



RIAZISARA

www.riazisara.ir **سایت ویژه ریاضیات**

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات**

و...

[@riazisara](https://t.me/riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

[@riazisara.ir](https://www.instagram.com/riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

بسمه تعالی

جزوه کنکوری ریاضی تجربی

ارائه درسنامه ی کامل و تاکید بر مفاهیم مهم کتاب درسی



پوشش مسائل تشریحی فراوان جهت آمادگی در امتحانات



پوشش تست های مفید با پاسخ کاملا تشریحی



پوشش سوالات کنکورهای سراسری



تهیه و تنظیم : حسن خواجه

۰۹۱۱۴۲۴۸۵۰۷

فهرست :

فصل اول : تعیین علامت و حل نامعادلات

فصل دوم : جبر و معادلات

فصل سوم : هندسه تحلیلی

فصل چهارم : تابع

فصل پنجم : مثلثات

فصل ششم : تابع نمایی و لگاریتم

فصل هفتم : حد و پیوستگی

فصل هشتم : اصول شمارش (چگونه بدون شمردن ، بشماریم.)

فصل نهم : احتمال

فصل دهم : آمار

فصل اول: تعیین علامت و حل نامعادلات

تعیین علامت: منظور از تعیین علامت یک عبارت جبری یعنی مشخص کنیم این عبارت در چه محدوده ای مثبت و در چه محدوده ای منفی و در چه نقاطی صفر و در چه نقاطی تعریف نشده است. تعیین علامت در حل نامعادلات بسیار پر کاربرد است.

توابع خاص و تعیین علامت آنها:

الف) تابع خطی: هر تابع خطی به فرم $P = ax + b$ است و به صورت زیر تعیین علامت می شود:

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

x	$-\frac{b}{a}$
P	مخالف علامت a \circ موافق علامت a

تست ۱) اگر تعیین علامت عبارت $P = ax + b$ به صورت زیر باشد نمودار

این تابع از کدام نقطه زیر عبور نمی کند؟

x	$-\frac{1}{2}$
P	- \circ +

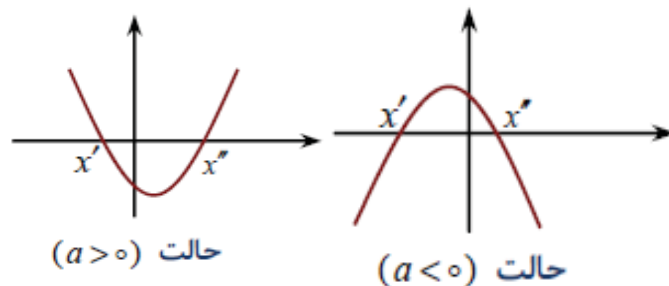
- ۱) $(0, -1)$ ۲) $(-\frac{1}{2}, 0)$ ۳) $(-1, -1)$ ۴) $(10, \sqrt{2})$

حل) گزینه ۱- چون برای x های بزرگتر از $-\frac{1}{2}$ علامت y باید مثبت باشد.

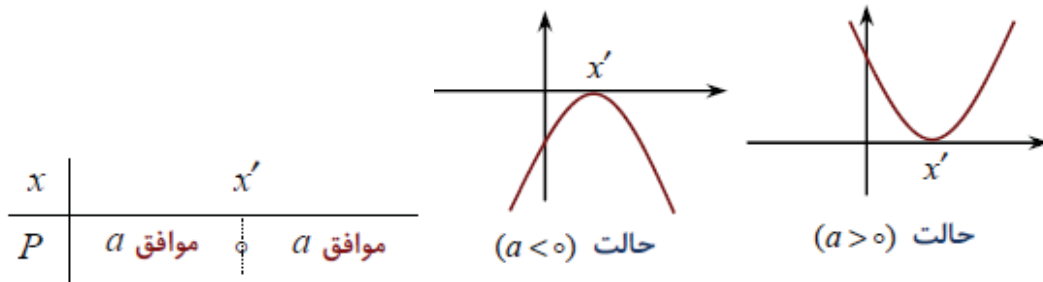
تعیین علامت تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$: سه حالت را بررسی می کنیم:

۱) اگر $\Delta > 0$ باشد معادله دارای دو جواب $x', x'' = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ است و به صورت زیر تعیین علامت می شود:

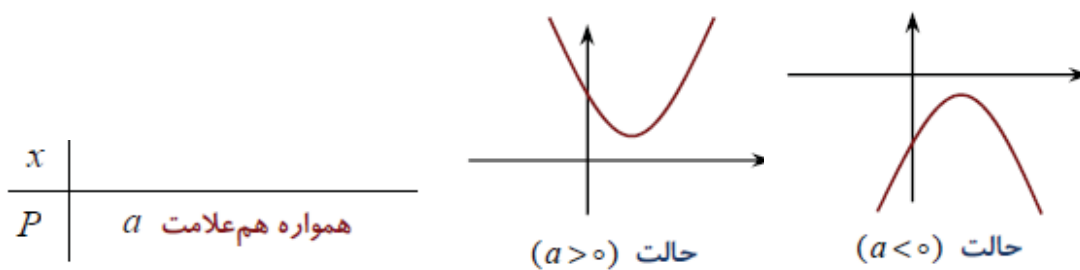
x	x'	x''
P	موافق a \circ مخالف a \circ موافق a	



۲) اگر $\Delta = 0$ صفر باشد معادله دارای یک جواب (ریشه مضاعف) $x' = x'' = \frac{-b}{2a}$ است و به صورت زیر تعیین علامت می شود:



۳) اگر $\Delta < 0$ باشد معادله ریشه ندارد.



تمرین) عبارتهای $P(x) = -2x^2 + x + 3$ و $Q(x) = 3x^2 - 6x + 3$ را تعیین علامت کنید؟

(حل) ابتدا معادله $-2x^2 + x + 3 = 0$ را حل می کنیم و ریشه ها را در صورت وجود می یابیم:

$$\Delta = (1)^2 - 4(-2)(3) = 25 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2(-2)} \rightarrow x' = -1, x'' = \frac{3}{2}$$

x		-1		$\frac{3}{2}$		
P	-	ϕ	+	ϕ	-	

به طور مشابه معادله $3x^2 - 6x + 3 = 0$ را حل کرده و دارای یک ریشه $x = -\frac{-6}{2(3)} = 1$ است.

x		1		
Q	+	ϕ	+	

x	$\frac{3}{2}$
P	- -

تمرین) تعیین علامت عبارت $P = m x^2 + 6x + n$ به صورت زیر است
 m و n را بیابید؟

حل) این جدول نشان می دهد که این عبارت دارای یک ریشه مضاعف $x = \frac{3}{2}$ است و همواره منفی است.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2m} = \frac{3}{2} \Rightarrow m = -2$$

$$-2 \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 6 \left(\frac{3}{2}\right) + n = 0 \Rightarrow n = -4/5$$

تمرین) به ازای چه مقادیری از m عبارت $P = (2m - 1)x^2 - 4x + 3$ همواره مثبت است؟

$$\begin{cases} \Delta < 0 \Rightarrow (-4)^2 - 4(2m - 1)(3) < 0 \Rightarrow 16 - 24m + 12 < 0 \Rightarrow m > \frac{7}{6} \\ x^2 \text{ ضریب} > 0 \Rightarrow 2m - 1 > 0 \Rightarrow m > \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow m > \frac{7}{6}$$

تمرین) حدود m را طوری بیابید که عبارت $m x^2 + (2m - 3)x$ همواره بزرگتر یا مساوی $\frac{-1}{4}$ باشد.

$$m x^2 + (2m - 3)x \geq \frac{-1}{4} \Rightarrow 4m x^2 + 4(2m - 3)x + 1 \geq 0$$

$$\begin{cases} \Delta \leq 0 \Rightarrow 4(2m - 3)^2 - 4m \leq 0 \Rightarrow 4m^2 - 13m + 9 \leq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 1 \leq m \leq \frac{9}{4} \\ x^2 \text{ ضریب} > 0 \Rightarrow 4m > 0 \Rightarrow m > 0 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq m \leq \frac{9}{4}$$

نکته) برای تعیین علامت عبارتی که صورت و مخرج عبارات درجه دوم و اول داشته باشد، ابتدا تمام عبارات را مساوی صفر قرار می دهیم و سپس جدول تعیین علامت را تشکیل می دهیم و علامت تک تک عبارات را در هم ضرب می کنیم.

نکته) عبارات کسری در ریشه مخرج کسر تعریف نشده است.

تمرین) عبارات زیر را تعیین علامت کنید؟

$$P = \frac{(-3x + 1)(-1 - x^2)}{2x^2 + 3x - 5}$$

$$\begin{cases} -3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \\ -1 - x^2 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \text{ ندارد} \quad \text{ریشه} \\ 2x^2 + 3x - 5 = 0 \Rightarrow x' = 1, \quad x'' = \frac{-5}{2} \end{cases}$$

x	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{3}$	1
$-3x+1$	+	+ ○	- -
$-1-x^2$	-	-	- -
$2x^2+3x-5$	+ ○	-	- ○ +
P	-	ت +	ت +

نکته) اگر عبارتی دارای توان زوج و داخل قدرمطلق باشد همواره مثبت و اگر دارای توان فرد باشد، توان فرد را نادیده گرفته و عبارت داخل پرانتز را تعیین علامت می کنیم.

نکته) برای تعیین علامت قرینه یک عبارت کافی است علامت آن عبارت را قرینه کنیم.

نکته) اگر عبارتی دارای توان زوج باشد و با عددی مثبت جمع شود باز علامت آن عبارت مثبت است.

تمرین) عبارت زیر در چه بازه ای همواره مثبت است؟

$$P = (x + 1)^{23}(x + 2)^{22}(x + 3)^{21}$$

نامعادله: یک نامساوی که در آن متغیر x وجود داشته باشد، را نامعادله می گویند.

منظور از حل نامعادله یافتن مجموعه مقادیر x که در این نامساوی صدق کند.

حل نامعادلات: برای حل نامعادله ابتدا همه عبارات را به یک طرف نامساوی منتقل کرده و سپس بعد از ساده سازی عبارت به وجود آمده را تعیین علامت می کنیم و سپس قسمت های مورد نظر که با علامت نامعادله هم خوانی دارد را انتخاب می کنیم.

مثال: نامعادله $\frac{3x+4}{x} < 1$ را حل کنید؟

$$\frac{3x+4}{x} - 1 < 0 \rightarrow \frac{3x+4-x}{x} < 0 \rightarrow \frac{2x+4}{x} < 0$$

جواب نامعادله: $(-2, 0)$

x		-2	0	
$2x+4$		-	+	+
x		-	-	+
P		+	-	+

تمرین (دامنه تابع زیر را بیابید؟

$$g(x) = \sqrt{\frac{1+x^2}{(1+x)(2-3x+x^2)}}$$

$$\text{حل) } \frac{1+x^2}{(1+x)(2-3x+x^2)} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 1+x^2 = 0 \Rightarrow \text{ریشه ندارد} \\ (1+x) = 0 \Rightarrow x = -1 \\ 2-3x+x^2 = 0 \Rightarrow x' = 1, x'' = 2 \end{cases}$$

x		-1	1	2	
$1+x^2$		+	+	+	+
$1+x$		-	+	+	+
$2-3x+x^2$		+	+	-	+
P		-	+	-	+

جواب: $(-1, 1) \cup (2, +\infty)$

تست) اگر عبارت $(a-1)x^2 + (a-1)x + 1$ به ازای هر x مقدار منفی داشته باشد، a به کدام مجموعه تعلق

دارد؟ کنکور ریاضی ۹۱

\mathbb{R} (۴)

\emptyset (۳)

$a < 1$ (۲)

$1 < a < 5$ (۱)

$$a < 0 \rightarrow a-1 < 0 \rightarrow a < 1$$

$$\Delta < 0 \rightarrow (a-1)^2 - 4(a-1)(1) < 0 \rightarrow (a-1)^2 - 4(a-1) < 0$$

$$(a-1)^2 - 4(a-1)(1) = (a-1)(a-1-4) = (a-1)(a-5) < 0$$

a				
Δ	+	○	-	○

تمرین) نامعادله $x + \frac{1}{x} \geq 2$ را حل کنید؟

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \rightarrow x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0 \rightarrow \frac{x^2 - 2x + 1}{x} \geq 0 \rightarrow \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$$

x				
$(x-1)^2$	+	○	+	○
x	-	○	+	○
P	-	○	+	○

تست های تعیین علامت و نامعادله:

۱- مجموعه جواب نامعادله $\frac{x-1}{x+1} > 2x$ کدام است؟ تجربی ۸۴

(۱) $\{x: x < -1\}$ (۲) $\{x: x > -1\}$ (۳) $\{x: -1 < x < 1\}$ (۴) $\{x: -2 < x < -1\}$

حل) گزینه ۱ بار رد گزینه - برای گزینه ۲ و ۳ کافی است $x = 0$ و برای گزینه ۴ کافی است $x = -1/5$.

۲- مجموعه جواب نامعادله $\frac{1}{x-1} > \frac{1}{x+1}$ کدام است؟ تجربی ۸۳

(۱) $x < 3$ (۲) $1 < x < 3$ (۳) $2 < x < 3$ (۴) $-2 < x < 3$

حل) گزینه ۲- برای رد گزینه های ۱ و ۴ کافی است $x = 0$ را قرار دهیم.

۳- اگر $\frac{2-3x}{x(x-1)}$ مثبت باشد، x به کدام مجموعه تعلق دارد؟ سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۲

(۱) $\{x: x < 0 \text{ یا } x > 1\}$ (۲) $\{x: x < 0 \text{ یا } \frac{2}{3} < x < 1\}$

(۳) $\{x: x < 0 \text{ یا } x > \frac{2}{3}\}$ (۴) $\{x: x > 1 \text{ یا } 0 < x < \frac{2}{3}\}$

حل) گزینه ۲- در گزینه ۱ و ۳ و ۴ قرار دهید $x = 2$.

۴- در کدام بازه نامساوی $1 < \frac{3x+4}{x}$ برقرار است؟ سراسری ۷۷

(۱) $(-2, 0)$ (۲) $(-2, 2)$ (۳) $(-4, 0)$ (۴) $(0, 4)$

حل) گزینه ۱- برای رد گزینه ۲ و ۴ عدد ۱ و برای رد گزینه ۳ عدد ۳- قرار دهید.

۵- اگر $f(x) = 2x + 1$ باشد، مجموعه جواب نامعادله $f(x^2) - f(2x) - 6 < 0$ کدام است؟ آزمون قلمچی

(۱) $-1 < x < 3$ (۲) $-3 < x < 1$ (۳) $x < -1 \text{ یا } x > 3$ (۴) $x < -3 \text{ یا } x > 1$

حل) گزینه ۱- برای رد گزینه ۲ و ۳ قرار دهید $x = -2$ و برای رد گزینه ۴ قرار دهید $x = 4$.

۶- مجموعه جواب نامعادله $\frac{5x-4}{x^2-4x-5} < -2$ کدام است؟ آزمون سنجش ۹۵

(۱) $(-2, -1) \cup \left(\frac{5}{2}, 5\right)$ (۲) $(-1, 2) \cup \left(\frac{5}{2}, 5\right)$ (۳) $R - \left[\frac{5}{2}, 5\right]$ (۴) $R - [-1, 2]$

حل) گزینه ۱- برای رد گزینه ۲ و ۳ قرار دهید $x = 0$ ، و برای گزینه ۴ قرار دهید $x = -2$.

۷- چند عدد صحیح در نامعادله $\frac{(|x|+2)(x^3+x)}{-x+2} \geq 0$ صدق می کند؟ آزمون گاج

(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

حل) گزینه ۳- با تعیین علامت این عبارت مجموعه جواب به صورت $(0, 2]$ است.

۸- نامعادله $1 < \frac{x^2}{x^2-2x}$ چه مجموعه جوابی دارد؟ آزمون رزمندگان

(۱) $(-\infty, 2) - \{0\}$ (۲) $(-\infty, 2)$ (۳) $(-\infty, 2) - \{1\}$ (۴) R^+

حل) گزینه ۱- کافی است برای رد گزینه های دیگر $x = 0$ را قرار دهیم.

۹- اگر نامعادله $2 < \frac{3x^2-2x+2}{x^2+x+1}$ در بازه (a, b) برقرار باشد، بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟ آزمون گاج

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

حل) گزینه ۴-

$$\frac{3x^2 - 2x + 2}{x^2 + x + 1} - 2 < 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 4x}{x^2 + x + 1} < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x \in (0, 4) \Rightarrow b - a = 4$$

۱۰- نامعادله $1 > \frac{6-x^2}{x}$ در بازه $(-\infty, a)$ برقرار است؛ بیشترین مقدار a کدام است؟ آزمون قلمچی

(۱) ۲ (۲) -۳ (۳) ۳ (۴) صفر

حل) گزینه ۲-

$$\frac{6-x^2}{x} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{6-x^2-x}{x} > 0 \Rightarrow \frac{x^2+x-6}{x} < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x \in (-\infty, -3) \cup (0, 2)$$

۱۱- مجموعه جواب نامعادله $\frac{5x^2-12x}{x^2-9} < 1$ کدام است؟ آزمون سنجش

- (۱) \emptyset (۲) $(\frac{2}{3}, 3)$ (۳) $(-3, 3) - \{\frac{2}{3}\}$ (۴) $(-3, 3)$

حل) گزینه ۳- گزینه ۱ و ۲ با قرار دادن $x = 0$ رد می شود، گزینه ۴ رد می شود چون اگر قرار دهیم $x = \frac{3}{2}$ به تناقض می رسیم.

۱۲- از نامعادله $\frac{-2x+1}{3} \leq 2 \leq \frac{x}{4} - 1$ جواب x در کدام بازه قرار می گیرد؟

- (۱) $[-\frac{5}{2}, 6)$ (۲) $(\frac{5}{2}, 6)$ (۳) $(6, \infty)$ (۴) $(-\infty, -\frac{5}{2}]$

حل) گزینه ۴- برای رد گزینه ۱ عدد صفر را قرار دهید و برای رد گزینه ۲ عدد ۳ و برای رد گزینه ۳ عدد ۷ را قرار دهید.

۱۳- مجموعه جواب نامعادله $|x^2 + 1| > |x - 2| + 1 - 2x$ کدام است؟ تجربی خارج از کشور ۸۵

- (۱) $(-2, 1)$ (۲) $(-1, 1)$ (۳) $(-1, 2)$ (۴) $(1, 2)$

حل) گزینه ۴- برای رد گزینه های دیگر عدد صفر را قرار دهید.

۱۴- مجموعه جواب نامعادله $|x^2 - 2x| < x$ کدام است؟

- (۱) $(0, 1)$ (۲) $(0, 3)$ (۳) $(1, 2)$ (۴) $(1, 3)$

۱۵- اگر مجموعه جواب نامعادله $2|x - 1| - x > \sqrt{3x + 4}$ به صورت (a, b) باشد، طول وسط بازه کدام است؟

سراسری ریاضی ۹۵

- (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) ۳ (۳) $\frac{7}{2}$ (۴) ۴

حل) گزینه ۳-

$$x > 1 \Rightarrow \sqrt{3x+4} > x-2 \Rightarrow 3x+4 > x^2-4x+4 \Rightarrow x^2-7x < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$$

$$x \in (0, 7) \xrightarrow{\text{اشتراک}} x \in (1, 7)$$

$$x < 1 \Rightarrow \sqrt{3x+4} > -3x+2 \Rightarrow 3x+4 > 9x^2 - 12x + 4 \Rightarrow 9x^2 - 15x < 0 \Rightarrow$$

$$3x(3x-5) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x \in \left(0, \frac{5}{3}\right) \xrightarrow{\text{اشتراک}} x \in (0, 1)$$

$$\Rightarrow x \in (0, 1) \Rightarrow m = \frac{7}{2}$$

۱۶- مجموعه جواب نامعادله $|x-4| < 2x-5$ کدام است؟ سراسری ریاضی ۹۲

- (۱) $(1, 5)$ (۲) $(1 - \sqrt{6}, 1 + \sqrt{6})$
 (۳) $(1, 5) \cup (1 + \sqrt{6}, \infty)$ (۴) $(-\infty, 1 - \sqrt{6}) \cup (1, 5)$

حل) گزینه ۴- برای رد گزینه ۲ عدد صفر را قرا می دهیم، برای رد گزینه ۳ عدد ۱۰ قرار بدهید و عدد ۵- در معادله صدق می کند در حالیکه در گزینه ۱ نیست.

۱۷- مجموعه جواب نامعادله $|x^2 - 2x| < x$ کدام است؟ سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۲

- (۱) $(0, 1)$ (۲) $(0, 3)$ (۳) $(1, 2)$ (۴) $(1, 3)$

حل) گزینه ۴- برای رد گزینه ۱ قرار دهید $\frac{1}{2}$ ، برای رد گزینه ۲ قرار دهید $x = 1$ ، چون عدد $\frac{2}{5}$ در نامعادله صدق می کند پس گزینه ۴ درست است.

۱۸- مجموعه جواب نامعادله $\left| \frac{x-2}{2x+1} \right| > 1$ کدام است؟ تجربی ۹۲

- (۱) $(-3, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (۲) $(-2, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, 1)$
 (۳) $(-3, -\frac{1}{2})$ (۴) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

حل) گزینه ۱- برای رد گزینه ۲ عدد $\frac{1}{2}$ را قرار دهید، از آنجاییکه هر دو گزینه ۳ و ۴ درست هستند پس اجتماع این دو گزینه جواب است.

۱۹- مجموعه جواب نامعادله $|x-2| < 2x-2$ کدام است؟ سراسری تجربی خارج از کشور ۹۲

(۱) $(-1, 1)$ (۲) $(-1, 2)$ (۳) $(0, 2)$ (۴) $(1, 2)$

حل) گزینه ۲- از آنجایی که گزینه های ۱ و ۳ و ۴ زیر مجموعه هایی از گزینه ۲ هستند، پس گزینه ۲ درست است.

۲۰- مجموعه جواب نامعادله $x + |x| \leq \frac{1}{4}x + 3$ کدام است؟ سراسری تجربی ۸۴ خارج از کشور

(۱) $[-4, 2]$ (۲) $[-6, 8]$ (۳) $[-6, 2]$ (۴) $[-2, 6]$

حل) گزینه ۳- برای رد گزینه های ۲ و ۴ عدد $x = 4$ را قرار دهید، گزینه ۱ زیر مجموعه ای از گزینه ۳ است پس گزینه ۳ درست است.

۲۱- مجموعه جواب نامعادله $|2x - 5| + 2|x + 1| < 6$ کدام است؟ آزمون سنجش ۹۵

(۱) \emptyset (۲) $(-1, \frac{5}{2})$ (۳) $(-1, 3)$ (۴) $(1, \frac{5}{2})$

حل) گزینه ۱- هیچ عددی در سه گزینه ۲ و ۳ و ۴ در نامعادله صدق نمی کند.

۲۲- مجموعه جواب نامعادله $x|x - 1| + x^2 > 1$ کدام است؟ آزمون قلمچی ۹۴

(۱) $x > 1$ (۲) $x < \frac{-1}{4}$ یا $x > 1$ (۳) $0 < x < 2$ یا $-2 < x < 0$ (۴) $1 < x < 3$

حل) گزینه ۱- با قرار دادن عدد در نامعادله گزینه های ۲ و ۳ رد می شوند، چون گزینه ۴ زیر مجموعه ی گزینه ۱ است، پس گزینه ۱ درست است.

۲۳- مجموعه جواب نامعادله $x^2 - x \leq |x|$ کدام است؟ آزمون گاج ۹۴

(۱) $[0, 2]$ (۲) $[-1, 3]$ (۳) $[-1, 1]$ (۴) $(-\infty, 2)$

حل) گزینه ۱- برای رد گزینه های ۲ و ۳ و ۴ عدد $x = -1$ را قرار دهید.

۲۴- مجموعه جواب نامعادله $|x + 2| > |2x + 1|$ چند عدد صحیح را شامل نمی شود؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

$$|2x + 1| > |x + 2| \Rightarrow (2x + 1)^2 > (x + 2)^2 \Rightarrow 4x^2 + 4x + 1 > x^2 + 4x + 4 \Rightarrow$$

$$3x^2 - 3 > 0 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x > 1 \text{ یا } x < -1 \Rightarrow [-1, 1] \Rightarrow \text{گزینه ۳}$$

۲۵- در مجموعه جواب نامعادله $3 < |x - 2| < 7$ چند عدد صحیح صدق می کند؟ سنجش ۹۰

(۴) صفر

(۳) ۶

(۲) ۱۲

(۱) ۸

$$a < |u| < b \Rightarrow \begin{cases} a < u < b \\ -b < u < -a \end{cases} \text{ (نکته)}$$

$$\begin{cases} 3 < x - 2 < 7 \Rightarrow 5 < x < 9 \\ -7 < x - 2 < -3 \Rightarrow -5 < x < -1 \end{cases} \Rightarrow \text{گزینه ۳}$$

۲۶- مجموعه جواب نامعادله $(|x| + 2)([x] - 3) \leq 0$ کدام است؟

(۴) $(-\infty, 3)$

(۳) $[-\infty, 4]$

(۲) $(-\infty, 3]$

(۱) $(-\infty, 4)$

(حل) گزینه ۱-

$$|x| + 2 > 0 \Rightarrow [x] - 3 \leq 0 \Rightarrow [x] \leq 3 \Rightarrow x < 4$$

۲۷- اگر $||x - 2|| \leq 1$ آنگاه x چه مقادیری را اختیار می کند؟

(۴) $[0, 4]$

(۳) $[1, 3]$

(۲) $(0, 4)$

(۱) $(1, 3)$

(حل) گزینه ۲- با قرار دادن $x = 4$ گزینه ۴ رد می شود، گزینه های ۱ و ۳ زیر مجموعه ی گزینه ۲ هستند پس ۲ درست است.

۲۸- جواب نامعادله $\frac{(x-5)(x^2-4)}{2-\sqrt{x}} < 0$ کدام است؟ آزمون سنجش ۹۰

(۴) $(0, \infty)$

(۳) $(0, 5)$

(۲) $(0, 2) \cup (4, 5)$

(۱) $(2, 4) \cup (5, \infty)$

(حل) گزینه ۱- برای رد گزینه های ۲ و ۳ و ۴ عدد $x = 1$ را قرار دهید.

