استدلال:
استدلال یعنی دلیل آوردن و استفاده از دانسته‌های قبلی، برای معلوم کردن موضوعی که در ابتدا مجهول بوده است.

آشنایی با اثبات در هندسه:
برای اثبات یا مشخص کردن هر موضوعی یا مسئله‌ای در هندسه، ابتدا باید ببینیم که چه اطلاعاتی در مورد مسئله به ما داده‌اند. به این اطلاعات داده شده مسئله، فرض مسئله یا داده‌ی مسئله گویند. پس باید دقت کنیم که مسئله از ما چه چیزی می‌خواهد یا باید ببینیم چه چیزی را باید اثبات کنیم. آن‌چه را که باید اثبات کنیم، حکم نامیده می‌شود. نوشتن فرض و حکم برای هر مسئله هندسی کمک زیادی به دقت در حل مسئله می‌کند.

هم‌نهشتی مثلث‌ها:
یادآوری:
هم‌نهشتی مثلث‌ها را در ۳ حالت دسته‌بندی کردیم: (ض ض ض)، (ض ز ض)، (ز ض ز)

هم‌نهشتی در مثلث‌های قائم‌الزاویه به دلیل داشتن یک زاویه قائمه، به دو حالت تقلیل پیدا می‌کند:
۱- وتر و یک ضلع
۲- وتر و یک زاویه تند

حل مسئله در هندسه:
برای حل مسائل هندسه، راه‌حل کلی وجود ندارد. اما انجام مراحل زیر در حل یک مسئله به ما کمک می‌کند تا به جواب برسیم.
۱- صورت مسئله را به دقت بخوانید و مفاهیم تشکیل‌دهنده آن‌را بشناسید.
۲- اگر مسئله فاقد شکل است با توجه به صورت مسئله یک شکل مناسب برای آن رسم کنید.
۳- داده‌های مسئله (فرض) و خواسته آن (حکم) را تشکیل داده و در یک جدول مانند جدول زیر بنویسید.

فرض	
حکم	

۴- برای رسیدن از فرض به حکم، راه‌حلی پیدا کنید و در صورتی که به جواب نرسیدید، به دنبال یک راه‌حل دیگر باشید.

شکل‌های متشابه:
هرگاه دو چندضلعی همه‌ی ضلع ها به یک نسبت تغییر کرده باشد (کوچک یا بزرگ شده یا بدون تغییر باشد) و اندازه زاویه‌ها تغییر نکرده باشد آن دو چندضلعی با هم متشابه‌اند.

نسبت تشابه: به نسبت دو ضلع متناظر در دو شکل متشابه، نسبت تشابه می‌گویند.

تشابه در چند ضلعی‌ها:
۱- تعداد ضلع‌های آن‌ها برابر باشد؛ هیچ‌گاه تشابه به یک پنج‌ضلعی با یک۷ضلعی امکان‌پذیر نیست.
۲- زاویه‌های متناظر آن‌ها؛ مساوی باشد. در شکل‌های متشابه زاویه ها تغییر نمی‌کند و به همان اندازه‌ای که بوده باقی می‌ماند.
۳- اضلاع متناظر آن‌ها، متناسب باشند؛ تنها موردی که می‌توان در شکل‌های متشابه تغییر کند، اندازه‌ی آن‌ها است. البته باید تمامی ضلع‌ها به یک نسبت تغییر کند.

جمله جبری: در سال‌های قبل با مفهوم جبر آشنا شدیم. در آن‌جا آموختیم که یک جمله‌ای جبری از ضرب یک عدد در یک یا چند متغیر (حرف) ایجاد می‌شود. در یک جمله‌ای جبری، حروف در یک‌دیگر ضرب شده‌اند و توان‌های طبیعی دارند، هم‌چنین زیر رادیکال نمی‌باشند.

درجه نسبت به متغیر: منظور از درجه نسبت به یک متغیر، همان توان متغیر است. مثلاً در $۵x^{۳}y^{۴}$ درجه نسبت به x برابر ۳ و نسبت به y برابر ۴ است. و در کل درجه آن نسبت به همه متغیرها $۳ + ۴ = ۷$ است.

جملات متشابه: به جملاتی گفته می‌شود که بخش حرفی آن‌ها از حروف یکسان (با توان یکسان) ساخته شده‌اند. مثلاً $۵x^{۲}y^{۴}$ و $-۲x^{۲}y^{۴}$ و $y^{۴}x^{۲}$ متشابه هستند ولی $۲x^{۳}y$ با $۲xy^{۳}$ متشابه نیستند.

مرتب کردن یک عبارت جبری: یک عبارت را براساس یک حرف مشخص نسبت به توان‌های آن نزولی بنویسیم را مرتب کردن یا استاندارد نوشتن است.

جمع و تفریق جملات جبری:
زمانی که دو یا چند جمله متشابه هستند می‌توانیم آن‌ها را با هم جمع و تفریق کنیم. (ضرایب آن‌ها را با هم جمع و تفریق می‌کنیم.)

عبارت یک جمله‌ای: هر عبارت را که به‌صورت حاصل‌ضرب یک عدد حقیقی در توان‌های صحیح و نامنفی یک یا چند متغییر باشد، یک جمله‌ای می‌نامیم.

اتحاد: اگر در دو عبارت جبری، مقدارهای مختلف قرار دهیم و همیشه حاصل آن‌ها یکسان شود، اصطلاحاً می‌گوییم آن دو عبارت جبری با هم متحد هستند و به آن‌ها اتحاد می‌گوییم.
در واقع برابری جبری حاصل از عبارت‌های جبری را اتحاد جبری گویند.

مهم‌ترین اتحادها:

مربع مجموع : $(a + b)^{۲} = a^{۲} + ۲ab + b^{۲}$

مربع تفاضل : $(a - b)^{۲} = a^{۲} - ۲ab + b^{۲}$

فاکتورگیری:

همان‌طور که در سال قبل آموختیم در فاکتورگیری عبارت را به‌صورت ضرب ۲ عبارت می‌نویسیم به صورتی‌که ابتدا ب.م.م ۲ یا چند عبارت داده شده را قسمت مشترک و مابقی عبارت را داخل پرانتز و بعنوان قسمت غیرمشترک می‌نویسیم.

