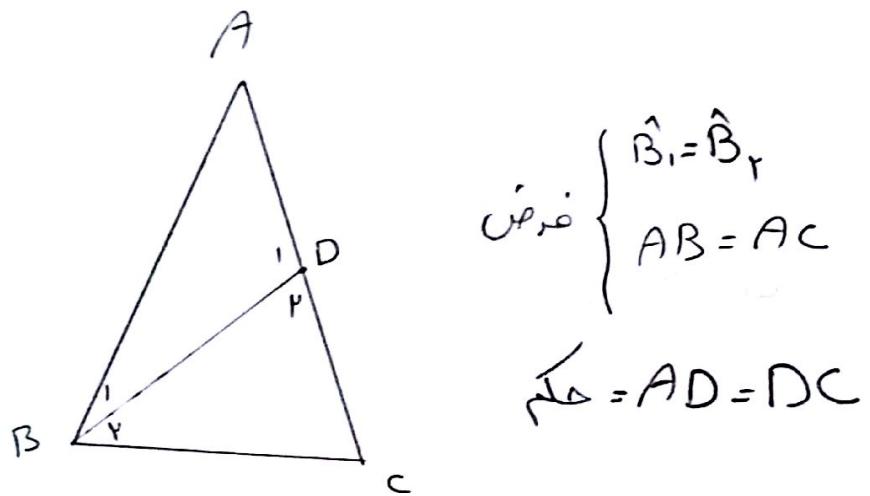
ب)

$$\text{فرض: } \left\{ \begin{array}{l} \hat{D} > \hat{E} \\ \hat{A} > \hat{B} \end{array} \right.$$

$$\text{حکم: } FE > FD$$



جواب سوال اچھم ۴۹



$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{B}_1 = \hat{B}_2 \\ AB = AC \end{array} \right.$$

$$\text{حکم} = AD = DC$$

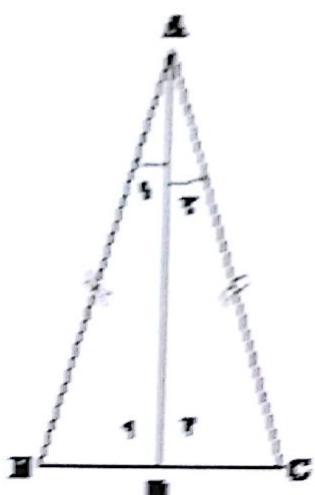
دو ملت $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ و $AB = AC$ ہنہ سے مل باند چراہ تھا دو حصہ کیا ہے
محلہ سند کہ جب اس رحالتی (ایک ہم منہجی) پر یہی ایسے حالات پیدا ہیں۔
(عن منون) ، (عن نص) ، (زعن ز)

تذکرہ: درست مساوی اس تھیں تھا، بیا زاویہ یعنی دو سوچ میانہ، ارتفاع، عمود، مخفف بانہ۔

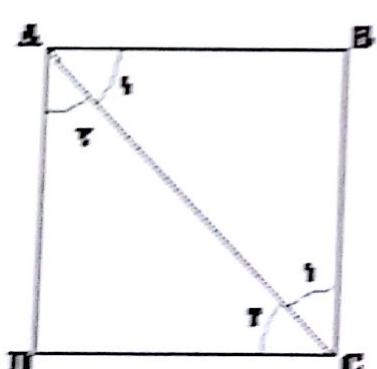
۱- در مسئله زیر فرض و حکم را بتوانید و اشکل استدلال داده شده را باید:

مثلث ABC متساوی الساقین است و AD بیمساز زاویه A است.
ثابت کنید AD بیانه نیز هست:

فرض: AO بیمساز است $\angle A$ و
 $BO=DC$ حکم:



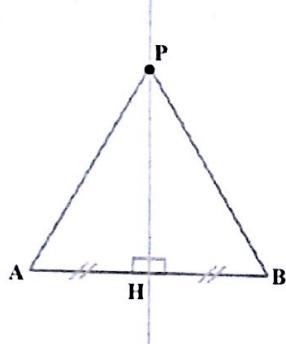
استدلال: جون AD بیمساز زاویه A است پس: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $D_1 = D_2$ و ضلع AD در دو مثلث مشترک است، پس مثلث های ADB و ADC به حالت دو زاویه و ضلع بین لر پس Z) باهم برابر است، پس اجزای متناظر آنها برابر است. درنتیجه: $BD=DC$ استدلال بالا را اصلاح کنید و نتیجه بگیرید در مثلث متساوی الساقین بیمساز وارد بر قاعده، بیانه هم هست. آیا در مثلث ABC می توان نتیجه گرفت که بیمساز زاویه B نیز بیانه ضلع مقابل آن است چنانچه صحیح نیست، آیا می توان خاصیت اثبات شده برای بیمساز A را به بیمساز دیگر تعمیم داد. فحیر



۲- با استدلال نیز به سادگی می توان نتیجه گیری کرد که قطر AC از مربع $ABCD$ بیمساز زاویه های A و C است. جون دو مثلث ABC و ADC به حالت سه ضلع همتهشت است، زوایای متناظر باهم برابر است؛ بنابراین $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ ولذا بیمساز است.

آیا می توان با استدلالی مشابه، این خاصیت را به قطر دیگر نیز تعمیم داد و گفت به طور کلی در مربع هر قطر بیمساز زاویه های دو سر آن قطر است؟ پل
۳- به نظر شما چرا در فعالیت ۱ خاصیت موردنظر قابل تعمیم به بیمساز های دیگر نبود، اما در فعالیت ۲ خاصیت موردنظر به قطر دیگر تعمیم داده می شود؟

وقتی خاصیتی را برای یک عضو از یک مجموعه ثابت کردیم، اگر تمام ریزگی هایی که در استدلال خود به کار برده ایم در سایر عضو های آن مجموعه نیز باشد، می توان درستی نتیجه را به همه عضو های آن مجموعه تعمیم داد.



در شکل مقابل، روی عمودمنصف پاره خط در نظر گرفتیم و به دو سر پاره خط وصل کردیم و چون دو مثلث $\triangle BHP$ و $\triangle AHP$ به حالت (ض ز ض) همنهشت هستند نتیجه گرفتیم پاره خط های PA و PB با هم برابرند.

لذا فاصله نقطه P که روی عمودمنصف پاره خط AB است از دو سر پاره خط AB یکسان است.

آیا این اثبات برای اینکه نتیجه بگیریم نتیجه بالا برای «هر» نقطه روی عمودمنصف برقرار است؟
کافی است؟ بله - برای اینکه معان نعم را متوابع تغییر دهیم و گهین و گهین را اثبات کنیم.
کار در کلاس در واقع عمودمنصف مکان هندسی مقامی است که از دو سر پاره خط AB بک اندازه گشتند.

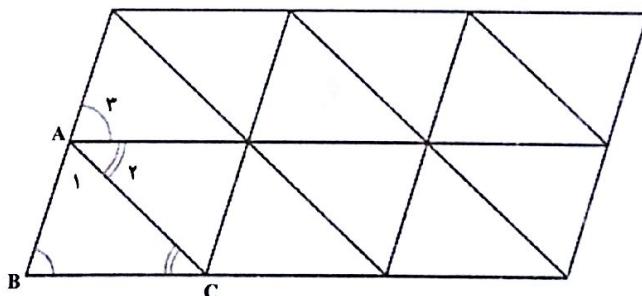
به استدلال هایی که چهار دانش آموز برای مسئله زیر آورده اند دقت کنید.

مجموع زاویه های داخلی یک مثلث 180° است.

استدلال حامد: یک مثلث متساوی الاضلاع را در نظر می گیریم. چون سه زاویه دارد و هر زاویه 60° است پس مجموع زاویه های مثلث 180° است.

استدلال حسین: حسین چند مثلث مختلف با حالت های گوناگون کشید و زوایای آنها را اندازه گرفت و دید که در همه آنها مجموع زوایای داخلی برابر 180° است و نتیجه گرفت که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.

استدلال مهدی: مهدی گفت با این مسئله در سال گذشته آشنا شدیم و شکلی شبیه آنچه در کتاب سال قبل آمده بود کشید و با مشخص کردن زاویه های مثلث $\triangle ABC$ به صورت مقابل، استدلالی با استفاده از شکل به صورت زیر آورد.



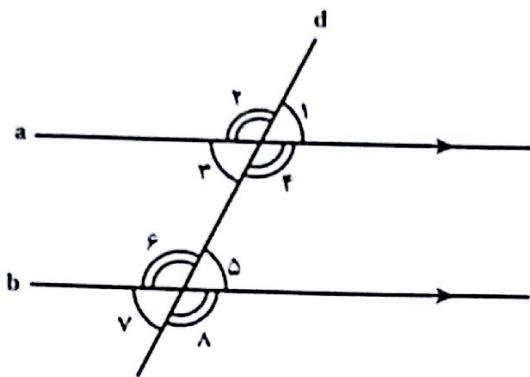
$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{C} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180^\circ$$

۱- استدلال حامد استقراری است پس نه توان تکمیم هم طرد.