۲۹- مجموعه جواب دستگاه $\begin{cases} |2x - 7| < 5 \\ \frac{1}{x^2} > \frac{1}{16} \end{cases}$ معادل کدام نامعادله زیر است؟ آزمون گاج ۹۴

$$|2x - 5| < 3 \quad (۴) \quad |x| < 1 \quad (۳) \quad |x - 5| < 3 \quad (۲) \quad |2x - 7| < 4 \quad (۱)$$

$$\begin{cases} -5 < 2x - 7 < 5 \Rightarrow 2 < 2x < 12 \Rightarrow 1 < x < 6 \\ \frac{1}{x^2} > \frac{1}{16} \Rightarrow x^2 < 16 \Rightarrow -4 < x < 4 \end{cases} \quad \cap \Rightarrow 1 < x < 4$$

بررسی گزینه ها:

$$\begin{cases} -4 < 2x - 7 < 4 \Rightarrow 3 < 2x < 11 \Rightarrow \frac{3}{2} < x < \frac{11}{2} \\ |x - 5| < 3 \Rightarrow -3 < x - 5 < 3 \Rightarrow 2 < x < 8 \\ |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1 \\ -3 < 2x - 5 < 3 \Rightarrow 1 < x < 4 \end{cases}$$

۳۰- جواب نامعادله $\frac{-x(x^2+4)}{x^3-1} > 0$ به صورت $|x - a| < b$ است، مقدار a کدام است؟ گاج ۹۴

$$\frac{1}{2} \quad (۴) \quad \frac{3}{2} \quad (۳) \quad 2 \quad (۲) \quad 1 \quad (۱)$$

$$x^2 + 4 > 0 \Rightarrow \begin{cases} -x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 1 \Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

۳۱- اگر $(a - 1)x^2 + (a - 1)x + 1$ به ازای هر x منفی باشد، a به کدام مجموعه تعلق دارد؟ ریاضی ۹۱

$$R \quad (۴) \quad \emptyset \quad (۳) \quad \{a: a < 1\} \quad (۲) \quad \{a: 1 < a < 5\} \quad (۱)$$

حل) گزینه ۳- شرط اینکه یک عبارت درجه دوم هموار منفی باشد، آنست که:

$$\begin{cases} x^2 < 0 \Rightarrow a - 1 < 0 \Rightarrow a < 1 \\ \Delta < 0 \Rightarrow (a - 1)^2 - 4(a - 1) < 0 \Rightarrow (a - 1)(a - 5) < 0 \Rightarrow 1 < a < 5 \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

۳۲- به ازای کدام مقدار m عبارت $y = (m - 1)x^2 + 6x + 2m + 1$ همواره مثبت است؟ ریاضی خارج ۹۰

$$1 < m < \frac{5}{2} \quad (۴) \quad 1 < m < 2 \quad (۳) \quad m > \frac{5}{2} \quad (۲) \quad m < -2 \quad (۱)$$

حل) گزینه ۲-

$$\begin{cases} x^2 > 0 \Rightarrow m - 1 > 0 \Rightarrow m > 1 \\ \Delta < 0 \Rightarrow 9 - (m - 1)(2m + 1) < 0 \Rightarrow x > \frac{5}{2}, x < -2 \Rightarrow x > \frac{5}{2} \end{cases}$$

۳۳- به ازای کدام مقدار a تابع درجه دوم $y = (a - 1)x^2 + 2\sqrt{2}x + a$ همواره بالای محور طولهاست؟ خارج از کشور

۸۹

۱ < a < ۲ (۴)

a > ۲ (۳)

a > ۱ (۲)

a < -۱ (۱)

حل) گزینه ۳-

$$\begin{cases} a - 1 > 0 \Rightarrow a > 1 \\ 2 - a(a - 1) < 0 \Rightarrow 2 - a^2 + a < 0 \Rightarrow a^2 - a - 2 > 0 \Rightarrow a > 2, a < -1 \Rightarrow a > 2 \end{cases}$$

۳۴- عبارت $\frac{(m-1)x^2 + 2x - 1}{3x^2 + 1}$ به ازای جميع مقادير x ، منفي است. حدود m کدام است؟ گزینه دو ۹۵

m > -۳ (۴)

-۲ < m < ۲ (۳)

m < ۱ (۲)

m < ۰ (۱)

حل) گزینه ۱- چون مخرج همواره مثبت است، پس صورت باید همواره منفي باشد.

$$\begin{cases} m - 1 < 0 \Rightarrow m < 1 \\ \Delta < 0 \Rightarrow 1 - (m - 1)(-1) < 0 \Rightarrow 1 + m - 1 < 0 \Rightarrow m < 0 \Rightarrow m < 0 \end{cases}$$

۳۵- به ازای کدام مقادير m ، نامعادله $\frac{2x^2 - x + m}{x^2 + x + 1} > 1$ به ازای همه مقادير حقيقي x برقرار است؟ قلمچی ۹۴

m > ۲ (۴)

-۲ < m < ۱ (۳)

-۱ < m < ۲ (۲)

m < -۱ (۱)

حل) گزینه ۴-

$$\frac{2x^2 - x + m}{x^2 + x + 1} > 1 \Rightarrow \frac{2x^2 - x + m}{x^2 + x + 1} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x + m - 1}{x^2 + x + 1} > 0$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x + m - 1 > 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow 1 - (m - 1) < 0 \Rightarrow 1 - m + 1 < 0 \Rightarrow m > 2 \\ x^2 + x + 1 > 0 \Rightarrow \Delta < 0 \end{cases}$$

۳۶- به ازای کدام مقدار m عبارت $\frac{(m+1)x^2 - 3x + 1}{-x^2 + x - 7}$ همواره مثبت است؟ گاج ۹۳

(۱) $m < -1$ (۲) $m > \frac{5}{4}$ (۳) $m > \frac{5}{4}$ یا $m < -1$ (۴) \emptyset

حل) گزینه ۴- چون $\Delta < 0$ و $a < 0$ پس $-x^2 + x - 7 < 0$.

$$\begin{cases} m + 1 < 0 \Rightarrow m < -1 \\ (m + 1)x^2 - 3x + 1 < 0 \Rightarrow 9 - 4(m + 1) < 0 \Rightarrow 9 - 4m - 4 < 0 \Rightarrow m > \frac{5}{4} \Rightarrow \emptyset \end{cases}$$

۳۷- در بازه نمودار تابع $y = \sqrt{x + 3}$ بالای $y = |x - 1| - 2$ قرار دارد، بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟ ریاضی خارج کشور ۹۴

(۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

حل) گزینه ۳-

$$\begin{cases} x \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x + 3} > x - 3 \Rightarrow x + 3 > x^2 - 6x + 9 \Rightarrow x^2 - 7x + 6 < 0 \Rightarrow 1 < x < 6 \\ x < 1 \Rightarrow \sqrt{x + 3} > -x - 1 \Rightarrow x + 3 > x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x^2 + x - 2 < 0 \Rightarrow -2 < x < 1 \end{cases}$$

پس: $b - a = (6 - 1) + (1 - (-2)) = 8$

۳۸- در کدام بازه از مقادیر x ، نمودار تابع $f(x) = 5 - |x - 1|$ بالاتر از نمودار تابع $y = |2x|$ قرار دارد؟ ریاضی خارج از کشور ۹۳

(۱) $(\frac{-4}{3}, 1)$ (۲) $(\frac{-2}{3}, 1)$ (۳) $(\frac{-4}{3}, 2)$ (۴) $(\frac{-2}{3}, 2)$

حل) گزینه ۳-

$$5 - |x - 1| > |2x| \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \Rightarrow 5 - (x - 1) > 2x \Rightarrow x < 2 \Rightarrow 1 \leq x < 2 \\ 0 \leq x < 1 \Rightarrow 5 - (-x + 1) > 2x \Rightarrow x < 2 \Rightarrow 0 \leq x < 1 \Rightarrow (\frac{-4}{3}, 2) \\ x < 0 \Rightarrow 5 - (-x + 1) > -2x \Rightarrow x > \frac{-4}{3} \Rightarrow x > \frac{-4}{3} \end{cases}$$

۳۹- تابع با ضابطه $f(x) = \frac{-1}{4}x^2 + 2x + 6$ در بازه (a, b) بزرگتر از $\frac{7}{4}$ است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام

است؟ تجربی ۸۹

۶ (۴)

۵/۵ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

حل گزینه ۴-

$$\frac{-1}{4}x^2 + 2x + 6 > \frac{7}{4} \Rightarrow -x^2 + 4x + 12 - 7 > 0 \Rightarrow -x^2 + 4x + 5 > 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 5 < 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 5 \Rightarrow b - a = 6$$

۴۰- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4}$ در بازه (a, b) پایین تر از خط به معادله $y = 2$ قرار دارد، بیشترین

مقدار $b - a$ کدام است؟ ریاضی خارج از کشور ۸۸

∞ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)

حل گزینه ۲-

$$\frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4} < 2 \Rightarrow 3x^2 - 2x - 2x^2 - 8 < 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 < 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 2) < 0 \Rightarrow -2$$

$$< x < 4 \Rightarrow b - a = 6$$

۴۱- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$ ، $x > -1$ در بازه (a, b) زیر محور طولها قرار دارد،

بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟ ریاضی ۸۸

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

حل گزینه ۲-

$$x^3 - 4x^2 - x + 4 < 0 \Rightarrow x^2(x - 4) - (x - 4) < 0 \Rightarrow (x^2 - 1)(x - 4) < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x < -1, \quad 1 < x < 4 \Rightarrow b - a = 3$$

۴۲- نمودار تابع با ضابطه ی $y = 4 - |x|$ در بازه (a, b) بالاتر از خط به معادله $y + x = 5$ قرار دارد، بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟ ریاضی خارج از کشور ۸۶

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

حل) گزینه ۲-

$$4 - |x| > \frac{-1}{2}x + \frac{5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \Rightarrow 8 - 2x > -x + 5 \Rightarrow x < 3 \\ x < 0 \Rightarrow 8 + 2x > -x + 5 \Rightarrow x > -1 \end{cases} \Rightarrow -1 < x < 3 \Rightarrow b - a = 4$$

۴۳- در بازه ی $[x, +\infty)$ نمودار تابع با ضابطه ی $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$ بالاتر از خط به معادله ی $y = 3(x - 1)$ قرار نمی گیرد، کمترین مقدار $f(x)$ کدام است؟ تجربی ۸۲

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

حل) گزینه ۳-

$$\frac{1}{3}x + 2 > 3(x - 1) \Rightarrow x + 4 > 6x - 6 \Rightarrow 10 < 5x \Rightarrow x > 2 \Rightarrow f(2) = 3$$

۴۴- در بازه ای مقادیر تابع با ضابطه ی $y = x^2$ کمتر از مقادیر تابع با ضابطه $y = |x - 2|$ است، آن بازه کدام است؟ ریاضی ۸۱

(۰, ۱) (۴)

(-۱, ۱) (۳)

(-۱, ۰) (۲)

(-۲, ۱) (۱)

حل) گزینه ۱-

$$x^2 < |x - 2| \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \Rightarrow x^2 - x + 2 < 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 2 \\ x < 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 < 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 1) < 0 \Rightarrow -2 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow -2 < x < 1$$

۴۵- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 5}{x^2 + 1}$ در بازه ی (a, b) پایین تر از خط $y = 1$ است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟ آزمون قلمچی ۹۴

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

حل) گزینه ۳-

$$\frac{2x^2 - 5x + 5}{x^2 + 1} < 1 \Rightarrow 2x^2 - 5x + 5 < x^2 + 1 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x - 1)(x - 4) < 0 \Rightarrow 1 < x < 4 \Rightarrow b - a = 3$$

۴۶- نمودار تابع $y = x^2 - 2|x| - 1$ در کدام بازه زیر، زیر خط $y = 2$ به معادله قرار دارد؟ آزمون سنجش ۹۰

۱ (۱) $(-3, 3)$

۲ (۲) $[-1, 1]$

۳ (۳) $(-1, 3)$

۴ (۴) $[-3, 1]$

حل) گزینه ۱-

$$x^2 - 2|x| - 1 < 2 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 < 0 \Rightarrow (x + 1)(x - 3) < 0 \Rightarrow -1 < x < 3 \\ x < 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 < 0 \Rightarrow (x - 1)(x + 3) < 0 \Rightarrow -3 < x < 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اجتماع}} -3 < x < 3$$

$$-3 < x < 3$$

۴۷- در کدام بازه منحنی تابع $y = x^3 + 2x^2$ در زیر خط $y = x + 2$ قرار دارد؟ آزمون سنجش ۹۰

۱ (۱) $(-2, 1)$

۲ (۲) $(-1, 1)$

۳ (۳) $(-\infty, -2) \cup (-1, 1)$

۴ (۴) $(-1, 1) \cup (2, \infty)$

حل) گزینه ۳-

$$x^3 + 2x^2 < x + 2 \Rightarrow x^3 + 2x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow x^2(x + 2) - (x + 2) < 0 \Rightarrow$$

$$(x + 2)(x^2 - 1) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x < -2, -1 < x < 1$$

معادله درجه دوم: هر معادله که پس از ساده کردن به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ را که $a \neq 0$ باشد، را معادله‌ی درجه‌ی دوم می‌گویند که در آن ضرایب a, b, c اعداد حقیقی هستند.

تمرین ۱) کدام معادله‌ی زیر درجه دوم است، ضرایب آن را مشخص کنید؟

$$\text{الف. } (x-1)(x+3) = x(x+5) + 5 \quad \text{ب. } x^2 + 2x = (2x-1)(x+1)$$

(حل معادله (ب) درجه دوم است.

$$x^2 + 2x = 2x^2 + x - 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow a = 1, \quad b = -1, \quad c = -1$$

نکته‌ی ۱۶. روش دلتا برای حل معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ به صورت $\Delta = b^2 - 4ac$ است، که سه حالت زیر پیش می‌آید:

الف. اگر دلتا مثبت ($\Delta > 0$) باشد، آنگاه معادله دارای دو جواب است که $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ هستند.

ب. اگر دلتا صفر باشد، ($\Delta = 0$) معادله دارای یک ریشه حقیقی به فرم $x = \frac{-b}{2a}$ است، آنگاه می‌گوییم معادله دارای ریشه مضاعف (تکراری) است.

ج. اگر دلتا منفی باشد، ($\Delta < 0$) معادله دارای جواب حقیقی نیست.

تمرین ۲) معادله‌های زیر را به روش کلی (دلتا) حل کنید؟

$$\text{الف) } 3x^2 + 5x - 12 = 0$$

$$\text{ب) } 49x^2 + 42x + 9 = 0$$

(حل الف)

$$\Delta = 5^2 - 4(3)(-12) = 25 + 144 = 169 > 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-5 + \sqrt{169}}{2(3)} = \frac{4}{3} \\ x_2 = \frac{-5 - \sqrt{169}}{2(3)} = -3 \end{cases}$$

نکته) در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر b زوج باشد، می‌توانیم از $b' = \frac{b}{2}$ استفاده کرده و از رابطه Δ' ریشه را به صورت زیر بدست آوریم:

$$\Delta' = b'^2 - 4ac \rightarrow x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$$

تمرین ۳) جواب معادله $3x^2 - 18x + 2 = 0$ را بدست آورید؟

$$\text{حل) } b' = \frac{-18}{2} = -9 \Rightarrow \Delta' = (-9)^2 - 3(2) = 75 \Rightarrow x_1, x_2 = \frac{9 \pm \sqrt{75}}{3}$$

تمرین ۴) مقدار k را طوری بیابید که یکی از ریشه های معادله $(k+2)x^2 - 4kx - k - 3 = 0$ برابر با ۲ باشد، سپس ریشه ی دیگر آن را بیابید؟

$$\text{حل) } x = 2 \Rightarrow 4(k+2) - 8k - k - 3 = 0 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow 3x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$b' = \frac{-4}{2} = -2 \Rightarrow \Delta' = 4 - 3(-4) = 16 \Rightarrow x_1, x_2 = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{3} = 2, \frac{-2}{3}$$

تمرین ۵) مقدار k را طوری بیابید که معادله ی $kx^2 - 2(k-1)x + k = 0$ دارای ریشه ی مضاعف باشد، سپس ریشه ی مضاعف را بیابید؟

$$\text{حل) } \Delta' = (k-1)^2 - k(k) = 0 \Rightarrow k^2 - 2k + 1 - k^2 = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

تمرین ۶) حدود k را طوری بیابید که معادله ی $3x^2 + (k+1)x + 3 = 0$ حقیقی نداشته باشد.

$$\text{حل) } \Delta < 0 \Rightarrow (k+1)^2 - 4(3)(3) < 0 \Rightarrow k^2 + 2k - 35 < 0 \Rightarrow (k+7)(k-5) < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -7 < k < 5$$

نکته) در حالت خاص در مورد معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ داریم :

$$(1) \quad a+b+c=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{c}{a} \end{cases}$$

$$(2) \quad a+c=b \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\frac{c}{a} \end{cases}$$

تمرین ۷) معادله های زیر را حل کنید؟

$$۱) (\sqrt{2} + 1)x^2 + (\sqrt{2} - 1)x - 2\sqrt{2} = 0$$

$$\text{حل) } a + b + c = 0 \Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}$$

$$۲) 31x^2 + 23x - 8 = 0$$

$$\text{حل) } a + c = b \Rightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{8}{31}$$

نکته ۱۵) در برخی معادلات با در نظر گرفتن یک تغییر متغیر مناسب می توان آن معادله را تبدیل به یک معادله ی درجه دوم کرد و آن معادله درجه دوم را حل می کنیم، سپس معادله ی اصلی را حل می کنیم.

تمرین ۸) معادله ی $(3x^2 - 1)^2 - 13(3x^2 - 1) + 22 = 0$ را به روش تغییر متغیر حل کنید؟

$$\text{حل) } 3x^2 - 1 = t \Rightarrow t^2 - 13t + 22 = 0 \Rightarrow (t - 11)(t - 2) = 0 \Rightarrow t = 11, t = 2$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 1 = 11 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\ 3x^2 - 1 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

تمرین ۹) معادلات زیر را با روش تغییر متغیر حل کنید؟

$$\text{ب. } x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

$$\text{الف. } x^4 - 3x^2 - 10 = 0$$

$$\text{ت. } 4^x - 12(2^x) + 32 = 0$$

$$\text{پ. } 2x^{-4} - 3x^{-2} + 1 = 0$$

$$\text{س. } 4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$$

$$\text{ث. } (x^2 - 3)^4 - (x^2 - 3)^2 - 2 = 0$$

$$\text{ص. } 9^x - 7(3^x) - 18 = 0$$

$$\text{ش. } 9^x + 3^x - 12 = 0$$

$$\text{ج. } \left(4 - \frac{1}{x^2}\right)^2 - 5\left(4 - \frac{1}{x^2}\right) = 0$$

حل) قسمت های ت و ث و ج و پ را حل می کنیم و قسمت های دیگر به عنوان تمرین به خواننده واگذار می شود.

$$\text{ت) } 4^x - 12(2^x) + 32 = 0 \Rightarrow 2^x = t \Rightarrow t^2 - 12t + 32 = 0 \Rightarrow (t - 8)(t - 4) = 0$$

$$t = 8, t = 4 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3, \quad 2^x = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$\text{ث)} (x^2 - 3)^4 - (x^2 - 3)^2 - 2 = 0 \Rightarrow (x^2 - 3)^2 = t \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (t - 2)(t + 1) = 0 \Rightarrow t = 2, t = -1 \Rightarrow \begin{cases} \text{غ ق ق } (x^2 - 3)^2 = -1 \\ (x^2 - 3)^2 = 2 \Rightarrow x^2 - 3 = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 = 3 \pm \sqrt{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{3 \pm \sqrt{2}}$$

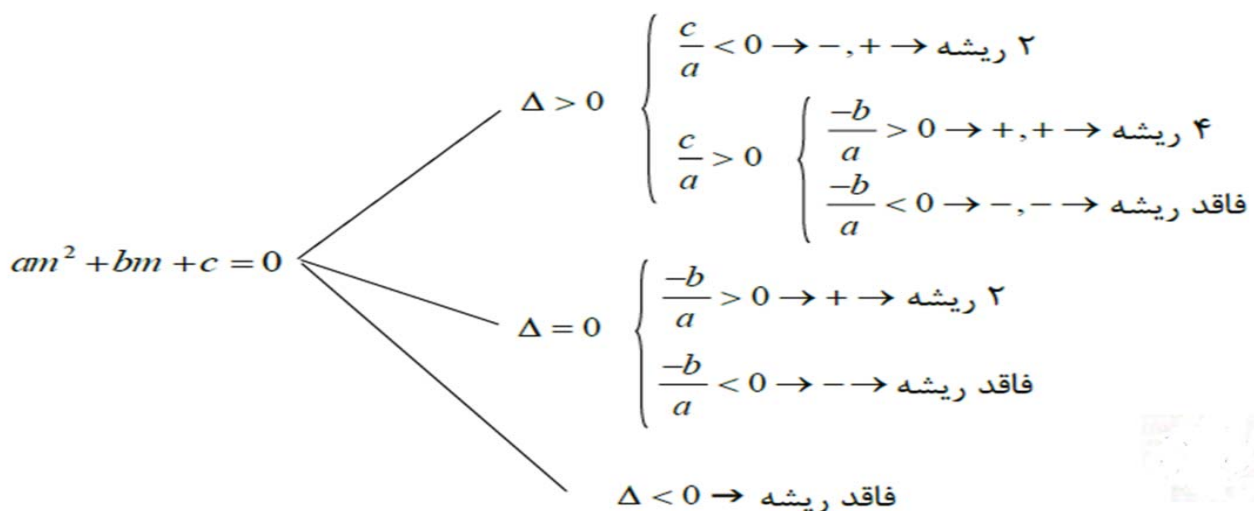
$$\text{ج)} 4 - \frac{1}{x^2} = t \Rightarrow t^2 - 5t = 0 \Rightarrow t = 0, t = 5 \Rightarrow \begin{cases} 4 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2} \\ 4 - \frac{1}{x^2} = 5 \Rightarrow x^2 = -1 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$\text{پ)} 2x^{-2} - 3x^{-2} + 1 = 0 \Rightarrow x^{-2} = t \Rightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{4} = 1 \Rightarrow t = 1, t = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x^{-2} = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ x^{-2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

نکاتی از معادله درجه چهار (معادلات دو مجذوری):

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \xrightarrow{x^2=m} am^2 + bm + c = 0$$



حاصل ضرب و حاصل جمع ریشه‌ها

نکته‌ی ۱۶. در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ مجموع و حاصلضرب ریشه‌ها را به ترتیب با S و P نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} \quad , \quad P = \alpha \times \beta = \frac{c}{a}$$

نکته‌ی ۱۷. اگر S و P به ترتیب مجموع و حاصلضرب ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم باشند، آنگاه α و β ریشه‌های معادله $x^2 - Sx + P = 0$ هستند.

تمرین (۲۰) معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش -۶ و ۴ باشند؟

حل) $S = -۶ + ۴ = -۲$, $P = (-۶)(۴) = -۲۴ \Rightarrow x^2 + ۲x - ۲۴ = 0$

تمرین (۲۱) معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۹}{۲}$ باشند؟

حل) $S = \frac{۹}{۲} + \frac{۲}{۳} = \frac{۳۱}{۶}$, $P = \left(\frac{۹}{۲}\right)\left(\frac{۲}{۳}\right) = ۳ \Rightarrow x^2 - \frac{۳۱}{۶}x + ۳ = 0 \Rightarrow ۶x^2 - ۳۱x + ۱۸ = 0$

تمرین (۲۲) معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش $۳ + ۲\sqrt{۲}$ و $۳ - ۲\sqrt{۲}$ باشند؟

حل) $S = ۳ + ۲\sqrt{۲} + ۳ - ۲\sqrt{۲} = ۶$, $P = (۳ + ۲\sqrt{۲})(۳ - ۲\sqrt{۲}) = ۱$

$$x^2 - ۶x + ۱ = 0$$

نکته‌ی ۱۸. در معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ داریم:

۱	$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P$
۲	$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = S^3 - 3PS$
۳	$\alpha^6 + \beta^6 = (S^3 - 3PS)^2 - 3P^3$
۴	$\alpha^4 + \beta^4 = (S^2 - 2P)^2 - 3P^2$
۵	$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}}$
۶	$ \alpha - \beta = \sqrt{S^2 - 4P} = \frac{\sqrt{\Delta}}{ a }$

تمرین) اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - 5x + 1 = 0$ باشند، حاصل مقادیر زیر را بیابید؟

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{5}{2}, P = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} 1) \frac{\alpha}{\beta+2} + \frac{\beta}{\alpha+2} &= \frac{\alpha(\alpha+2) + \beta(\beta+2)}{(\beta+2)(\alpha+2)} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 2(\alpha + \beta)}{\alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 4} \\ &= \frac{S^2 - 2P + 2S}{P + 2S + 4} = \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{2} + 2\left(\frac{5}{2}\right)}{\frac{1}{2} + 2\left(\frac{5}{2}\right) + 4} = \frac{41}{6} \end{aligned}$$

$$2) \alpha^2 + \beta^2 = (S^2 - 2P)^2 - 3P^2 = \left(\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{429}{16}$$

$$\begin{aligned} 3) \alpha^2(\alpha+2) + \beta^2(\beta+2) &= \alpha^3 + \beta^3 + 2(\alpha^2 + \beta^2) = S^3 - 3PS + 2(S^2 - 2P) \\ &= \left(\frac{5}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{187}{8} \end{aligned}$$

$$4) \alpha^6 + \beta^6 = (S^3 - 3PS)^2 - 3P^3$$

$$5) \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} = \sqrt{S - 2\sqrt{P}} = \sqrt{\frac{5}{2} - 2\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{5}{2} - \sqrt{2}}$$

تمرین) مقدار k را طوری باید که یکی از ریشه های معادله $x^2 - 16x + k + 5 = 0$ سه واحد از ریشه ی دیگر آن بیشتر باشد؟

$$\text{حل) } \alpha = \beta + 3 \Rightarrow \alpha + \beta = 20 + 3 \Rightarrow S = 20 + 3 \Rightarrow 4 = 20 + 3 \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2} \Rightarrow P = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{k+5}{4} \Rightarrow k = 2$$

نکات مهم درباره معادله درجه دوم:

نکته ۲۵) اگر در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ضریب b را به $-b$ تبدیل کنیم، به معادله‌ای جدید می‌رسیم که ریشه‌هایش قرینه‌ی ریشه‌های معادله‌ی اصلی است.

تمرین) معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن قرینه‌ی ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 - 5x + 3 = 0$ باشند؟

حل) $3x^2 + 5x + 3 = 0$

نکته ۲۶) اگر در معادله‌ی درجه دوم جای a و c را عوض کنیم معادله‌ی جدیدی بدست می‌آید که ریشه‌هایش عکس ریشه‌های معادله‌ی اصلی است.

تمرین) معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن عکس ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 - 5x + 1 = 0$ باشند؟

حل) $x^2 - 5x + 3 = 0$

نکته ۲۷) اگر در یک معادله‌ی درجه دوم یک ریشه k برابر ریشه‌ی دیگر باشد، آنگاه داریم: $\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k}$

نکته ۲۸) اگر در یک معادله یک ریشه عکس و قرینه‌ی دیگری باشد، آنگاه $a = -c$ و اگر یک ریشه عکس دیگری باشد، آنگاه $a = c$.

نکته ۲۹) اگر معادله‌ی درجه دومی یک ریشه به شکل $a + \sqrt{b}$ داشته باشد، ریشه‌ی دیگر آن به شکل $a - \sqrt{b}$ است.

نکته) اگر دو معادله درجه دوم دارای ریشه مشترک جهت محاسبه آن عامل مشترک x^2 را از دستگاه معادلات آنها حذف می‌کنیم.

نکته) یک عبارت درجه دوم زمانی همواره مثبت است که داشته باشیم، $a > 0$ ، $\Delta < 0$.

نکته) یک عبارت درجه دوم زمانی همواره منفی است که داشته باشیم، $a < 0$ ، $\Delta < 0$.

نکته ۳۰) شرط اینکه معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ همواره بالای محور x ها باشد آنست که $a > 0$ و $\Delta < 0$.

نکته ۳۱) شرط اینکه معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ همواره پایین محور x ها باشد آنست که $a < 0$ و $\Delta < 0$.

نکته ی ۳۲. شرط اینکه مینیمم تابع $y = ax^2 + bx + c$ در ربع سوم باشد آنست که $a > 0$ ، $\Delta > 0$.

بحث در تعداد و علامت ریشه های معادله درجه دوم:

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \leftarrow \Delta \text{ ریش}$$

$$\left. \begin{array}{l} - , + \leftarrow \frac{c}{a} < 0 \\ + , + \leftarrow \frac{-b}{a} > 0 \\ - , - \leftarrow \frac{-b}{a} < 0 \end{array} \right\} \frac{c}{a} > 0 \left. \begin{array}{l} \Delta > 0 \\ \Delta = 0 \\ \Delta < 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ریشه ۲} \\ \text{ریشه ۱} \\ \text{فاقد ریشه} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} + \leftarrow \frac{-b}{a} > 0 \\ - \leftarrow \frac{-b}{a} < 0 \end{array} \right\} \Delta = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} + \text{ همواره} \leftarrow a > 0 \\ - \text{ همواره} \leftarrow a < 0 \end{array} \right\} \Delta < 0$$

تابع درجه دوم و سهمی

تابع درجه دوم: هر تابع درجه دوم به فرم کلی $f(x) = ax^2 + bx + c$ که $a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$ اعداد حقیقی هستند. به نمودار تابع درجه دوم را سهمی می نامند.

نکته ی ۱۹. سهمی $y = ax^2 + bx + c$ را در نظر بگیرید، جهت دهانه سهمی به علامت بستگی دارد:

الف. اگر $a > 0$ آنگاه این سهمی رو به بالا است و به ازای $x = \frac{-b}{2a}$ کمترین مقدار یا مینیمم خود را اختیار می کند.

ب. اگر $a < 0$ آنگاه سهمی رو به پایین است و به ازای $x = \frac{-b}{2a}$ بیشترین مقدار یا ماکزیمم خود را اختیار می کند.

تمرین) مقدار a را طوری بیابید تا ماکزیمم سهمی $y = ax^2 + 4x + 5$ برابر با ۹ شود؟

حل) $\frac{-\Delta}{4a} = 9 \Rightarrow \frac{20a - 16}{4a} = 9 \Rightarrow 5 - \frac{4}{a} = 9 \Rightarrow -4 = \frac{4}{a} \Rightarrow a = -1$

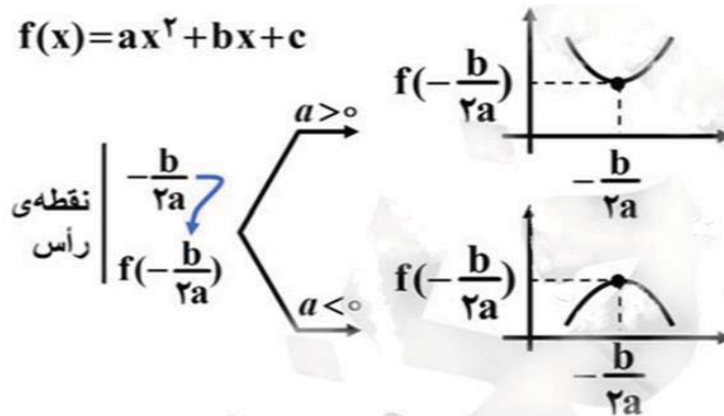
نکته) نقطه ای از سهمی که دارای بیشترین یا کمترین عرض باشد، راس سهمی را با V نمایش می دهند.

نکته ی ۲۰. در سهمی $ax^2 + bx + c = 0$ نقطه ی ماکزیمم و مینیمم سهمی از فرمول $V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ بدست می آید، که این نقطه همان راس سهمی است.

نکته) اگر $V(h, k)$ مختصات راس سهمی باشد، آنگاه معادله راس سهمی به صورت زیر است:

$$y = a(x - h)^2 + k$$

نکته) محور تقارن سهمی از نقطه راس سهمی می گذرد.



نکته) اگر (x_1, y) و (x_2, y) دو نقطه دلخواه از سهمی باشد که دارای عرض یکسان باشند (نقاط متقارن)، آنگاه طول راس سهمی از فرمول زیر بدست می آید.

$$\text{عرض سهمی} = f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), \text{ طول راس سهمی} \Rightarrow x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

نکته) شرط اینکه نمودار تابع درجه دوم از چهار ناحیه مختصات عبور کند آن است که: $ac < 0$.

نکته ی ۲۱. به محل برخورد نمودار تابع درجه دوم با محور طولها همان صفرهای تابع یا ریشه های تابع می گویند.

نکته ی ۲۲. اگر α و β ریشه های تابع درجه ی دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشند، در این صورت تابع درجه دوم به صورت $f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$ است.

نکته) در یک معادله ی درجه دوم هر گاه تعداد ریشه ها مدنظر باشد از علامت Δ و اگر علامت ریشه ها مد نظر سوال باشد از P و S کمک می گیریم.

مثال: درمورد تعداد و علامت ریشه های هریک از توابع درجه دوم زیر بحث کنید؟

الف. $f(x) = x^2 + 4x - 5$

ب. $g(x) = 3x^2 - 7x + 1$

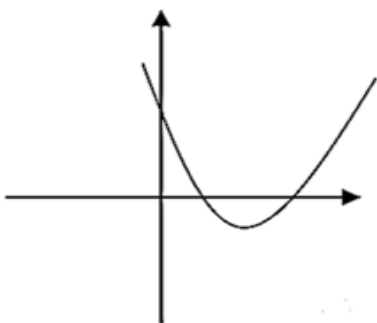
ج. $h(x) = -2x^2 + 5x - 4$

حل الف) چون $\Delta > 0$ در نتیجه معادله درجه دوم دارای دو ریشه است، از طرفی چون $P < 0$ لذا این معادله دارای ۲ ریشه مختلف علامت است و از طرفی چون $S < 0$ لذا ریشه منفی از لحاظ اندازه از ریشه مثبت بزرگتر است.