مثال:

$$6a^3b - 8ab^4 = \underbrace{2ab}_{\text{مشترک}}\underbrace{(3a^2 - 4b^3)}_{\text{غیرمشترک}}$$

$$(\text{ب.م.م}) = 2ab$$

چند اتحاد دیگر، تجزیه و کاربردها

اتحاد مزدوج

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

راه فهمیدن اتحاد مزدوج: حتماً علامت بین دو جمله باید منفی باشد و هم‌چنین هر دو جمله باید مربع کامل باشند که در پرانتز اولی با مثبت و در پرانتز دومی با منفی نوشته می‌شود یا بالعکس.

اتحاد جمله مشترک

$$(x + a)(x + b) = \underbrace{x^2}_{\text{مربع جمله مشترک}} + \underbrace{(a + b)}_{\text{مجموع ۲ عدد}}x + \underbrace{ab}_{\text{حاصل ضرب}}$$

نابرابری و نامعادله‌ها

هرگا a و b دو عدد حقیقی باشد به‌طوری‌که $a > b$ در این صورت عدد حقیقی مثبتی مانند p هست به‌طوری‌که $a = b + p$

- هرگاه a عدد حقیقی نامنفی باشد آن‌را با نماد ریاضی به‌صورت $a \geq 0$ نمایش می‌دهیم. $a \geq 0$ می‌خوانیم «a بزرگ‌تر یا مساوی با صفر است.»

- اگر a عدد حقیقی نامثبت باشد آن‌را با نماد ریاضی به‌صورت $a \leq 0$ نمایش می‌دهیم و می‌خوانیم «a کوچک‌تر از صفر یا برابر صفر است.»

- اگر a و b دو عدد حقیقی بوده و $ab > 0$ باشد، آن‌گاه a و b هم علامت هستند (یا هر دو مثبت و یا هر دو منفی هستند) در این صورت اگر $a + b > 0$ باشد یعنی هر دو آن‌ها مثبت هستند اما اگر $a + b < 0$ باشد یعنی هر دو آن‌ها منفی هستند.

خواص نامساوی:

۱- اگر به دوطرف یک نابرابر مانند $a > b$ یک مقدار مساوی مانند c اضافه و یا کم کنیم جهت نابرابر تغییر نمی‌کند.

$$a > b \Rightarrow \begin{cases} a + c > b + c \\ a - c > b - c \end{cases}$$

۲- اگر طرفین یک نابرابر مانند $a > b$ را عدد مثبتی مانند c ضرب و یا بر آن تقسیم کنیم جهت نابرابری تغییر نمی‌کند.

$$\begin{matrix} a > b \\ \text{و} \\ c > ۰ \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} ac > bc \\ \dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c} \end{cases}$$

۳- اگر طرفین یک نابرابر مانند $a > b$ را در عددی منفی مانند c ضرب و یا بر آن تقسیم کنیم، جهت نابرابر تغییر می‌کند.

$$\begin{matrix} a > b \\ \text{و} \\ c < ۰ \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} ac < bc \\ \dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c} \end{cases}$$

توان منفی:

در عبارت مقابل، چند تا از توان‌های صحیح و متوالی عدد ۲ را نوشتیم. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید اگر مقدار عددی هریک از آن‌ها را بر ۲ تقسیم کنیم، حاصل عدد توان‌دار بعدی (با توان کم‌تر) به دست می‌آید. و اگر این عمل را تا توان‌های منفی انجام دهیم، طبق الگوی حاصل، در آخر نتیجه می‌شود که اگر توان عددی توان‌دار منفی باشد، با معکوس کردن پایه، توان آن مثبت می‌شود.

$$۲^{۳} = ۸$$
$$۲^{۲} = ۴$$
$$۲^{۱} = ۲$$
$$۲^{۰} = ۱$$
$$۲^{-۱} = \frac{۱}{۲}$$
$$۲^{-۲} = \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۲^{۲}}$$
$$۲^{-۳} = \frac{۱}{۸} = \frac{۱}{۲^{۳}}$$

÷ ۲

اگر a یک عدد غیرصفر $(a \neq ۰)$ و n یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه:

$$a^{-n} = \left(\frac{۱}{a}\right)^{n} \qquad (a \neq ۰ \,,\, n \in N)$$

یعنی اگر توان عدد توان داری منفی باشد، با معکوس کردن پایه آن عدد، توانش مثبت می‌شود.

توان صحیح:

یادآوری: در سال‌های قبل خواندیم که برای خلاصه‌نویسی ضرب‌های تکراری از توان استفاده می‌کنیم.

محاسبه ضرب و تقسیم عدهای توان‌دار:

۱) $a^m . a^n = a^{m+n}$

۲) $a^m . b^m = (ab)^m$

۳) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

۴) $a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

برای جمع و تفریق اعداد توان‌دار قاعده کلی نداریم و باید پس از محاسبه مقدار عددی هریک از عددهای توان‌دار، جمع و تفریق مربوطه را انجام می‌دهیم.

نماد علمی:

هرگاه بخواهیم یک عدد خیلی بزرگ و یا یک عدد خیلی کوچک را به‌صورت مختصر نمایش دهیم آنرا به صورت ضرب یک عدد اعشاری بین یک تا ۱۰ و یک توان عدد ۱۰ نمایش می‌دهیم. دقت کنید اگر ممیز را به سمت راست حرکت دهیم، از توان عدد ۱۰ یکی کم می‌شود اگر ممیز را به سمت چپ حرکت دهیم به توان عدد ۱۰، یکی اضافه می‌شود.

نکته: تعداد توان ۱۰ بستگی به میزان حرکت ممیز دارد و به تعداد صفرها بستگی ندارد.