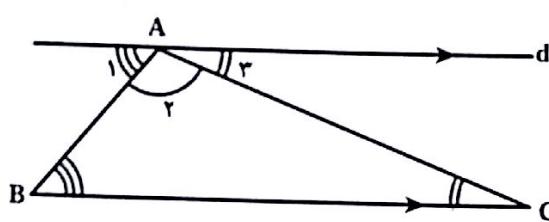
۲- استدلال حسین استقراری است » » » » »

۳- استدلال مهدی » » » » »

۴- استدلال رهن استنتاجی است و مابقی تکمیم هم باشد.



استدلال رضا: رضا گفت می‌دانیم که «هر خطی که دو خط موازی را قطع کند با آنها هشت زاویه می‌سازد که مانند شکل چهار به چهار باهم مساوی است.»



حال مثلثی دلخواه مانند $\triangle ABC$ را درنظر می‌گیریم؛ مانند شکل مقابل از رأس A خط d را موازی BC رسم می‌کنیم.

سه زاویه تشکیل شده در رأس A را با

شماره‌های ۱، ۲ و ۳ نشان داده‌ایم که زاویه A_2 همان زاویه A در مثلث است و با درنظر گرفتن AB به عنوان مورب داریم $\hat{C} = \hat{A}_2$ و با درنظر گرفتن AC به عنوان مورب داریم $\hat{B} = \hat{A}_1$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_2 + \hat{A}_1 + \hat{A}_3 = 180^\circ$$

استدلال رضا را می‌توان با استفاده از نمادهای ریاضی به صورت مرتب و خلاصه بدین صورت

نوشت:

$$\left. \begin{array}{l} d \parallel BC \\ \text{مورب } AB \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{B} = \hat{A}_1 \\ \left. \begin{array}{l} d \parallel BC \\ \text{مورب } AC \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{C} = \hat{A}_2 \\ \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_2 + \hat{A}_1 + \hat{A}_3 = 180^\circ$$

درباره معتبر بودن استدلال‌های این دانش‌آموزان بحث کنید. استدلال رضا

فعالیت

مسئله: حمید، سعید و بهرام هر کدام مقداری پول دارند. مجموع پول‌های حمید و بهرام برابر ۵۰۰۰ تومان و مجموع پول‌های سعید و بهرام نیز برابر ۵۰۰۰ تومان است. به نظر شما پول حمید بیشتر

است یا پول سعید؟ دلیل خود را توضیح دهید.

درست سند ۲۰ توان مقادیر مساوی را از دو طرف سه ده کرد.

۴۱

$$= \text{پول بهرام} + \text{پول حمید}$$

$$= \text{پول بهرام} + \text{پول سعید}$$

$$\text{پول سعید} = \text{پول حمید} \Rightarrow \text{پول بهرام} + \text{پول سعید} = \text{پول بهرام} + \text{پول حمید}$$

سعید
بهرام
حمدی

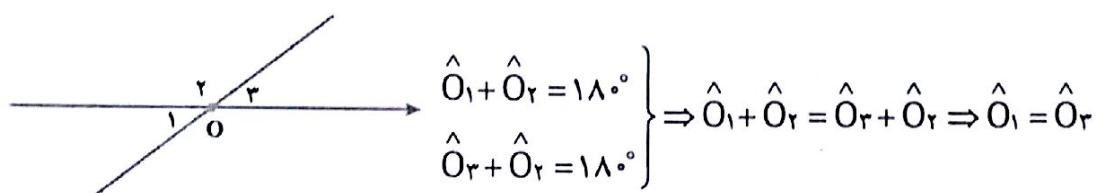
$$= A \quad \left\{ \begin{array}{l} A + C = 180^\circ \\ B + C = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow A + C = B + C \Rightarrow A = B$$

پر بول سعید و حمید برابر است.

بین استدلالی که برای مستله بالا و مستله بعدی هست چه شباهتی می‌بینید؟

مستله: زوایای متقابل به رأس با هم برابرند.

فرض کنیم O_1 و O_2 مانند شکل زیر متقابل به رأس باشند. داریم:



اگر بخواهید هر کدام از اندازه زاویه‌های \hat{O}_1 و \hat{O}_2 و \hat{O}_3 را به یکی از پول‌های عطا و عنایت و هدایت متناظر کنید، چگونه این کار را انجام می‌دهید؟

\hat{O}_1 پول بهرام

$\hat{O}_1 = \hat{O}_3$ پول سعید و پول حمید

تشرییف

۱- آیا اثبات ارائه شده برای مستله زیر معتبر است؟ برای

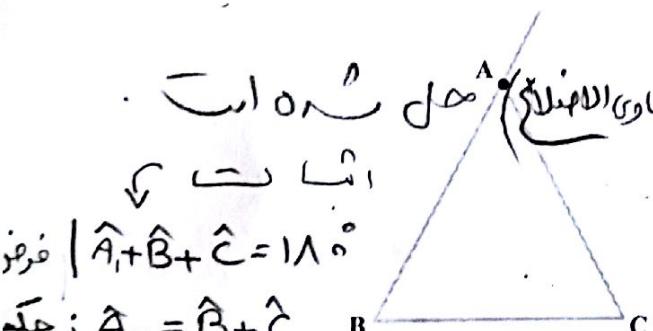
پاسخ خود دلیل بیاورید. نه خیر ممکن در مراد خاص (مثلث متساوی الاضلاع) محل ثابت

اثبات

مستله: در هر مثلث، اندازه زاویه خارجی برابر است با

مجموع اندازه‌های دو زاویه داخلی غیرمجاور با آن.

اثبات: مثلث متساوی الاضلاع $\triangle ABC$ را در نظر می‌گیریم.



$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \\ \hat{A}_2 + \hat{A}_1 = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C}$$

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ \rightarrow \hat{A}_2 = 180^\circ - \hat{A}_1 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\hat{B} + \hat{C} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C}$$

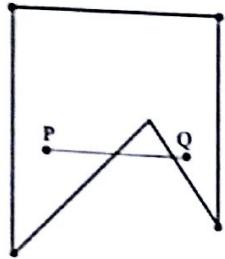
۲- در سال گذشته با تعریف چندضلعی‌های محدب آشنا شده‌اید. تعریف چندضلعی محدب را

می‌توان بدین صورت آورد. «یک چندضلعی محدب است اگر هر پاره خطی که دو نقطه دلخواه درون آن

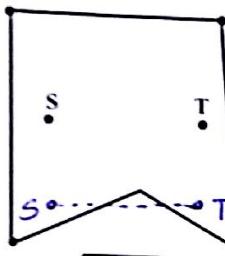
چندضلعی را به هم وصل می‌کند، تماماً درون آن چندضلعی قرار بگیرد.» و چندضلعی که محدب نباشد

مقعر است. آیا تشخیص‌های داده شده توسط دو دانش‌آموز در مورد محدب و مقعر بودن چندضلعی‌های

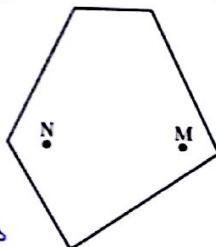
زیر و دلایلی که ارائه کرده‌اند با توجه به تعریف بالا درست می‌باشند؟ پاسخ خود را توضیح دهید.



نرگس: چندضلعی مقابل محدب نست، زیرا نقاط P و Q درون آن قرار دارد اما پاره خطی که آنها را بهم وصل می کند به طور کامل در آن قرار نمی گیرد. درست است.



مهدیه: چندضلعی مقابل محدب است، زیرا نقاط T و S درون آن قرار دارد و پاره خطی که آنها را بهم وصل می کند نیز به طور کامل در آن قرار دارد. درست نه است. چون آردو لفظ T, S را در متن پاسین کشل تقدیر همیں پاره خط ST در آن عبارت هم لایرد.



مریم: چندضلعی مقابل محدب است، زیرا نقاط M و N درون آن قرار دارد و پاره خطی که آنها را بهم وصل می کند نیز به طور کامل در آن قرار دارد. درست است.

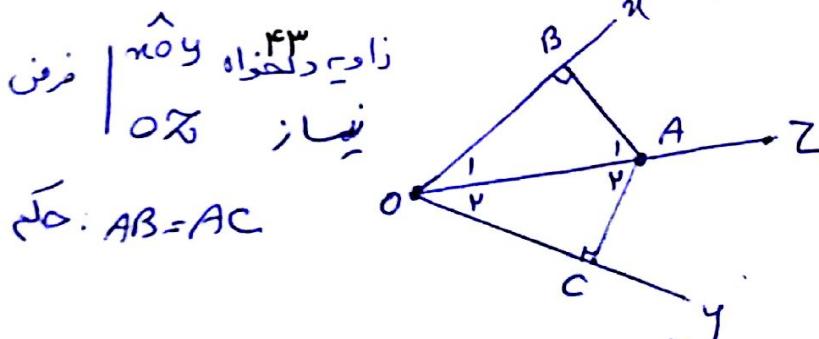
۳- آیا استدلال های زیر درست است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.
 (الف) $ABCD \leftarrow$ مستطیل یک متوازی الاضلاع است.
 (الف) $ABCD \leftarrow$ چهارضلعی $ABCD$ متوازی الاضلاع است.