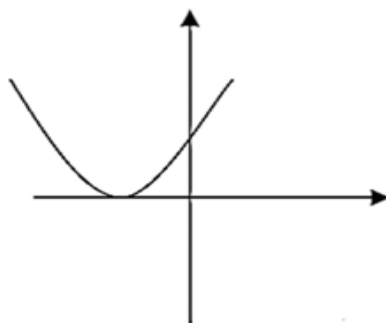
ب) چون $\Delta > 0$ در نتیجه معادله درجه دوم دارای دو ریشه است، از طرفی چون $P > 0$ لذا این معادله دارای ۲ ریشه هم علامت است و از طرفی چون $S > 0$ لذا هر دو ریشه مثبت است.

ج) چون $\Delta < 0$ در نتیجه معادله درجه دوم فاقد ریشه هست. از طرفی چون $a < 0$ لذا نمودار این تابع پایین محور x ها قرار می گیرد.

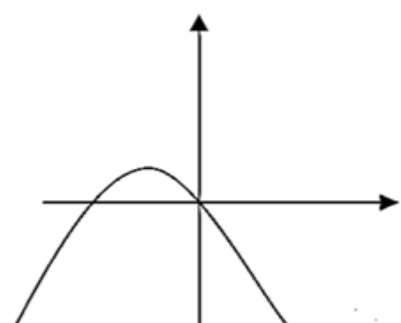
مثال: با توجه به نمودار سهمی های رسم شده به معادله $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، علامت ضرایب a و b و c را مشخص کنید؟



(۳)



(۲)



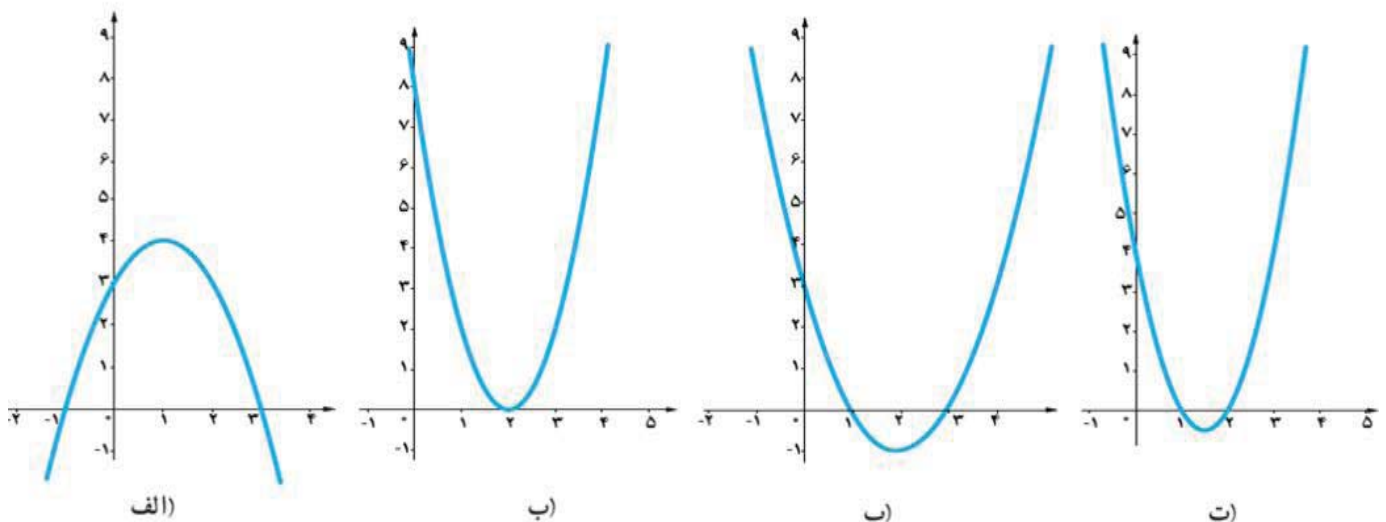
(۱)

حل (۱): چون سهمی رو به پایین است، پس $a < 0$ ، از طرفی طول راس سهمی یعنی $x = \frac{-b}{2a}$ مقداری منفی است، در نتیجه باید $b < 0$ منفی باشد و چون این سهمی از مبدا مختصات عبور می کند مقدار ثابت c برابر با صفر است.

حل (۲): چون سهمی رو به بالاست، پس $a > 0$ ، از طرفی طول راس سهمی یعنی $x = \frac{-b}{2a}$ مقداری منفی دارد در نتیجه باید $b > 0$ از طرفی چون سهمی محور عرضها در قسمت مثبت قطع کرده پس مقدار ثابت c مثبت است.

حل (۳): چون سهمی رو به بالاست، پس $a > 0$ ، از طرفی طول راس سهمی یعنی $x = \frac{-b}{2a}$ مقداری مثبت دارد در نتیجه باید $b < 0$ از طرفی چون سهمی محور عرضها در قسمت مثبت قطع کرده پس مقدار ثابت c مثبت است.

مثال: معادله سهمی های زیر را بیابید؟



حل الف) چون سهمی محور طولها را در دو نقطه -1 و 3 قطع می کند پس این دو نقطه صفرهای تابع درجه دوم هستند، یعنی داریم:

$$f(x) = a(x + 1)(x - 3) \Rightarrow 3 = a(0 + 1)(0 - 3) \Rightarrow a = -1 \Rightarrow$$

$$f(x) = -(x + 1)(x - 3) = -(x^2 - 2x - 3) = -x^2 + 2x + 3$$

حل ب) چون سهمی در نقطه $x = 2$ مماس بر محور طولهاست. لذا در این نقطه دارای ریشه مضاعف است یعنی داریم:

$$f(x) = a(x - 2)^2 \Rightarrow 8 = a(0 - 2)^2 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow f(x) = 2(x - 2)^2$$

حل قسمت های پ و ت به عنوان تمرین به خواننده واگذار می شود.

نکته ۲۳. اگر $x = \alpha$ یکی از صفرهای تابع $f(x)$ باشد، آنگاه $x - \alpha$ یک عامل تابع $f(x)$ است و برای بدست آوردن عوامل دیگر تابع $f(x)$ را بر $x - \alpha$ تقسیم جبری می کنیم.

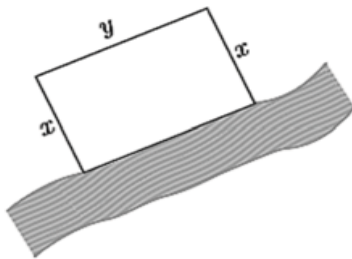
تمرین) مقدار k را طوری بیابید که یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^3 + kx^2 - x - 2$ برابر با -2 باشد و سپس صفرهای دیگر تابع را بدست آورید؟

حل) چون $x = -2$ یکی از صفرهای تابع است، لذا $f(-2) = 0$ می کند یعنی داریم،

$$(-2)^3 + k(-2)^2 - 2 - 2 = 0 \Rightarrow -8 + 4k + 2 - 2 = 0 \Rightarrow 4k = 8 \Rightarrow k = 2$$

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 \xrightarrow{\text{تجزیه}} f(x) = (x^2 - 1)(x + 2) \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

تمرین های کاربردی



۱. یک ماهیگیر می خواهد در کنار رودخانه محوطه ای مستطیل شکل را فنس کشی کند. او تنها هزینه ۱۰۰ متر فنس کشی را در اختیار دارد. ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد.
حل) ابتدا محیط شکل را بدست می آوریم:

$$\text{محیط} = x + y + x = 2x + y = 100 \Rightarrow y = 100 - 2x$$

$$\text{مساحت} = S = x \cdot y = x(100 - 2x) = -2x^2 + 100x \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2(-2)} = 25$$

$$x = 25 \Rightarrow y = -2(25)^2 + 100(25) = -1250 + 2500 = 1250$$



۲. استادیومی به شکل مستطیل با دو نیم دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است. اگر محیط استادیوم ۱۵۰۰ متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که:
الف. مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن گردد.
ب. مساحت استادیوم حداکثر مقدار ممکن شود.

معادلات گویا و رادیکالی

نکته ۳۳. برای حل معادلات گویا ابتدا کوچکترین مضرب مشترک بین مخرج‌ها را بدست می‌آوریم، سپس طرفین معادله را در این عبارت ضرب می‌کنیم و معادله‌ی جبری بدست آمده را حل می‌کنیم. فقط دقت می‌کنیم که جواب‌های بدست آمده نباید هیچکدام از مخرج‌ها را صفر کند.

مثال: معادلات گویای زیر را حل کنید؟

$$۱) \frac{x}{x^2 - 1} - \frac{2}{x + 1} = \frac{x - 2}{x^2 - x}$$

$$x(x^2 - 1) \left(\frac{x}{x^2 - 1} - \frac{2}{x + 1} \right) = x(x^2 - 1) \left(\frac{x - 2}{x^2 - x} \right) \Rightarrow x^2 - 2(x^2 - x) = (x + 1)(x - 2)$$

$$-x^2 + 2x = x^2 - x - 2 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = \frac{-1}{2} \quad \text{ق ق}$$

$$۲) \frac{3}{x^2} - 12 = 0$$

$$x^2 \left(\frac{3}{x^2} - 12 \right) = 0 \cdot (x^2) \Rightarrow 3 - 12x^2 = 0 \Rightarrow 12x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{\pm 1}{2} \quad \text{ق ق}$$

$$۳) \frac{2}{k} - \frac{3k}{k + 2} = \frac{k}{k^2 + 2k}$$

$$k(k + 2) \left(\frac{2}{k} - \frac{3k}{k + 2} \right) = k(k + 2) \left(\frac{k}{k^2 + 2k} \right) \Rightarrow 2(k + 2) - 3k^2 = k$$

$$-3k^2 + k + 4 = 0 \Rightarrow k_1 = -1, k_2 = \frac{4}{3}$$

$$۴) \frac{1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{3}{x^2 - 2x + 3}$$

$$\text{حل) } x^2 - 2x + 1 = t \Rightarrow \frac{1}{t} = \frac{3}{t + 2} \Rightarrow t + 2 = 3t$$

$$\Rightarrow 2t = 2 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = 2$$

تمرین) علی به همراه چند نفر از دوستان خود، ماهانه یک مجله ادبی ۱۶ صفحه ای منتشر می کند. پس از تایپ مطالب، او معمولاً ۲ ساعت برای ویرایش ادبی مجله وقت صرف می کند. اگر رضا به او کمک نماید، کار ویرایش حدود ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می انجامد. حال اگر رضا بخواهد به تنهایی کار ویرایش یک شماره از مجله را انجام دهد، نیازمند چه میزان وقت خواهد بود؟

$$\text{حل) } \frac{1}{120} + \frac{1}{t} = \frac{1}{80} \Rightarrow \frac{1}{t} = \frac{1}{80} - \frac{1}{120} \Rightarrow \frac{1}{t} = \frac{1}{240} \Rightarrow t = 240 \text{ min}$$

معادلات اصم یا رادیکالی

معادلاتی که متغیرشان زیر رادیکال باشد، را معادلات اصم یا رادیکالی می نامند.

برای حل این معادلات ابتدا طرفین معادله را به توان دو می رسانیم تا متغیر را از زیر رادیکال بیرون بکشیم، سپس جواب های بدست آمده را در معادله ی اصلی جایگذاری می کنیم تا مطمئن شویم جواب معادله است.

مثال: معادلات رادیکالی زیر را حل کنید؟

$$1) \quad 2x = 1 - \sqrt{2-x}$$

$$\text{حل) } \sqrt{2-x} = 1 - 2x \xrightarrow{\text{به توان دو}} 2-x = (1-2x)^2 \Rightarrow 2-x = 1 - 4x + 4x^2 \Rightarrow 4x^2 - 3x - 1 = 0 \\ \Rightarrow a+b+c=0 \Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{-1}{4}$$

$$2) \quad 2\sqrt{2t-1} - t = 1$$

$$\text{حل) } 2\sqrt{2t-1} = 1+t \Rightarrow 4(2t-1) = (1+t)^2 \Rightarrow 8t-4 = 1+2t+t^2$$

$$t^2 - 6t + 5 = 0 \Rightarrow a+b+c=0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = \frac{5}{1} = 5$$

$$3) \quad \sqrt{x+7} = \sqrt{x} + 1$$

$$\text{حل) } x+7 = (\sqrt{x}+1)^2 = x+2\sqrt{x}+1 \Rightarrow 2\sqrt{x} = 6 \Rightarrow \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9$$

$$4) \quad 2 + \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = x$$

$$\text{حل) } \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = x - 2 \Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = (x-2)^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow a + c = b \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = \frac{2}{1} = 2$$

$$5) \frac{1}{\sqrt{u-3}} - \frac{2}{\sqrt{u}} = 0$$

$$\text{حل) } \frac{1}{\sqrt{u-3}} = \frac{2}{\sqrt{u}} \Rightarrow \frac{1}{u-3} = \frac{2}{u} \Rightarrow 4u - 12 = u \Rightarrow 3u = 12 \Rightarrow u = 4$$

$$6) \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = 1 - x$$

$$\text{حل) } \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = (1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x}) \Rightarrow (1 + \sqrt{x})^2 = 1 \Rightarrow 1 + 2\sqrt{x} + x = 1 \Rightarrow 2\sqrt{x} = -x$$

$$4x = x^2 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = 4$$

تمرین) عددی صحیح بیابید که تفاضل آن از جذرش برابر نصف آن باشد، مسئله چند جواب دارد؟

$$\text{حل) } x - \sqrt{x} = \frac{x}{2} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = \frac{x^2}{4} \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4$$

تمرین های تکمیلی

۱. اگر α و β ریشه های معادله $2x^2 + 4x + 9 = 0$ باشند، مقادیر زیر را بدست آورید؟

$$S = 2, \quad P = \frac{9}{-2}$$

$$1) \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$$

$$\text{حل) } \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{S}{P} = \frac{-2}{9}$$

$$2) \alpha^2 + \beta^2$$

$$\text{حل) } \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = 2^2 - 2\left(\frac{-9}{2}\right) = 13$$

$$3) \frac{\alpha^2 + \beta^2}{3\alpha\beta}$$

$$\text{حل) } \frac{S^2 - 2P}{3P} = \frac{(2)^2 - 2\left(\frac{-9}{2}\right)}{3\left(\frac{-9}{2}\right)} = \frac{26}{-27}$$

$$۴) \alpha^3\beta + \alpha\beta^3$$

$$\text{حل) } \alpha\beta(\alpha + \beta) = P.S = \left(\frac{9}{-2}\right)(2) = -9$$

$$۵) \alpha^3 + \beta^3$$

$$\text{حل) } \alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS = (2)^3 - 3\left(\frac{9}{-2}\right)(2) = 35$$

۲. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 - 24x + 27 = 0$ باشند، مقادیر زیر را بدست آورید؟

$$S = \frac{-b}{a} = 8, \quad P = \frac{c}{a} = 9$$

$$۱) \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}} = \sqrt{8 + 2\sqrt{9}} = \sqrt{14}$$

$$۲) \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} = \sqrt{S - 2\sqrt{P}} = \sqrt{8 - 2\sqrt{9}} = \sqrt{2}$$

۳. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^3 + 4x + 8 = 0$ باشند، مقدار $\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}$ را بدست آورید؟

$$S = -4, \quad P = 8$$

$$\text{حل) } \sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta} = A \xrightarrow{\text{به توان ۳}} A^3 = \alpha + \beta + 3\sqrt[3]{\alpha^2\beta} + 3\sqrt[3]{\alpha\beta^2} = \alpha + \beta + 3\sqrt[3]{\alpha\beta}(\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta})$$

$$\Rightarrow A^3 = S + 3\sqrt[3]{P}(A) \Rightarrow A^3 = -4 + 3\sqrt[3]{8}A \Rightarrow A^3 - 6A + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (A - 2)(A^2 + 2A - 2) = 0 \Rightarrow A = 2, A = -1 \pm \sqrt{3}$$

۴- m را طوری بیابید که حاصل جمع ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 + (m - 1)x = 3$ برابر با ۵ باشد؟

$$\text{حل) } 2x^2 + (m - 1)x = 3 \Rightarrow 2x^2 + (m - 1)x - 3 = 0 \Rightarrow S = \frac{-(m - 1)}{2} = 5$$

$$\Rightarrow -m + 1 = 10 \Rightarrow -m = 9 \Rightarrow m = -9$$

۵. m و n را طوری بیابید که در معادله $2x^2 - mx + n = 2$ حاصل جمع ریشه‌ها ۱۲ و حاصل ضرب دو ریشه ۲۷ باشد؟

$$\text{حل) } 2x^2 - mx + n = 2 \Rightarrow 2x^2 - mx + n - 2 = 0 \Rightarrow S = 12 \Rightarrow \frac{m}{2} = 12 \Rightarrow m = 24$$

$$P = 27 \Rightarrow \frac{n-2}{2} = 27 \Rightarrow n = 56$$

۶. اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 2x + m = 0$ باشند و داشته باشیم $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{-1}{2}$ مقدار m را بیابید؟

$$\text{حل) } \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \frac{S^2 - 2P}{P} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \frac{4 - 2m}{m} = \frac{-1}{2} \Rightarrow 8 - 4m = -m \Rightarrow m = \frac{8}{3}$$

۷. معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ و $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ باشند؟

$$\text{حل) } S = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = 10$$

$$P = \left(\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}\right) \left(\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}\right) = 1 \Rightarrow x^2 - 10x + 1 = 0$$

۸. معادله‌ی درجه دومی بنویسید که بین ریشه‌های آن روابط زیر برقرار باشد،

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2\alpha\beta \\ \alpha + \beta - \alpha\beta = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = 2P \\ S - P = 3 \end{cases} \Rightarrow 2P - P = 3 \Rightarrow P = 3 \Rightarrow S = 2(3) = 6$$

$$x^2 - 6x + 3 = 0$$

۹. معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن دو واحد بیشتر از ریشه‌های معادله $3x^2 - 5x + 3 = 0$ باشند؟

حل) روش اول) فرض کنید α و β ریشه‌های معادله $3x^2 - 5x + 3 = 0$ باشند و x_1 و x_2 ریشه‌های معادله جدید باشند در نتیجه داریم:

$$\text{حل) } \begin{cases} x_1 = \alpha + 2 \\ x_2 = \beta + 2 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = \alpha + \beta + 4 \Rightarrow S' = S + 4 \Rightarrow S' = \frac{5}{3} + 4 = \frac{17}{3}$$

$$P' = x_1 x_2 = (\alpha + 2)(\beta + 2) = \alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 4 = P + 2S + 4 = 1 + 2\left(\frac{5}{3}\right) + 4 = \frac{25}{3}$$

$$x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{17}{3}x + \frac{25}{3} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 17x + 25 = 0$$

روش دوم)

$$\begin{aligned} y = x + 2 &\Rightarrow x = y - 2 \Rightarrow 3(y - 2)^2 - 5(y - 2) + 3 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3(y^2 - 4y + 4) - 5y + 10 + 3 = 0 \Rightarrow 3y^2 - 12y + 12 - 5y + 10 + 3 = 0 \\ &\Rightarrow 3y^2 - 17y + 25 = 0 \end{aligned}$$

۱۰. معادلات زیر را حل کنید؟

الف. $\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x} = \frac{4(x-1)}{x^2-4}$

$$x(x^2 - 4) \left(\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x} \right) = \left(\frac{4(x-1)}{x^2-4} \right) x(x^2 - 4) \Rightarrow 3(x^2 - 2x) + 2(x^2 - 4) = 4x^2 - 4x$$

$$3x^2 - 6x + 2x^2 - 8 = 4x^2 - 4x \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{1 \pm 3}{1} \Rightarrow$$

غ ق ق ۲-، x = ۴ ق ق

ب. $\frac{x+2}{x-2} = 1 - \frac{3}{x+5}$

حل) $(x-2)(x+5) \left(\frac{x+2}{x-2} \right) = (x-2)(x+5) \left(1 - \frac{3}{x+5} \right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x+5)(x+2) = (x-2)(x+5) - 3(x-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 7x + 10 = x^2 + 3x - 10 - 3x + 6 \Rightarrow 7x + 10 = -4 \Rightarrow x = -2$$

ج. $\sqrt{2x-1} = 2-x$

حل) $\sqrt{2x-1} = 2-x \Rightarrow (\sqrt{2x-1})^2 = (2-x)^2 \Rightarrow 2x-1 = 4 - 4x + x^2 \Rightarrow$

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow a + b + c = 0 \Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 5 \text{ ق ق غ}$$

د. $\sqrt{x^2 + 6} = 3x + 4$

حل) $\sqrt{x^2 + 6} = 3x + 4 \Rightarrow (\sqrt{x^2 + 6})^2 = (3x + 4)^2 \Rightarrow x^2 + 6 = 9x^2 + 24x + 16 \Rightarrow$

$$8x^2 + 24x + 10 = 0 \Rightarrow 4x^2 + 12x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 20}}{4}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{4} = \frac{-6 \pm 4}{4} \Rightarrow x = \frac{-5}{2} \text{ ق ق غ}, x = \frac{-1}{2} \text{ ق ق غ}$$

تست های بخش جبر و معادلات

۱- به ازای کدام مجموعه مقادیر m از معادله $x - 2\sqrt{x} + m - 1 = 0$ دو جواب متمایز برای x حاصل می شود؟ (خارج از کشور تجربی ۸۸)

(۱) $m > 1$ (۲) $m < 2$ (۳) $1 \leq m < 2$ (۴) \emptyset

حل) گزینه ۳- برای اینکه معادله اصلی دارای دو جواب متمایز باشد، باید معادله زیر دارای دو جواب متمایز مثبت یا یک جواب مثبت و یک جواب صفر باشد.

حل) $\sqrt{x} = t \Rightarrow t^2 - 2t + m - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 - 4(m-1) > 0 \Rightarrow m < 2 \\ \frac{-b}{a} > 0 \Rightarrow \frac{-(-2)}{1} > 0 \\ m - 1 > 0 \Rightarrow m > 1 \end{cases}$

$$t = 0 \Rightarrow m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow 1 \leq m < 2$$

۲- اگر α و β ریشه های معادله $x(5x + 3) = 2$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه ی جواب معادله ی

$$4x^2 - kx + 25 = 0 \text{ به صورت } \left\{ \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2} \right\} \text{ است؟ (سراسری ریاضی ۹۰)}$$

(۱) ۲۷ (۲) ۲۸ (۳) ۲۹ (۴) ۳۱

حل) گزینه ۳-

$$5x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow S = \frac{-3}{5}, \quad P = \frac{-2}{5}$$

$$S' = \frac{k}{4} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 \beta^2} = \frac{S^2 - 2P}{P^2} = \frac{\left(\frac{-3}{5}\right)^2 - 2\left(\frac{-2}{5}\right)}{\left(\frac{-2}{5}\right)^2} = \frac{29}{4} \Rightarrow k = 29$$

۳- اگر α و β ریشه های معادله ی $4x^2 - 12x + 1 = 0$ باشند، مقدار $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ چقدر است؟ (سراسری ریاضی ۸۵)

۶ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

حل) گزینه ۲-

$$\text{حل) } \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{\sqrt{S + 2\sqrt{P}}}{\sqrt{P}} = \frac{\sqrt{3 + 2\sqrt{\frac{1}{4}}}}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

۴- در معادله $x^2 - 8x + m = 0$ یک ریشه از نصف ریشه ی دیگر ۵ واحد بیشتر است، مقدار m کدام گزینه است؟

(خارج از کشور ریاضی ۹۱)

۱۵ (۴)

۱۴ (۳)

۱۲ (۲)

۱۰ (۱)

حل) گزینه ۳-

$$\alpha = \frac{\beta}{2} + 5 \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\beta}{2} + \beta + 5 \Rightarrow S = \frac{3}{2}\beta + 5 \Rightarrow 8 = \frac{3}{2}\beta + 5 \Rightarrow 16 - 10 = 3\beta$$

$$\beta = 2 \Rightarrow \alpha = 2 + 5 = 7 \Rightarrow P = \alpha\beta = 14 \Rightarrow m = 14$$

۵- اگر α و β ریشه های معادله ی $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشند، حاصل $\left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right)^3 + \left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)^3$ کدام گزینه زیر است؟

۱۴۴ (۴)

۱۴۰ (۳)

۱۳۸ (۲)

۱۳۶ (۱)

$$\begin{aligned} \text{حل) } \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right)^3 + \left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)^3 &= \left(\beta + \frac{1}{\alpha} + \alpha + \frac{1}{\beta}\right)^3 - 3\left(\beta + \frac{1}{\alpha} + \alpha + \frac{1}{\beta}\right)\left(\left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right)\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\right) \\ &= \left(S + \frac{S}{P}\right)^3 - 3\left(S + \frac{S}{P}\right)\left(P + \frac{1}{P} + 2\right) = (3 + 3)^3 - 3(4)(4) = 144 \end{aligned}$$

۶- اگر α و β ریشه های معادله ی $x^2 - 4x + 1 = 0$ باشند، حاصل عبارت $\alpha^3 + 15\beta$ کدام است؟

- (۱) ۶۰ (۲) ۵۶ (۳) ۶۴ (۴) ۵۲

$$\begin{aligned} \text{حل) } \alpha^3 + 15\beta &= \alpha \cdot \alpha^2 + 15\beta = \alpha(4\alpha - 1) + 15\beta = 4\alpha^2 - \alpha + 15\beta = 4(4 - 1) - \alpha + 15\beta \\ &= 16\alpha - 4 - \alpha + 15\beta = 15\alpha + 15\beta - 4 = 15(\alpha + \beta) - 4 = 15(4) - 4 = 56 \end{aligned}$$

۷- معادله $x^2 - (m+1)x + 3 = 0$ دارای دو ریشه ی حقیقی منفی است بطوریکه یکی سه برابر دیگری است. مقدار m کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) -۹ (۳) -۷ (۴) ۹

$$\text{حل) } \alpha = 3\beta \Rightarrow \alpha \cdot \beta = 3\beta^2 \Rightarrow P = 3\beta^2 \Rightarrow \frac{3}{4} = \beta^2 \Rightarrow \beta^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \beta = \frac{-1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{-3}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = \frac{m+1}{4} \Rightarrow -2 = \frac{m+1}{4} \Rightarrow m = -9$$

روش دوم: چون یکی از ریشه ها ۳ برابر دیگری است طبق نکته گفته شده در قبل داریم:

$$\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k} \xrightarrow{k=3} \frac{(m+1)^2}{12} = \frac{16}{3} \Rightarrow (m+1)^2 = 64 \Rightarrow m+1 = \pm 8$$

$$\Rightarrow m = 7, m = -9$$

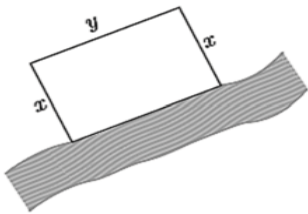
۷- اگر یکی از ریشه های معادله ی $x(ax^2 - x - 5) = 2$ برابر با ۲ باشد، مجموع دو ریشه دیگر معادله کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) $\frac{-3}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$

$$\text{حل) } x(ax^2 - x - 5) = 2 \xrightarrow{x=2} 2(4 - 2 - 5) = 2 \Rightarrow 4 = 8 \Rightarrow a = 2$$

$$x(2x^2 - x - 5) = 2 \Rightarrow 2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(2x^2 + 3x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow S = \frac{-b}{a} = \frac{-3}{2}$$



۸- بیشترین مساحت از زمینی که می توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است، محصور نمود چند متر مربع است؟

۹۸۸ (۴)

۹۷۸ (۳)

۹۶۸ (۲)

۹۵۸ (۱)

$$\text{محیط} = 2x + y = 88 \Rightarrow y = 88 - 2x$$

$$\text{مساحت} = S = x \cdot y = x(88 - 2x) = -2x^2 + 88x \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-88}{-4} = 22$$

$$\Rightarrow S = -2(22)^2 + 88(22) = 968$$

۹- اگر منحنی به معادله $y = 2x^2 - 4x + m - 3$ محور طول ها را در دو نقطه با طول های مثبت قطع کند، آنگاه

مجموعه ی مقادیر m به کدام صورت است؟ سراسری ریاضی ۸۷

$4 < m < 5$ (۴)

$3 < m < 5$ (۳)

$3 < m < 4$ (۲)

$m > 3$ (۱)

$$\text{حل) } \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 - 2(m - 3) > 0 \Rightarrow 4 - 2m + 6 > 0 \Rightarrow m < 5 \\ \frac{4}{2} > 0 \\ \frac{m - 3}{2} > 0 \Rightarrow m > 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 3 < m < 5$$

۱۰- به ازای کدام مقادیر a هر نقطه از نمودار تابع $f(x) = (a - 1)x^2 + 2\sqrt{2}x + a$ بالای محور طول هاست؟

سراسری ریاضی ۸۹

$1 < a < 2$ (۴)

$a > 1$ (۳)

$a > 2$ (۲)

$a < -1$ (۱)

حل (گزینه ۲- شرط اینکه یک سهمی بالای محور طولها باشد آنست که :

$$\begin{cases} \Delta' < 0 \Rightarrow 2 - (a - 1)a < 0 \Rightarrow 2 - a^2 + a < 0 \Rightarrow a^2 - a - 2 > 0 \Rightarrow a > 2, a < -1 \\ x \text{ ضریب} > 0 \Rightarrow a - 1 > 0 \Rightarrow a > 1 \end{cases}$$

$$a > 2 \Rightarrow \text{اشتراک}$$

۱۱- نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ محور طولها را در نقطه به طول ۱ و محور عرض ها در نقطه ی به عرض ۶- قطع کرده و از نقطه ی $A(-2, -6)$ می گذرد، مقدار $f(-1)$ کدام است؟ خارج از کشور تجربی ۸۹

$$(1) -8 \quad (2) -7 \quad (3) -5 \quad (4) -4$$

حل) گزینه ۱- چون محور عرض ها را در نقطه به عرض ۶- قطع می کند، پس $c = -6$ است. از طرفی چون از نقاط $A(-2, 6)$ و $B(1, 0)$ می گذرد پس این نقاط در معادله سهمی صدق می کنند، یعنی داریم:

$$f(1) = 0 \Rightarrow a + b - 6 = 0 \Rightarrow a + b = 6$$

$$f(-2) = -6 \Rightarrow 4a - 2b - 6 = -6 \Rightarrow 4a - 2b = 0$$

$$\begin{cases} a + b = 6 \\ 4a - 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = 4 \Rightarrow f(x) = 2x^2 + 4x - 6 \Rightarrow f(-1) = 2 - 4 - 6 = -8$$