نماد علمی هر عدد اعشاری مثبت به‌صورت $a \times ۱۰^n$ است که در آن $۱ \leq a < ۱۰$, n عددی صحیح می‌باشد.

ریشه‌گیری:

در سال قبل با مفهوم جذر (ریشه دوم) آشنا شدیم در آن‌جا گفته شد هر عدد طبیعی دو ریشه دوم (جذر) دارد مثلاً برای ۱۶ دو جذر ۴ و ۴- وجود دارد که آن‌ها را به‌صورت $\sqrt{۱۶} = ۴$ و $-\sqrt{۱۶} = -۴$ نشان می‌دادیم. اما قراردادی داریم که $\sqrt{۱۶} = |۴|$ یعنی هر عدد از زیر رادیکال با ریشه دوم (یا زوج) درمی‌آید باید حاصلی مثبت داشته باشد.

توجه: ۱- اعداد منفی جذر ندارند.

۲- $\sqrt{a^۲}$ را به‌صورت $|a|$ نشان می‌دهیم یعنی اگر $a > ۰$ باشد $\sqrt{a^۲} = a$ و اگر $a < ۰$ باشد $\sqrt{a^۲} = -a$ است.

ریشه سوم: هر عدد صحیح (چه مثبت چه منفی) یک ریشه سوم دارد مثلاً از آنجا که $۲۷ = ۳ \times ۳ \times ۳$ است. پس ریشه سوم ۲۷ (یعنی $\sqrt[۳]{۲۷}$) برابر با ۳ است یا از آن‌جا که $-۲۷ = (-۳) \times (-۳) \times (-۳)$ است یعنی $\sqrt[۳]{-۲۷} = -۳$ است.

ضرب و تقسیم رادیکال‌ها:

اگر فرجه‌ی رادیکال‌ها یکسان باشند می‌توانیم اعداد زیر رادیکال‌ها را در هم ضرب (یا تقسیم) کنیم یا رادیکال‌ها را از هم جدا کنیم.

به‌طور کلی برای هر دو عدد a و b داریم $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$ (فرجه ۳ به دانش‌آموز می‌آموزد که فقط در صورت ۳ بودن فرجه، این قانون برقرار است.)، هم‌چنین اگر $b \neq ۰$ داریم:

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

به فرجه هم مربوط نمی‌باشد یعنی: $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

جمع و تفریق رادیکال‌ها:

اگر قسمت رادیکال دو عبارت پس از ساده کردن آن‌ها، یکسان باشد می‌توانیم آن عبارت‌ها را جمع و تفریق نماییم.

مانند عبارت‌های جبری که با حروف یکسان قسمت ضرایب را جمع و تفریق می‌کنیم.

گویا کردن مخرج کسر:

اگر بخواهیم مخرج یک کسر را از حالت رادیکالی خارج کنیم، باید صورت و مخرج آن کسر را در یک عدد مساوی ضرب کنیم. این عدد رادیکالی باید باشد که فرجه آن با فرجه رادیکال مخرج یکسان باشد به‌صورتی که وقتی اعداد زیر رادیکال را درهم ضرب می‌کنیم، رادیکال مخرج از بین برود. (پس از ضرب، توان اعداد زیر رادیکال باید با فرجه برابر شود)

معرفی و ساده کردن عبارت گویا:

عبارت گویا: به هر کسری که صورت و مخرجش چند جمله‌ای باشد عبارت گویا گفته می‌شود.

مثال: عبارت‌های $\frac{۲x - ۳}{x + ۷}$ و $\frac{۷x^۲ + ۵}{۴x}$ و $(y - x)^۲$ عبارت گویا هستند ولی عبارت‌های $\frac{۳x - ۵}{\sqrt{x}}$ و $۳\sqrt{x + ۷}$ و $|x + y|$ گویا نیستند.

چون در عبارت‌های گویا متغیر می‌تواند در مخرج کسر قرار گیرد ممکن است به‌ازای برخی از مقادیر متغیر، مخرج صفر شود در این حالت می‌گوییم مقدار عبارت تعریف نشده است.

ساده‌کردن یک عبارت گویا:

در عبارت‌های گویا نیز می‌توانیم مانند عددهای گویا، صورت کسر را با مخرج آن ساده کنیم. برای این منظور کافی است که صورت و مخرج را بر یک عبارت مخالف صفر تقسیم کنیم.

برای ساده کردن از اتحادهایی که در فصل ۵ گفته شده استفاده می‌کنیم.

نکته: به مجموعه مقادیری که می‌توان به جای متغیر قرارداد تا عبارت گویا تعریف شده باشد، دامنه آن عبارت گویا می‌گویند.

ضرب عبارت‌های گویا:
عبارت‌های گویا را می‌توانیم مانند عددهای گویا در هم ضرب و یا بر هم تقسیم کرد. برای انجام ضرب عبارت‌های گویا ابتدا صورت و مخرج هر کسر را در صورت امکان تجزیه می‌کنیم و سپس عامل یا عامل‌های مشترک را از صورت و مخرج‌ها حذف می‌کنیم. سپس صورت‌های باقی مانده را در هم دیگر و مخرج‌های باقی‌مانده را نیز در هم‌دیگر ضرب می‌کنیم.

تقسیم عبارت‌های گویا: برای انجام تقسیم عبارت‌های گویا نیز مانند تقسیم عددهای گویا عمل می‌کنیم. به این ترتیب که اولین کسر را نوشته تقسیم به علامت ضرب تبدیل می‌شود و سپس دومین جمله را معکوس کرده و بقیه کار را مانند قسمت قبل انجام می‌دهیم.

جمع و تفریق عبارت‌های گویا:
برای انجام جمع یا تفریق عبارت‌های گویا ابتدا صورت و مخرج هریک از عبارت‌ها را جداگانه تجزیه نموده و در صورت ساده شدن، آن‌ها را با هم ساده می‌کنیم. سپس بین عبارت‌ها مخرج مشترک گرفته و حاصل را به دست می‌آوریم.