(ب) در هر مربع، ضلع ها با هم برابرند.
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{در هر مربع، ضلع ها با هم برابرند.} \\ \text{همه ضلع های } ABCD, \text{ با هم برابر نیستند.} \end{array} \right.$
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{در هر مربع، ضلع ها با هم برابرند.} \\ \text{چهارضلعی } ABCD \text{ ضلع ها برابر نیستند.} \end{array} \right.$

(ج) $ABCD \leftarrow$ مربع نیست.
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{در هر مربع، ضلع ها با هم برابرند.} \\ \text{در چهارضلعی } ABCD \text{ ضلع ها برابر نیستند.} \end{array} \right.$

۴- ثابت کنید هر نقطه که روی نیمساز زاویه قرار دارد از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.
 یادآوری: فاصله یک نقطه از یک خط برابر است با طول پاره خطی که از آن نقطه بر خط عمود می شود.

راهنمایی: یک زاویه دلخواه بکشید و نیمساز آن را رسم، و یک نقطه روی این نیمساز مشخص کنید. ثابت کنید فاصله این نقطه از دو ضلع زاویه با هم برابر است و سپس علت اینکه این تتجه برای همه نقاط روی نیمساز درست است را بیان کنید.



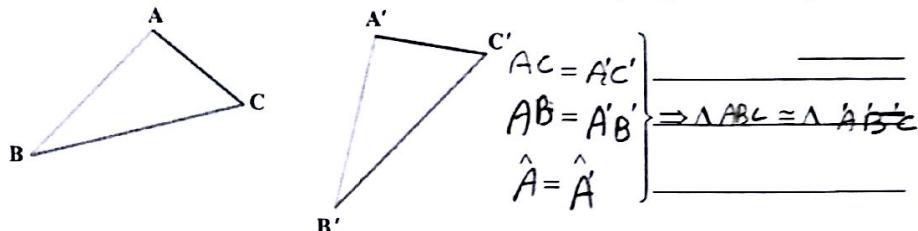
$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\alpha} = \hat{\beta} \\ OA = OA \\ \hat{\beta} = \hat{\alpha} = 90^\circ \end{array} \right. \xrightarrow{\text{زاویه}} \triangle OAB \cong \triangle OAC$$

بنابراین اجزای متشابه $AC = AB$ هست
 چون این استدلال بر هر نقطه روی نیمساز قابل تعمیم است.

درس سوم: همنهشتی مثلث‌ها

یادآوری

با مفهوم همنهشتی مثلث‌ها از سال گذشته آشنایی دارید. اکنون می‌خواهیم این حالت‌ها را با استفاده از نمادهای ریاضی خلاصه نویسی کنیم. مثلاً حالت همنهشتی (ض زض) را، این گونه نمایش می‌دهیم:

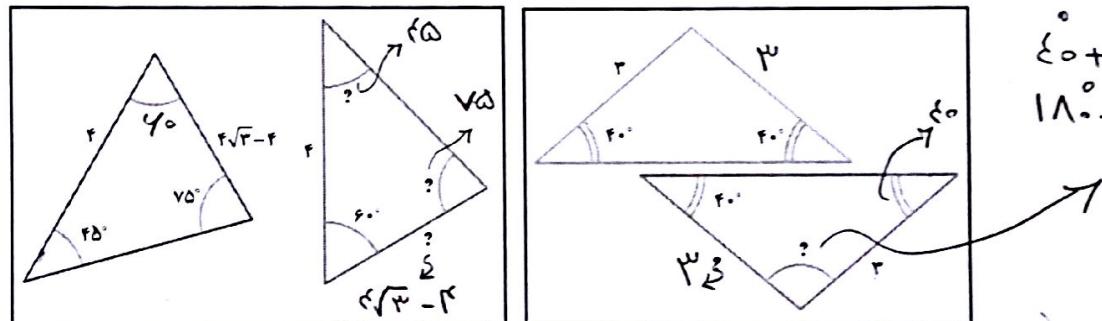


برای یادآوری بیشتر دو حالت دیگر همنهشتی مثلث‌ها و دو حالت همنهشتی ویرژه مثلث‌های قائم‌الزاویه را به همین صورت بیان کنید.

فعالیت

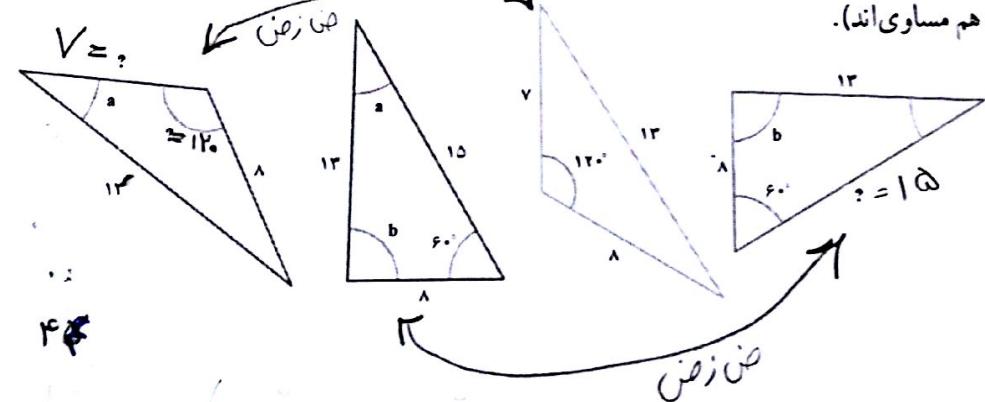
- ۱- در شکل‌های زیر، جفت مثلث‌های ترسیم شده در یک کادر، با یکدیگر همنهشتند. اندازه باره خطوط و زاویه‌های مجهول را روی شکل مشخص کنید.

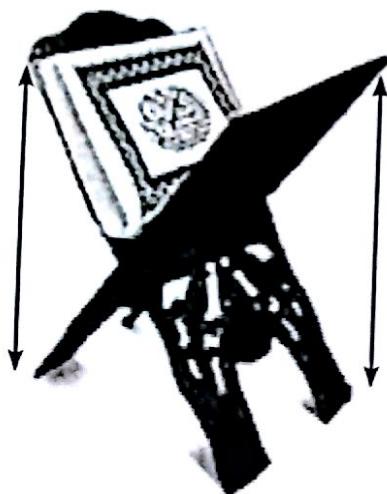
$$\begin{aligned} V\alpha + V\beta &= 120^\circ \\ 180^\circ - 120^\circ &= 60^\circ \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} V\alpha + V\beta &= 100^\circ \\ 180^\circ - 100^\circ &= 80^\circ \end{aligned}$$

- ۲- در شکل زیر چهار مثلث رسم شده‌اند که دو به دو یکدیگر همنهشتند.
اندازه‌های مجهول را روی آنها تعیین نماید. (زاویه‌هایی که با یک حرف مشخص شده‌اند، با هم مساوی‌اند).





مثال : با رحل‌های فرآنی، حتماً آشنایی دارید. یک نمونه از آنها داریم که دو لایه جویی آن از وسط هم گذشته‌اند. می‌خواهیم تساند دهیم که این تکیه گاه در هر وضعیتی که باشد، مطابق شکل، همواره فاصله دو لبه کناری آن، در دو طرف با هم برابر است. به زبان ریاضی، یعنی در شکل زیر، فرض مسئله این است که : $OA = OB$ و $OC = OD$ و حکم این است که : $AD = BC$.

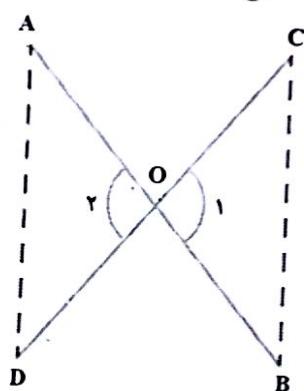
روشن است که زوایای \hat{O}_1 و \hat{O}_2 برابرند (چرا؟)

پس مثلث‌های OBC و OAD همنهشتند و از آنجا درستی حکم

به دست می‌آید :

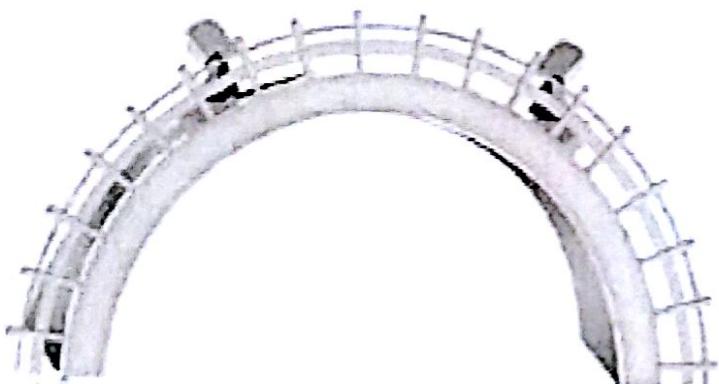
$$\left. \begin{array}{l} OA = OB \\ OC = OD \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta OBC \cong \Delta OAD \Rightarrow AD = BC$$

(ض زض)