۱۲- به ازای کدام مجموعه مقادیر a نمودار تابع $f(x) = (a-3)x^2 + ax - 1$ از ناحیه اول محورهای مختصات نمی گذرد؟ سراسری ریاضی ۹۲

$$(1) a \leq 2 \quad (2) 0 < a < 2 \quad (3) 2 < a < 3 \quad (4) 3 < a < 4$$

حل) گزینه ۱- دو حالت را باید بررسی کنیم:

حالت اول)

$$\begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow a^2 + 4a - 12 > 0 \Rightarrow (a+6)(a-2) > 0 \Rightarrow a < -6 \text{ یا } a > 2 \\ P > 0 \Rightarrow \frac{-1}{a-3} > 0 \Rightarrow a-3 < 0 \Rightarrow a < 3 \\ S < 0 \Rightarrow \frac{-a}{a-3} < 0 \Rightarrow a < 0 \end{cases}$$

اشتراک $\Rightarrow a < -6$

حالت دوم) داشتن ریشه مضاعف

$$\begin{cases} \Delta \leq 0 \Rightarrow a^2 + 4a - 12 \leq 0 \Rightarrow (a+6)(a-2) \leq 0 \Rightarrow -6 \leq a \leq 2 \\ x^2 \text{ ضریب} < 0 \Rightarrow a-3 < 0 \Rightarrow a < 3 \end{cases}$$

اشتراک $\Rightarrow -6 \leq a \leq 2$

حال اجتماع دو حالت را می گیریم:

$$(a < -6) \cup (-6 \leq a \leq 2) = a \leq 2$$

۱۳- به ازای کدام مقدار a نمودار تابع $y = (1-a)x^2 + 2\sqrt{6}x - a$ همواره بالای محور طولهاست؟

سراسری ۹۶ خارج از کشور ریاضی

$$(1) \ a < 1 \quad (2) \ a > 3 \quad (3) \ a < -2 \quad (4) \ -2 < a < 1$$

حل) گزینه ۱-

$$\begin{cases} \Delta' < 0 \Rightarrow 6 - (1-a)(-a) < 0 \Rightarrow -a^2 + a + 6 < 0 \Rightarrow a < 2 \text{ یا } a > 3 \\ \text{اشتراک} \\ \Rightarrow a < 1 \\ x^2 > 0 \Rightarrow 1 - a > 0 \Rightarrow a < 1 \end{cases}$$

۱۴- به ازای کدام مقدار m ، منحنی به معادله $y = (m+2)x^2 + 3x + 1 - m$ محور طولها را در هر دو طرف مبدا مختصات قطع می کند؟ خارج از کشور ۹۵ ریاضی

$$(1) \ m < -2 \text{ یا } m > 1 \quad (2) \ -2 < m < 1 \quad (3) \ \text{فقط } m < -2 \quad (4) \ \text{فقط } m > 1$$

حل) گزینه ۱- از آن جایی که نمودار طولها را در دو نقطه در دو طرف مبدا مختصات قطع می کند لذا دارای دو ریشه مختلف علامت است.

$$\begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow 9 - 4(m+2)(1-m) > 0 \Rightarrow 4m^2 + 4m + 1 > 0 \Rightarrow (2m+1)^2 > 0 \Rightarrow \text{بدیهی} \\ P < 0 \Rightarrow \frac{1-m}{m+2} < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m > 1 \text{ یا } m < -2 \end{cases}$$

۱۵- به ازای کدام مقدار a معادله $x^2 - 2(a-2)x + 14 - a = 0$ دارای دو ریشه ی مثبت است؟ سراسری ریاضی ۹۶

$$(1) \ -2 < a < 2 \quad (2) \ 2 < a < 5 \quad (3) \ 2 < a < 14 \quad (4) \ 5 < a < 14$$

حل) گزینه ۴-

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \Rightarrow (a-2)^2 - (14-a) > 0 \Rightarrow a^2 - 3a - 10 > 0 \Rightarrow a < -2 \text{ یا } a > 5 \\ S > 0 \Rightarrow \frac{2(a-2)}{1} > 0 \Rightarrow a > 2 \\ P > 0 \Rightarrow 14 - a > 0 \Rightarrow a < 14 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \Rightarrow$$

$$5 < a < 14$$

۱۶- در معادله درجه دوم $2x^2 + (2k-1)x - k = 0$ به ازای کدام مقدار مجموع معکوس دو ریشه برابر با $\frac{7}{3}$ است؟

سراسری تجربی ۷۷

- (۱) -۴ (۲) -۳ (۳) ۳ (۴) ۴

حل) گزینه ۲- اگر α و β ریشه های معادله فوق باشند، داریم:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{7}{3} \Rightarrow \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{7}{3} \Rightarrow \frac{-\frac{2k-1}{2}}{\frac{-k}{2}} = \frac{7}{3} \Rightarrow \frac{2k-1}{k} = \frac{7}{3} \Rightarrow 7k = 6k - 3 \Rightarrow k = -3$$

۱۷- در معادله $(x+1)(x^2 - x + 6m) = 0$ حاصل ضرب سه ریشه برابر با -۶ است، m کدام است؟ سراسری

تجربی ۷۸

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

حل) گزینه ۱- یکی از ریشه های این معادله برابر با -۱ و حاصل ضرب دو ریشه دیگر برابر با $P = 6m$ است.

$$P' = (-1)(6m) = -6 \Rightarrow m = 1$$

۱۸- در معادله درجه دوم $2x^2 + ax + 9 = 0$ یک ریشه دو برابر ریشه دیگر است، مجموع دو ریشه مثبت کدام

است؟ سراسری تجربی خارج از کشور ۹۴

- (۱) ۳/۵ (۲) ۴ (۳) ۴/۵ (۴) ۵

حل) گزینه ۳- اگر α و β ریشه های این معادله باشند، آنگاه داریم:

$$\alpha = 2\beta \Rightarrow \alpha\beta = 2\beta^2 \Rightarrow \frac{9}{2} = 2\beta^2 \Rightarrow \beta^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \beta = \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha = 3$$

$$S = \alpha + \beta = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

روش دوم (چون یکی از ریشه ها دو برابر دیگری است.

$$\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k} \Rightarrow \frac{a^2}{18} = \frac{9}{2} \Rightarrow a = -9 \Rightarrow 2x^2 - 9x + 9 = 0 \Rightarrow S = \frac{-b}{a} = \frac{9}{2} = 4.5$$

۱۹- ریشه های کدام معادله از معکوس ریشه های معادله درجه دوم $2x^2 - 3x - 1 = 0$ یک واحد کمتر است؟

سراسری تجربی ۹۴

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \quad (1) \quad x^2 + 3x + 1 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 - 5x + 2 = 0 \quad (3) \quad x^2 + 5x + 2 = 0 \quad (4)$$

حل) گزینه ۴- فرض کنید x_1 و x_2 ریشه های معادله جدید و α و β ریشه های معادله قدیم باشند.

$$x_1 = \frac{1}{\alpha} - 1, x_2 = \frac{1}{\beta} - 1 \Rightarrow S' = x_1 + x_2 = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} - 2 = \frac{S}{P} - 2 = -5$$

$$P' = x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \times \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) = \frac{1}{P} - \frac{S}{P} + 1 = -2 - (-3) + 1 = 2$$

$$x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 + 5x + 2 = 0$$

۲۰- به ازای کدام مقدار m مجموع مربعات ریشه های حقیقی معادله $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$ برابر با ۶

است؟ سراسری تجربی ۹۳

$$\frac{-9}{5} \quad (1) \quad 1 \quad (2) \quad 1, \frac{-9}{5} \quad (3) \quad \frac{9}{5}, -1 \quad (4)$$

حل) گزینه ۳- اگر α و β ریشه های این معادله باشند، آنگاه داریم:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 6 \Rightarrow S^2 - 2P = 6 \Rightarrow \frac{(m+3)^2}{m^2} - \frac{10}{m} = 6 \Rightarrow (m+3)^2 - 10m - 6m^2 = 0$$

$$5m^2 + 4m - 9 = 0 \Rightarrow a + b + c = 0 \Rightarrow m_1 = 1, m_2 = \frac{-9}{5}$$

۲۱- به ازای کدام مقدار m نمودار تابع درجه دوم $y = (m-1)x^2 + \sqrt{3}x + m$ همواره زیر محور x ها است؟

$$m < \frac{-1}{2} \quad (1) \quad \frac{-1}{2} < m < 1 \quad (2) \quad 1 < m < \frac{3}{2} \quad (3) \quad m > \frac{3}{2} \quad (4)$$

حل (گزینه ۱-)

$$\begin{cases} \Delta < 0 \Rightarrow 3 - 4(m-1)(m) < 0 \Rightarrow 3 - 4m^2 + 4m < 0 \Rightarrow m > \frac{3}{2} \text{ یا } m < \frac{-1}{2} \\ \text{اشتراک} \\ \Rightarrow m < \frac{-1}{2} \\ x^2 < 0 \Rightarrow m - 1 < 0 \Rightarrow m < 1 \end{cases}$$

۲۲- اگر به ازای جميع مقادير x نامساوی $(1+m)x^2 - 4x - (1-m) < 0$ برقرار باشد، محدوده ی m کدام است؟

$$m > \sqrt{5} \quad (1) \quad m > 1 \quad (2) \quad -1 < m < \sqrt{5} \quad (3) \quad m < -\sqrt{5} \quad (4)$$

حل (گزینه ۴-)

$$\begin{cases} 1 + m < 0 \Rightarrow m < -1 \\ \Delta' < 0 \Rightarrow 4 + (1+m)(1-m) < 0 \Rightarrow 4 + (1-m^2) < 0 \Rightarrow m > \sqrt{5} \text{ یا } m < -\sqrt{5} \end{cases}$$

حال اگر اشتراک بگیریم جواب $m < -\sqrt{5}$.

$$۲۳- \text{ معادله } x - 2\sqrt{x-1} = 0$$

(۱) یک ریشه ساده دارد. (۲) دو ریشه متمایز دارد.

(۳) ریشه حقیقی ندارد. (۴) یک ریشه مضاعف دارد.

حل (گزینه ۴-)

$$x = 2\sqrt{x-1} \xrightarrow{\text{به توان دو}} x^2 = 4(x-1) \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ مضاعف}$$

$$۲۴- \text{ معادله } (x^2 + x + 1)^2 - 3(x^2 + x + 1) + 2 = 0 \text{، دارای}$$

(۱) چهار ریشه حقیقی است. (۲) دو ریشه حقیقی است.

(۳) دو ریشه مضاعف است. (۴) چهار ریشه غیر حقیقی است.

حل (گزینه ۱-)

$$x^2 + x + 1 = t \Rightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} t = 1, t = 2$$

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 = 1 \Rightarrow x^2 + x = 0 \Rightarrow x = 0, x = -1 \\ x^2 + x + 1 = 2 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow \text{دو ریشه} \end{cases} \Rightarrow \text{چهار ریشه}$$

۲۵- جواب معادله $5\left(\frac{2x^2}{3} + 1\right)^2 - 4\left(\frac{2x^2}{3} + 1\right) - 9 = 0$ کدام است؟

$$-\sqrt{\frac{6}{5}} \quad \sqrt{\frac{6}{5}} \quad \pm\sqrt{\frac{6}{5}} \quad \pm\sqrt{\frac{5}{6}}$$

حل) گزینه ۲-

$$\frac{2x^2}{3} + 1 = t \Rightarrow 5t^2 - 4t - 9 = 0 \xrightarrow{a+c=b} x = -1, x = \frac{9}{5}$$

$$\begin{cases} \frac{2x^2}{3} + 1 = -1 \Rightarrow \frac{2x^2}{3} = 2 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \\ \frac{2x^2}{3} + 1 = \frac{9}{5} \Rightarrow \frac{2x^2}{3} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{x^2}{3} = \frac{2}{5} \Rightarrow x^2 = \frac{6}{5} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{6}{5}} \end{cases}$$

۲۶- معادله $4x^2 - 8x = \frac{-9}{x^2 - 2x + 2} + 4$ چند جواب دارد؟

(۱) یک جواب (۲) دو جواب (۳) سه جواب (۴) هیچ جواب

حل) گزینه ۲-

$$x^2 - 2x = t \Rightarrow 4t = \frac{-9}{t+2} + 4 \Rightarrow 4$$

$$t(t+2) = -9 + 4(t+2)$$

$$4t^2 + 8t = -9 + 4t + 8 \Rightarrow 4t^2 + 4t + 1 = 0 \Rightarrow (2t+1)^2 = 0 \Rightarrow t = \frac{-1}{2}$$

$$x^2 - 2x = \frac{-1}{2} \Rightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow \text{دو ریشه}$$

۲۷- اگر منحنی $y = (1 - m)x^2 + x + m - 2$ از چهار ناحیه محورهای مختصات گذشته و دارای ماکزیمم باشد آنگاه مجموعه مقادیر به کدام صورت است؟

(۱) $m < 1$ (۲) $1 < m < 2$ (۳) $m > 2$ (۴) $-1 < m < 2$

$$\begin{cases} 1 - m > 0 \Rightarrow m < 1 \\ ac < 0 \Rightarrow (1 - m)(m - 2) < 0 \Rightarrow -m^2 + 3m - 2 < 0 \Rightarrow m < 1, m > 2 \end{cases} \Rightarrow m < 1$$

۲۸- حاصل ضرب ریشه های حقیقی معادله $x^2 + 4x + 3 = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ کدام است؟ ریاضی ۹۴

(۱) -۲ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

حل) گزینه ۱

$$x^2 + 4x + 3 = t \Rightarrow t = \sqrt{t + 2} \Rightarrow t^2 = t + 2 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \xrightarrow{a+c=b} t = -1, t = 2$$

$$\begin{cases} x^2 + 4x + 3 = -1 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow (t + 2)^2 = 0 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow P = -2 \\ x^2 + 4x + 3 = 2 \Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow t = -2 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

۲۹- یازده کیلوگرم رنگ با غلظت ۴۰ درصد را با چهار کیلوگرم از همان نوع با غلظت ۷۰ درصد مخلوط شده اند، با تبخیر چند کیلو گرم از این محلول غلظت به ۵۰ درصد می رسد؟ خارج از کشور ۹۲ ریاضی

(۱) ۰/۴ (۲) ۰/۵ (۳) ۰/۶ (۴) ۰/۸

حل) گزینه ۳

$$4/4 + 2/8 = 7/2 \Rightarrow \begin{cases} 11 \times \frac{40}{100} = 4/4 \\ 4 \times \frac{70}{100} = 2/8 \end{cases}$$

$$\frac{7/2}{15 - x} = \frac{50}{100} \Rightarrow x = 0/6$$

۳۰- به ازای کدام مقادیر معادله $x^2 + (m - 2)x + m + 1 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی مثبت است؟ تجربی ۹۷ خارج از کشور

$$m > 8 \text{ (۴)} \quad m < 0 \text{ (۳)} \quad 2 < m < 8 \text{ (۲)} \quad -1 < m < 0 \text{ (۱)}$$

حل) گزینه ۱

$$\begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow (m - 2)^2 - 4(m + 1) > 0 \Rightarrow m^2 - 8m > 0 \Rightarrow m < 0 \text{ یا } m > 8 \\ S > 0 \Rightarrow 2 - m > 0 \Rightarrow m < 2 \Rightarrow -1 < m < 0 \\ P > 0 \Rightarrow m + 1 > 0 \Rightarrow m > -1 \end{cases}$$

۳۱- به ازای کدام مقادیر معادله $(m - 6)x^2 - 20x - 3 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی منفی است؟ تجربی ۹۷

$$3 < m < 6 \text{ (۴)} \quad 0 < m < 3 \text{ (۳)} \quad m > 3 \text{ (۲)} \quad m < -6 \text{ (۱)}$$

حل) گزینه ۴-

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \Rightarrow m^2 - 3m + 18 > 0 \Rightarrow m > 3 \text{ یا } m < -6 \\ P > 0 \Rightarrow \frac{-3}{m - 6} > 0 \Rightarrow m - 6 < 0 \Rightarrow m < 6 \Rightarrow 3 < m < 6 \\ S < 0 \Rightarrow \frac{20}{m - 6} < 0 \Rightarrow 0 < m < 6 \end{cases}$$

فصل سوم: هندسه تحلیلی

نکته ۱. از هر دو نقطه‌ی متمایز در صفحه، فقط یک خط راست می‌گذرد، یعنی با داشتن مختصات دو نقطه از یک خط می‌توان معادله‌ی آن خط را نوشت و همچنین نمودار آن را در دستگاه مختصات رسم کرد.

مثال ۱) نمودار خطوط زیر را در دستگاه مختصات رسم کنید؟

الف) $x + 2y = 2$

ب) $y = 2x - 3$

ج) $y - 4 = 0$

د) $x = -5$

نکته ۲. شیب یک خط راست برابر است با نسبت جابجایی عمودی به جابجایی افقی. یعنی شیب خطی که از دو نقطه‌ی

$$A(x_1, y_1) \text{ و } B(x_2, y_2) \text{ بگذرد برابر با } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ است.}$$

نکته ۳. معادله‌ی خطی که دارای شیب m و عرض از مبدا h است به صورت $y = mx + h$ می‌باشد، (عرض از مبدا محل برخورد نمودار خط راست با محور عرض هاست).

نکته ۴. اگر معادله‌ی خط به صورت $ax + by = c$ باشد، شیب m و عرض از مبدا h به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$m = -\frac{a}{b}, \quad h = \frac{c}{b}$$

نکته ۵. معادله‌ی هر خط که موازی با محور x باشد، برابر با $y = k$ که در این حالت شیب برابر صفر و عرض از مبدا خط همان عدد حقیقی k است و معادله‌ی خطی که موازی محور y ها است برابر با $x = k$ است، که در این حالت شیب تعریف نشده و عرض از مبدا برابر با صفر است.

تست) اگر خط $(m - 2)x - (m - 1)y - 1 = 0$ موازی محور عرض ها باشد، مقدار m کدام است؟

- ۲ (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) -۲ (۴)

نکته) معادله خطی که محور طولها را در نقطه ای به طول a و محور عرضها را در نقطه ای به عرض b قطع کند برابر با $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ است.

تست) معادله خطی که محور طولها و عرضها را به ترتیب در نقاط ۲- و ۳ قطع کند، کدام است؟

$$\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1 \quad (۴) \quad \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1 \quad (۳) \quad \frac{y}{3} - \frac{x}{2} = 1 \quad (۲) \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \quad (۱)$$

مثال ۲. شیب و عرض از مبدا خطوط زیر را بیابید؟

الف) $y + 3x = 0 \rightarrow m = -3, h = 0$

ب) $\frac{2x-3}{3} + 5y = 1 \rightarrow m = \frac{-2}{15}, h = \frac{2}{5}$

ج) $y + 4 = 0 \rightarrow m = 0, h = -4$

د) $x = -3 \rightarrow m = \text{تعریف نشده}, h = 0$

نکته ۶. معادله ی خطی که از نقطه ی $A(x, y)$ می گذرد و دارای شیب m است برابر با

$$y - y_1 = m(x - x_1) \text{ است.}$$

مثال ۳. معادله ی خطی را بنویسید که از نقطه ی $A(0, 3)$ بگذرد و دارای شیب ۲- باشد.

حل) $y - 3 = -2(x - 0) \rightarrow y = -2x + 3$

مثال ۴. معادله ی خطی بنویسید که از دو نقطه ی $A(2, 0)$ و $B(3, 2)$ بگذرد.

حل) $m = \frac{0-2}{2-3} = 2 \rightarrow y - 0 = 2(x - 2) \rightarrow y = 2x - 4$

نکته ۷. شرط موازی بودن دو خط با شیبهای m_1 و m_2 آن است که $m_1 = m_2$.

نکته ۸. شرط عمود بودن دو خط غیر موازی با محورهای مختصات که دارای شیب‌های m_1 و m_2 هستند، آن است که $m_1 \times m_2 = -1$ ، یعنی به عبارت دیگر شیب یکی عکس و قرینه‌ی شیب دیگری باشد.

نکته ۹. اگر دو خط موازی یا عمود نباشند، آن دو خط را متقاطع می‌نامیم.

مثال ۵. وضعیت خطوط زیر را نسبت به هم را مشخص کنید؟

$$\begin{cases} l_1: x + 2y + 1 = 0 \\ l_2: y = 2x - 3 \\ l_3: \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\text{حل) } m_{l_1} = \frac{-1}{2}, \quad m_{l_2} = 2, \quad m_{l_3} = 2$$

با توجه به شیب‌های بدست آمده دو خط l_2 و l_3 موازی و خط l_1 بر l_2 و l_3 عمود است.

مثال ۶. معادله‌ی خط گذرا از نقطه‌ی $A(-1, 2)$ را بنویسید که بر خط $2x + 3y = 6$ عمود باشد؟

حل) ابتدا شیب خط داده شده را می‌یابیم، سپس شیب را عکس و قرینه کرده تا شیب خط جدید بدست آید، بعد معادله خط را می‌نویسیم.

$$m = -\frac{2}{3} \rightarrow m' = \frac{3}{2} \Rightarrow y - 2 = \frac{3}{2}(x + 1) \Rightarrow 2y + 3x = 5$$

مثال ۷. معادله‌ی خطی را بیابید که از محل برخورد دو خط $x + y - 3 = 0$ و $2x - y + 5 = 0$ بگذرد و بر خط $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$ عمود باشد؟

حل) ابتدا محل برخورد دو خط را از حل دستگاه زیر یافته و سپس شیب خط سوم را یافته و عکس و قرینه می‌کنیم، سپس معادله خط را می‌یابیم.

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 2x - y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-2}{3}, \quad y = \frac{11}{3} \Rightarrow A\left(\frac{-2}{3}, \frac{11}{3}\right)$$

$$m = \frac{۳}{۲} \Rightarrow m' = \frac{-۲}{۳} \Rightarrow y - \frac{۱۱}{۳} = \frac{-۲}{۳} \left(x + \frac{-۲}{۳} \right) \Rightarrow y = \frac{-۲}{۳} x + \frac{۳۷}{۹}$$

مثال ۸. به ازای چه مقداری از k ، دو خط به معادلات $(k+1)x - y = ۲$ و $۴x + (۲-k)y + ۱ = ۰$ ،

الف. با هم موازی اند؟

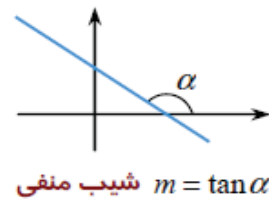
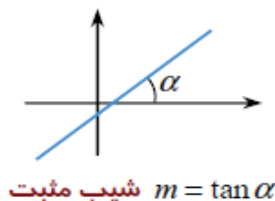
$$m_1 = \frac{k+1}{1}, \quad m_2 = \frac{۴}{k-۲}$$

$$k+1 = \frac{۴}{k-۲} \Rightarrow k^2 - k - ۶ = ۰ \Rightarrow (k-۳)(k+۲) = ۰ \Rightarrow k = ۳, \quad k = -۲$$

ب. برهم عمود باشند؟

$$k+1 = \frac{k-۲}{-۴} \Rightarrow -۴k - ۴ = k - ۲ \Rightarrow -۵k = ۲ \Rightarrow k = \frac{۲}{-۵}$$

نکته ۱۰. اگر خط l با قسمت مثبت محور طولها زاویه‌ی حاده‌ی α بسازد آنگاه شیب با $\tan \alpha$ برابر است.



مثال ۹. خط به معادله‌ی $ax + ۲y + ۲ = ۰$ با جهت مثبت محور طولها زاویه‌ی ۱۳۵° درجه می‌سازد، مقدار a را بیابید؟

$$\text{حل) } m = \tan ۱۳۵^\circ = \tan(۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ) = -\tan ۴۵^\circ = -۱ \Rightarrow \frac{-a}{۲} = -۱ \Rightarrow a = ۲$$

نکته ۱۱. اگر m_1 و m_2 شیب دو خط باشند، زاویه‌ی بین دو خط برابر با $\tan \alpha = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1} \right|$ است.

نکته ۱۲. اگر $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ معادله دو خط باشند، آنگاه این دو خط:

الف) موازیند هرگاه $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ ، در غیر این صورت متقاطع اند.

ب) بر هم منطبق اند هرگاه $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$.

ج) بر هم عمودند هرگاه $a b' + b a' = 0$.

تست. به ازای کدام مقدار m دستگاه معادلات خطی $\begin{cases} mx + y = m - 1 \\ 3x + (m - 2)y = 4 - 2m \end{cases}$ بی شمار جواب دارد؟

(۱) -۲ (۲) ۳ (۳) -۱ (۴) هیچ مقدار (کنکور ۹۳ تجربی)

حل) گزینه ۳- شرط اینکه یک دستگاه بی شمار جواب داشته باشد، آن است که دو خط بر هم منطبق باشند.

$$\frac{m}{3} = \frac{1}{m-2} = \frac{m-1}{4-2m} \Rightarrow m = -1 \text{ ق ق } , \quad m = 3 \text{ غ ق ق}$$

"تمرین های تکمیلی"

۱. نشان دهید دو خط $l_1: y + 2x = 1$ و $l_2: y = x + 3$ با هم متقاطع اند و سپس نقطه برخورد این دو خط را بیابید؟

حل) با توجه به اینکه $m_1 = -2$ ، $m_2 = 1$ نتیجه می گیریم که این دو خط متقاطع هستند. برای یافتن نقطه برخورد این دو خط را در یک دستگاه قرار می دهیم و دستگاه را حل می کنیم.

$$\begin{cases} y + 2x = 1 \\ y = x + 3 \end{cases} \Rightarrow 3x = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{3} \Rightarrow y = \frac{7}{3} \Rightarrow A\left(\frac{-2}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

۲. نشان دهید خطوط $\begin{cases} l_1: 2y - x = 8 \\ l_2: y = 3x - 1 \\ l_3: 2x + y - 9 = 0 \end{cases}$ زیر از یک نقطه می گذرد؟

حل) راهنمایی: ابتدا نشان می دهیم این سه خط متقاطع اند، بعد نقطه تقاطع این سه خط را می یابیم.

۳. نشان دهید سه نقطه‌ی $A(۲,۳)$ و $B(-۲,۰)$ و $C(-۶, -۳)$ روی یک خط راست واقع اند؟

(حل) شرط اینکه سه نقطه A و B و C روی یک خط راست واقع باشند، آنست $m_{AB} = m_{BC}$.

$$m_{AB} = \frac{۳ - ۰}{۲ - (-۲)} = \frac{۰ + ۳}{-۲ + ۶} = m_{BC}$$

۴. اگر سه نقطه‌ی $A(-۲, ۴)$ و $B(a + ۱, -۲)$ و $C(۳, ۲)$ روی یک خط راست واقع باشند، مقدار مجهول a را بیابید؟

$$\begin{cases} m_{AB} = \frac{۴ + ۲}{-۲ - a - ۱} \\ m_{BC} = \frac{-۲ - ۲}{a + ۱ - ۳} \end{cases} \Rightarrow \frac{۶}{-۳ - a} = \frac{-۴}{a - ۲} \Rightarrow a = ۱۲$$

۵. دو نقطه‌ی $A(a - ۱, ۲)$ و $B(۳a + ۵, a - ۱)$ داده شده‌اند، مقدار a را طوری بیابید که خط گذرا از این دو نقطه با جهت مثبت محور طول‌ها زاویه‌ی ۴۵ درجه بسازد؟

$$\text{حل) } m_{AB} = \tan ۴۵^\circ \rightarrow \frac{۲ - a + ۱}{a - ۱ - ۳a - ۵} = ۱ \rightarrow -a + ۳ = -۲a - ۶ \rightarrow a = -۹$$

۶. در هر مورد وضع نسبی دو خط را تعیین کنید؟

الف) $\begin{cases} ۲y - x = ۱ \\ ۴y = ۲x + ۳ \end{cases}$

ب) $\begin{cases} ۲x = ۳y - ۵ \\ ۲x + ۳y + ۱ = ۰ \end{cases}$

۷. مقدار k را طوری بیابید که دو خط $y + ۲x - ۱ = ۰$ و $(۲k - ۱)x + y - ۲ = ۰$ برهم عمود باشد؟

$$\text{حل) } m_1 = \frac{-۱}{۲} \Rightarrow \frac{-۲}{۱} = \frac{۱}{۲k - ۱} \Rightarrow -۴k + ۲ = ۱ \Rightarrow k = \frac{۱}{۴}$$

۸. مقدار m را طوری بیابید که سه خط $x - y = ۳$ و $۲x + y = ۰$ و $(m + ۱)x + y = ۵$ از یک نقطه بگذرد؟

حل) شرط اینکه سه خط از یک نقطه بگذرد آنست که این سه خط دارای یک نقطه مشترک باشند، ابتدا از دستگاه

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

نقطه مشترک $A(1, -2)$ را می یابیم و در خط سوم جایگذاری می کنیم.

$$(m + 1)(1) + (-2) = 5 \Rightarrow m = 6$$

۹. نقطه $A(a, c)$ محل برخورد دو خط $y = 2x - 3$ و $2y - bx = 4$ است. اگر این دو خط متعامد باشند. مقادیر a و b را بیابید؟

حل) چون دو خط متعامد هستند، لذا شیب یکی عکس و قرینه شیب دیگری است.

$$m_1 = \frac{b}{2}, m_2 = 2 \Rightarrow 2 = \frac{-2}{b} \Rightarrow b = -1$$

حال نقطه تقاطع این دو خط را می یابیم، کافی است دستگاه $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 2y + x = 4 \end{cases}$ حل شود که نقطه تقاطع $A(2, 1)$ است.

۱۰. دو خط $2y + x = -3$ و $y + 2x = 3$ متقاطعند، اگر بخواهیم خط $y = 3x - a$ نیز از آن نقطه بگذرد، مقدار a را بیابید؟

حل) ابتدا نقطه تقاطع این دو خط متقاطع را از طریق دستگاه $\begin{cases} 2y + x = -3 \\ y + 2x = 3 \end{cases}$ یافته و در خط سوم قرار می دهیم.

$$A(3, -3) \Rightarrow y = 3x - a \Rightarrow -3 = 3(3) - a \Rightarrow a = 12$$

نکته ۱۲. اگر دو نقطه A و B هم عرض باشند، فاصله این دو نقطه برابر با $AB = |x_A - x_B|$ و اگر این دو نقطه هم طول باشند، فاصله بین این دو نقطه برابر با $AB = |y_A - y_B|$ است.

نکته ۱۳. فاصله بین دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ در دستگاه مختصات برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

در حالت خاص فاصله هر نقطه مانند $A(x, y)$ از مبدا مختصات برابر با $AO = \sqrt{x^2 + y^2}$ است.