تقسیم چند جمله‌ای:
۱- تقسیم چند جمله‌ای بر یک جمله‌ای: در این تقسیم ابتدا به‌صور نزولی مرتب می‌کنیم سپس از قاعده تفکیک کسرها استفاده نموده و تقسیم را به صورت جمع و تفریق، تقسیم چند یک جمله‌ای بر یک جمله‌ای مخرج می‌نویسیم و از قاعده تقسیم اعداد توان‌دار با پایه مساوی $\left(a^m \div a^n = a^{m-n}\right)$ با هم درنظر گرفته و آن‌ها را ساده می‌کنیم.

۲- تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای: باید مراحل زیر را به ترتیب شماره آن‌ها انجام دهیم.
مرحله ۱: مقسوم و مقسوم‌علیه را برحسب توان‌های نزولی متغیر موجود، مرتب کنید.
مرحله ۲: اولین جمله مقسوم را بر اولین جمله مقسوم‌علیه تقسیم نموده تا اولین جمله خارج‌قسمت به‌دست آید.
مرحله ۳: جمله به‌دست آمده در خارج‌قسمت را در تک‌تک جملات مقسوم‌علیه ضرب نموده و زیر مقسوم بنویسید و آن‌را با قرینه نمودن، خلاصه کنید.
مرحله ۴: به عبارت موجود در باقی‌مانده تقسیم از مرحله قبل دقت کنید. اگر درجه آن‌صفر و یا کم‌تر از درجه مقسوم‌علیه بود یعنی تقسیم به پایان رسیده است و این عبارت باقی‌مانده تقسیم می‌باشد در غیر این‌صورت آن‌را مقسوم جدید درنظر گرفته و به مرحله ۲ می‌رویم و مجدداً مراحل بالا را انجام می‌دهیم.

حجم و مساحت کره:
تعریف دایره: دایره، مجموعه نقاطی از صفحه است که همه‌ی آن‌ها نقطه‌ها از یک نقطه در همان صفحه به نام مرکز به یک فاصله ثابت و مشخص هستند. به این اندازه ثابت، شعاع دایره گویند.

تعریف کره: به مجموعه نقاطی از فضا که از نقطه‌ای به نام مرکز کره به یک فاصله باشند را کره می‌نامند. فاصله هریک از این نقاط تا مرکز را شعاع کره می‌نامند.

دستور محاسبه حجم کره:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

دستور محاسبه مساحت کره:

$$S = 4\pi R^2$$

حجم هرم و مخروط:

فرمول حجم هرم و مخروط

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

در مخروط قاعده فقط دایره است و مساحت آن πR^2 است یعنی

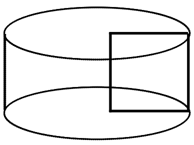
$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

اما در هرم مساحت قاعده را با توجه به قاعده هرم به‌دست می‌آوریم.

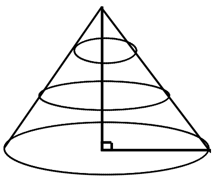
سطح و حجم:

تعریف حجم‌های هندسی با استفاده از دوران:

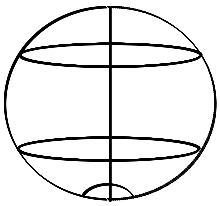
استوانه: از دوران مستطیل حول محور طول یا عرض، استوانه ایجاد می‌شود. اگر مستطیل را حول طول دوران بدهیم، طول مستطیل ارتفاع و عرض آن شعاع قاعده استوانه خواهد بود و برعکس



مخروط: از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول یکی از ضلع‌های زاویه قائمه‌اش مخروط ایجاد می‌شود. ضلعی که دوران حول آن انجام می‌دهیم را ارتفاع و ضلع دیگر زاویه قائمه را شعاع قاعده مخروط می‌نامیم.



کره: از دوران 360° یک نیم‌دایره حول قطرش، کره ایجاد می‌شود.



مجموعه:

معرفی مجموعه: هر دسته‌ی کاملاً مشخص و غیر تکراری از اشیاء را یک مجموعه می‌گویند. هریک از آن اشیاء را عضو مجموعه می‌نامند.

البته توضیح گفته شده تعریف مجموعه نیست بلکه توصیفی از یک دسته یا گروه است که به آن مجموعه می‌گوییم.

به عنوان مثال پزشکان موفق ایرانی نمی‌تواند یک مجموعه باشد چون بی‌شمار جواب دارد و جواب‌ها می‌تواند سلیقه‌ای باشد.

اما اعداد اول یک رقمی یک مجموعه است زیرا یک جواب دارد.

برای نوشتن یک مجموعه از نماد آکلاد $\{\}$ استفاده می‌شود.

جابه‌جایی در مجموعه تأثیری ندارد و مجموعه‌ی جدیدی ایجاد نمی‌کند.

مثال: $\{۱ , ۲ , ۳\} = \{۳ , ۱ , ۲\}$

برای نام‌گذاری مجموعه از حروف بزرگ انگلیسی مانند A ، B ، C و ... استفاده می‌کنیم.

مثال: $A = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵\}$ و $B = \{۲ , ۴ , ۶ , ۸ , ۱۰\}$

بین اعضاء مجموعه علامت ویرگول استفاده می‌شود (,) خط فاصله نمی‌گذاریم.

مثال: $D: \{۵ , ۱۰ , ۱۵ , ۲۰ , ۲۵\}$

اعضاء تکراری در مجموعه فقط یک‌بار شمرده می‌شود.

مثال: $E = \left\{\sqrt{۴} , ۲ , ۱ , \frac{۵}{۵} , ۳\right\} = \{۱ , ۲ , ۳\}$

این مجموعه سه عضو دارد زیرا: $\sqrt{۴} = ۲$ و $\frac{۵}{۵} = ۱$

برای مختصر نوشتن مجموعه‌ای که عضوهای آن زیاد است، می‌توان نماد ... استفاده کرد البته عضوهای مجموعه باید به‌ترتیب نوشته شده ادامه پیدا کند.