گشتند

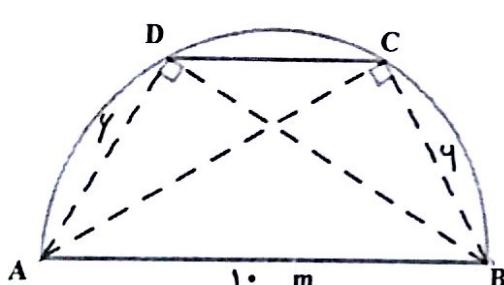
فعالیت



در تردیکی منزل ترانه و شهرزاد، پارکی هست که در آن یک بل فلزی به شکل نیم‌دایره هست که بجهه‌های بازی از روی پله‌های آن بالا می‌روند. می‌دانیم فاصله ابتدای بل (نقطه A) از انتهای آن (نقطه B) ۶ متر است و اکنون روی پله C

که از انتهای بل ۶ متر فاصله دارد نشسته است ($BC = 6$)

و شهرزاد روی پله D که از ابتدای بل همین قدر فاصله دارد، نشسته است و آنها حسن می‌زنند که باید فاصله‌شان از پایه‌های مقابل نیز برابر باشد، یعنی $AC = BD$.



$$AC^2 = AB^2 - BC^2 = 10^2 - 9^2 = 100 - 81 = 19 \rightarrow AC = \sqrt{19} = 1$$

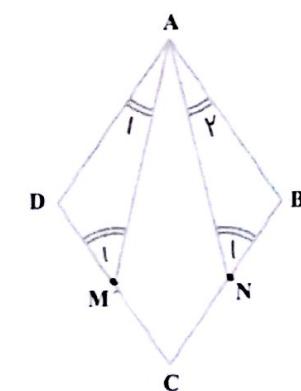
$$BD = 1$$

چون زاویه ممکن روبرو قطب ۹۰ درجه است

۱- چرا زاویه های \hat{C} و \hat{D} در شکل، قائماند؟ طول های AC و BD را به کمک قضیه

فیناغورس محاسبه کنید و نشان دهید: $AC=BD$

۲- به کمک همنهشتی مثلث های ACB و ADB همین نتیجه را ثابت کنید.



در شکل مقابل $ABCD$ لوزی است و نقطه های M و N وسط های اضلاع CB و CD هستند.

۱- با توجه به ویژگی های لوزی، تساوی های زیر را کامل کنید:

$$AD=AB=D\underset{\text{ضاد}}{C}=B\underset{\text{ضاد}}{C} \quad \hat{A}+\hat{B}=110^\circ$$

$$\hat{A}=\hat{C}, \hat{B}=\hat{D}, \hat{C}+\hat{B}=110^\circ$$

آیا می توانید تساوی های دیگری هم بنویسید؟

۲- با کامل کردن تساوی های زیر نشان دهید: $BN=DM$

$$DC=BC \Rightarrow \frac{1}{2}DC=\frac{1}{2}BC \Rightarrow DM=BN$$

۳- با توجه به نتیجه قسمت دوم و تساوی های قسمت اول ثابت کنید مثلث های ADM و ABN همنهشتند.

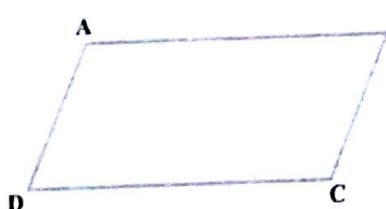
از آنجا جگونه می توانید تساوی پاره خط های AM و AN را نتیجه بگیرید؛ زاویه های برابر هستند.

در دو مثلث ABN و ADM را نیز مشخص کنید

$$\begin{cases} AD=AB \\ \hat{D}=\hat{B} \\ DM=BN \end{cases} \xrightarrow{\text{ضاد}} ADM \cong ABN$$

$$\begin{cases} \overline{AD}=\overline{AB} \Rightarrow \\ \frac{1}{2}\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{AB} \\ \overline{AB}=\overline{BC} \Rightarrow \\ \frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\overline{BC} \end{cases}$$

کار در کلاس



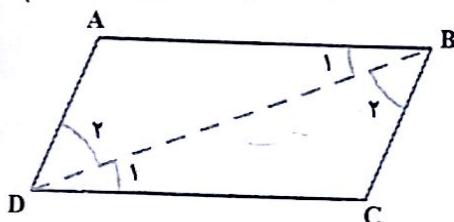
می خواهیم ثابت کنیم که در هر متوازی الاضلاع مانند شکل روبرو، ضلع های مقابل، همواره با هم برابرند. مفروضات و داده های مسئله چیست؟ تمام آنها را بنویسید. حکم مسئله چیست؟ برای حل این مسئله نظرات چند داش آموز را بینید و با توجه به آنها به سوالات پاسخ دهید.

شهرزاد : معلوم است که ضلع های رو به رو با هم مساوی اند! با چشم هم می توان دید!

آفرين : در تعريف متوازي الاصلع برابري ضلع های رو به رو را می دانستیم. علاوه بر آن با اندازه گيري هم می توانیم این موضوع را نشان دهیم.

نماینده حمل احوال حطافت

- آیا می توانیم در حل مسائل هندسه فقط به چشم هایمان اعتماد کنیم؟ چرا؟ نه خیر حمل احوال حطافت
- به تعريف متوازي الاصلع در کتاب سال گذشته مراجعه کنید، آیا برابری اصلع مقابل، در این تعريف وجود داشت؟ آیا اگر با اندازه گیری اصلع مقابل، برای آنها را بیینیم، درستی حکم را ثابت کرده ایم؟ چرا؟ نه خیر حمل احوال حطافت



ترانه : به نظر من باید دو مثلث همنهشت بیاپیم و با اثبات همنهشتی آنها به برابری اصلع مقابل در متوازي الاصلع برسیم. اما در شکل دو مثلث نداریم، پس با اضافه کردن یک خط، یعنی یکی از قطرها، دو مثلث ایجاد می کنیم.

در این دو مثلث، ضلع های رو به روی AD و BC ، رو به رو به کدام زاویه ها هستند؟ چرا این دو زاویه برابرند؟

اثبات را به صورت زیر کامل کنید :

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel CD, \angle B = \angle D \text{ مورب} \\ AD \parallel BC, \angle A = \angle C \text{ مورب} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \triangle ABD \cong \triangle CDB \\ (\text{رض ز}) \end{array}$$

$\Rightarrow AD = BC, AB = CD$

- چرا برای اثبات همنهشتی مثلث های ایجاد شده، نمی توانستیم روی حالت های (ض زض) و (ض ض ض) حساب کنیم؟ چون معرف اثبات حکم ایست و در فرض روش نظری را بر نزاریم.
- با توجه به مباحث درس قبل (هندسه و استدلال) بگویید آیا می توانستیم، همین نتیجه را با

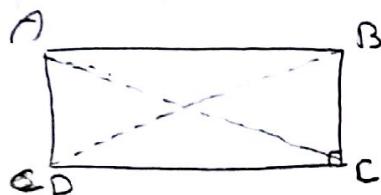
رسم قطر AC به دست آوریم؟ بله

- از همنهشتی مثلث های ایجاد شده در متوازي الاصلع، به جز برابری ضلع های مقابل، نتیجه دیگری هم در مورد زاویه های متوازي الاصلع به دست می آید. این نتیجه را بنویسید :
- در هر متوازي الاصلع (ز وا ب ای). رو به رو، مساوی اند.

پاسخ حربیات - صفحہ ۴۱

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{CD} \\ \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\ \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{زیرا}} \triangle AOB \cong \triangle COD$$

$OA = OC$ ، $OB = OD$ بنابراین احراز مساحت



$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{AD} = \overline{BC} \\ \hat{B} = \hat{C} \\ \overline{DC} = \overline{DC} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{زیرا زیرا}} \triangle BCD \cong \triangle ADC$$

$\overline{AC} = \overline{BD}$ بنابراین احراز مساحت

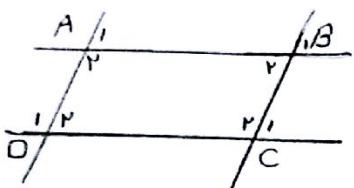
$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{AC} \\ \overline{AM} = \overline{AM} \\ \overline{BM} = \overline{MC} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{زیرا زیرا}} \triangle ABM \cong \triangle AMC$$

بنابراین احراز مساحت $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ ، $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \implies \text{لکھیں} AM$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{BM} = \overline{MC} \\ \overline{AB} = \overline{AC} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{لکھیں} \text{ عمودی نصف واقع} \angle A = 90^\circ} \hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 90^\circ$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ \\ \overline{OA} = \overline{OB} \\ \overline{OM} = \overline{OM} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{لکھیں} \text{ وتر دوستی}} \triangle OAM \cong \triangle OBM \implies \overline{AM} = \overline{MB}$$



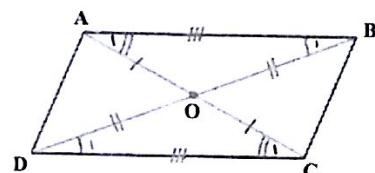
$$AB \parallel CD \text{ و } AD \Rightarrow \begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{D}_2 \\ \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A}_2 + \hat{D}_2 = 180^\circ \\ \hat{A}_2 + \hat{A}_1 = 180^\circ \end{cases} \text{ I}$$

$$AB \parallel CD \text{ و } BC \Rightarrow \begin{cases} \hat{B}_2 = \hat{C}_1 \\ \hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{B}_2 + \hat{C}_2 = 180^\circ \\ \hat{B}_2 + \hat{A}_1 = 180^\circ \end{cases} \text{ II}$$

$$AD \parallel BC \text{ و } AB \Rightarrow \begin{cases} \hat{B}_1 = \hat{A}_1 \\ \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{B}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ \\ \hat{A}_1 + \hat{B}_2 = 180^\circ \end{cases} \text{ III}$$

۳- نتیجه قسمت دوم را بدون استفاده از همنهشتی مثلث‌ها، و با امتداد دادن اضلاع

متوازی‌الاضلاع، به کمک خطوط موازی و مورب به طور مستقیم ثابت کنید.
بهین ترتب حواهای $\hat{A}_2 = \hat{C}_1$ ثابت



۱- به کمک نتایج بدست آمده در مورد اضلاع متوازی در متوازی‌الاضلاع، ثابت کنید قطرهای هر متوازی‌الاضلاع بکدیگر را نصف می‌کنند. یعنی در شکل مقابل نشان دهید: $OB=OD$ و $OA=OC$.