مثال ۱۰: فاصله‌ی $A(3\sqrt{2}, -\sqrt{7})$ را از مبدا مختصات بیابید؟

$$AB = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{7})^2} = \sqrt{25} = 5$$

نکته‌ی ۱۴: اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ باشند، نقطه‌ی وسط پاره خط AB برابر با $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ است.

نکته) نکات زیر در قرینه یافتن یک نقطه کمک بسیاری می‌کند.

(۱) قرینه نقطه $A(x, y)$ نسبت به مبدا مختصات برابر با $A'(-x, -y)$ است.

(۲) قرینه نقطه $A(x, y)$ نسبت به محور طولها برابر با $A'(x, -y)$ است.

(۳) قرینه نقطه $A(x, y)$ نسبت به محور عرضها برابر با $A'(-x, y)$ است.

(۴) قرینه نقطه $A(x, y)$ نسبت به نیمساز اول و سوم برابر با $A'(y, x)$ است.

(۵) قرینه نقطه $A(x, y)$ نسبت به نیمساز دوم و چهارم برابر با $A'(-y, -x)$ است.

(۶) قرینه نقطه $A(x, y)$ نسبت به خط $x = k$ برابر با $A'(2k - x, y)$ است.

(۷) قرینه نقطه $A(x, y)$ نسبت به خط $y = k$ برابر با $A'(x, 2k - y)$ است.

(۸) قرینه نقطه $A(x, y)$ نسبت به نقطه $M(a, b)$ برابر با $A'(2a - x, 2b - y)$ است.

مثال ۱۱: نقاط $A(-1, 2)$ و $B(3, -1)$ و $C(2, -2)$ رئوس یک مثلث هستند،

الف. مثلث ABC را رسم کنید؟

ب. طول اضلاع مثلث را بدست آورید و نوع آن را مشخص کنید؟

ج. اندازه میانه AM را بدست آورید.

حل ب) $AB = 5, AC = 5, BC = \sqrt{2}$ ، با توجه به اینکه این مثلث دارای دو ضلع برابر است، لذا این مثلث متساوی الساقین است.

ج) ابتدا وسط ضلع BC را می یابیم، $M = \left(\frac{3+2}{2}, \frac{-1-2}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{-3}{2}\right)$ ، در این صورت:

$$AM = \sqrt{\left(\frac{5}{2} + 1\right)^2 + \left(\frac{-3}{2} - 2\right)^2} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

نکته ۱۵. فاصله نقطه $A(x, y)$ از خط به معادله $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

در حالت خاص، فاصله خط به معادله $ax + by + c = 0$ از مبدا مختصات برابر است با $d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

مثال ۱۲. فاصله نقطه $M(1, -1)$ را از خط به معادله $3x - 4y = -20$ بیابید؟

$$\text{حل) } d = \frac{|3(1) - 4(-1) + 20|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{27}{5}$$

مثال ۱۳. فاصله مبدا مختصات از خط $3x + 4y = -3$ را بیابید؟

$$\text{حل) } d = \frac{|3|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{3}{5}$$

نکته) اگر دو خط $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ موازی باشند، معادله خط ما بین این دو خط که به فاصله یکسان از این دو خط قرار گرفته است، به صورت $ax + by + \frac{c+c'}{2} = 0$ است.

نکته ۱۶. فاصله دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ برابر است با،

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مثال ۱۴. الف. فاصله‌ی بین دو خط موازی زیر را بیابید؟

$$6x - 8y - 7 = 0, \quad 3x - 4y + 1 = 0$$

حل) $3x - 4y + 1 = 0 \Rightarrow 6x - 8y + 2 = 0 \Rightarrow d = \frac{|2 + 7|}{\sqrt{36 + 64}} = \frac{9}{10}$

ب. مقدار k را طوری بیابید که فاصله‌ی بین دو خط موازی $3x + 2y + 4 = 0$ و $3x + 2y + k - 1 = 0$ برابر با $2\sqrt{13}$ باشد؟

حل) $\frac{|k - 1 - 4|}{\sqrt{9 + 4}} = 2\sqrt{13} \Rightarrow |k - 5| = 26 \Rightarrow k - 5 = \pm 26 \Rightarrow k = 31, \quad k = -21$

تمرین های تکمیلی

۱. نقطه‌ی $A(-3, -1)$ یک راس مربعی است، که قطرش خط $3x - 4y + 1 = 0$ است. مساحت مربع را بدست آورید؟

حل) از آنجاییکه $3(-3) - 4(-1) + 1 \neq 0$ پس فاصله نقطه A از این خط همان نصف اندازه قطر است.

$$d = \frac{|3(-3) - 4(-1) + 1|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \text{قطر} = 2 \times \frac{4}{5} = \frac{8}{5} \Rightarrow S = \frac{\frac{8}{5} \times \frac{8}{5}}{2} = 1/6$$

۲. اگر $A(1, 0)$ و $B(-2, 3)$ دو راس مربعی باشند، مساحت و محیط مربع را بدست آورید؟

حل) $AB = \sqrt{(1 + 2)^2 + (0 - 3)^2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow S = \frac{3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}}{2} = 9$

$$S = 9 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow P = 12$$

۳. دو نقطه‌ی $A(5, 7)$ و $B(-m, m - 2)$ داده شده‌اند، m را طوری بیابید که طول پاره خط AB برابر با ۱۰ باشد؟

حل) $AB = \sqrt{(5 + m)^2 + (9 - m)^2} = 10 \Rightarrow 2m^2 - 8m + 6 = 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 3 = 0$

$$\Rightarrow m = 1, m = 3$$

۴. نقاط $A(۳,۲)$ و $B(-۲,۳)$ و $C(۰, -۳)$ رئوس مثلث ABC هستند.

الف. طول ارتفاع AH وارد بر ضلع BC را بیابید؟

ب. مساحت مثلث ABC را بیابید؟

حل) ابتدا معادله خط گذرا از نقاط B و C را می یابیم، سپس فاصله نقطه A از خط بدست آمده را بدست می آوریم.

$$y + 3 = \frac{-3 - 3}{0 + 2} (x - 0) \Rightarrow y = -3x - 3 \Rightarrow y + 3x + 3 = 0$$

$$d = AH = \frac{|2 + 3(3) + 3|}{\sqrt{9 + 1}} = \frac{14}{\sqrt{10}}$$

$$\text{قاعده} = BC = \sqrt{(3 + 3)^2 + (-2 - 0)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$\text{مساحت} = S = \frac{2\sqrt{10} \times \frac{14}{\sqrt{10}}}{2} = 14$$

۵. فاصله‌ی بین دو خط $y = x\sqrt{3} + 2$ و $\sqrt{3}y - 3x + 6 = 0$ را بیابید؟

$$\text{حل) } y = x\sqrt{3} + 2 \Rightarrow y - x\sqrt{3} - 2 = 0 \Rightarrow \sqrt{3}y - 3x - 2\sqrt{3} = 0$$

$$d = \frac{|6 + 2\sqrt{3}|}{\sqrt{3 + 9}} = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} + 1 = \sqrt{3} + 1$$

۶. دو ضلع مربعی روی خطوط $\pi x + \pi y - 1 = 0$ و $\pi x + \pi y - 5 = 0$ قرار دارد، مساحت دایره‌ی محاطی این مربع را

بیابید؟

حل) ابتدا فاصله بین دو خط موازی داده شده، را می یابیم.

$$\text{قطر دایره} = d = \frac{|-5 + 1|}{\sqrt{\pi^2 + \pi^2}} = \frac{4}{\pi\sqrt{2}} \Rightarrow \text{شعاع} = \frac{2}{\pi\sqrt{2}}$$

$$\text{مساحت} = S = \pi \times \left(\frac{2}{\pi\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{2}{\pi}$$

۷. اگر $1 + \frac{-3}{4}x + y = 0$ و $3x - 4y + a = 0$ دو ضلع مربع با محیط ۲۰ باشند، مقدار a را بیابید؟

حل) فاصله بین این دو خط موازی همان طول ضلع مربع است، چون محیط مربع برابر با ۲۰ است، لذا طول ضلع مربع برابر با ۵ است، پس داریم:

$$y = \frac{-3}{4}x + 1 \Rightarrow 3x - 4y - 1 = 0 \Rightarrow d = \frac{|-1 - a|}{\sqrt{9 + 16}} \Rightarrow \frac{1 + a}{5} = 5 \Rightarrow a = 24$$

۸. دو ضلع یک مستطیل منطبق بر خطوط $2y + x = 6$ و $2x - y = 7$ می‌باشند و یک راس مستطیل نقطه‌ی $A(8, 5)$ است، مساحت این مستطیل را بدست آورید؟

حل) ابتدا نشان می‌دهیم این نقطه روی این دو خط قرار ندارد،

$$2(5) + 8 \neq 6, \quad 2(8) - 5 \neq 7$$

حال فاصله بین این نقطه و این دو خط را می‌یابیم که همان اندازه طول و عرض مستطیل هستند.

$$2y + x - 6 = 0 \Rightarrow \text{طول} = d = \frac{|2(5) + 8 - 6|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{12}{\sqrt{5}}$$

$$2x - y - 7 = 0 \Rightarrow \text{عرض} = d = \frac{|2(8) - 5 - 7|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$S = \text{طول} \times \text{عرض} = \frac{12}{\sqrt{5}} \times \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{48}{5}$$

۹. قرینه‌ی نقطه‌ی $A(2, 1)$ را نسبت به نقطه‌ی $M(-1, 4)$ بیابید؟

حل) فرض کنیم $A'(x, y)$ قرینه نقطه $A(2, 1)$ باشد، آنگاه داریم:

$$-1 = \frac{x + 2}{2} \Rightarrow x = -4, \quad 4 = \frac{y + 1}{2} \Rightarrow y = 7 \Rightarrow A'(-4, 7)$$

نکته تستی) قرینه نقطه $A(x, y)$ نسبت به نقطه $M(a, b)$ برابر با $A'(2a - x, 2b - y)$ است.

۱۰. اگر $A(1, 2)$ و $B(3, 4)$ و $C(-2, 2)$ سه راس یک مثلث باشند، آنگاه اندازه ارتفاع AH را بیابید؟

حل) ابتدا معادله خط گذرا از دو نقطه B و C را می‌یابیم، سپس فاصله بین نقطه A از این خط را می‌یابیم.

$$y - 2 = \frac{4 - 2}{3 + 2}(x + 2) \Rightarrow y - 2 = \frac{2}{5}(x + 2) \Rightarrow 2x - 5y + 14 = 0.$$

$$AH = d = \frac{|2(1) - 5(2) + 14|}{\sqrt{4 + 25}} = \frac{6}{\sqrt{29}}$$

۱۱. معادله ی خط نیمساز زاویه ی بین دو خط $3x - 4y = 4$ و $5x - 12y - 6 = 0$ را بیابید؟

حل) می دانیم هر نقطه روی نیمساز هر زاویه از اضلاع آن زاویه به یک فاصله است. فرض کنیم $M(x, y)$ یک نقطه روی نیمساز زاویه باشد، آنگاه داریم:

$$\frac{|3x - 4y - 4|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|5x - 12y - 6|}{\sqrt{25 + 144}} \Rightarrow 3x - 4y - 4 = \pm \frac{5}{13}(5x - 12y - 6)$$

با ساده کردن عبارت فوق به معادله دو نیمساز می رسیم. (چرا دو نیمساز؟)

تست های بخش هندسه تحلیلی

۱- به ازای کدام مقدار m ، خط $y = mx + m - 3$ از ناحیه ی دوم محورهای مختصات نمی گذرد؟

$$(1) 0 \leq m \leq 3 \quad (2) m > 2 \quad (3) m < 0 \quad (4) \emptyset \quad (\text{مشابه انسانی } 94)$$

حل) باید شیب مثبت و عرض از مبدا منفی باشد،

$$\begin{cases} m \geq 0 \\ m - 3 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow m \leq 3 \Rightarrow 0 \leq m \leq 3$$

۲- به ازای کدام مقدار نقاط $A(0, 0)$ و $B(a, 3)$ و $C(6, 4a + 1)$ روی یک خط راست قرار دارند؟

(خارج از کشور تجربی ۸۸)

$$(1) \frac{9}{4}, -2 \quad (2) \frac{3}{4}, -2 \quad (3) \frac{-3}{4}, 2 \quad (4) \frac{-9}{4}, 2$$

(حل گزینه ۴)

$$m_{AB} = \frac{3}{a}, \quad m_{AC} = \frac{4a+1}{6} \Rightarrow m_{AB} = m_{AC} \Rightarrow 4a^2 + a - 18 = 0 \Rightarrow a = \frac{-9}{4}, 2$$

۳. خطی با شیب m از نقطه $A(1, 2)$ گذشته و محورهای مختصات را در دو نقاط A و B قطع کرده است. به ازای کدام مقدار m مساحت مثلث برابر با ۴ واحد مربع است؟ کنکور نظام قدیم

$$(1) \quad 3 \quad (2) \quad -3 \quad (3) \quad 2 \quad (4) \quad -2$$

(حل گزینه ۴) ابتدا معادله خط گذرا از نقطه A و شیب m می نویسیم و سپس محل برخورد این خط با محورهای مختصات را می یابیم.

$$y - 2 = m(x - 1) \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 2 - m, \quad y = 0 \Rightarrow x = \frac{m - 2}{m}$$

$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{m - 2}{m} \right) (2 - m) = 4 \Rightarrow m = -2$$

۴- دو خط $2x - y = 1$ و $(k - 1)x + 2y = x - 2$ موازیند، مقدار k را بیابید؟

$$(1) \quad -1 \quad (2) \quad 1 \quad (3) \quad 2 \quad (4) \quad -2$$

$$(حل) \quad m_1 = \frac{2-k}{2} = \frac{-2}{-1} = m_2 \Rightarrow k = -2$$

۵- دایره ای بر دو خط $2x - 3y - 2 = 0$ و $3y - 2x - 6 = 0$ مماس است، کدام نقطه زیر می تواند مرکز دایره باشد؟

$$(1) \quad (0, -1) \quad (2) \quad (1, 2) \quad (3) \quad (2, 1) \quad (4) \quad (-1, 0)$$

(حل گزینه ۴) با توجه به اینکه این دو خط موازیند لذا مرکز دایره روی خطی مابین این دو خط و به فاصله یکسان از دو خط قرار دارد و معادله آن به صورت $2x - 3y + 2 = 0$ است که تنها گزینه که در خط صدق می کند گزینه ۴ است.

۶- اگر دو خط $y = (m^2 - 4)x + 1$ و $y = (m^2 + m - 6)x + 2$ با هم موازی باشند، آنگاه با خط $y = x + 1$ چه زاویه ای می سازند؟

(۱) ۳۰ درجه

(۲) ۶۰ درجه

(۳) ۹۰ درجه

(۴) ۴۵ درجه

(حل) گزینه ۴) با توجه به اینکه دو خط موازیند پس شیب هر دو با هم برابرند.

$$m^2 - 4 = m^2 + m - 6 \Rightarrow m = 2 \Rightarrow y = 1, \quad y = 2$$

حال زاویه بین دو خط $y = x + 1$ و $y = 1$ را می یابیم.

$$\tan \alpha = \frac{1 - 0}{1 + (0)(1)} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

۷- خطی که با جهت مثبت محور طولها زاویه 150° درجه می سازد و از نقاط $A(a, 2)$ و $B(-1, 3)$ می گذرد مقدار a

کدام است؟ سنجش ۹۴

$$(1) 1 - \sqrt{3} \quad (2) \sqrt{3} - 1 \quad (3) 2 - \sqrt{3} \quad (4) \sqrt{3} - 2$$

(حل) گزینه ۲

$$m = \tan 150^\circ = \tan(180^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$m = \frac{2 - 3}{a + 1} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a = \sqrt{3} - 1$$

۸- نقاط $A(5, 3)$ و $B(1, 5)$ مفروضند، معادله ی عمود منصف پاره خط AB کدام است؟

$$(1) y = 2x - 1 \quad (2) y = 2x - 2 \quad (3) y = x + 1 \quad (4) y = x - 2$$

(حل) گزینه ۲) ابتدا نقطه وسط پاره خط AB را یافته و سپس شیب خط گذرا از دو نقطه A و B را یافته و عکس و قرینه می کنیم.

$$M = \left(\frac{5+1}{2}, \frac{3+5}{2} \right) = (3, 4), \quad m_{AB} = \frac{3-5}{5-1} = \frac{-1}{2} \Rightarrow m' = 2$$

$$y - 4 = 2(x - 3) \Rightarrow y = 2x - 2$$

۹- نقطه $A(7, 6)$ راس یک متوازی الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر خطوط $3y + 4x = 8$ و $2y - 3x = 11$

می باشد، مختصات وسط قطر آن کدام است؟ (کنکور تجربی ۹۰)

$$(1, 5) \quad (2, 4) \quad (3, 5) \quad (4, 3)$$

حل) گزینه ۳- ابتدا نشان می دهیم این خط روی هیچ کدام از خطوط مفروض وجود ندارد، سپس محل برخورد این دو خط را یافته و در نتیجه مختصات وسط قطر متوازی الاضلاع را می یابیم.

$$2(6) - 3(7) \neq 11, \quad 3(6) + 4(7) \neq 8$$

$$M = \left(\frac{-1+7}{2}, \frac{6+4}{2} \right) = (3, 5) \begin{cases} 2y - 3x = 11 \\ 3y + 4x = 8 \end{cases} \Rightarrow x = -1, y = 4 \Rightarrow A(-1, 4)$$

۱۰- فاصله ی محل تلاقی دو خط $2x + 3y = 4$ و $x - 2y = -5$ از خط $x = 4$ کدام است؟

$$(1) 2 \quad (2) 3 \quad (3) 4 \quad (4) 5$$

حل) گزینه ۴- با کمک حل دستگاه $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$ محل تلاقی این دو خط نقطه $A(-1, 2)$ است. و سپس فاصله بین نقطه $A(-1, 2)$ و خط $x - 4 = 0$ را می یابیم.

$$d = \frac{|-1 - 4|}{\sqrt{1}} = 5$$

۱۱- فاصله ی نقطه $A(2, -1)$ از خط به معادله ی $5x - 12y - m = 0$ برابر با ۵ است. مقدار مثبت m کدام است؟

$$(1) 100 \quad (2) 87 \quad (3) 63 \quad (4) 107$$

حل) گزینه ۲

$$d = \frac{|5(2) - 12(-1) - m|}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{|22 - m|}{13} = 5 \Rightarrow |22 - m| = 65 \Rightarrow m = 87$$

۱۲- اگر فاصله بین دو خط موازی $2x - 4y + 3 = 0$ و $8y + ax + b = 0$ برابر با $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

$$(1) -14 \quad (2) 18 \quad (3) 6 \quad (4) 14$$

حل گزینه ۳

$$2x - 4y + 3 = 0 \Rightarrow -4x + 8y - 6 = 0 \Rightarrow a = -4$$

$$d = \frac{|b + 6|}{\sqrt{16 + 64}} = \frac{|b + 6|}{4\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{4\sqrt{5}}{5} = \frac{|b + 6|}{4\sqrt{5}} \Rightarrow |b + 6| = 16 \Rightarrow b = 10, b = -22$$

$$a + b = 6$$

۱۳- مساحت مثلثی با سه راس $A(2,5)$ و $B(3,0)$ و $C(0,2)$ کدام گزینه است؟

۷/۵ (۴)

۷ (۳)

۶/۵ (۲)

۶ (۱)

حل گزینه ۲- روش بند کفشی

$$S = \frac{1}{2} |(x_A y_B + x_B y_C + x_C y_A) - (x_B y_A + x_C y_B + x_A y_C)| = \frac{1}{2} |6 - 19| = 6/5$$

۱۴- سه نقطه $A(0, -1)$ و $B(3, 1)$ و $C(2, -4)$ سه راس یک مثلث هستند، این مثلث همواره چگونه است؟

(۱) مختلف الاضلاع است.

(۲) قائم الزاویه متساوی الساقینی است.

(۳) متساوی الساقین است ولی قائم الزاویه نیست.

(۴) قائم الزاویه است ولی متساوی الساقین نیست.

حل گزینه ۲

$$AB = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

$$AC = \sqrt{(-1 + 4)^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

$$BC = \sqrt{(1 + 4)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}$$

چون اندازه دو ضلع با هم برابر است لذا این مثلث متساوی الساقین است و چون رابطه فیثاغورس برقرار است این مثلث قائم الزاویه نیز است.

۱۵- سه ضلع مثلثی به معادلات $AB: 2y - x = 3$ و $AC: y - 2x = 5$ و $BC: 2y + 3x = 6$ هستند. معادله‌ی ارتفاع AH از مثلث مفروض کدام است؟

$$6y - 4x = 15 \quad (1) \qquad 9y - 6x = 17 \quad (2)$$

$$3x - 2y = 7 \quad (3) \qquad 3y + 2x = 9 \quad (4)$$

حل) گزینه ۲ - چون $m_{BC} = \frac{-3}{2}$ در نتیجه شیب ارتفاع برابر با $m_{AH} = \frac{2}{3}$ است، در نتیجه گزینه های ۳ و ۴ رد می شوند. حال کافی ببینیم محل برخورد دو خط AB و AC در کدام گزینه صدق می کند. محل برخورد دو خط از طریق حل دستگاه بدست می آید که برابر با $A(\frac{-7}{3}, \frac{1}{3})$ است و در گزینه ۲ صدق می کند.

۱۶- اگر $A(1,2)$ و $B(3,4)$ و $C(-2,2)$ سه راس یک مثلث باشند، آنگاه اندازه ارتفاع AH کدام گزینه است؟

$$\frac{2}{\sqrt{29}} \quad (1) \qquad \frac{4}{\sqrt{29}} \quad (2) \qquad \frac{6}{\sqrt{29}} \quad (3) \qquad \frac{8}{\sqrt{29}} \quad (4)$$

حل) گزینه ۳- ابتدا معادله خط BC می نویسیم و سپس فاصله ی نقطه A از خط BC را می یابیم.

$$y - 4 = \frac{4 - 2}{3 + 2}(x - 3) \Rightarrow y - 4 = \frac{2}{5}(x - 3) \Rightarrow 5y - 20 = 2x - 6 \Rightarrow 5y - 2x - 14 = 0$$

$$d = AH = \frac{|5(2) - 2(1) - 14|}{\sqrt{25 + 4}} = \frac{6}{\sqrt{29}}$$

۱۷- قرینه خط $5 = 3x + 4y$ نسبت به خط $y = \frac{20 - 6x}{8}$ از کدام نقطه زیر می گذرد؟

$$(3, 2) \quad (1) \qquad (-3, 1) \quad (2) \qquad (1, 3) \quad (3) \qquad (-1, -3) \quad (4)$$

حل) گزینه ۳- ابتدا دقت کنید این دو خط موازیند چون:

$$y = \frac{20 - 6x}{8} \Rightarrow 8y = 20 - 6x \Rightarrow 4y + 3x - 10 = 0$$

در نتیجه خط قرینه به صورت $3x + 4y + c = 0$ است پس داریم:

$$\frac{c - 5}{2} = -10 \Rightarrow c = -15 \Rightarrow 3x + 4y - 15 = 0$$

که تنها گزینه که در این خط صدق می کند به صورت $A(1, 3)$ است.

۱۸- نقاط $A(2, 3), B(-1, 0), C(1, -2)$ رئوس یک مستطیل هستند، مختصات راس چهارم کدام است؟

(۱) $(4, -1)$ (۲) $(-1, 4)$ (۳) $(1, 4)$ (۴) $(4, 1)$

حل) گزینه ۴- در هر مستطیل، $\frac{A+C}{2} = \frac{B+D}{2}$ پس داریم:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow 2 + 1 = -1 + x_D \Rightarrow x_D = 4 \\ y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow 3 - 2 = 0 + y_D \Rightarrow y_D = 1 \end{cases}$$

۱۹- خطی که از دو نقطه $A(-1, 1)$ و $B(2, 2)$ می گذرد، با محورهای مختصات چه مساحتی را می سازد؟

$\frac{2}{3}(1)$ $\frac{16}{3}(2)$ $\frac{4}{3}(3)$ $\frac{8}{3}(4)$

حل) گزینه ۴- ابتدا معادله خط گذرا از دو نقطه را می یابیم و سپس عرض از مبدا و طول از مبدا این خط را یافته و مساحت را می یابیم.

$$y - 1 = \frac{1 - 2}{-1 - 2}(x + 1) \Rightarrow 3y - x = 4 \Rightarrow C\left(0, \frac{4}{3}\right), D(-4, 0)$$

$$S = \frac{OC \times OD}{2} = \frac{8}{3}$$

۲۰- اگر $y = (k + 2)x + 3$ و $ky - x - 5 = 0$ معادلات قطرهای یک مربع باشند، فاصله ی محل تلاقی دو قطر با مبدا مختصات کدام است؟

$\sqrt{15}(1)$ $\sqrt{17}(2)$ $\sqrt{18}(3)$ $\sqrt{19}(4)$

حل) گزینه ۲- چون قطرهای مربع بر هم عمودند، در نتیجه شیب یکی عکس و قرینه دیگری است.

$$m_1 = k + 2, \quad m_2 = \frac{1}{k} \Rightarrow k + 2 = -k \Rightarrow k = -1$$

حال محل برخورد این دو خط را از طریق دستگاه می یابیم.

$$k = -1 \Rightarrow \begin{cases} y = x + 3 \\ -y - x - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -4, y = -1 \Rightarrow A(-4, -1)$$

$$AO = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$$

۲۱- دو ضلع مربع بر دو خط $2x + \sqrt{5}y = 3$ و $5y + 2\sqrt{5}x = 0$ واقع هستند، محیط این مربع کدام است؟

۱ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

حل) گزینه ۳- این دو خط با هم موازیند، چون دارای شیب برابر هستند.

$$m_1 = \frac{-2}{\sqrt{5}} = \frac{-2\sqrt{5}}{5}, \quad m_2 = \frac{-2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow m_1 = m_2$$

حال فاصله بین این دو خط موازی را می یابیم.

$$2x + \sqrt{5}y - 3 = 0 \Rightarrow 2\sqrt{5}x + 5y - 3\sqrt{5} = 0$$

$$\text{طول ضلع مربع} = d = \frac{|3\sqrt{5} - 0|}{\sqrt{20 + 25}} = \frac{3\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = 1 \Rightarrow \text{محیط} = 4(1) = 4$$

۲۲- معادلات دو ضلع یک مستطیل به صورت $3x - y = 0$ و $4y - 12x = 6$ می باشد، اگر عرض این مستطیل نصف

طول مستطیل باشد، مساحت مستطیل کدام می تواند باشد؟

$\frac{9}{8}$ (۱) $\frac{2}{20}$ (۲) $\frac{3}{40}$ (۳) $\frac{7}{20}$ (۴)

حل) گزینه ۱- ابتدا دقت می کنیم این دو خط موازی هستند. حال فاصله بین این دو خط موازی را یافته که طول یا عرض

مستطیل می توانند باشند که باید هر دو حالت را بررسی کرد.

$$4y - 12x - 6 = 0 \xrightarrow{\div(-4)} 3x - y + \frac{3}{2} = 0$$

$$d = \frac{|\frac{3}{2} - 0|}{\sqrt{9 + 1}} = \frac{3}{2\sqrt{10}}$$

$$\text{عرض} = \frac{۳}{۲\sqrt{۱۰}} \Rightarrow \text{طول} = ۲ \times \frac{۳}{۲\sqrt{۱۰}} = \frac{۳}{\sqrt{۱۰}} \Rightarrow S = \left(\frac{۳}{۲\sqrt{۱۰}}\right) \left(\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}\right) = \frac{۹}{۲۰}$$

$$\text{طول} = \frac{۳}{۲\sqrt{۱۰}} \Rightarrow \text{عرض} = \frac{۳}{۴\sqrt{۱۰}} \Rightarrow S = \left(\frac{۳}{۲\sqrt{۱۰}}\right) \left(\frac{۳}{۴\sqrt{۱۰}}\right) = \frac{۹}{۸۰}$$

۲۳- دو نقطه روی نیمساز ربع اول و سوم داریم که از نقطه $A(1, 2)$ به فاصله ۲ هستند. مجموع طولهای این نقاط کدام است؟

- ۱(۱) ۲(۲) ۳(۳) ۴(۴) ۶(۴)

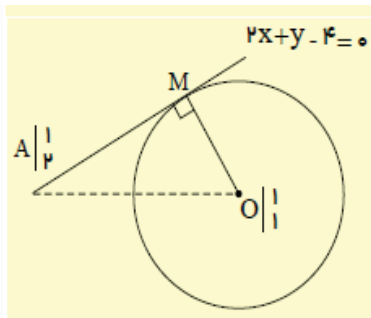
(حل گزینه ۳) ابتدا دقت می کنیم که هر نقطه روی نیمساز ربع اول و سوم به صورت (x, x) است. پس داریم:

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + (x-2)^2} = ۲ \Rightarrow (x-1)^2 + (x-2)^2 = ۴ \Rightarrow ۲x^2 - 6x + 1 = 0$$

چون مجموع طولها را خواسته داریم:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{6}{2} = 3$$

۲۴- خط $2x + y = 4$ بر دایره $O(1, 1)$ مماس است، اگر $A(1, 2)$ نقطه ای بر روی خط مماس باشد، طول مماس AM کدام است. (نقطه تماس خط و دایره است).



$$2\sqrt{5}(1) \quad \sqrt{5}(2) \quad \frac{2\sqrt{5}}{5}(3) \quad \frac{\sqrt{5}}{5}(4)$$

(حل گزینه ۳- ابتدا شکل زیر را رسم می کنیم.)

$$d = OM = \frac{|2(1) + (1) - 4|}{\sqrt{4+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$OA = \sqrt{(1-1)^2 + (1-2)^2} = 1$$

$$AM^2 = OA^2 - OM^2 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow AM = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

۲۵- اگر فاصله دو خط موازی $y = ax + b$ و $y = 3x + 1$ برابر با $\frac{\sqrt{10}}{۲}$ باشد، کمترین مقدار $a + b$ کدام است؟

- ۱(صفر) ۲(-۱) ۳(۹) ۴(-۹)

۲۸- نقطه $A(1, 5)$ راس یک متوازی الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر خطوط $2y - 3x = 11$ و $3y + 4x = 8$ است. مختصات وسط قطر آن کدام است؟

- (۱) $(1, 5)$ (۲) $(3, 4)$ (۳) $(0, 4/5)$ (۴) $(4, 3)$

حل) گزینه ۳- ابتدا نشان می دهیم این نقطه روی این دو خط قرار ندارد،

$$2(5) - 3(1) \neq 11, \quad 3(5) + 4(1) \neq 8$$

محل برخورد این دو خط را س مقابل A است.

$$\begin{cases} 2y - 3x = 11 \\ 3y + 4x = 8 \end{cases} \Rightarrow x = -1, y = 4 \Rightarrow B(-1, 4) \Rightarrow M\left(\frac{-1+1}{2}, \frac{5+4}{2}\right) = (0, 4/5)$$

فصل چهارم: تابع

زوج مرتب: دوتایی مانند (x, y) که ترتیب در آن حائز اهمیت باشد را زوج مرتب می گویند، که به x مولفه اول یا مختص اول و به y مولفه دوم یا مختص دوم می گویند.