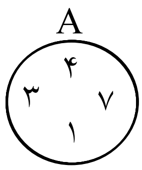
مثال: $\mathbb{N} = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ...\}$

انواع نمایش مجموعه‌ها:

برای نوشتن یک مجموعه دیدیم که نماد آکلاد $\{\}$ استفاده می‌کردیم.

صورت دیگر نمایش مجموعه استفاده از نمودار «وِن» است که با استفاده از منحنی‌های بسته نشان می‌دهند.

$A = \{۴ ، ۳ ، ۷ ، ۱\}$



نماد عضویت در مجموعه: « $\in$ »

اگر مجموعه A را به‌صورت $A = \{۱ ، ۷ ، ۳ ، ۴\}$ درنظر بگیریم. برای نشان دادن این‌که عدد ۴ عضوی از مجموعه A است می‌نویسیم $۴ \in A$ و می‌خوانیم «۴ عضو A است» و چون عدد ۲ عضو مجموعه A نیست می‌نویسیم $۲ \notin A$ و می‌خوانیم «۲ عضو A نیست».

معرفی مجموعه‌ی تهی:

مجموعه‌ای که عضو نداشته باشد مجموعه‌ی تهی نامیده می‌شود. مجموعه‌ی تهی را با نماد $\{\}$ یا $\varnothing$ نمایش می‌دهیم.

دو مجموعه‌ی برابر:

اگر دو مجموعه‌ی A و B داشته باشیم که اعضای دو مجموعه با هم یکسان باشند و هر عضو A ، عضوی از B و هر عضو B ، عضوی از A باشد، در این صورت دو مجموعه‌ی A و B برابر هستند و می‌نویسیم $A = B$ (جابه‌جا بودن اعضاء ایرادی ندارد.)

زیرمجموعه:

هرگاه هر عضوی از مجموعه A ، عضوی از مجموعه B باشد در این صورت می‌گوییم مجموعه A زیرمجموعه B است و می‌نویسیم $A \subseteq B$

اگر بتوانیم عضوی از A بیابیم که در B نباشد، می‌گوییم A زیرمجموعه B نیست و می‌نویسیم: $A \nsubseteq B$

نکته ۱: مجموعه تهی زیرمجموعه هر مجموعه دلخواه مانند A است یعنی: $\varnothing \subseteq A$

نکته ۲: هر مجموعه‌ای زیرمجموعه‌ی خودش است یعنی اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد داریم: $A \subseteq A$

نکته ۳: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه از رابطه ۲^n به دست می‌آید که n تعداد عضوهای مجموعه است.

مثال: مجموعه $A = \{۲,۵,۱\}$ دارای ۳ عضو و $۲^۳ = ۸$ زیرمجموعه است.

نوشتن مجموعه به زبان ریاضی:

برای مختصرنویسی بعضشی از مجموعه‌ها به‌خصوص مجموعه‌های عددی از زبان ریاضی استفاده می‌کنیم:

$A = \{-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲\}$

برای نوشتن مجموعه A به زبان ریاضی، ابتدا محدوده اعضای A مشخص می‌شود و بعد نوع اعداد که صحیح است یا طبیعی و یا ... مشخص می‌شود و می‌نویسیم:

$A = \{x | x \in Z , -۴ < x < ۳\}$

یعنی A شامل اعضایی مانند x است که $(x|)$ این xها عضو صحیح و بین ۴- و ۳ قرار دارند.

انواع مجموعه‌های اعداد:

* مجموعه اعداد طبیعی که بر حرف N نمایش می‌دهیم. $N = \{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ...\}$

* مجموعه اعداد حسابی که با حرف W نمایش می‌دهیم. $W = \{۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ...\}$

* مجموعه اعداد صحیح که با حرف Z نمایش می‌دهیم. $Z = \{... ، -۲ ، -۱ ، ۰ ، ۱ ، ۲ ، ...\}$

* مجموعه اعداد زوج طبیعی که با حرف E نمایش می‌دهیم. $E = \{۲ ، ۴ ، ۶ ، ۸ ، ...\} = \{۲k | k \in N\}$

* مجموعه اعداد فرد طبیعی که با حرف O نمایش می‌دهیم. $O = \{۱ ، ۳ ، ۵ ، ۷ ، ...\} = \{۲k - ۱ | k \in N\}$

*مجموعه اعداد گویا که با حرف Q نشان می‌دهیم. $Q = \left\{ \frac{a}{b} | a , b \in Z , b \neq ۰ \right\}$

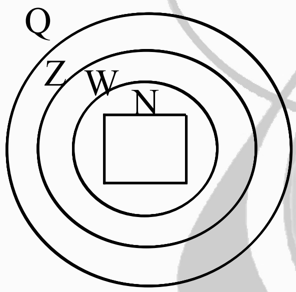
نکته: برای نام‌گذاری مجموعه‌های اعداد از حروفی مانند N و Z و ... استفاده شده اما برای این‌که این حروف از نام‌های دیگر متمایز باشد با کشیدن خطی اضافی آن را متمایز می‌کنیم:

$\mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{W} , \mathbb{Q}$

رابطه‌ی بین مجموعه‌ی اعداد مهم:

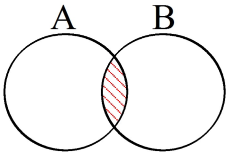
اعداد گویا ⊆ اعداد صحیح ⊆ اعداد حسابی ⊆ اعداد طبیعی

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$



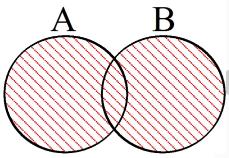
بین مجموعه‌ها ۳ جور رابطه وجود دارد:

۱) اشتراک مجموعه‌ها: اگر عضوهای مشترک بین دو یا چند مجموعه را درون یک مجموعه بنویسیم به آن، مجموعه اشتراک می‌گویند و آنرا با نماد $\cap$ نشان می‌دهند.