۲- ثابت کنید در هر مستطیل، قطرها با یکدیگر برابرند. (مستطیل نوعی متوازی‌الاضلاع است!)

۳- در مثلث متساوی‌الساقین ABC، میانه AM را رسم کرده‌ایم. مثلث‌های AMC و AMB به چه حالتی همنهشت هستند؟

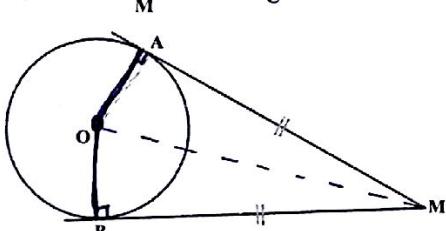
چرا AM نیمساز زاویه \hat{A} است؟ چرا AM بر BC عمود است؟

۴- سجاد به تجربه دیده که هر بار که از بیرون دایره‌ای، دو معاس

بر آن رسم کرده، معاس‌ها به ظاهر با هم برابرند. اما دلیل درستی این موضوع را نمی‌داند. باوصل کردن نقطه O (مرکز دایره) به سه نقطه A

و M و B در شکل، و با توجه به ویژگی شعاع و معاس که در سال گذشته دیدید و اثبات همنهشتی دو مثلث مناسب به او کمک کنید تا علت درستی این حکم را بداند.

$\overline{AM} = \overline{MB}$: حمل



۵- در شکل مقابل خط d از وسط پاره خط AB فرض $\overline{OA} = \overline{OB}$

گذشته و A و B به یک فاصله‌اند ($AH=BH'$) ثابت کنید

او استدلال زیر را برای اثبات حکم ارائه کرد: $OH=OH'$.
 $OA=OB$ (طبق فرض)
 $\hat{O}_1=\hat{O}_2$ (متقابل به رأس)
 $AH=BH'$ (فرض)
 $\Delta OAH \cong \Delta OBH' \Rightarrow OH=OH'$

$\overline{OH}=OH'$: حمل

آیا استدلال را می‌پذیرید؟ در غیراین صورت آن را طوری اصلاح کنید که درست شود.

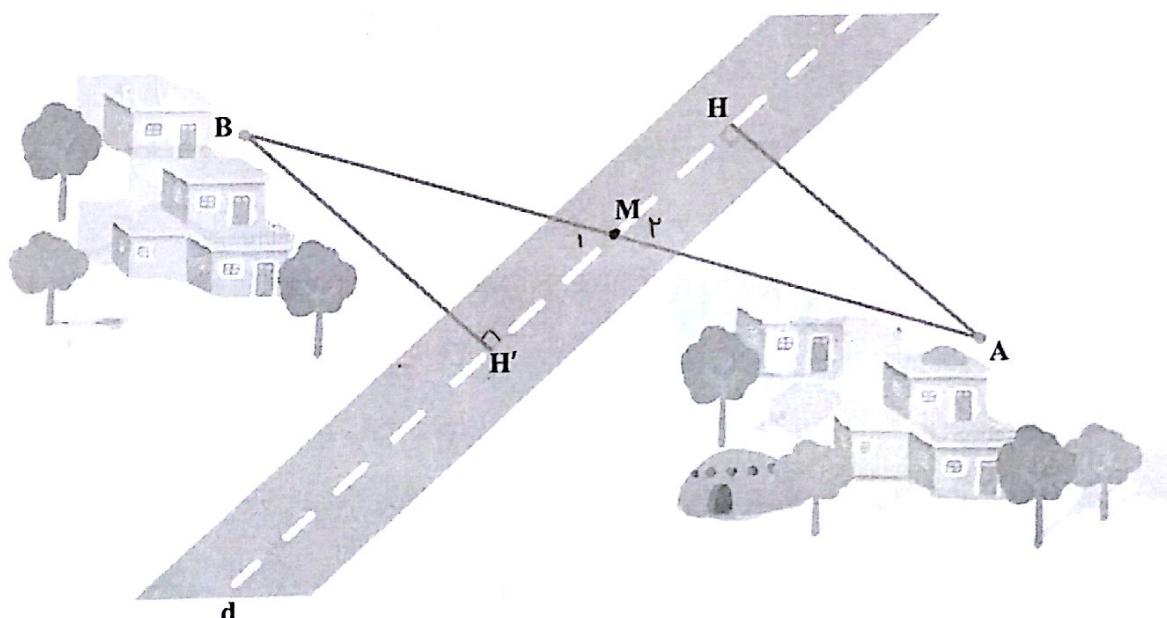
نخیر - حالت ساده‌تر دو مثلث استثنای باش. بنابراین حالت

و ترکیب ضلع یا و ترکیب زاویه نمایند درست هستند
 $\overline{OA} = \overline{OB}$ $\overline{AH} = \overline{BH}'$ $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow \Delta OAH \cong \Delta OBH' \Rightarrow \overline{OH} = \overline{OH}'$

با $\overline{OA} = \overline{OB}$ و ترکیب ضلع $\overline{AH} = \overline{BH}' \Rightarrow \Delta OAH \cong \Delta OBH' \Rightarrow \overline{OH} = \overline{OH}'$

برای حل مسائل هندسی، راه حل کلی وجود ندارد، اما مراحلی را می‌توان مشخص کرد که برای هر مسئله هندسه، آنها را توصیه می‌کنند. این مراحل را در حل یک مثال کاربردی در عمل معرفی می‌کنیم.

مثال : دو روستای A و B از سال‌ها قبل با یک جاده خاکی مستقیم به هم وصل بوده‌اند. چند سال قبل در آن منطقه یک جاده آسفالتی مستقیم ساخته شد که دو روستا در دو طرف آن واقع شدند و جاده آسفالتی درست از وسط جاده خاکی عبور می‌کرد و راه ارتباط دو روستا به جاده آسفالتی از طریق همان جاده خاکی انجام می‌شود. اکنون برای کوتاه کردن این راه، اداره راهسازی تصمیم گرفته که از هر روستا، یک جاده آسفالتی با کوتاه‌ترین فاصله ممکن، تا جاده اصلی ایجاد کند. بنابراین از روستای A یک جاده مستقیم، عمود بر این جاده اصلی و به طول ۴ کیلومتر ساخته شد. برای برآوردهزینه‌های ایجاد جاده دیگر از روستای B، مهندسان پیش‌بینی کرده‌اند که فاصله روستای B از جاده نیز همین مقدار است. یعنی در شکل مقابل خط d جاده اصلی است که از M وسط AB عبور کرده و AH فاصله روستای A تا جاده (۴km) و H' فاصله روستای B تا جاده اصلی است و می‌خواهیم نشان دهیم که $AH=BH'$.



قدم‌های حل مسئله

- صورة مسئله را بدقت بخوانید و مفاهیم تشکیل‌دهنده آن را بشناسید. در این مسئله با مفاهیمی همچون خط، پاره خط و فاصله نقطه تا خط سروکار داریم. آیا با آنها آشنایی دارید؟
- اگر مسئله فاقد شکل است، با توجه به صورت مسئله، یک شکل مناسب برای آن رسم کنید. در اینجا شکل این مسئله را با توجه به طرح بالا رسم نمایید.

گـ داده های مثله (فرض) و خواسته های آن (حکم) را تشخیص داده و در یک جمله بتوسید. در اینجا فرض های اصلی این است که M و N میانجای A و B باشند، $MA=MB$ و $NA=NB$ است؛ یعنی $AH=BH$ و $AH=BH'$ بوده و حکم این است که $AH=BH'$

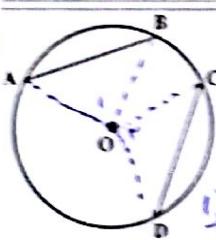
فرض	$MA=MB$ ، $\hat{H}=\hat{H}'=90^\circ$
حکم	$AH=BH'$

آـ رای ریاضی از فرض به حکم راه حلی پیدا کند. روش های مختلفی برای این کارهای است. آنها را به مرور می آوریم. بخوبی از راه های اثبات برای دو پل به خط استفاده از مثلث های همنهشت است. در این نکل، کدام دو مثله را برای این مظور مناسب است؟ با توجه به فرض و حکم مثله اثبات را با شرح های ریاضی کامل کند:

$$\left. \begin{array}{l} MA=MB \\ \hat{H}=\hat{H}'=90^\circ \\ \Delta_1 = \Delta_2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{از روی یک زاویه حاده}} \frac{\Delta_1 \cong \Delta_2}{AH \cong BH'} \Rightarrow AH=BH'$$

فعالیت

$$\left\{ \begin{array}{l} OB=OC \\ OA=OD \\ AB=CD \end{array} \right. \xrightarrow{\text{از روی یک زاویه}} \quad \quad \quad$$



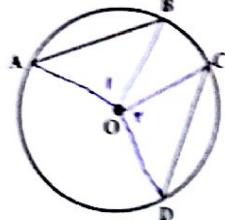
$$ABO \cong OCD$$

در شکل مطالعی وتر های AB و CD باهم مساوی است.