نکته: دو زوج مرتب زمانی با هم مساویند که مولفه های اولشان با هم و مولفه ی دومشان نیز با هم برابر باشد.

$$(x, y) = (z, t) \Leftrightarrow x = z, y = t$$

تعریف رابطه: مجموعه ای از زوج های مرتب را رابطه می گویند.

تعریف تابع: یک تابع از مجموعه A به مجموعه B ، رابطه ای بین این دو مجموعه است که در آن، به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نظیر شود.

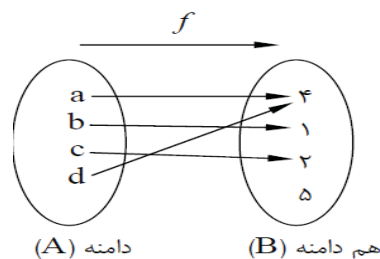
در این صورت مجموعه A را دامنه و مجموعه B را هم دامنه یا مقصد تابع می نامند.

نکته: به هر زیر مجموعه از هم دامنه تابع، برد تابع می گویند.

نمایش های مختلف تابع:

الف. نمایش پیکانی - نمودار ون: یک رابطه که با نمودار پیکانی نمایش داده شده است زمانی تابع است که از هر عضو مجموعه A فقط یک پیکان خارج شود.

نکته: ممکن است به برخی از عضوهای مجموعه دوم پیکانی وارد نشود یا چندین پیکان وارد شود.



ب. نمایش زوج مرتب تابع: مجموعه ای از زوج های مرتب زمانی تابع است که هیچ دو زوج مرتبی مولفه اول یکسان نداشته باشند.

نکته: اگر مولفه های اول یکسان باشند باید مولفه های دومشان نیز برابر باشند، در غیر این صورت مجموعه ی داده شده تابع نیست.

مثال ۱: آیا مجموعه ی $f = \{(3, 2)(5, 8)(-3, 2)(2, 4)\}$ تابع است؟ چرا؟

بله- چون مولفه های اول یکسان نیستند و متمایزند.

مثال ۲: مقادیر a و b را طوری بیابید که مجموعه ی زوج مرتب های زیر تابع باشد.

$$f = \left\{ (a^2 + a, 1)(0, b + 4)(1, a^2 + 2b)(0, a^2 + b) \left(\frac{2-a}{4}, a-b \right) \right\}$$

$$\text{حل) } b + 4 = a^2 + b \Rightarrow a = \pm 2$$

$$a = 2 \Rightarrow f = \{(6, 1)(0, b + 4)(1, 4 + 2b)(0, 4 + b)(0, 2 - b)\}$$

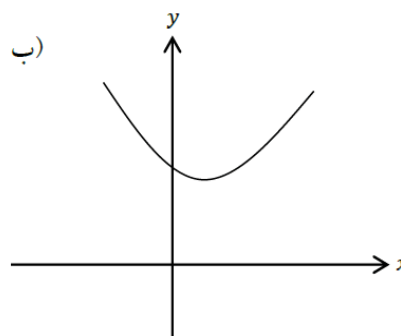
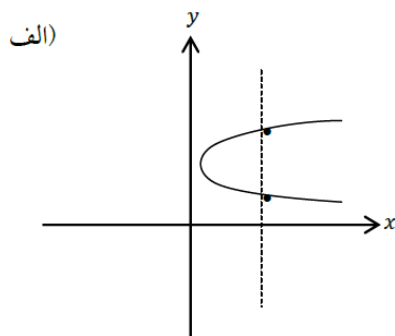
$$2 - b = 4 + b \Rightarrow 2\Box = -2 \Rightarrow b = -1$$

$$a = -2 \Rightarrow f = \{(2, 1)(0, b + 4)(1, 4 + 2b)(0, 4 + b)(1, -2 - b)\}$$

$$4 + 2\Box = -2 - b \Rightarrow 3\Box = -6 \Rightarrow b = -2$$

ج) نمایش مختصاتی تابع: از لحاظ نموداری رابطه ای تابع است که هر خط موازی محور عرض ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

مثال: کدام نمودار زیر نمایش دهنده ی یک تابع است؟ چرا؟



نمایش جبری تابع: رابطه ای بین x و y است که به ازای هر x دقیقا یک y نظیر شود، به این رابطه، ضابطه یا قانون تابع می گوئیم و به صورت زیر نمایش می دهیم.

$$f: A \rightarrow B$$

$$y = f(x)$$

مثال: کدام یک از روابط زیر نمایش دهنده یک تابع است؟

الف. $y = |x| + 3$ ب. $x^2 + y^2 = 1$ ج. $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$

حل) الف. چون به ازای هر x فقط یک y وجود دارد پس نمایش دهنده ی یک تابع است.

ب. تابع نیست. چون اگر $x = 0$ دو مقدار برای y بدست می آید.

ج. تابع تک عضوی $\{(1, 0)\}$ است چون فقط عدد $x = 1$ در این تابع صدق می کند.

$$\begin{cases} 1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \\ x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x = 1 \Rightarrow y = 0$$

تست. کدام رابطه ی زیر نمایشگر یک تابع نیست؟

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 0 \\ 2x-1, & x \leq 0 \end{cases} \quad (1) \quad x^3 + y^3 = 1$$

$$y^2 - 2x + 1 = 0 \quad (2) \quad |x-1| + |y-2| = 0 \quad (3)$$

حل) گزینه ۲- در گزینه ۲ به ازای $x = 0$ دو مقدار برای y بدست می آید.

دلیل تابع بودن گزینه های دیگر را نیز بررسی می کنیم.

$$1) \quad x^3 + y^3 = 1 \Rightarrow y = \sqrt[3]{1-x^3} \quad 3) \quad |x-1| + |y-2| = 0 \Rightarrow x = 1, y = 2$$

$$4) \quad y^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (y-1)^2 = 0 \Rightarrow y = 1$$

دامنه تابع: بزرگترین مجموعه مقادیری است که x می تواند اختیار کند. در واقع دامنه همان مجموعه ورودی های تابع است و

با D_f نمایش داده می شود.

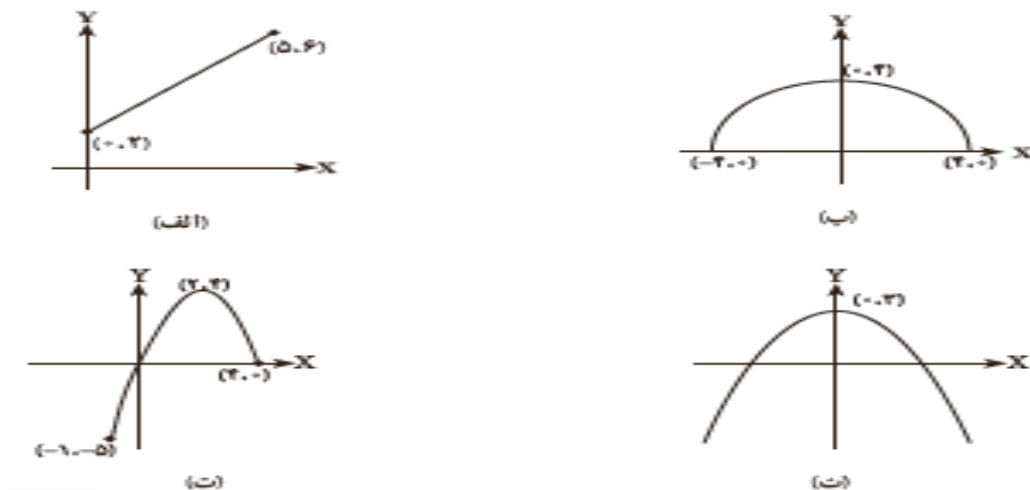
برد تابع: مجموعه مقادیری است که y می تواند اختیار کند. در واقع دامنه همان مجموعه ورودی های تابع است و با R_f

نمایش داده می شود.

مثال) دامنه تابع $f(x) = |x|$ مجموعه اعداد حقیقی و برد آن اعداد حقیقی مثبت است.

نکته) برای بدست آوردن دامنه و برد به کمک نمودار کافی است تصویر نقاط نمودار را روی محور x و y بیابیم.

مثال: به کمک نمودارهای داده شده دامنه و برد توابع زیر را بدست آورید؟



بخش دوم: آشنایی با برخی توابع خاص

الف) تابع چند جمله‌ای: هر تابع به صورت کلی $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + cx + d$ را که در آن $a \neq 0$ ، $b, \dots, c \in \mathbb{R}$ یک چند جمله‌ای از درجه n می‌گوییم، دامنه این تابع مجموعه اعداد حقیقی است.

مثال) توابع $y = x^5 - 3x + 1$ ، $y = x^2 - 2x + 3$ زیر چند جمله‌ای هستند.

ب) تابع همانی: اگر دامنه و برد یک تابع یکسان باشد و هر عضو از دامنه تابع دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود، تابع همانی می‌نامند. اگر دامنه تابع همانی را اعداد حقیقی در نظر بگیریم، نمودار آن همان خط $y = x$ است که با ضابطه $f(x) = x$ نمایش داده می‌شود.

تمرین ۱) به ازای چه مقادیری از a و b تابع $f(x) = \frac{x^3 + ax + b}{x^2 + 2}$ یک تابع همانی است؟

$$f(x) = \frac{x^3 + ax + b}{x^2 + 2} = x \Rightarrow x^3 + ax + b = x^3 + 2x \Rightarrow a = 2, b = 0$$

پ) تابع ثابت: تابعی مانند f را که برد آن شامل یک عضو است، تابع ثابت می نامند. اگر این عضو k را بنامیم، تابع ثابت را معمولاً با معادله $f(x) = k$ نمایش می دهیم.

نکته) نمودار تابع ثابت موازی محور طولها است.

ت) تابع چند ضابطه ای (تابع قطعه ای): گاهی اوقات تابع با چند ضابطه تعریف می شود که به آن تابع قطعه ای یا چند ضابطه ای می گویند.

مثال ۱): تابع $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x > 2 \\ 4 - x, & x \leq 2 \end{cases}$ یک تابع دو ضابطه ای است.

مثال ۲) تابع قدر مطلق $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$ یک تابع دو ضابطه ای یا قطعه ای است. دامنه این تابع \mathbb{R} و برد این تابع بازه $[0, +\infty)$ است.

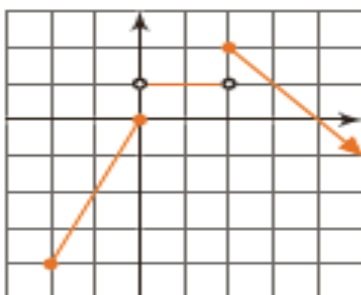
مثال ۳) تابع علامت $sgn(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ یک تابع چند ضابطه ای است. دامنه این تابع \mathbb{R} است و برد این تابع $\{-1, 0, 1\}$ است.

تمرین ۱) نمودار تابع چند ضابطه ای $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ -2x - 3, & x < 0 \end{cases}$ را رسم کنید و دامنه و برد این تابع را به کمک نمودار مشخص کنید.

تمرین ۲) نمودار تابع چند ضابطه ای داده شده است، ضابطه آن را بیابید؟

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & -2 \leq x \leq 0 \\ 1, & 0 < x < 2 \\ 4 - x, & x \geq 2 \end{cases}$$

دامنه: $[-2, +\infty)$ برد: $[-4, 2]$



ث) تابع گویا: هر تابع به فرم $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چند جمله ای هستند و $Q(x)$ مخرج مخالف صفر است را یک تابع گویا می گویند.

مثال: هریک از توابع زیر گویا هستند.

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x + 5} \text{ و } f(x) = \frac{\sqrt{2}x}{5 - x^2} \text{ و } f(r) = \frac{1 - r}{3r - 7} \text{ و } f(k) = 5k - 1$$

اما توابع زیر گویا نیستند (چرا؟)

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{x}}{2x - 9} \quad \text{و} \quad f(u) = \sqrt{5u^2 + 3}$$

نکته (دامنه توابع گویا به صورت زیر بدست می آید:

$$D_f = \mathbb{R} - \{\text{ریشه های مخرج}\}$$

تمرین (دامنه ی توابع گویای زیر را بیابید؟

$$y = \frac{2 - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x-3} - 5} \quad \text{ج} \quad g(x) = \frac{1-x}{x^3 - 9x^2} \quad \text{ب} \quad f(x) = \frac{x-1}{3x - 2x^2} \quad \text{الف}$$

$$\text{حل الف-} \quad 3x - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, x = \frac{3}{2} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0, \frac{3}{2}\}$$

$$\text{ب} \quad x^3 - 9x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, x = 9 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0, 9\}$$

$$\text{ج} \quad x = 0, x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3, y = \frac{2 - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x-3} - 5} = \frac{\frac{2x-1}{x}}{\frac{1-5x+15}{x-3}} = \frac{(2x-1)(x-3)}{x(-5x+16)} \Rightarrow$$

$$x = 0, -5x + 16 = 0 \Rightarrow x = \frac{16}{5} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0, 3, \frac{16}{5}\}$$

تمرین ۲) معادله تابعی را بنویسید که دامنه ی آن به صورت $\mathbb{R} - \{-4\}$ باشد؟

$$f(x) = \frac{1}{x+4}$$

تمرین ۳) اگر بیشترین مقادیر قابل تعریف برای تابع $f(x) = \frac{x+1}{x^2+ax+b}$ اعضای مجموعه $\{1, 2\} - \mathbb{R}$ باشد، مقادیر $3a+2b$ را بیابید؟

$$\text{حل) } x^2 + ax + b = (x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2 \Rightarrow a = -3, b = 2 \Rightarrow$$

$$3a + 2b = -9 + 4 = -5$$

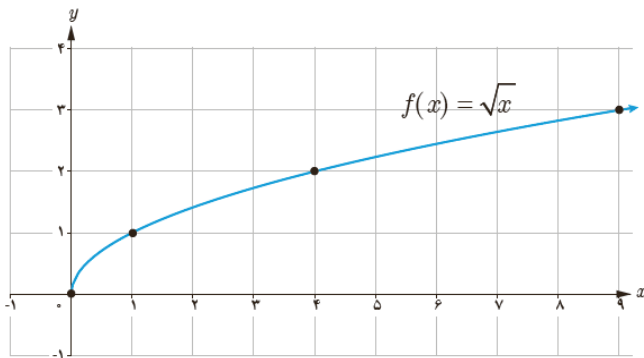
تمرین ۴) به ازای کدام مقدار m دامنه تابع $y = \frac{x^2+1}{x^2-4x+m}$ برابر با مجموعه اعداد حقیقی است؟

حل) مخرج نباید ریشه داشته باشد، $\Delta' < 0 \Rightarrow \Delta < 0$

$$\Delta' < 0 \Rightarrow 4 - m < 0 \Rightarrow m > 4$$

ش) تابع رادیکالی یا گنگ: هر تابع به شکل $f(x) = \sqrt{P(x)}$ که در آن عبارت $P(x) \geq 0$ باشد را یک تابع رادیکالی (گنگ) می نامند.

مثال ۱) ساده ترین تابع رادیکالی تابع $f(x) = \sqrt{x}$ است که دارای نمودار زیر است.



مثال ۲) توابع زیر همگی گنگ هستند:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 1} \quad \text{و} \quad f(u) = \sqrt{3 - u}$$

روش بدست آوردن دامنه توابع رادیکالی:

الف) برای بدست آوردن دامنه توابع رادیکالی با فرجه زوج کافی است زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار می دهیم و نامساوی ایجاد شده را حل کرده و مجموعه جواب را می یابیم.

$$D_f = \{x | P(x) \geq 0\}$$

تمرین (دامنه ی توابع زیر را بیابید؟

ب) $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$

الف) $f(x) = 1 + \sqrt{6 - 3x}$

د) $y = \sqrt{\frac{x-1}{2x-1}}$

ج) $f(x) = \frac{\sqrt{2x-6}}{x-5}$

ث) $g(x) = \sqrt{2 - \sqrt{x-1}}$

ت) $y = \sqrt{2-x} + \sqrt{x-2}$

الف) $6 - 3x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow D_f = (-\infty, 2]$

ب) $9 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 9 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3 \Rightarrow D_f = [-3, 3]$

ج) $2x - 6 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$, $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow D_f = [3, +\infty) - \{5\}$

د) $\frac{x-1}{2x-1} \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x \leq \frac{1}{2}, x \geq 1 \Rightarrow D_f = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty)$

ت) $\begin{cases} 2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \\ x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow D_f = \{2\}$

ث) $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$, $2 - \sqrt{x-1} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} \leq 2 \Rightarrow x-1 \leq 4 \Rightarrow x \leq 5 \xrightarrow{\text{اشتراک}} \Rightarrow$

$$D_f = [1, 5]$$

نکته (اگر رادیکال با فرجه زوج در مخرج کسر باشد کافی است فقط زیر رادیکال را بیشتر از صفر قرار دهیم.

مثال دامنه ی تابع $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{6-x}}$ را بیابید؟

$$\text{حل) } 6-x > 0 \Rightarrow x < 6 \Rightarrow D_f = (-\infty, 6)$$

تمرین) تابعی را مثال بیاورید که دامنه آن به صورت بازه ی $(-\infty, 6]$ باشد.

$$f(x) = \sqrt{6-x}$$

تمرین) دامنه توابع زیر را بدست آورید؟

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{2-x}} \quad \text{(الف)} \quad g(x) = \sqrt{1-x^2} - \sqrt{x^2-1} \quad \text{(ب)}$$

$$\text{(الف)} \quad 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1, x^2-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1 \Rightarrow D_f = \{1, -1\}$$

تمرین) اگر دامنه تابع $y = \sqrt{x^2 + 2x + a}$ برابر با اعداد حقیقی باشد، مقدار a بیابید؟

$$\Delta < 0 \Rightarrow 1-a < 0 \Rightarrow a > 1$$

(ب) اگر فرجه رادیکال فرد باشد، دامنه تابع برابر با دامنه تابع زیر رادیکال است.

مثال) دامنه توابع زیر را بیابید؟

$$f(x) = \sqrt[3]{2x+6} \quad \text{(الف)} \quad g(x) = \sqrt[5]{\frac{2x-1}{x^2-25}} \quad \text{(ب)}$$

$$\text{(ب)} \quad \mathbb{R} - \{\pm 5\}$$

$$\text{(الف)} \quad D_f = \mathbb{R}$$

نکته) اگر دامنه تابع $y = f(x)$ برابر با $[a, b]$ باشد برای بدست آوردن دامنه تابع $y = f(u)$ ، که u تابعی از است، کافی است قرار دهیم: $a \leq u \leq b$.

تمرین) اگر دامنه ی تابع f برابر با بازه $[0, 1]$ باشد، دامنه تابع $y = f(2x+3)$ را بیابید؟

$$0 \leq 2x+3 \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 2x \leq -2 \Rightarrow \frac{-3}{2} \leq x \leq -1 \Rightarrow D_{f(2x+3)} = \left[\frac{-3}{2}, -1 \right]$$

تمرین) اگر $D_f = [2, 4]$ و $D_g = [1, 2]$ باشند، دامنه تابع $g\left(\frac{x}{2}\right) + 2f(2x)$ را بیابید؟

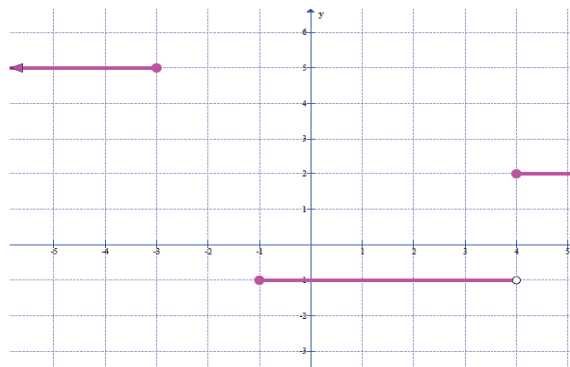
$$\begin{cases} 1 \leq \frac{x}{2} \leq 2 \Rightarrow 2 \leq x \leq 4 \Rightarrow \{2\} \\ 2 \leq 2x \leq 4 \Rightarrow 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

ح) توابع پله ای و تابع جز صحیح:

$$f(x) = \begin{cases} 5 & x \leq -3 \\ -1 & -1 \leq x < 4 \\ 2 & x \geq 4 \end{cases}$$

هر تابع که بتوان دامنه ی آن را به صورت تعدادی بازه تقسیم کرد به طوریکه تابع روی هر کدام از این بازه ها تابع ثابت باشد، این تابع را پله ای می نامند. تابع رو به رو مثالی از یک تابع پله ای است.

نمودار این تابع به شکل زیر است:



تمرین) تابع پله ای زیر را رسم کنید؟

$$f(x) = \begin{cases} 3 & x \in [0, 1) \\ 0 & x \in [1, 5] \\ 2 & x \in (6, 7] \end{cases}$$

مشهورترین تابع پله ای تابع جز صحیح نام دارد.

جزء صحیح یک عدد حقیقی: اگر x یک عدد حقیقی باشد، آنگاه بزرگترین عدد صحیح کمتر یا مساوی را جزء صحیح x می نامند، و آن را با نماد $[x]$ نمایش می دهند.

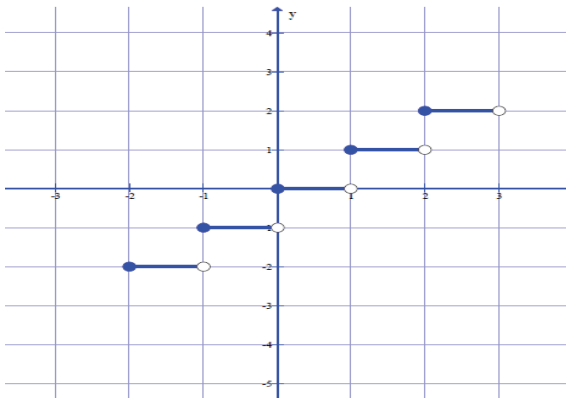
$$n \leq x < n+1 \rightarrow [x] = n$$

تمرین: تساوی های زیر را کامل کنید.

$$۱. [2/3] = \quad ۲. [-5] = \quad ۳. [-5/7] = \quad ۴. [5/7] = \quad ۵. [-\sqrt{2}] =$$

نکته) به تابع $f(x) = [x]$ تابع جزء صحیح می گویند که دامنه تابع جز صحیح اعداد حقیقی و برد آن برابر با اعداد صحیح است.

رسم نمودار تابع جزء صحیح در بازه $[-2, 3]$:



نکته) برای هر عدد حقیقی x و برای هر عدد صحیح k داریم:

$$[x + k] = [x] + k$$

تمرین) معادله های زیر را حل کنید؟

$$[x + 1] + [x - 2] = 8 \quad (\text{ب})$$

$$[x] + [x - 2] = 4 \quad (\text{الف})$$

$$\text{حل) } [x] + [x - 2] = 4 \Rightarrow 2[x] - 2 = 4 \Rightarrow 2[x] = 6 \Rightarrow [x] = 3 \Rightarrow 3 \leq x < 4$$

$$\text{حل) } [x + 1] + [x - 2] = 8 \Rightarrow 2[x] + 1 - 2 = 8 \Rightarrow 2[x] = 9 \Rightarrow [x] = \frac{9}{2} \Rightarrow \text{تناقض}$$

برخی از خواص مهم جزء صحیح:

$$۱) [x] = n \Leftrightarrow n \leq x < n + 1$$

$$۲) 0 \leq x - [x] < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} [x] \leq x \leq [x] + 1 \\ x - 1 < [x] \leq x \end{cases}$$

$$۳) [x] + [-x] = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Z} \\ -1, & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow [-x] = \begin{cases} -[x], & x \in \mathbb{Z} \\ -1 - [x], & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

تمرین ۱) توابع زیر را در بازه $[-1, 1]$ رسم کنید؟

$$y = [-x] \text{ (ج)}$$

$$y = x - [x] \text{ (ب)}$$

$$y = x + [x] \text{ (الف)}$$

تمرین ۲) اگر $f(x) = [x + 3]$ باشد، در این صورت حاصل $f(2 - \sqrt{2})$ را بیابید؟

$$\text{حل) } f(2 - \sqrt{2}) = [2 - \sqrt{2} + 3] = [5 - \sqrt{2}] = 3$$

تمرین ۳) اگر $a = 1 - \sqrt{2}$ باشد حاصل $[\sqrt{(a-2)^2}]$ را بیابید؟

$$\text{حل) } [\sqrt{(a-2)^2}] = [|a-2|] = [|1 - \sqrt{2} - 2|] = [|1 + \sqrt{2}|] = 2$$

تمرین ۴) حاصل $[x] + [-x]$ را به ازای $\frac{\sqrt{80}}{9}$ چقدر است؟

$$\text{حل) } x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [x] + [-x] = -1$$

تساوی دو تابع :

دو تابع f و g را مساوی می گوئیم هرگاه دو شرط زیر با هم برقرار باشد:

الف) دامنه f و g با هم برابر باشند. ($D_f = D_g$)

ب) برای هر x از دامنه f داشته باشیم: $f(x) = g(x)$.

مثال ۱) دو تابع $f(x) = x + 1$ و $g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ مساوی نیستند. چرا؟

$$D_f = \mathbb{R} \neq D_g = \mathbb{R} - \{1\}$$

مثال ۲) دو تابع $f(x) = |x|$ و $g(x) = \sqrt{x^2}$ با هم برابر هستند. چرا؟

$$\begin{cases} D_f = \mathbb{R} = D_g = \mathbb{R} \\ g(x) = \sqrt{x^2} = |x| = f(x) \end{cases}$$

تمرین ۱) در هر مورد دلیل تساوی جفت توابع داده شده را بررسی کنید؟

الف) $f(x) = x^2 - 4$ و $g(x) = \frac{x^4 - 16}{x^2 + 4}$

ب) $f(x) = x - 2$ و $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$

ج) $f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ و $g(x) = \frac{|x|}{x}$

تمرین ۲) اگر دو تابع زیر با هم برابر باشند، مقدار a را بیابید؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1} & x \neq -1 \\ 3a + 7 & x = -1 \end{cases} \quad \text{و} \quad g(x) = x + 2$$

حل) $f(-1) = g(-1) \Rightarrow 3a + 7 = -1 + 2 \Rightarrow a = -2$

تمرین ۳) به ازای چه مقداری از a و b دو تابع $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ و $g(x) = \frac{x^2+ax+b}{(x-1)^2}$ با هم مساوی هستند؟

$$\begin{cases} D_f = \mathbb{R} - \{1\} = D_g = \mathbb{R} - \{1\} \\ f(0) = g(0) \Rightarrow b = -2 \\ f(2) = g(2) \Rightarrow 4 = 4 + 2a - 2 \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

تمرین ۴) نشان دهید دو تابع $f(x) = \sqrt{x}\sqrt{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{x^2-x}$ با هم مساوی نیستند؟

$$\begin{cases} D_f: x \geq 0, x \geq 1 \stackrel{\cap}{\Rightarrow} x \geq 1 \\ x^2 - x \geq 0 \stackrel{\text{تعیین علامت}}{\implies} x \geq 1 \text{ یا } x \leq 0 \end{cases}$$

تمرین ۵) آیا دو تابع $f(x) = 1 - [x]$ و $g(x) = [1 - x]$ با هم مساویند؟

$$\begin{cases} D_f = \mathbb{R} = D_g = \mathbb{R} \\ f(1/2) = 0, \quad g(1/2) = -1 \end{cases}$$

تمرین ۶) نشان دهید توابع $f(x) = \left[\frac{1}{1+x^2} \right]$ با $g(x) = 0$ هم برابرند؟

$$\begin{cases} D_f = \mathbb{R} = D_g = \mathbb{R} \\ 0 < \frac{1}{1+x^2} < 1 \Rightarrow f(x) = \left[\frac{1}{1+x^2} \right] = 0 = g(x) \end{cases}$$

بخش سوم: توابع یک به یک و وارون

تابع یک به یک: هر گاه تابعی به صورت زوج مرتب نمایش داده شده باشد و مولفه ی دوم مساوی نداشته باشند، تابع را یک به یک می گویند.

مثال) تابع $f = \{(1, 5), (2, 7), (6, -1)\}$ یک به یک است.

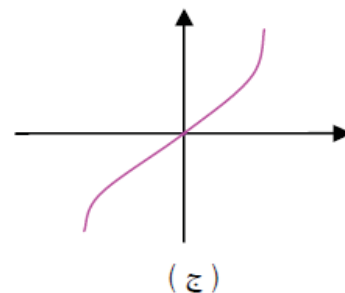
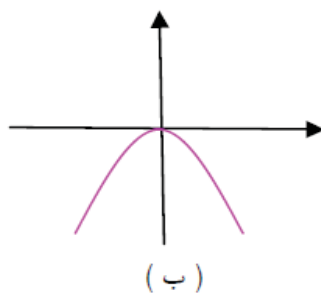
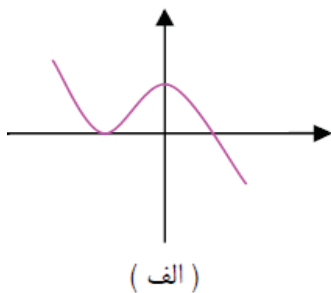
مثال) تابع $f = \{(1, 5), (2, 7), (6, 5)\}$ یک به یک نیست.

تمرین) به ازای چه مقادیری از m تابع $f = \{(-1, 3), (2, 4), (m-4, 3), (7, m)\}$ یک به یک است؟

$$\text{حل) } m - 4 = -1 \Rightarrow m = 3$$

نکته) از لحاظ نموداری تابعی یک به یک است که هر خط موازی محور طول ها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

تمرین) یک به یک بودن توابع زیر را بررسی کنید؟



حل) الف و ب یک به یک نیستند (چرا؟) ولی ج یک به یک است.