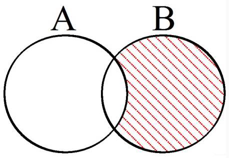
$A \cap B$ یا $B \cap A$

۲) اجتماع دو مجموعه: اگر همه اعضای دو یا چند مجموعه را درون یک مجموعه بزرگ بنویسیم به مجموعه ایجاد شده مجموع اجتماع گفته می‌شود و آنرا با نماد $\cup$ نشان می‌دهیم. (عضوهای تکراری مجموعه اجتماع را باید حذف کنیم.)

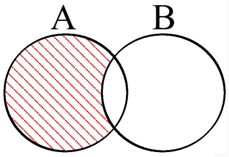


$A \cup B$ یا $B \cup A$

۳) تفاضل دو مجموعه: به $A - B$ تفاضل دو مجموعه A و B می‌گوییم و منظور از آن، عضوهایی هستند که در A وجود دارند اما در B وجود ندارند. (در واقع عضوهای مشترک را از A حذف می‌کنیم.)



$B - A$



$A - B$

نکته: در اجتماع و اشتراک بین دو مجموعه خاصیت جابه‌جایی وجود دارد اما جابه‌جایی در تفاضل بین دو مجموعه وجود ندارد.

$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A \qquad A - B \neq B - A$

نکات مهم در اجتماع و اشتراک و تفاضل دو مجموعه:

۱- هرگاه $A \subseteq B \Leftarrow$ $A \cap B = A$ و $A \cup B = B$

۲- هرگاه $A \subseteq B \Leftarrow$ $A - B = \varnothing$

اجتماع و اشتراک با مجموعه تهی:

$A \cup \varnothing = A \qquad A \cap \varnothing = \varnothing$

اجتماع و اشتراک هر مجموعه با خودش:

$A \cap A = A \qquad A \cup A = A$

روابط بین مجموعه‌ها به زبان ریاضی:

$A \cap B = \{x | x \in A , x \in B\}$
$A \cup B = \{x | x \in A \text{ یا } x \in B\}$
$A - B = \{x | x \in A , x \notin B\}$
$B - A = \{x | x \in B , x \notin A\}$

قرارداد: تعداد عضوهای هر مجموعه مانند A را با $n(A)$ نمایش دهیم. به عنوان مثال اگر A مجموعه‌ای k عضوی باشد می‌نویسیم: $n(A) = k$

مجموعه‌ها و احتمال:
در سال گذشته برای محاسبه احتمال هر پیشامد از فرمول زیر استفاده کردیم.

$$\text{احتمال رخ دادن یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت های مطلوب}}{\text{تعداد همه حالت ها ی ممکن}}$$

اگر مجموعه‌ی شاملِ همه حالت‌های ممکن را S ، مجموعه شامل همه حالت‌های مطلوب را A و احتمال رخ دادن پیشامد A را با نماد $P(A)$ نشان دهیم، دستور بالا به‌صورت $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ نوشته می‌شود.

عددهای گویا:
هر عددی که به‌توان آن‌را به‌صورت یک کسر نوشت طوری‌که مخرج و صورتش عددی صحیح و مخرج کسر غیر صفر باشد، یک عدد گویا نامیده می‌شود.

$Q = \left\{\frac{a}{b} | a , b \in Z , b \neq 0\right\}$

روش‌های نوشتن یک کسر بین دو کسر:

۱) مخرج مشترک: در این روش ابتدا باید بین آن دو کسر مخرج مشترک بگیریم. سپس یک کسر بین آن‌ها بنویسیم. در صورتی‌که دو عدد صورت کسر، متوالی باشند دوباره صورت و مخرج کسرها را در ۲ یا ۳ یا ... ضرب می‌کنیم تا بتوانیم کسر وسطی آن‌ها را بنویسیم.

۲) روش میانگین: می‌دانیم میانگین هر دو عدد دقیقاً در وسط آن ۲ عدد قرار دارد. پس با محاسبه میانگین دو کسر می‌توانیم کسری بین آن‌ها بنویسیم.

۳) روش فشفشه: اگر دو صورت کسر را با هم و هم‌چنین مخرج‌های آن‌ها را با هم جمع کنیم و عددهای حاصل را به‌ترتیب در صورت و مخرج یک کسر قرار دهیم، کسر حاصل بین دو کسر اولیه است.

مثال ۱:

$$\frac{۳}{۵} < ? < \frac{۲}{۳} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{۹}{۱۵} < ? \; \frac{۱۰}{۱۵} \xrightarrow[\times ۲]{\text{مخرج مشترک}} \frac{۱۸}{۳۰} < \frac{۱۹}{۳۰} < \frac{۲۰}{۳۰}$$

مثال ۲:

$$\frac{۳}{۵} \text{ و } \frac{۲}{۳} \text{ میانگین} = \left(\frac{۳}{۵} + \frac{۱}{۲}\right) \div ۲ = \left(\frac{۶ + ۵}{۱۰}\right) \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱۱}{۱۰} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱۱}{۲۰}$$

$$\frac{۳}{۵} < \frac{۱۱}{۲۰} < \frac{۲}{۳}$$

مثال ۳:

$$\frac{۳}{۵} < \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{۳}{۵} < \frac{۳ + ۲}{۵ + ۳} < \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{۳}{۵} < \frac{۵}{۸} < \frac{۲}{۳}$$

برای نوشتن چند کسر بین دو کسر با راه‌حل قسمت ۱ صورت و مخرج کسر را در مرحله دوم در یک واحد بیش از تعداد کسرهای خواسته شده ضرب می‌کنیم.

با روش‌های قسمت ۲ و ۳ کافی است بین کسرهایی که داریم دوباره از ابتدا همان مسیر را پیش بگیریم و انجام دهیم.