۱- تسان دهد که زان های \widehat{AB} و \widehat{CD} مساوی است.

$$\xrightarrow{\text{از روی یک زاویه}} \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

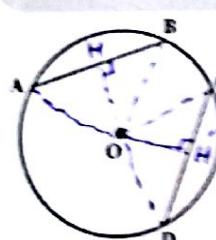
۲- در شکل مطالعی کمان های AB و CD مساوی است. تسان



$$\xrightarrow{\text{از روی یک زاویه}} DAB \cong OCD$$

$$\left\{ \begin{array}{l} OA=OD \\ \widehat{DAB} = \widehat{OCD} \\ OB=OC \end{array} \right. \xrightarrow{\text{از روی یک زاویه}} AB=CD$$

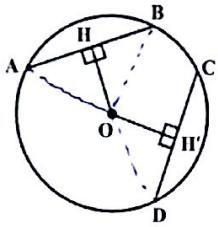
در یک دایره اگر دو کمان برابر باشند، وتر های ظیر آنها باهم برابرند و اگر دو وتر برابر باشند، کمان های ظیر آنها نیز باهم برابرند.



۳- از سل گفته می دانید خطی که از مرکز دایره بروز وتر عمود شود، وتر را نصف می کند. با توجه به این موضوع، تسان دهد مرکز دایره از دو وتر مساوی به یک فاصله است.

$$AB=CD \Rightarrow \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD \Rightarrow AH=HB=CH=DH \quad ۵۰$$

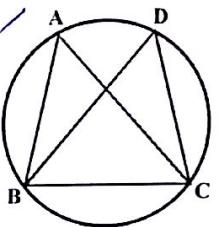
$$\left\{ \begin{array}{l} OB=OC \\ CH'=BH \end{array} \right. \xrightarrow{\text{از روی یک زاویه}} OHB \cong OH'C \Rightarrow OH=OH'$$



۴- در شکل مقابل می دانیم مرکز دایره از دو وتر AB و CD به یک فاصله است ($OH = OH'$). مرکز دایره را به A و D وصل کنید و با پر کردن جاهای خالی نشان دهید که طول های دو وتر AB و CD با هم برابر است:

$$\left. \begin{array}{l} OA = OD = R \\ \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ \\ OH = OH' \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ساعی} \\ \text{وَرُوْدِيْهْ} \\ \Rightarrow \triangle OAH \cong \triangle ODH' \Rightarrow AH = DH \Rightarrow \\ 2AH = 2DH \Rightarrow AB = CD \end{array}$$

کار در کلاس



- در شکل مقابل می دانیم $AB = CD$.
۱- چرا $\widehat{AB} = \widehat{CD}$? پس دو دایره ای در درایر باشند
۲- جاهای خالی را با عبارت های مناسب پر کنید:

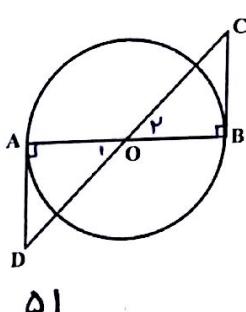
$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{AB} = \widehat{CD} \\ \widehat{BC} = \widehat{DC} \\ \widehat{AB} + \widehat{BC} = \widehat{CD} + \widehat{DC} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$$

۳- چرا $AC = BD$? چون دو دایره ای درایر باشند و ترتیب های تضاد آنها نشان دهنده هم برایند

$$\triangle DPQ \cong \triangle MNB$$

تمرین

$$\left\{ \begin{array}{l} MB = DP \\ BN = DQ \\ \hat{B} = \hat{D} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{می بینیم} \\ \text{برای} \\ \text{آنکه} \end{array}$$



۱- در شکل مقابل $ABCD$ متوازی الاضلاع است و M و N و M و P و Q وسطهای اضلاع متوازی الاضلاع است، ثابت کنید: $MN = PQ$ نیز ساوی

$$MN = PQ$$

۲- در شکل مقابل O مرکز دایره است و AD و BC بر دایره معاس است، نشان دهید که $AD = BC$ برایند.

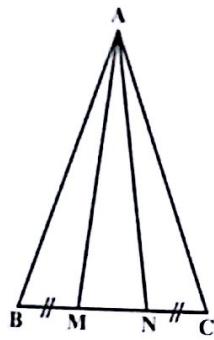
$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ \\ OA = OB \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{زیرا:} \\ \text{نیز:} \end{array} \Rightarrow \triangle OAD \cong \triangle OBC$$

نه بتسه اجزا قابل

$$AD = BC$$

می بینیم

$$\left\{ \begin{array}{l} AB = CD \Rightarrow \\ \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} CD \\ \text{و} \\ AD = BC \Rightarrow \\ \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} BC \end{array} \right.$$



۳- در شکل مقابل، مثلث ABC متساوی الساقین است و M و N

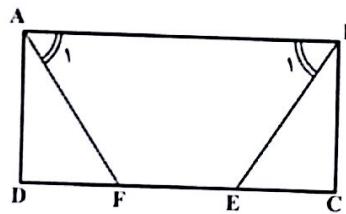
روی قاعده BC طوری قرار دارد که $BM=NC$

نشان دهید مثلث AMN هم متساوی الساقین است.

$$\left\{ \begin{array}{l} AB = AC \\ \hat{B}_1 = \hat{B}_2 \\ BM = CN \end{array} \right. \xrightarrow{\text{ضلیع}} \triangle ABM \cong \triangle ACN \xrightarrow{AM = AN}$$

پس از اینکه مثلث AMN متساوی الساقین باشد

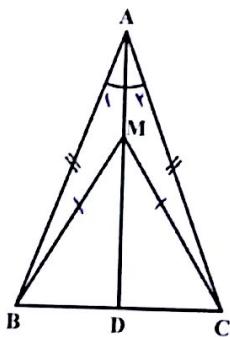
$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 \\ \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{A}_2 \end{array} \right.$$



۴- در مستطیل $ABCD$ ، پاره خط های AF و BE

طوری رسم شده که دو زاویه A_1 و B_1 برابرند، ثابت کنید $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$ و $AF = BE$ مساوی اند.

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A}_2 = \hat{B}_2 \\ AD = BC \\ D = C \end{array} \right. \xrightarrow{\text{رضیع}} \triangle ADF \cong \triangle BEC \xrightarrow{AF = BE}$$

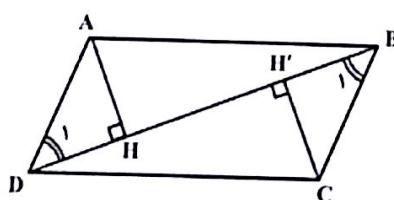


۵- نشان دهید در هر مثلث متساوی الساقین، فاصله هر

نقطه دلخواه روی نیمساز زاویه رأس از دو سر قاعده، برابر است:

$$\left\{ \begin{array}{l} AB = AC \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ AM = AM \end{array} \right. \xrightarrow{\text{ضلیع}} \triangle AMB \cong \triangle AMC \xrightarrow{MB = MC}$$

و همچنین مثلث MBc نیز متساوی الساقین است.



۶- در شکل مقابل $ABCD$ متوازی الاضلاع

است و AH و CH' فاصله های نقاط A و C از قطر BD

است. دلیل برابری دو زاویه B_1 و D_1 را توضیح دهید.

نشان دهید مثلث های ADH و $CH'B$ همنهشتند

و از آنجا برابری AH و CH' را نتیجه بگیرید، سپس

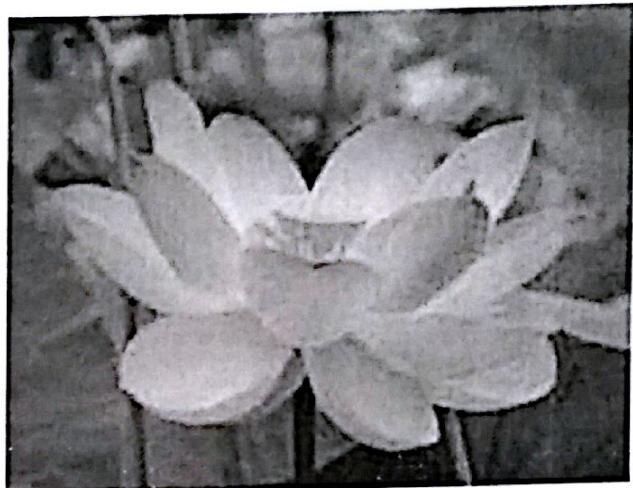
جمله زیر را کامل کنید:

در هر متوازی الاضلاع، هر دو رأس متقابل، از _____ بین آنها به یک _____ اند.