نحوه اثبات یک به یک بودن توابع با داشتن ضابطه آن ها:

اگر ضابطه $y = f(x)$ را داشته باشیم برای اثبات یک به یک بودن تابع از دستور زیر کمک می گیریم:

$$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$$

تمرین (یک به یک بودن توابع زیر را بررسی کنید؟

الف) $f(x) = 3x - 5$, ب) $g(x) = 4 - x^2$

الف) $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1 - 5 = 3x_2 - 5 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow$ یک به یک

ب) $g(2) = 2, g(-2) = 2 \Rightarrow$ یک به یک نیست

تمرین ۲) نشان دهید تابع $f(x) = \frac{2+x}{x-1}$ یک به یک است؟

$$\begin{aligned} \text{حل) } \frac{2+x_1}{x_1-1} = \frac{2+x_2}{x_2-1} &\Rightarrow (2+x_2)(x_1-1) = (2+x_1)(x_2-1) \Rightarrow 2x_2 - 2 + x_1x_2 - x_2 \\ &= 2x_1 - 2 + x_1x_2 - x_1 \Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

نکته) تابع درجه دوم در بازه های $(-\infty, \frac{-b}{2a}]$ و $[\frac{-b}{2a}, +\infty)$ یک به یک است.

تمرین ۳) نمودار تابع $y = x^2 - 2x + 3$ را رسم کنید و با محدود کردن دامنه تابع آن را تبدیل به یک تابع یک به یک کنید؟

حل) دامنه این تابع درجه دو مجموعه اعداد حقیقی است و این تابع در حالت کلی یک به یک نیست اما طبق نکته بالا در بازه های $(-\infty, 1]$ و $[1, +\infty)$ یک به یک است.

تمرین ۴) نشان دهید دو تابع $f(x) = \sin x$ و $g(x) = x - [x]$ یک به یک نیستند؟

حل) با توجه به نمودار این دو تابع چون خطوطی موازی محور وجود دارند که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می کند.

نکته) تابع چند ضابطه ای $f(x) = \begin{cases} g(x) & , x \in D_1 \\ h(x) & , x \in D_2 \end{cases}$ در صورتی یک به یک است که :

الف) g در D_1 و h در D_2 یک به یک باشند. ب) برد g و h با هم اشتراک نداشته باشند.

تمرین) کدام تابع زیر یک به یک است؟

$$f(x) = \begin{cases} x - 2, & x > 0 \\ x + 2, & x \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x > 0 \\ 1 - x, & x \leq 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x > 0 \\ -x^3, & x \leq 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ -x^2, & x \leq 0 \end{cases} \quad (3)$$

وارون یک تابع:

اگر جای مولفه های اول و دوم تمام زوج مرتب های یک تابع را عوض کنیم، دو حالت پیش می آید:

الف) مجموعه جدید ایجاد شده تابع است. در این صورت تابع را وارون پذیر می گوئیم و تابع جدید را وارون آن تابع می نامیم.

$$f = \{(1, 7), (3, 4), (0, 9)\}$$

$$g = \{(7, 1), (4, 3), (9, 0)\} \quad f \text{ تابع معکوس}$$

$$f = \{(1, 7), (3, 4), (9, 4)\}$$

ب) مجموعه جدید تابع نیست. آنگاه می گوئیم تابع وارون پذیر نیست.

$$g = \{(7, 1), (4, 3), (4, 9)\}$$

نکته) اگر f وارون پذیر باشد، وارون این تابع را با f^{-1} نمایش می دهیم.

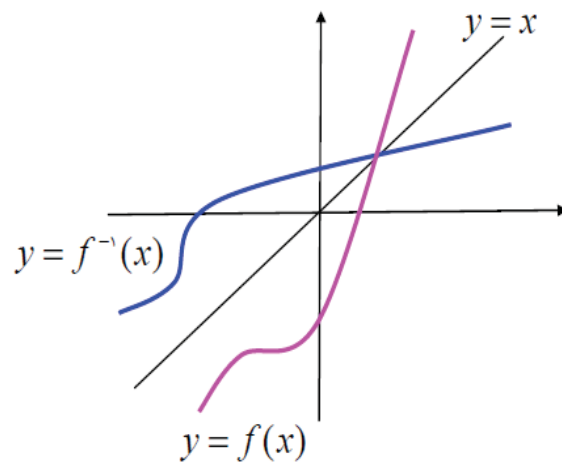
نکته) اگر f تابع وارون پذیر است آنگاه f یک به یک است و بالعکس.

نکته) برای هر تابع وارون پذیر f داریم:

$$D_{f^{-1}} = R_f$$

$$R_{f^{-1}} = D_f$$

نکته) برای رسم نمودار وارون یک تابع کافی است قرینه آن نمودار را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم رسم کنیم.



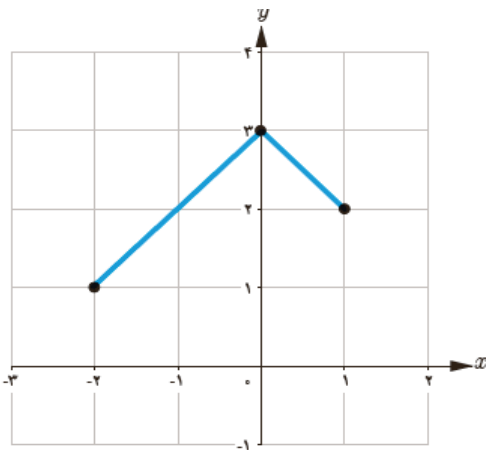
نکته) اگر $f \in (a, b)$ نقطه ای از نمودار تابع f باشد، آنگاه (b, a) نقطه ای از نمودار تابع است و بالعکس.

نکته) اگر f و f^{-1} در نقطه ی همدیگر را قطع کنند، آنگاه $f(a) = b$ و $f(b) = a$.

نکته) $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

نکته) اگر f و f^{-1} همدیگر را قطع کنند، حتما روی نیمساز ربع اول و سوم

قطع می کنند.



تمرین (نمودار وارون تابع زیر را رسم کنید و آیا این تابع وارون پذیر

است؟ چرا؟

خیر - چون یک به یک نیست.

روش تعیین ضابطه ی وارون یک تابع به کمک ضابطه تابع:

برای به دست آوردن ضابطه وارون یک تابع کافی است x را بر حسب y نوشته و سپس با جابجایی x و y ضابطه ی وارون را

می یابیم.

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

تمرین) ضابطه وارون توابع داده شده را بیابید؟

الف) $f(x) = 3x^2 + 1$

ج) $f(x) = 2\sqrt[3]{x-1}$

ب) $f(x) = 3x - 1$

د) $f(x) = 3|x| + 5$

حل) توابع الف و د در حالت کلی وارون پذیر نیستند، اما با محدود کردن دامنه ی آنها تبدیل به دو تابع وارون پذیر می شوند.

$$\text{ب) } y = 3x - 1 \Rightarrow 3x = y + 1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$$

$$\text{ج) } y = 2\sqrt[3]{x-1} \Rightarrow \frac{y}{2} = \sqrt[3]{x-1} \Rightarrow \left(\frac{y}{2}\right)^3 = x-1 \Rightarrow x = \left(\frac{y}{2}\right)^3 + 1$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^3 + 1$$

اعمال جبری روی توابع (جمع، تفریق، ضرب، تقسیم):

اگر f و g به ترتیب دو تابع با دامنه‌های D_f و D_g باشند، در این صورت جمع، تفریق، ضرب و تقسیم آنها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

نام عمل	تعریف ضابطه	تعریف دامنه
جمع	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	$D_{f+g} = D_f \cap D_g$
تفریق	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	$D_{f-g} = D_f \cap D_g$
ضرب*	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$
تقسیم	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$

تمرین (اگر $f = \{(1,7), (3,-4), (2,2)\}$ و $g = \{(1,6), (3,5), (4,1), (2,0)\}$ باشند، موارد زیر را بیابید؟

الف) $D_f, D_g, D_{f+g}, D_{f-g}, D_{\frac{f}{g}}$ ب) $f-g, f \times g, \frac{f}{g}$

$$\text{الف) } \left\{ \begin{array}{l} D_f = \{1, 3, 2\} \\ D_g = \{1, 3, 4, 2\} \\ D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{1, 3, 2\} \\ D_{f-g} = D_f \cap D_g = \{1, 3, 2\} \\ D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x; g(x) = 0\} = \{1, 3\} \end{array} \right.$$

x	۱	۳	۲
f	۷	-۴	۲
g	۶	۵	۰
$f+g$	۱۳	۱	۲
$f \times g$	۴۲	-۲۰	۰
$\frac{f}{g}$	$\frac{7}{6}$	$-\frac{4}{5}$	

تمرین (اگر $f(x) = x^2 - x$ و $g(x) = x^2 + 2x - 3$ باشند، عبارتهای زیر را بیابید؟

الف) $(f + g)(x)$

ب) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

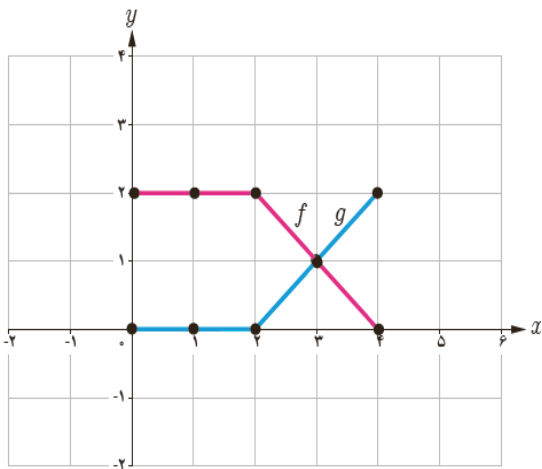
ج) $(2f - 3g)(2)$

الف) $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - x + x^2 + 2x - 3 = 2x^2 + x - 3$

ب) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - x}{x^2 + 2x - 3}$

تمرین) در شکل مقابل نمودار دو تابع f و g داده شده است، نمودار

حاصل جمع این دو تابع را بیابید؟



$$D_f = [0, 4], D_g = [0, 4] \Rightarrow D_{f+g} = [0, 4]$$

$$(f + g)(x) = 2$$

تست) اگر $f(x) = \begin{cases} x & , x \leq 1 \\ x^2 + 1 & , x > 1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} 1 - 2x & , x \leq 0 \\ 2 - x^2 & , x > 0 \end{cases}$ باشند ضابطه $f + g$ کدام است؟

$$\begin{cases} 1 - x & , x \leq 0 \\ x^2 - 1 & , 0 < x < 1 \quad (2) \\ x^2 & , x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + x & , x \leq 0 \\ 2x^2 - x & , 0 < x < 1 \quad (1) \\ x^2 + 1 & , x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - x & , x \leq 0 \\ -x^2 + x + 2 & , 0 < x < 1 \quad (4) \\ 3 & , x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - x & , x \leq 0 \\ -x^2 + x + 2 & , 0 < x \leq 1 \quad (3) \\ 3 & , x > 1 \end{cases}$$

حل) گزینه ۳-

$$f(x) = \begin{cases} x & , x \leq 0 \\ x & , 0 < x \leq 1 \\ x^2 + 1 & , x > 1 \end{cases} , g(x) = \begin{cases} 1 - 2x & , x \leq 0 \\ 2 - x^2 & , 0 < x \leq 1 \\ 2 - x^2 & , x > 1 \end{cases} \Rightarrow f + g(x) = \text{گزینه ۳}$$

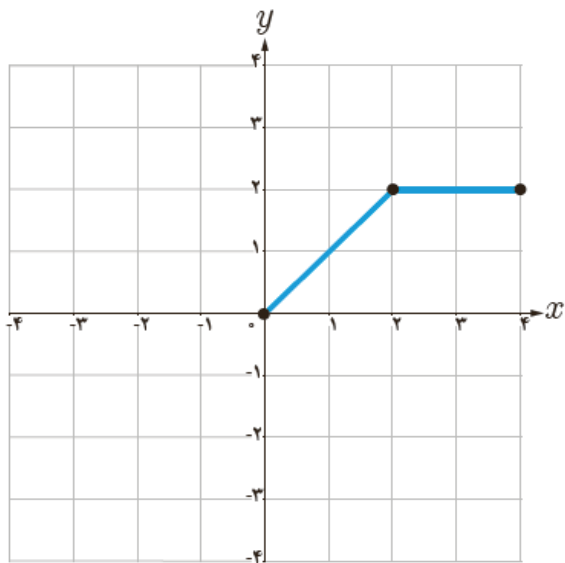
رسم نمودار تابع به کمک انتقال :

جدول زیر کمک می کند تا به کمک نمودار $y = f(x)$ و انتقال نمودار توابع دیگر را رسم کنیم.

نتیجه	نحوه‌ی تبدیل	تابع جدید
نمودار به اندازه‌ی a واحد بالا می رود.	به عرض نقاط a واحد اضافه می شود.	$y = f(x) + a$
نمودار به اندازه‌ی a واحد پایین می رود.	از عرض نقاط a واحد کم می شود.	$y = f(x) - a$
اگر $0 < a < 1$ نمودار فشرده می شود. اگر $a > 1$ نمودار کشیده می شود.	عرض نقاط در a ضرب می شود.	$y = af(x)$
نمودار به اندازه‌ی a واحد به عقب می رود.	از طول نقاط a واحد کم می شود.	$y = f(x + a)$
نمودار به اندازه‌ی a واحد به جلو می رود.	به طول نقاط a واحد اضافه می شود.	$y = f(x - a)$
اگر $0 < a < 1$ نمودار منبسط می شود. اگر $a > 1$ نمودار منقبض می شود.	طول نقاط در $\frac{1}{a}$ ضرب می شود.	$y = f(ax)$

طول نقاط ثابت می ماند.

عرض نقاط ثابت می ماند.



تمرین) با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ نمودارهای زیر را رسم کنید؟

$$y = f(x) + 2$$

$$y = f(x - 1)$$

$$y = -2f(x)$$

$$y = f(2x)$$

تمرین) به کمک نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن را مشخص کنید؟

$$y = 1 + \sqrt{x - 3} \text{ (ب)}$$

$$y = \sqrt{2 - x} \text{ (الف)}$$

تست های مبحث تابع

۱- رابطه ی $f = \{(3, m^2), (2, 1), (-2, m), (3, m + 2), (m, 4)\}$ نمایش دهنده ی یک تابع است، m کدام است؟

(۱) -2 (۲) -1 (۳) 2 (د) هیچ مقدار

$$\text{حل} \quad m^2 = m + 2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow m = -1, m = 2$$

$m = -1 \Rightarrow f = \{(3, 1), (2, 1), (-2, -1), (3, 1), (-1, 4)\} \Rightarrow$ تابع است

$m = 2 \Rightarrow f = \{(3, 4), (2, 1), (-2, 2), (3, 4), (2, 4)\} \Rightarrow$ تابع نیست

۲- کدام رابطه زیر تابع است؟

$$(1) \quad y^3 + 3y^2 + 3x + x^3 + x = 0 \quad (2) \quad y^2 + 2x = x - 1$$

$$(3) \quad |x| + |y - 1| = 1 \quad (4) \quad |y| + \sqrt[3]{x} = 1$$

حل) گزینه ۱- برای رد گزینه های ۳ و ۴ به جای x عدد صفر را قرار دهید، برای رد گزینه ۲ عدد یک را قرار می دهیم.

۳- دامنه تابع $y = \sqrt{\frac{x-1}{x-3}} + \sqrt{\frac{2-x}{x}}$ کدام است؟

(۱) $(0, 1]$ (۲) $(0, 3]$ (۳) $[1, 2]$ (۴) $(2, 3)$

حل) گزینه ۱- برای رد گزینه های ۲ و ۳ در تابع عدد ۲ را قرار دهید تا زیر رادیکال منفی شود. برای رد گزینه ۴ عدد $2/5$ را قرار دهید.

۴- دامنه تابع $y = \sqrt{\frac{1-|x|}{1+|x|}}$ کدام است؟

(۱) اعداد حقیقی (۲) $(-\infty, 1)$ (۳) $(1, +\infty)$ (۴) $[-1, 1]$

حل) گزینه ۴- با رد گزینه حل می کنیم. برای رد گزینه های ۱ و ۳ عدد ۲ را قرار دهید و برای رد گزینه ۲ عدد -2 را قرار دهید.

۵) تمام دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\frac{x(x^2-1)}{|x|+x}}$ کدام است؟

- (۱) $x > 1$ (۲) $(-\infty, 1)$ (۳) $(-\infty, 1]$ (۴) $[1, +\infty)$

حل) گزینه ۴- با رد گزینه حل می کنیم. برای رد کردن گزینه های ۲ و ۳ عدد صفر را قرار دهید. با قراردادن عدد یک در تابع مشکلی ایجاد نمی شود پس گزینه ۴ درست است.

۶- اگر $f(x) = \sqrt{x + 2|x|}$ باشد مقدار $f(f(-144))$ کدام است؟ (تجربی ۸۸)

- (۱) تعریف نشده (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۲

حل) گزینه ۲

۷- اگر $f(x) = 3 + \sqrt{2|x|}$ آنگاه مقدار $f(8)$ کدام است؟ (تجربی ۸۶)

- (۱) ۵ (۲) ۲ (۳) ۷ (۴) ۸

حل) گزینه ۳- $f(8) = 3 + \sqrt{16} = 7$

۸- مقدار a چقدر باشد تا رابطه ی $f(x) = \begin{cases} 2x + \cos \pi x, & x \geq 1 \\ 2x + 14, & x \leq 1 \end{cases}$ تابع شود؟

- (۱) ۱۳ (۲) -۱۳ (۳) $\frac{13}{2}$ (۴) $-\frac{13}{2}$

حل) گزینه ۴-

$$2(1) + \cos \pi(1) = 2a + 14(1) \Rightarrow a = \frac{-13}{2}$$

۹- در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x+4}, & x > 3 \\ 2x + 3, & x \leq 3 \end{cases}$ مقدار $f(f(5)) + f(f(1))$ کدام است؟ تجربی ۹۰

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۱۰- اگر برای هر $x \neq 0$ داشته باشیم $f\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{1+x^2}$ ، آنگاه ضابطه ی $f(x)$ کدام است؟

$$f(x) = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} \quad (۲)$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} \quad (۱)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (۴)$$

$$f(x) = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \quad (۳)$$

حل گزینه ۱-

$$\frac{1}{x} = t \Rightarrow x = \frac{1}{t} \Rightarrow f(t) = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{t}\right)^2} \Rightarrow f(t) = \frac{\sqrt{1+t^2}}{|t|}$$

۱۱- اگر برای هر $x \neq 0$ داشته باشیم، $f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{1}{x}$ آنگاه ضابطه ی $f(x+1)$ کدام است؟

$$\frac{x-1}{x} \quad (۴)$$

$$\frac{x}{x-1} \quad (۳)$$

$$\frac{x}{x+1} \quad (۲)$$

$$\frac{x+1}{x} \quad (۱)$$

حل گزینه ۲-

$$\frac{x}{x-1} = t \Rightarrow tx - t = x \Rightarrow tx - x = t \Rightarrow x(t-1) = t \Rightarrow x = \frac{t}{t-1} \Rightarrow$$

$$f(t) = \frac{t-1}{t} \Rightarrow f(x+1) = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$$

۱۲- اگر $f(x-3) = x^2 - 4x + 5$ باشد، آنگاه $f(1-x)$ کدام است؟ (تجربی ۹۰)

$$x^2 - 4x + 5 \quad (۴)$$

$$x^2 + 4x + 5 \quad (۳)$$

$$x^2 + 3 \quad (۲)$$

$$x^2 + 1 \quad (۱)$$

حل گزینه ۴-

$$x-3 = t \Rightarrow f(t) = (t+3)^2 - 4(t+3) + 5 \Rightarrow f(t) = t^2 + 2t + 2 \Rightarrow$$

$$f(1-x) = (1-x)^2 + 2(1-x) + 2 = x^2 - 4x + 5$$

۱۳- اگر برای هر $x > 1$ داشته باشیم $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ مقدار $f(3)$ کدام است؟

$$\frac{3}{28} \quad (۴)$$

$$7 \quad (۳)$$

$$\frac{82}{9} \quad (۲)$$

$$\frac{28}{3} \quad (۱)$$

$$x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow f(t) = t^2 - 2 \Rightarrow f(3) = 7$$

حل گزینه ۳-

۱۴- اگر برای هر $x > 0$ داشته باشیم، $f\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 4$ ، آنگاه ضابطه $f(x)$ کدام است؟

(۱) $x^2 + 2$ (۲) $x^2 + 1$ (۳) $x^2 - 2$ (۴) $x^2 - 1$

حل) $x - \frac{1}{x} = t \Rightarrow f(t) = t^2 - 2$

۱۵- اگر برای هر $x \geq \frac{-1}{2}$ داشته باشیم $f(x^2 + x) = x^4 + 2x^3 + x^2$ ، آنگاه حاصل $f(\sqrt{3})$ چقدر است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۱

حل) گزینه ۳- $x^2 + x = t \Rightarrow f(t) = t^2 \Rightarrow f(\sqrt{3}) = 3$

۱۶- اگر یکی از منحنی های تابع درجه دوم $y = (a - 1)x^2 + x + 3$ نسبت به خط $x = 2$ متقارن باشد، این منحنی

محور طولها را با کدام طول مثبت قطع می کند؟ تجربی ۸۳

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

حل) گزینه ۴- $\frac{-1}{2(a-1)} = 2 \Rightarrow a - 1 = \frac{-1}{4} \Rightarrow \frac{-1}{4} x^2 + x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0$

$\Rightarrow x = 6, x = -2$

۱۷- نمودار تابع $y = x - [x]$ ، $x \in [-2, 3]$ ، از n پاره خط مساوی به اندازه L تشکیل شده است، دو تایی مرتب

(n, L) کدام است؟ تجربی ۸۳

(۱) $(4, 1)$ (۲) $(4, \sqrt{2})$ (۳) $(5, 1)$ (۴) $(5, \sqrt{2})$

حل) با توجه به نمودار این تابع $n = 5$ و $L = \sqrt{2}$ است.

۱۸- ضابطه ی وارون تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & , x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & , x < 0 \end{cases}$ کدام است؟ (تجربی ۹۶)

(۱) $-x^2$ (۲) x^2 (۳) $x|x|$ (۴) $-x|x|$

حل) گزینه ۳- $\begin{cases} \sqrt{x} = y \Rightarrow x = y^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 \\ -\sqrt{-x} = y \Rightarrow x = -y^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = -x^2 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x) = x|x|$

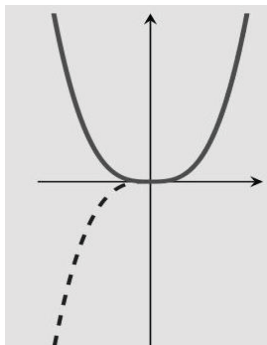
۱۹- نمودار تابع $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$ با دامنه $\mathbb{R} - \{0\}$ نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می کند؟ (۹۶) سراسری خارج کشور

- (۱) -۴ و -۱ (۲) -۴ و ۱ (۳) -۱ و ۴ (۴) ۱ و ۴

(حل) گزینه ۳- کافی است نقاط برخورد نمودار تابع $y = f(x)$ و نیمساز ربع اول و سوم $y = x$ را بیابیم.

$$\frac{x+4}{x-2} = x \Rightarrow x^2 - 2x - x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 4$$

۲۰- تابع با ضابطه $f(x) = |x^3|$ با دامنه \mathbb{R} چگونه است؟ (سراسری خارج کشور ۹۵)

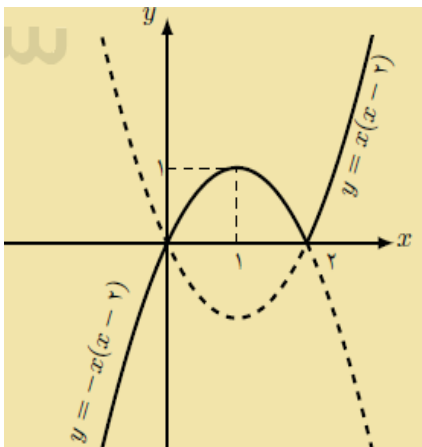


- (۱) نزولی (۲) صعودی (۳) وارون ناپذیر (۴) یک به یک

(حل) گزینه ۳- با توجه به نمودار تابع یک به یک نیست در نتیجه وارو پذیر هم نیست.

۲۱- تابع با ضابطه $f(x) = x|x-2|$ در یک بازه نزولی است، ضابطه وارون این تابع کدام

است؟ تجربی ۹۴



(۱) $1 - \sqrt{1+x}, x < 0$ (۲) $1 - \sqrt{1-x}, x < 0$

(۳) $1 + \sqrt{1-x}, 0 < x < 1$ (۴) $1 - \sqrt{1-x}, 0 < x < 1$

$$y = x|x-2| = \begin{cases} x(x-2); & x \geq 2 \\ -x(x-2); & x < 2 \end{cases} \text{ نزولی}$$

با توجه به نمودار، در بازه $(1, 2)$ تابع نزولی است. پس باید برای تابع

$$y = -x(x-2); \quad 1 < x < 2$$

تابع معکوس بنویسیم. چون برد این تابع طبق نمودار

$(0, 1)$ است، پس دامنه معکوس تابع باید همین بازه باشد. یعنی گزینه های ۳

یا ۴. اما نقطه $(2, 0)$ روی نمودار تابع است، پس $(0, 2)$ باید در تابع معکوس

صدق کند که گزینه ۳ خواهد بود.

۲۲- تابع با ضابطه $f(x) = |2x - 6| - |x + 1|$ در یک بازه صعودی است. ضابطه وارون آن کدام است؟ تجربی ۹۴
خارج از کشور

$$\frac{1}{3}x + 2, x > 3 \quad (2) \quad -x + 7, x > 8 \quad (1)$$

$$\frac{1}{3}x - 1, -4 < x < 4 \quad (4) \quad x + 7, x > -4 \quad (3)$$

حل گزینه ۳-

$$f(x) = |2x - 6| - |x + 1| = \begin{cases} -2x + 6 - (-x - 1) & x < -1 \\ -2x + 6 - (x + 1) & -1 \leq x < 3 \\ 2x - 6 - (x + 1) & 3 \leq x \end{cases} = \begin{cases} -x + 7 & x < -1 \\ -3x + 5 & -1 \leq x < 3 \\ x - 7 & 3 \leq x \end{cases}$$

با توجه به ضابطه، تابع به ازای $x \geq 3$ صعودی است. به ازای $x \leq 3$ ، $-4 \leq y$ داریم:

$$y = x - 7 \Rightarrow x = y + 7 \Rightarrow f^{-1}(x) = x + 7, x \geq -4$$

۲۳- ضابطه معکوس تابع $y = 2 - \sqrt{x - 1}$ به کدام صورت است؟ سراسری تجربی ۹۲

$$y = -x^2 + 4x - 5, x \leq 2 \quad (2) \quad y = x^2 - 4x + 5, x \leq 2 \quad (1)$$

$$y = -x^2 + 4x - 5, x \geq 1 \quad (3) \quad y = x^2 - 4x + 5, x \geq 1 \quad (3)$$

حل گزینه ۱-

$$y = 2 - \sqrt{x - 1} \Rightarrow \sqrt{x - 1} = 2 - y \Rightarrow x - 1 = 4 - 4y + y^2 \Rightarrow x = y^2 - 4y + 5 \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 5, x \leq 2$$

۲۴- ضابطه وارون تابع $y = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|} & , x \neq 0 \\ \cdot & , x = 0 \end{cases}$ به کدام صورت است؟ خارج از کشور تجربی ۹۲

$$y = x\sqrt{|x|}, x \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (2) \quad y = x\sqrt{|x|}, x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$y = x|x|, x \in \mathbb{R} \quad (4) \quad y = x|x|, x \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x < 0 \Rightarrow f(x) = -\sqrt{-x} \Rightarrow f^{-1}(x) = -x^2 \\ x > 0 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x) = x|x|, x \in \mathbb{R} \quad \text{حل گزینه ۴-}$$

۲۵- اگر $f(x) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x$ باشد، دامنه تابع $y = \sqrt{x f(x)}$ کدام است؟ ریاضی ۹۳

- (۱) $[-1, 1]$ (۲) $(-\infty, 0)$ (۳) \mathbb{R} (۴) $(0, +\infty)$

حل) با رسم نمودار $f(x) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x$ و $f(x) = x$ و اینکه $x f(x) \geq 0$ می فهمیم دامنه باید \mathbb{R} باشد.

۲۶- اگر $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ باشد، دامنه تابع $f(3 - x)$ کدام است؟ تجربی ۹۳

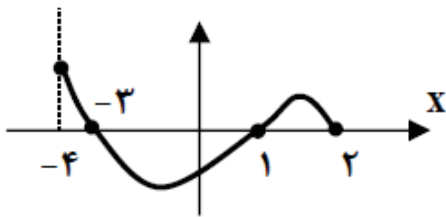
- (۱) $[0, 2]$ (۲) $[0, 3]$ (۳) $[1, 2]$ (۴) $[1, 3]$

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow f(3) = \sqrt{-3} = \text{ت.ن} \\ x = 2/5 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} \end{cases} \quad \text{حل گزینه ۴-}$$

۲۷- شکل زیر نمودار تابع $y = f(x)$ است، دامنه تابع $y = \sqrt{x f(x)}$ سراسری ریاضی ۹۲

- (۱) $[-3, 2]$ (۲) $[-4, -3] \cup [1, 2]$ (۳) $[0, 2]$

(۴) $[-3, 0] \cup [1, 2]$



حل) گزینه ۴-

$$x f(x) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x < 0, y < 0 \Rightarrow [-3, 0] \\ x > 0, y > 0 \Rightarrow [1, 2] \end{cases}$$

۲۹- اگر $f(x) = 2 - |x - 2|$ باشد ضابطه تابع $f(f(x))$ کدام است؟ سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۰

- (۱) x (۲) $4 - x$ (۳) $f(x)$ (۴) $2 - f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x, & x \geq 2 \\ x, & x < 2 \end{cases} \Rightarrow f(f(x)) = x \quad \text{حل گزینه ۱-}$$

۳۰- در تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2[x]$ مقدار $f\left(\frac{-1}{2} f(\sqrt{3})\right)$ کدام است؟ خارج از کشور تجربی ۹۰

- (۱) $1/75$ (۲) $2/25$ (۳) $2/5$ (۴) $2/75$

$$f(\sqrt{3}) = 1 \Rightarrow f\left(\frac{-1}{2}\right) = 2/25 \quad \text{حل گزینه ۲-}$$

۳۱- دو تابع با ضابطه های $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = x^2 + x - 2$ مفروض اند.