مقایسه کردن چند عدد گویا:

۱) مخرج مشترک: در این روش ابتدا کم‌ترین مخرج مشترک تمامی اعداد را تعیین می‌کنیم و سپس آن‌ها را از کوچک به بزرگ می‌نویسیم. دقت داشته باشید که پس از مخرج مشترک‌گیری در بین عددهای منفی، عددی بزرگ‌تر است که صورت آن کوچک‌تر باشد و برعکس.

۲) استفاده از ماشین حساب و تقریب اعشاری: در این روش بهتر است با ماشین حساب حاصل تقسیم صورت هر کسر بر مخرج آنرا تا ۲ رقم اعشار به‌دست آورده و سپس آن‌ها را مقایسه کنیم.

دسته‌بندی اعداد کسری:

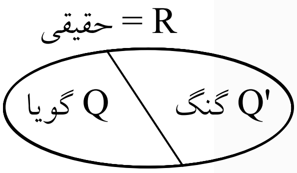
۱) اعداد اعشاری متناهی یا مختوم: ابتدا صورت و مخرج کسر را تا جایی که ممکن است ساده می‌کنیم در آخر کسرهایی که مخرج آن‌ها فقط به ۲ و ۵ بخش‌پذیر باشند به کسر اعشاری متناهی یا مختوم به صفر معروف هستند. در این کسرها اگر صورت را بر مخرج تقسیم کنیم، باقی‌مانده صفر می‌شود لذا قسمت اعشاری آن‌ها محدود و مشخص است.

۲) اعداد اعشاری متناوب: بعد از ساده کردن کسر اگر مخرج بر عددهای دیگری نیز مانند ۳ و ۷ بخش‌پذیر باشد با تقسیم نمودن صورت بر مخرج هیچ‌گاه باقی مانده صفر نمی‌شود و قسمت اعشاری آن‌ها انتها ندارد که برای راحتی بالای رقم تکراری علامت (-) قرار می‌دهیم یعنی تکرار رسم است.

$$\frac{۵}{۳} = ۱/۶۶۶۶... = ۱/\overline{۶}$$

عددهای حقیقی: به عددهایی مانند $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۵}$ که مقدار دقیق آن‌ها مشخص نبوده و هم‌چنین قسمت اعشاری آن‌ها نامتناهی و دارای دوره متناوب نمی‌باشند. مجموعه اعداد اصم یا گنگ گفته می‌شود که این مجموعه را با نماد Q' یا Q^C نمایش می‌دهند.

به اجتماع اعداد گنگ Q' و گویا Q ، مجموعه اعداد حقیقی R می‌گویند.



$$R = Q \cup Q \quad , \quad Q \cap Q' = \varnothing$$
$$R - Q = Q'$$
$$R - Q' = Q$$

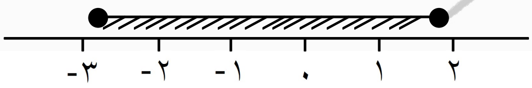
با توجه به این‌که بین هر دو عدد گویا و یا هر دو عدد گنگ بی‌شمار عدد دیگر وجود دارد، لذا مجموعه اعداد حقیقی را نمی‌توان با عضوهایش نشان داد پس به روش هندسی (محور) یا زبان نمادین استفاده می‌کنیم.

زبان نمادین یا روش هندسی:

اگر در یک رابطه علامت $<$, $=$ باشد به‌صورت $\leq$ می‌نویسیم و روی محور، دایره آن عدد را پر می‌کنیم ولی فقط علامت $<$ باشد باید دایره آن عدد خالی بماند.

به‌عنوان مثال:

$$\{x \in R \quad -۳ < x \leq ۲\}$$



قدرمطلق:

فاصله نقطه نمایش عدد a را از مبدأ، قدرمطلق a می‌نامیم و با علامت $|a|$ (بخوانید قدرمطلق a) نمایش می‌دهیم. یعنی طول پاره‌خط همان قدرمطلق می‌باشد.

به‌طور خلاصه می‌توان گفت قدرمطلق یک دستگاه مثبت‌ساز است اگر عدد خودش مثبت بود که هیچ ولی اگر عدد منفی بود در یک منفی نیز ضرب می‌شود تا به یک عدد مثبت تبدیل شود.

نکات قدرمطلق:

۱) $a = 0 \Rightarrow |a| = 0$

۲) $a > 0 \Rightarrow |a| = a$

۳) $a < 0 \Rightarrow |a| = -a$

معادله خط:

هر معادله به‌صورت کلی $y = ax + b$ را یک معادله خطی می‌نامیم. چون در صورتی‌که تمامی پاسخ‌های آن معادله را به‌صورت نقطه (یعنی $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$) مشخص نموده و روی محورهای مختصات نمایش دهیم، شکل یک خط راست به دست می‌آید. به همین دلیل می‌گوییم x و y با هم رابطه خطی دارند. یک معادله خط بی‌شمار جواب دارد.
$y = ax$ صورت کلی معادله خط هایی است که از مبدأ مختصات می‌گذرد.

رسم یک خط که معادله آن داده شده:

برای رسم هر خطی کافی است که مختصات دو نقطه از آن‌را مشخص نموده، سپس این دو نقطه را در محور مختصات نمایش داده و آن‌ها را به هم‌دیگر وصل کرده و از دو طرف امتداد دهیم. برای تعیین مختصات دو نقطه کافی است که بجای طول نقاط ، دو عدد دلخواه انتخاب نموده و در معادله خط قرار دهیم. به این ترتیب عرض آن نقاط مشخص می‌شود.

شیب خط و عرض از مبدأ:

در معادله خط $y = ax + b$، عدد a ، شیب خط نامیده می‌شود.

با تغییر a زاویه‌ی خط با جهت مثبت محور طول‌ها تغییر می‌کند.

عدد b در معادله $y = ax + b$ نشان‌دهنده محل برخورد خط با محور عرض‌ها است. به همین دلیل به آن عرض از مبدأ گویند.

اگر زاویه خط با سمت راست محور طول‌ها، تند باشد شیب خط مثبت است و اگر این زاویه باز باشد شیب خط منفی است.