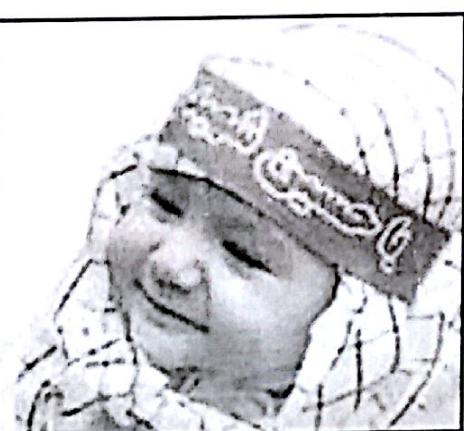
$$AD \parallel BC \text{ و } DB \text{ عمود بر} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \quad ۵۲$$

$$\left\{ \begin{array}{l} AD = BC \\ \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{و ترکیب زاویه}} \triangle ADH \cong \triangle CBH' \xrightarrow{\text{ب جزاء همنهشت}} AH = CH'$$

– در تصویرهای زیر دو گل شبیه به هم را می‌بینید. آیا هر گل به طور کامل مثل هم هستند؟ نحوه



دیسایزش



– تصویرهای زیر عکس‌هایی از میدان آزادی تهران می‌باشند. کدام یک مشابه میدان آزادی است و کدام یک نیست؟ الف هر وله ب میت.



الف



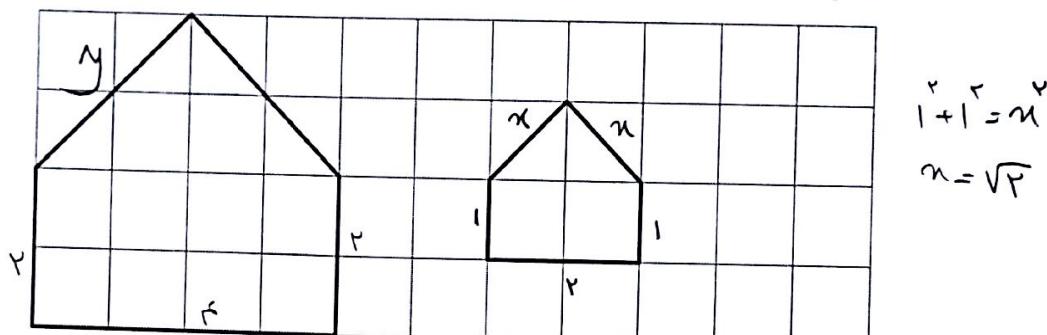
ب

۵۳

فعالیت

۱- مربع‌های صفحه شطرنجی زیر به ضلع یک سانتی‌متر هستند.

$$2+2=4 \\ 4 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$



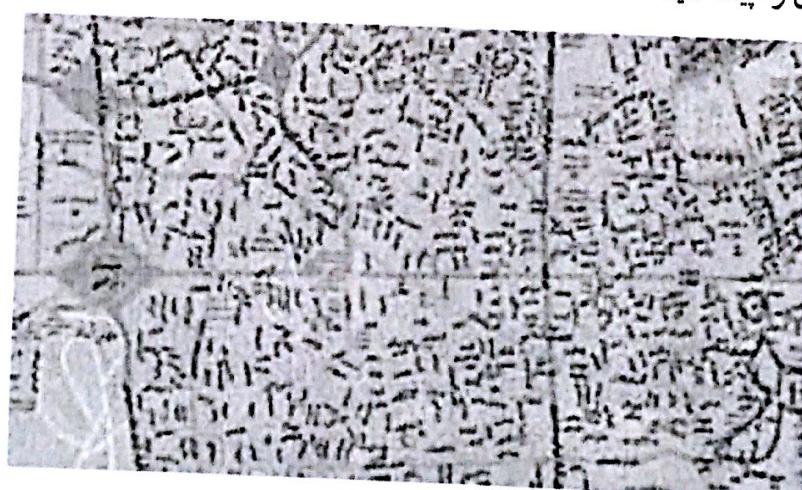
اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های هر دو شکل را بنویسید.

۱- دو رابطه ای بین ضلع‌های دو شکل وجود دارد؟
چه رابطه ای بین زاویه‌های دو شکل وجود دارد؟
اندازه ضلع‌های شکل (۱) چند برابر اندازه ضلع‌های
شکل (۲) است؟

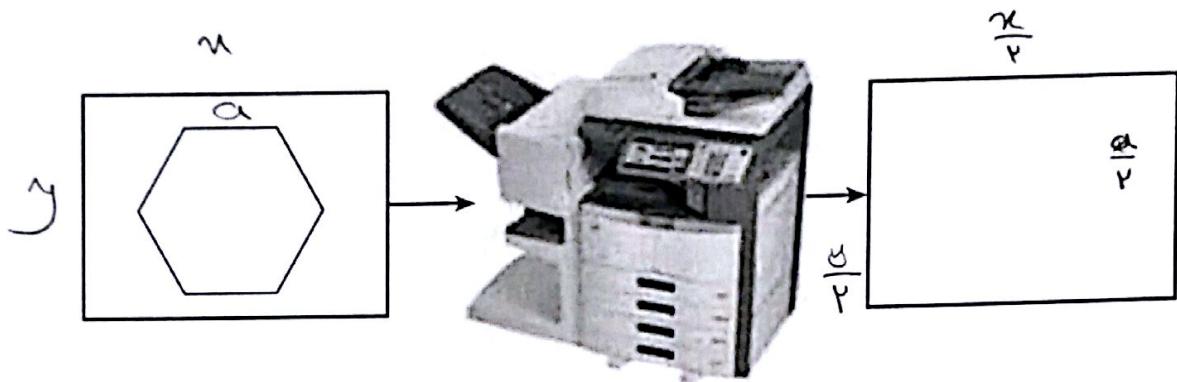
در صفحه شطرنجی مقابل یک شکل رسم کنید و
یک شکل مثل آن بکشید که اندازه ضلع‌هایش ۲ برابر شکل
اول باشد.

۲- در تصویر زیر نقشه قسمتی از شهر تهران را می‌بینید مقیاس نقشه ۱ به ۱۰۰,۰۰۰ است.
يعنی هر یک سانتی‌متر روی نقشه برابر با ۱۰۰,۰۰۰ سانتی‌متر مقدار واقعی است. فاصله دو میدان
انقلاب و آزادی را پیدا کنید.

cm واقعی cm
۱ ۱۰۰,۰۰۰
۲ میدان رومیر
برابر



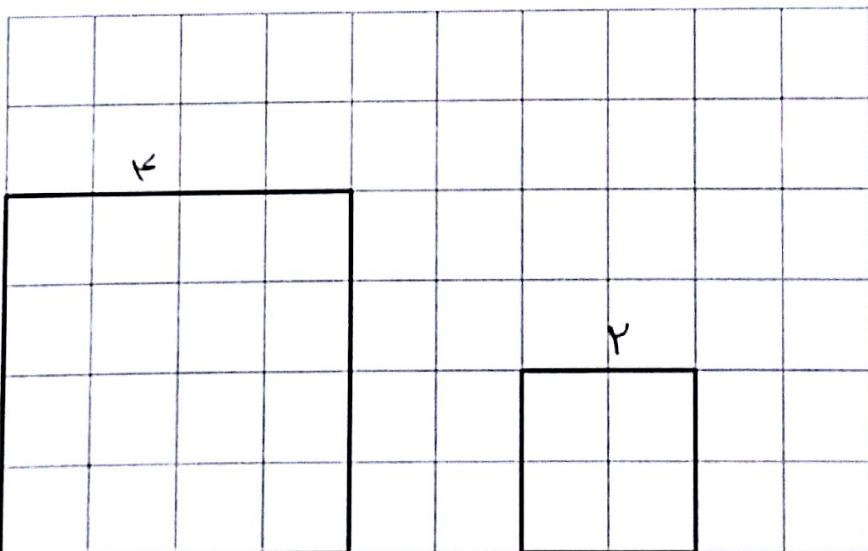
۳- شکل زیر را با دستگاه کپی کوچک کرده‌ایم. عدد روی دستگاه 50% را نشان می‌داد.
تصویر خروجی را شمارس کنید.



هرگاه در دو شکل همه ضلع‌ها به یک نسبت تغییر کرده باشند (کوچک یا بزرگ شده یا بدون تغییر باشند) و اندازه زاویه‌ها تغییر نکرده باشد، به آن دو شکل متشابه می‌گوییم.

کار در کلاس

۱- آیا دو مربع زیر متشابه هستند؟ اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های هر کدام را بنویسید. چه رابطه‌ای بین ضلع‌ها و زاویه‌های دو شکل وجود دارد؟
آیا می‌توان گفت هر دو مربع دلخواه با هم متشابه‌هند؟ چرا؟ الف را و های ها باهم برابر - اضلاع متسا



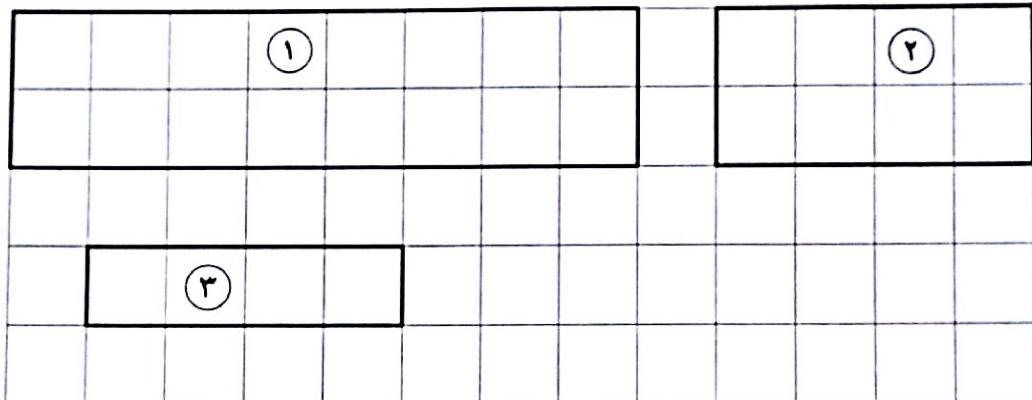
$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = \hat{A}' = \hat{B}' = \hat{C}' = \hat{D}' \\ \\ \end{array} \right.$$

۵۸

- ۱- زوایس برابر با هم را نمودار نمایم
۲- نسبت اضلاع های این مربعات را مورد بررسی قرار نمایم

نوبت

۲- از مستطیل‌های زیر کدام با هم متشابه‌اند؛ چرا؟ نمایه ۱ و ۳ - حجیل امتداع هنرمند عزیزی برابر با آیا هر دو مستطیل دلخواه با هم متشابه است؟ نه حجیل امکان دارد امتداع هنرمند نباشد.

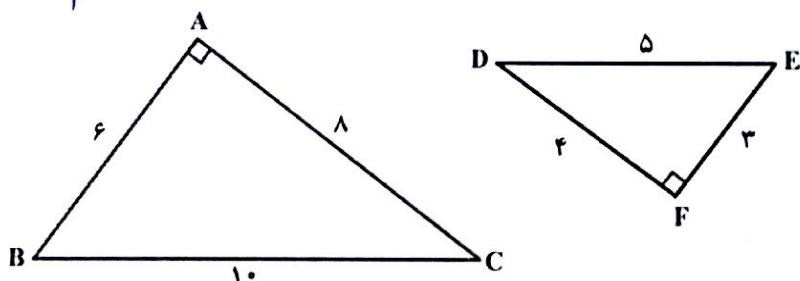


فعالیت

دو مثلث زیر با هم متشابه است. ضلع‌های متناظر و زاویه‌های متناظر را همنگ کنید. نسبت ضلع‌های متناظر را بنویسید. آیا سه کسر برابر به دست آمد؟

$$\frac{EF}{AB} = \frac{FD}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2}$$

امتداع مشاهده است.

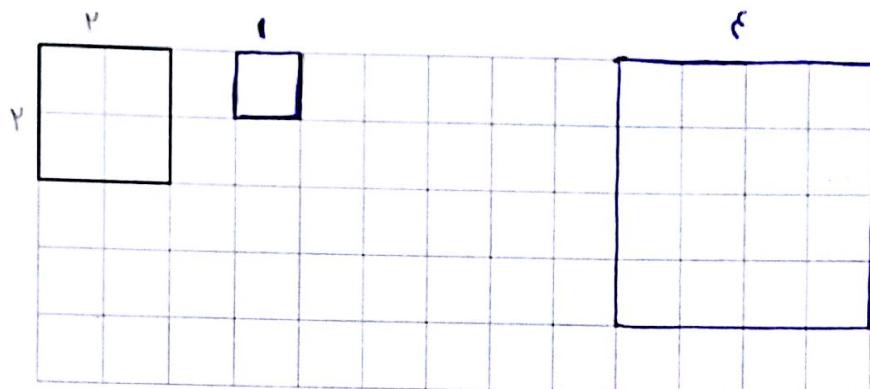


به نسبت دو ضلع متناظر در دو شکل متشابه، نسبت تشابه می‌گویند.

کار در کلاس

۱- با توجه به مربع صفحه بعد، مربع دیگری رسم کنید به گونه‌ای که نسبت تشابه دو مربع $\frac{1}{2}$ باشد. این سوال چند پاسخ دارد؛ چرا؟ ۲- جواب دارد. سچون دو مربع به امتداع ۱ و ۲ خواهیم داشت.

✓



$$BC' = \epsilon + \epsilon$$

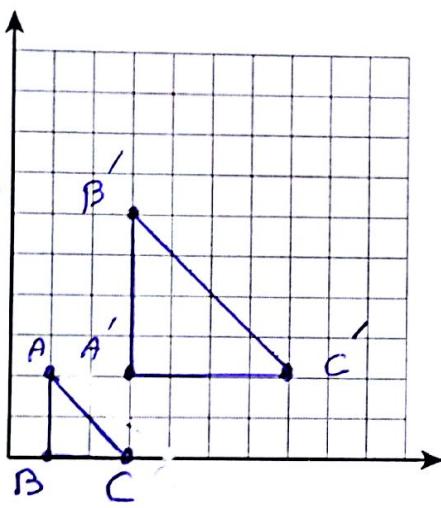
$$BC' = 4\epsilon$$

$$BC' = \sqrt{4\epsilon^2} = 2\sqrt{\epsilon}$$

$$AC^2 = \epsilon^2 + \epsilon^2 = \epsilon + \epsilon$$

$$AC^2 = \lambda$$

$$AC = \sqrt{\lambda}$$



۲- در صفحه مختصات، نقاط زیر را پیدا کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ مثلث } ABC$$

$$A' = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, B' = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, C' = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ مثلث } A'B'C'$$

طول ضلع های دو مثلث را بنویسید و تشابه آنها را بررسی کنید، در صورت متشابه بودن، نسبت تشابه را

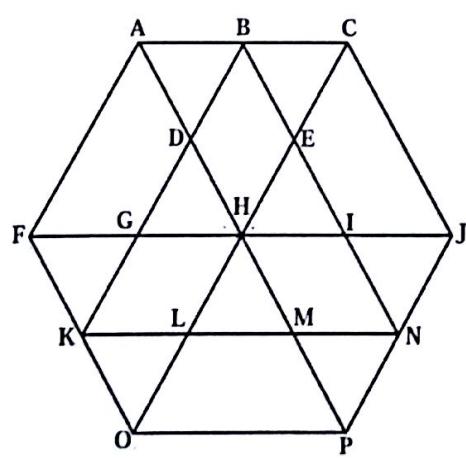
$AB = 2, A'B' = \epsilon$ پیدا کنید.

$$BC = 2, A'C' = \epsilon$$

$$AC = \sqrt{\lambda} \text{ و } BC' = 2\sqrt{\lambda}$$

تمرين

۱- چندضلعی های متشابه که در شکل زیر تشخیص می دهید، نام بیرید.



$$GDAF \cong EIJC$$

$$DGH \cong EHI$$

$$AFQH \cong HCJP$$

$$HFQ \cong HJP$$

$$AHc \cong HOp$$

$$HDKL \cong MHNE$$

۲- آیا هر دو شکل همنهشت با هم، متشابه نیز هستند؟ بله

در صورت متشابه بودن نسبت تشابه چند است؟ ۱

۳- آیا هر دو لوزی متشابهند؟ چرا؟ نه خیر چون ممکن است زوايا برابر نباشد.

۴- در یک نقشه، مقیاس ۲۰۰:۱ است. فاصله دو نقطه روی نقشه $\frac{2}{5}$ سانتیمتر است. فاصله

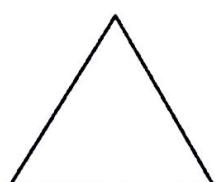
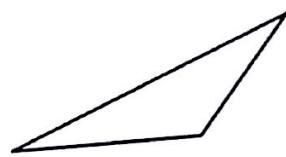
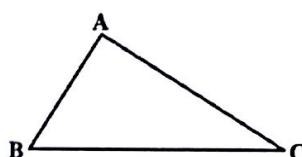
این دو نقطه در اندازه واقعی چقدر است؟ $x = \frac{200}{\frac{2}{5}} = 500$

۵- آیا هر دو مثلث متساوی الاضلاع متشابهند؟ چرا؟ بله چون اضلاع متشابه و زوايا برابر است

۶- آیا هر دو مثلث متساوی الساقین متشابهند؟ چرا؟ نه خیر چون ممکن است زوايا برابر نباشند.

۷- مثلث ABC به ضلع های ۴ و ۵ و ۸ با مثلث DEF به ضلع $1-x$ و 10 و $x+7$ با هم متشابه هستند (اندازه ضلع های مثلث ها، از کوچک به بزرگ نوشته شده است) مقدار x را پیدا کنید.

۸- کدام مثلث با مثلث ABC متشابه است؟



سوال

- V

$$\frac{x}{n-1} = \frac{10}{10} = \frac{\lambda}{n+\nu} \longrightarrow n-1 = \lambda \quad n=9, \quad n+\nu = 14$$

۴	$n-1$
۹	۱۰
۱	$n+\nu$

۵۸