شرط آن‌که ۲ خط با هم موازی باشند آن است که شیبشان یکسان باشد.

یافتن شیب یک خط با داشتن ۲ نقطه از خط

شیب خط گذرنده از نقاط $A = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ از رابطه $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ یا $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ به‌دست می‌آید.

نوشتن معادله خطی که از ۲ نقطه می‌گذرد: $y = ax + b \quad A\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} , \ B\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$

بعد از یافتن شیب خط یک نقطه را به دلخواه انتخاب کرده و در معادله خط قرار می‌دهیم تا عرض از مبدأ به‌دست آید. با داشتن عرض از مبدأ و شیب معادله اصلی خط را می‌نویسیم.

$y_1 = ax_1 + b$ یا $y_2 = ax_2 + b$

معادله کلی خط:

معادله کلی خط به‌صورت $ax + by = c$ است که a ضریب x و b ضریب y و c عدد ثابت است.

در این معادله a را شیب خط نمی‌توان گفت، زیرا باید خط به‌صورت $y = ax + b$ باشد.

نکته ۱:

در این نوع معادله ($y = ax + b$)، b عرض از مبدأ است اما در معادله‌ی کلی خط ($ax + by = c$)، b ضریب y است و این دو با هم متفاوتند.

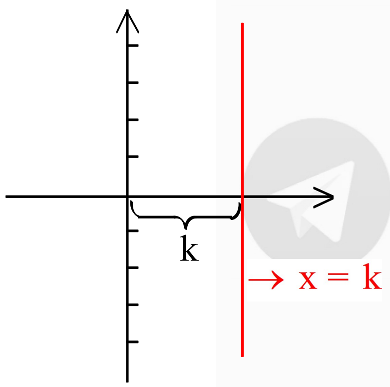
نکته ۲:

هم‌چنین حرف a در معادله کلی خط با a شیب خط متفاوت است.

معادلات خطوط خاص:

معادله خطی موازی با محور عرض‌ها و عمود بر محور طول‌ها به‌صورت $x = k$ است که در آن k عددی ثابت است.

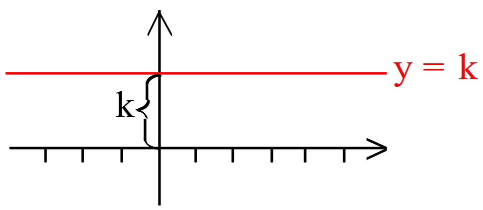
طول همه نقاط روی این خط ثابت است ولی عرضشان تغییر می‌کند.



$$ax + 0y = c$$
$$x = \frac{c}{a} = k$$

معادله خطی موازی با محور طول‌ها و عمود بر محور عرض‌ها به‌صورت $y = k$ است که در آن k عددی ثابت است.

عرض همه نقاط روی این خط ثابت است ولی طولشان تغییر می‌کند.



$$0x + by = c$$
$$y = \frac{c}{b} = k$$

دستگاه‌های معادله‌های خطی:

دو یا چند معادله که جواب مشترکی داشته باشند تشکیل دستگاه معادلاتی می‌دهند. دستگاه دو معادله ۲ مجهول در واقع دو معادله غیرتکراری با دو مجهول است که هر دو معادله یک جواب مشترک دارند. از نظر هندسی هریک از معادله‌های دستگاه، یک معادله‌ی خطی هستند، بنابراین منظور از جواب دستگاه مختصات نقطه برخورد خط ها (نقطه مشترک دو خط) است.

روش‌های حل دستگاه دو معادله دو مجهول:

۱) روش ترسیم: در این روش ابتدا باید هر دو خط را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم. به این ترتیب، مختصات نقطه برخورد آن‌ها، همان جواب دستگاه است.

۲) روش حذفی: به‌دلیل این‌که دو مجهول را هم‌زمان نمی‌توان به‌دست آورد پس یکی از مجهول‌ها باید از بین برود می‌دانیم جمع هر عدد با قرینه‌اش صفر می‌شود پس آن ضریب صفر شده و در نهایت مجهول موردنظر حذف می‌شود. با یک معادله یک مجهولی روبه‌رو خواهیم شد که می‌توان به جواب رسید. حال جواب به‌دست آمده را در یکی از معادلات به دلخواه قرار داده و مجهول به دست می‌آید.

۳) روش جایگذاری: در این روش بهتر است در معادله ساده‌تر، یکی از مجهول‌ها را برحسب مجهول دیگر بنویسیم و مقدار یا عبارت حاصل را در معادله دیگر جایگذاری می‌کنیم. به این‌ترتیب معادله دوم به یک معادله یک مجهولی درجه اول تبدیل می‌شود که با حل آن مقدار مجهول به دست می‌آید. حال با جایگذاری این مقدار در یکی از معادله‌ها، مجهول دیگر را به دست می‌آوریم.

در حل دستگاه معادله‌های خط $\begin{cases} y = ax + b \\ y = a'x + b' \end{cases}$ سه حالت ممکن است اتفاق بیفتد.

۱) دو خط یک‌دیگر را فقط در یک نقطه قطع کنند به این‌ترتیب دستگاه فقط یک جواب منحصر بفرد خواهد داشت.

۲) دو خط با هم موازی‌اند و یک‌دیگر را قطع نمی‌کنند. در این صورت دستگاه جواب ندارد.

۳) اگر ۲ خط بر هم منطبق باشند یعنی دو خط بی‌شمار نقطه مشترک دارند. به این‌ترتیب دستگاه بی‌شمار جواب خواهد داشت. (اگر تمامی ضرایب عددی یک معادله خط را در یک عدد ضرب کنیم، خط حاصل بر خط اولیه، منطبق می‌شود.)

حل مسئله به‌وسیله حل دستگاه:

در حل بعضی از مسائل می‌توانیم با توجه به متن مسئله دو رابطه خطی بین مجهول‌ها بنویسیم تا یک دستگاه تشکیل شود سپس با حل این دستگاه، مسئله را حل کنیم.