اگر $g(f(x)) = -2$ باشد مقادیر x کدام است؟ سراسری ریاضی ۸۹

(۱) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ (۲) \mathbb{Z} (۳) \mathbb{R} (۴) \emptyset

حل گزینه ۲- $if x \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow g(0) = -2$

۳۲- در تابع با ضابطه ی $f(x) = \sqrt{\sin \pi x - 1} + [x] + [-x]$ مقدار $f\left(\frac{-1}{\pi} f(x)\right)$ کدام است؟ ریاضی خ ۸۹

(۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۰ (۴) تعریف نشده

حل گزینه ۴- اگر $x \in \mathbb{Z}$ داریم $[x] + [-x] = 0$ و $\sin \pi x = 0$ پس $f(x) = \sqrt{-1}$ تعریف نشده است.

۳۳- اگر $f = \{(3, 2), (2, 3), (4, -1), (5, 6)\}$ و $g = \{(2, 4), (3, 2), (1, 5), (5, -1)\}$ باشند و

$f^{-1}(a) + g^{-1}(2) = 6$ مقدار $g(a)$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) -۱

حل گزینه ۴- $f^{-1}(a) + 3 = 6 \Rightarrow f^{-1}(a) = 3 \Rightarrow a = f(3) = 2 \Rightarrow g(2) = 4$

۳۴- دو تابع $f = \{(2, 5), (6, 3), (3, 7), (4, 1), (1, 9)\}$ و $g(x) = \frac{x}{x-1}$ داده شده است، اگر $f^{-1}(g(2a)) = 6$ مقدار a

کدام است؟ (تجربی ۹۶)

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{5}{2}$

حل گزینه ۲- $g(2a) = f(6) \Rightarrow \frac{2a}{2a-1} = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$

۳۵- تابع با ضابطه ی $f(x) = 2x - |4 - 2x|$ در بازه ای وارون پذیر است، تابع f^{-1} در این بازه کدام است؟ ریاضی

۹۲ خارج از کشور

(۱) $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x + 1, x \geq 4$ (۲) $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x - 1, x \leq 4$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x - 1, x \geq 4 \quad (۴) \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x + 1, x \leq 4 \quad (۳)$$

حل) گزینه ۳- قرار دهید $x = 0 \Rightarrow y = -4$ پس نقطه $(0, -4)$ روی f است لذا نقطه $(-4, 0)$ باید روی تابع f^{-1} باشد. پس گزینه ۳ درست است.

۳۶- ضابطه وارون تابع $f(x) = x + 2\sqrt{x}$ کدام است؟

$$f^{-1}(x) = x + 2 - 2\sqrt{x+1} \quad (۲) \quad f^{-1}(x) = x - 2\sqrt{x+1} \quad (۱)$$

$$f^{-1}(x) = x - 2 + 2\sqrt{x+1} \quad (۴) \quad f^{-1}(x) = x + 2\sqrt{x+1} \quad (۳)$$

حل) گزینه ۲- $(1, 3) \in f \Rightarrow (3, 1) \in f^{-1}$

۳۷- نمودار تابع $f(x) = a + bx^3$ نمودار وارون خود را در نقطه $(1, 0)$ قطع می کند، مقدار $a - b$ کدام است؟

$$-2 \quad (۱) \quad 2 \quad (۲) \quad 3 \quad (۳) \quad -3 \quad (۴)$$

حل) گزینه ۲- $f(1) = 0, f(0) = 1$

۳۸- ضابطه ی وارون تابع $y = x^2 - 4x$ با شرط $x < 2$ کدام است؟

$$f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+4} \quad (۲) \quad f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x+4} \quad (۱)$$

$$f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x-4} \quad (۴) \quad f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x-4} \quad (۳)$$

حل) گزینه ۱- $(1, -3) \in f \Rightarrow (-3, 1) \in f^{-1}$

۳۹- وارون تابع $f(x) = \begin{cases} 3x + 4, & x \leq 1 \\ 2x + 5, & x > 1 \end{cases}$ کدام است؟

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x-4}{3}, x > 1 \\ \frac{x-5}{2}, x \leq 1 \end{array} \right. \quad (۴) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-4}{3}, x > 1 \\ \frac{x-5}{2}, x \leq 1 \end{array} \right. \quad (۳) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-4}{3}, x \leq 1 \\ \frac{x-5}{2}, x > 1 \end{array} \right. \quad (۲) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-4}{3}, x \leq 1 \\ \frac{x-5}{2}, x > 1 \end{array} \right. \quad (۱)$$

$$\begin{cases} 3x + 4 = y \Rightarrow x = \frac{y-4}{3}, y \leq 1 \\ 2x + 5 = y \Rightarrow x = \frac{y-5}{2}, y > 1 \end{cases} \quad \text{حل) گزینه ۲-}$$

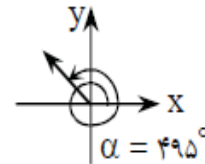
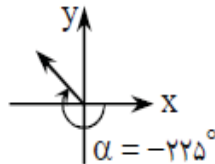
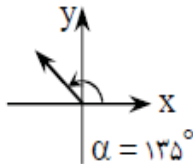
۴۰- تابع $f(x) = x^2 + 2x + 1$ با دامنه $(-1, +\infty)$ مفروض است، نمودارهای دو تابع f و f^{-1} همدیگر را در چند

نقطه قطع می کنند؟ ریاضی ۹۲

۱(۱) ۲(۲) ۳(۳) ۴(۴) غیر متقاطع

حل) گزینه ۴- ریشه ندارد $\Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = x$

دایره مثلثاتی: دایره ای است به شعاع واحد که جهت مثبت آن در جهت خلاف حرکت عقربه های ساعت (پادساعتگرد) و جهت منفی آن در جهت حرکت عقربه های ساعت (ساعتگرد) است.

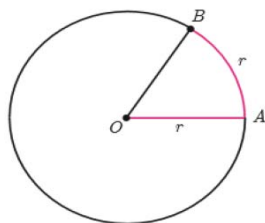


واحدهای اندازه گیری زاویه:

الف) درجه: اگر محیط دایره مثلثاتی را به ۳۶۰ واحد تقسیم کنیم، اندازه هر یک از زوایا مرکزی رو به رو به این کمانها را یک درجه می گویند.

ب) رادیان: یک رادیان یک زاویه مرکزی است که اندازه کمان روبه رو به آن برابر با شعاع دایره باشد.

یک رادیان تقریباً برابر با ۵۷ درجه است.



رابطه ای برای تبدیل درجه به رادیان و بالعکس:

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$$

به عبارت دیگر برای تبدیل درجه به رادیان کافی است آن را در $\frac{\pi}{180^\circ}$ ضرب کنیم.

تمرین) به کمک رابطه بالا جدول زیر را کامل

درجه D	۲۲۵		۳۱۵		-۱۲	
رادیان R		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{\pi}{18}$		$-\frac{3\pi}{4}$

کنید؟

نکته) برای تعیین اندازه یک زاویه برحسب رادیان کافی است طول کمان مقابل به آن را بر شعاع دایره تقسیم کنیم. (توجه کنید که در فرمول زیر L و r هم واحد هستند).

$$\theta = \frac{L}{r}$$

تمرین) در دایره ای به شعاع ۱۰ سانتی متر اندازه زاویه مرکزی مقابل به کمانی با طول ۸ سانتی متر از این دایره چند رادیان است؟

$$\theta = \frac{8}{10} \text{ rad}$$

تمرین) اگر زاویه ۱۶۰ درجه در دایره کمانی به طول ۲۴ سانتی متر جدا کند، شعاع دایره چند سانتی متر است؟

$$160 \times \frac{\pi}{180} = \frac{8\pi}{r} \Rightarrow r = \frac{24}{\frac{8\pi}{9}} = \frac{9 \times 24}{8\pi} = \frac{27}{\pi} \approx 9$$

تمرین) در یک مثلث قائم الزاویه اندازه یک زاویه حاده چهار برابر یک زاویه حاده دیگر است، زاویه کوچکتر چند رادیان است؟

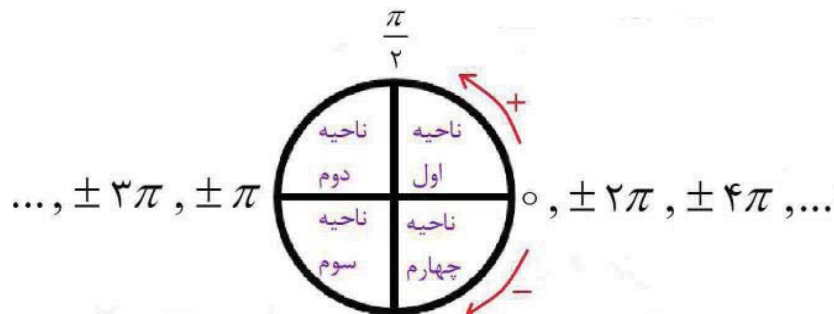
نکته) در $m': h$ زاویه بین عقربه ی ساعت شمار و دقیقه شمار بر حسب درجه از رابطه زیر بدست می آید:

$$\left| \frac{11}{2} m - 30 h \right|$$

تمرین) در ساعت ۲۰: ۱۲ زاویه بین عقربه دقیقه شمار و ساعت شمار چند رادیان است؟

$$\begin{aligned} \left| \frac{11}{2} m - 30 h \right| &= \left| \frac{11}{2} \times 20 - 30 \times 12 \right| = |110 - 360| = |-250| \\ &= 250 \times \frac{\pi}{180} = \frac{25\pi}{18} \end{aligned}$$

یادآوری: دایره مثلثاتی را مطابق شکل به چهار قسمت مساوی تقسیم می کنیم، به هریک از این قسمت یک ناحیه می گویند.

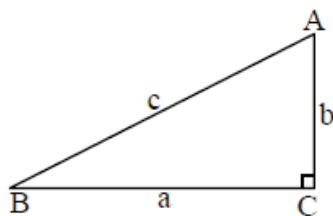


تمرین) ناحیه ی مربوط به هریک از زوایای زیر را تعیین کنید؟

زاویه	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{62\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{2} - \frac{\pi}{10}$	$-\frac{71\pi}{5}$
ناحیه	اول	دوم	سوم	چهارم

نسبت های مثلثاتی در یک مثلث قائم الزاویه :

مثلث قائم الزاویه با زاویه قائمه C و اضلاع a, b, c رادر نظر بگیرید، در این مثلث برای زاویه ی حاده A چهار نسبت مثلثاتی زیر تعریف می شود.



$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}, \quad \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$$

$$\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}, \quad \cot A = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

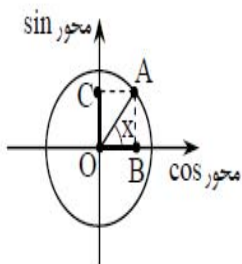
با توجه به فرمول های مثلثاتی داریم :

$$۱) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = ۱$$

$$۲) \tan \alpha \cdot \cot \alpha = ۱$$

محورهای سینوس و کسینوس

می توانیم دو محور عمودی قطر دایره را به عنوان محورهای $\sin X$ و $\cos X$ در نظر بگیریم. به این ترتیب برای به دست آوردن سینوس و کسینوس یک زاویه مانند X ، کافی است از نقطه ی انتهایی کمان متناظر آن روی دایره (یعنی نقطه ی A در شکل) به این دو محور خطهایی عمود کنیم. باهای عمود مقادیر $\sin X$ و $\cos X$ را نشان می دهند. برای زاویه های حاده مانند شکل بالا، به راحتی می توان نشان داد که این تعریف با تعریف اولیه ی نسبت ها سازگار است. چون $OA = ۱$ و



در مثلث قائم الزاویه OAB داریم: $\cos X = \frac{OB}{OA}$. با توجه به $OA = ۱$ نتیجه می گیریم $OB = \cos X$.

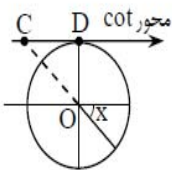
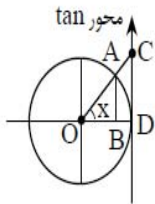
محورهای تانژانت و کتانژانت

برای دایره‌ی مثلثاتی می‌توانیم خطی مماس بر دایره مطابق شکل رسم کنیم و آن را محور تانژانت در نظر بگیریم. به این ترتیب برای به‌دست آوردن تانژانت یک زاویه مانند x کافی است نیم‌خط آن زاویه را امتداد دهیم تا محور را در نقطه‌ای قطع کند (در شکل نقطه‌ی C). این نقطه همان $\tan x$ را روی محور نشان می‌دهد. برای توجیه دقت کنید $AB = \sin x$ و $OB = \cos x$. از طرفی طبق قضیه‌ی تالس در مثلث OCD داریم:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{OB}{OD} \xrightarrow{OD=1} \frac{AB}{CD} = OB \Rightarrow CD = \frac{AB}{OB} \Rightarrow CD = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow CD = \tan x$$

شبهه محور تانژانت، می‌توانیم خطی مماس بر دایره مانند شکل روبه‌رو رسم کنیم و آن را محور کتانژانت در نظر بگیریم. برای پیدا کردن کتانژانت هر زاویه کافی است نیم‌خط آن زاویه را امتداد دهیم تا محور را قطع کند. به این ترتیب نقطه‌ی قطع شده، مقدار $\cot x$ را نشان می‌دهد.

برای تمرین با روش مشابه روش ما برای تانژانت، در شکل روبه‌رو نشان دهید که $\cot x = -CD$. (چرا از علامت - استفاده کرده‌ایم؟)



تعیین علامت نسبت‌های مثلثاتی در نواحی چهارگانه:

ربع / نسبت مثلثاتی	اول $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	دوم $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	سوم $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	چهارم $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-

تمرین) مثبت یا منفی بودن عبارتهای زیر را مشخص کنید؟

۱) $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

۲) $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

۳) $\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right)$

۴) $\cot\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

۱) $\cos \frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow{\text{ناحیه دوم}} \text{منفی}$

۲) $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) \Rightarrow$ مثبت

جدول نسبت‌های مثلثاتی:

زاویه α نسبت	۰ رادیان = ۰°	$\frac{\pi}{6}$ رادیان = ۳۰°	$\frac{\pi}{4}$ رادیان = ۴۵°	$\frac{\pi}{3}$ رادیان = ۶۰°	$\frac{\pi}{2}$ رادیان = ۹۰°	π رادیان = ۱۸۰°	$\frac{3\pi}{2}$ رادیان = ۲۷۰°	2π رادیان = ۳۶۰°
$\sin \alpha$		$\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$			-۱	۰
$\cos \alpha$	۱		$\frac{\sqrt{2}}{2}$			-۱		
$\tan \alpha$					تعریف نشده		تعریف نشده	
$\cot \alpha$			۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$				

تمرین) حاصل عبارتهای زیر را به کمک جدول مثلثاتی

بیابید؟

۱) $\cot \frac{\pi}{6} - \tan \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{4}$

۲) $\frac{\tan^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cot^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)} + \cos^2 75^\circ + \sin^2 75^\circ$

اتحادهای مقدماتی مثلثاتی:

۱) $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

۲) $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

۳) $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}$

۴) $\sin^2 \alpha = \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$

نکته) با توجه به دایره مثلثاتی برای هر زاویه α داریم: $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$, $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$

تمرین) اتحادهای مثلثاتی زیر را ثابت کنید؟

$$\frac{(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x) - \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^4 x + \sin^4 x} = 1 \quad \text{الف)}$$

$$\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x} = 1 - \sin x \cos x \quad \text{ب)}$$

نکته) اگر α و β متمم یکدیگر باشند ($\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$) داریم:

$$\sin \alpha = \cos \beta, \quad \cos \alpha = \sin \beta, \quad \tan \alpha = \cot \beta, \quad \cot \alpha = \tan \beta$$

نکته) اگر α و β مکمل یکدیگر باشند ($\alpha + \beta = \pi$) داریم:

$$\sin \alpha = \sin \beta, \quad \cos \alpha = -\cos \beta, \quad \tan \alpha = -\tan \beta, \quad \cot \alpha = -\cot \beta$$

تست) حاصل $\cot \frac{\pi}{8} + \cot \frac{3\pi}{8} + \cot \frac{4\pi}{8} + \cot \frac{5\pi}{8} + \cot \frac{7\pi}{8}$ کدام است؟

$$۲(۱) \quad ۱(۲) \quad -۱(۳) \quad ۰(۴)$$

$$\text{حل) } \cot \frac{\pi}{8} + \cot \frac{7\pi}{8} = ۰, \quad \cot \frac{3\pi}{8} + \cot \frac{5\pi}{8} = ۰, \quad \cot \frac{4\pi}{8} = \cot \frac{\pi}{2} = ۰ \Rightarrow \text{مجموع} = ۰$$

تمرین) اگر $\sin \alpha \times \cos \alpha > ۰$ و $\cos \alpha \times \cot \alpha < ۰$ آنگاه انتهای کمان α در کدام ناحیه مثلثاتی قرار دارد؟

$$\sin \alpha \times \cos \alpha > ۰ \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha > ۰, \cos \alpha > ۰ \Rightarrow \text{ناحیه اول} \\ \sin \alpha < ۰, \cos \alpha < ۰ \Rightarrow \text{ناحیه سوم} \end{cases}$$

$$\cos \alpha \times \cot \alpha < ۰ \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha > ۰, \cot \alpha < ۰ \Rightarrow \text{ناحیه چهارم} \\ \cos \alpha < ۰, \cot \alpha > ۰ \Rightarrow \text{ناحیه سوم} \end{cases}$$

پس نتیجه می گیریم این زاویه در ناحیه سوم است.

تمرین) اگر $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$ و انتهای کمان α در ناحیه سوم باشد، سایر نسبتهای مثلثاتی زاویه α را بیابید؟

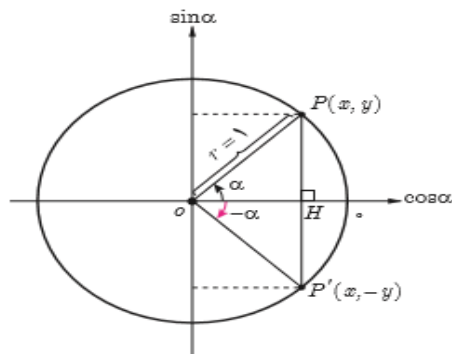
$$\text{حل) } \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{-1}{3}\right)^2} = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2\sqrt{2} \quad , \quad \cot \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

تمرین) اگر $\cot \alpha = -2$ و $\cos \alpha > 0$ باشند، سایر نسبتهای مثلثاتی زاویه α را بیابید؟

نسبتهای مثلثاتی زاویه های قرینه:

اگر $P(x, y)$ روی دایره مثلثاتی و α زاویه بین OP و OX باشد، آنگاه با قرینه کردن P نسبت به محور x نقطه P' بدست می آید.



قرینه یک نقطه به مختصات (x, y) نسبت به محور افقی نقطه ای به مختصات $(x, -y)$ است.

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

تمرین) حاصل هر یک از عبارات زیر را بدست آورید؟

$$\cot\left(-\frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

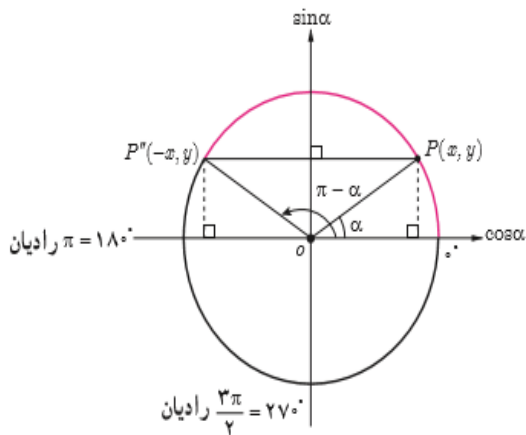
$$\frac{\cos(-90^\circ) + \sin(-270^\circ)}{\sin(-180^\circ) - \cos(-360^\circ)}$$

$$\cot\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos(-45^\circ) \cdot \cos(-60^\circ) + \sin(-45^\circ) \cdot \sin(-60^\circ)$$

محاسبه نسبت‌های مثلثاتی زاویای مکمل:

دو زاویه را مکمل هم می‌گوییم هرگاه مجموع آن دو زاویه برابر با 180° درجه شود. به عنوان مثال دو زاویه 130° و 50° درجه مکمل یکدیگرند. در واقع مکمل زاویه α برابر با $180^\circ - \alpha$ است.



$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

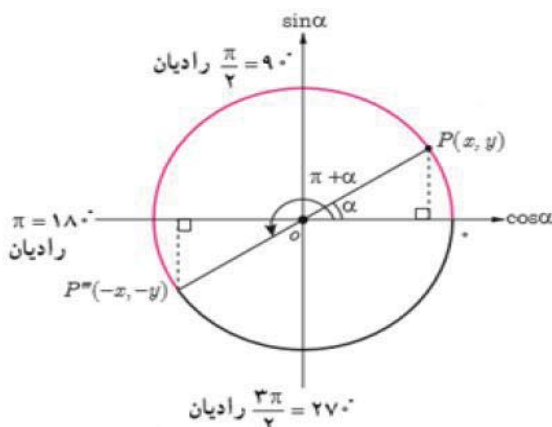
قرینه یک نقطه به مختصات (x, y) نسبت به محور عمودی نقطه‌ای به مختصات $(-x, y)$ است.

تمرین) حاصل هریک از عبارات زیر را بدست آورید؟

$$\cot(-120^\circ)$$

$$\tan \frac{5\pi}{6}$$

$$\cos(-135^\circ)$$



نسبت‌های مثلثاتی با اختلاف π رادیان :

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

قرینه یک نقطه به مختصات (x, y) نسبت به مبدأ مختصات نقطه‌ای به مختصات $(-x, -y)$ است.

تمرین) نسبت‌های مثلثاتی زوایای ۲۱۰° درجه و $\frac{۵\pi}{۴}$ و $\frac{۷\pi}{۶}$ را بیابید؟

$$\sin \frac{۷\pi}{۶} = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{۶} \right) = -\sin \frac{\pi}{۶} = -\frac{۱}{۲} \quad , \quad \cos \frac{۷\pi}{۶} = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{۶} \right) = -\cos \frac{\pi}{۶} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan \frac{۷\pi}{۶} = \tan \left(\pi + \frac{\pi}{۶} \right) = \tan \frac{\pi}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \quad , \quad \cot \frac{۷\pi}{۶} = \cot \left(\pi + \frac{\pi}{۶} \right) = \cot \frac{\pi}{۶} = \sqrt{۳}$$

تمرین) حاصل عبارات زیر را بیابید؟

$$A = \sin(-۴\delta) + \cos\left(-\frac{۲\pi}{۳}\right) - \tan\left(-\frac{\delta\pi}{۴}\right) =$$

$$B = \sin\left(\frac{۲\pi}{۴}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{۳}\right) - \tan\left(-\frac{۷\pi}{۶}\right) =$$

حاصل $\sqrt{۳} \sin\left(\frac{۲\pi}{۳}\right) + \cos^2\left(\frac{۷\pi}{۶}\right) - \tan^2\left(\frac{\delta\pi}{۴}\right)$ کدام است؟

$$\frac{\delta}{۴} (۴) \quad ۳ (۳) \quad ۰ (۲) \quad ۱ (۱)$$

$$\sin \frac{۲\pi}{۳} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{۳} \right) = \sin \frac{\pi}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \quad , \quad \cos \frac{۷\pi}{۶} = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{۶} \right) = -\cos \frac{\pi}{۶} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan \frac{\delta\pi}{۴} = \tan \left(\pi + \frac{\pi}{۴} \right) = \tan \frac{\pi}{۴} = ۱$$

نکته) مضارب فرد π را همان π در نظر می‌گیریم.

$$\cos(۳\pi - \theta) = \cos \theta$$

$$\tan(۳\pi - \theta) = -\tan \theta$$

$$\sin(\delta\pi + \theta) = -\sin \theta$$

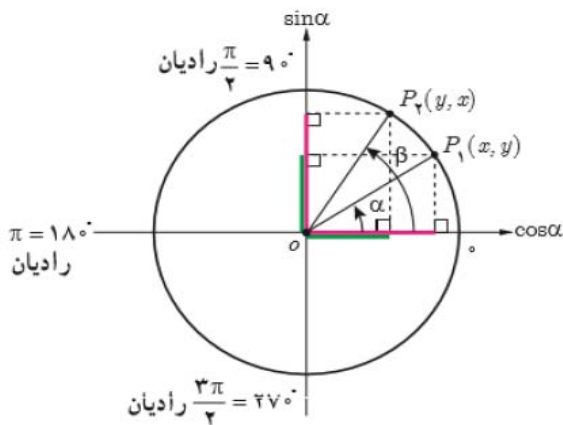
تمرین) حاصل عبارات زیر را بیابید.

۱) $\sin \frac{29\pi}{6}$

۲) $\cos \frac{21\pi}{4}$

نسبتهای مثلثاتی زوایای متمم:

دو زاویه را متمم می گوئیم هرگاه مجموع آن برابر با ۹۰ درجه باشد. در واقع متمم زاویه α برابر با $90 - \alpha$ است.



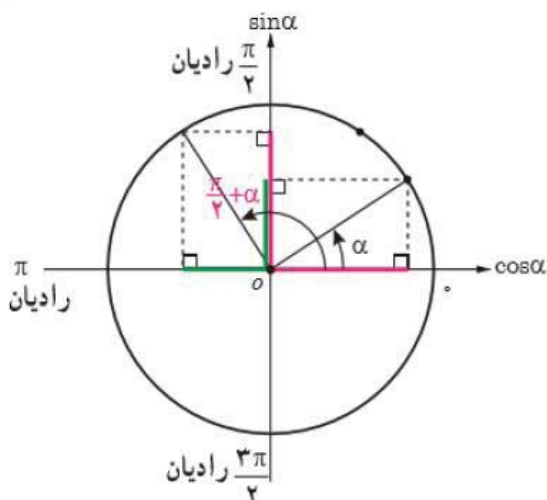
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = x = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = y = \sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{x}{y} = \cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{y}{x} = \tan \alpha$$

نسبت های مثلثاتی با اختلاف $\frac{\pi}{2}$ رادیان:



$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = x = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -y = -\sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{x}{-y} = -\cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\tan \alpha$$

نکته) مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ مانند $\frac{\pi}{2}$ عمل می کند، یعنی سینوس را به کوسینوس و تانژانت را به کتانژانت تبدیل می کند. فقط باید

دقت کنیم که انتهای کمان در کدام ناحیه قرار گرفته است.

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha, \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha, \tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha, \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

نسبتهای مثلثاتی مضارب زوج π :

$$\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(2k\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(2k\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

$$\sin(2k\pi - \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(2k\pi - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(2k\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(2k\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

تمرین حاصل عبارات زیر را بیابید؟

$$۱) \cos 75^\circ + \tan(-315^\circ) + \cos 30^\circ + \sin 42^\circ$$

$$۲) \tan(-225^\circ) + \cot(-330^\circ) + \sin\left(\frac{11\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$$

نکته) در مورد $\frac{\pi}{4}$ ها، مضرب را بر ۴ تقسیم می کنیم، اگر باقیمانده یک شود مانند $\frac{\pi}{4}$ عمل می کنیم و اگر باقیمانده ۳ شود مانند $\frac{3\pi}{4}$ عمل می کنیم.

تمرین های تکمیلی:

تمرین ۱) عبارت $\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$ را ساده کنید؟

$$\text{حل) } \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta \Rightarrow \begin{cases} \cos \frac{\pi}{7} = -\cos \frac{6\pi}{7} \\ \cos \frac{2\pi}{7} = -\cos \frac{5\pi}{7} \\ \cos \frac{3\pi}{7} = -\cos \frac{4\pi}{7} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = 0$$

تمرین ۲) در مثلث ABC با فرض اینکه $\angle A = 120^\circ$ نشان دهید $\tan 3B + \tan 3C = 0$.

$$B + C = 60^\circ \Rightarrow 3B + 3C = 180^\circ \Rightarrow 3B = 180^\circ - 3C \Rightarrow \tan 3B = \tan(180^\circ - 3C) = -\tan 3C \\ \Rightarrow \tan 3B + \tan 3C = 0$$

تمرین ۳) اگر $\frac{\pi}{9} \leq \alpha \leq \frac{5\pi}{18}$ آنگاه $\sin 3\alpha$ در چه محدوده ای قرار می گیرد؟

$$\text{حل) } \frac{\pi}{9} \leq \alpha \leq \frac{5\pi}{18} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \leq 3\alpha \leq \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \sin 3\alpha \leq 1$$

تمرین ۴) اگر $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$ و $\cos x = \frac{m-1}{2}$ باشد، حدود مقادیر m را بیابید؟

تمرین ۵) حاصل عبارت زیر را بدست آورید؟

$$\frac{\sin \frac{3\pi}{4} - \cos \frac{5\pi}{6}}{\sin \left(\frac{-3\pi}{4}\right) + \tan \left(\frac{-4\pi}{3}\right)} = \frac{\sin \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \cos \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)}{-\sin \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \tan \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3}}$$

تمرین ۶) نسبت های مثلثاتی زاویه $\alpha = 6060^\circ$ را بیابید؟

$$6060^\circ = 68 \times 90 - 60 \Rightarrow 68 \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = 34\pi - \frac{\pi}{3}$$

$$\sin(6060^\circ) = \sin \left(34\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(60.60) = \cos\left(34\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\tan(60.60) = \tan\left(34\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

$$\cot(60.60) = \cot\left(34\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cot\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

تمرین ۷) عبارات زیر را تا حد امکان ساده کنید؟

$$A = \frac{2 \cos\left(\frac{-2\pi}{5}\right) - \sin\left(\frac{-\pi}{10}\right)}{3 \sin \frac{\pi}{10} - \cos \frac{2\pi}{5}}$$

$$\frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{-2\pi}{5}\right) = \sin \frac{\pi}{10} \Rightarrow A = \frac{2 \sin \frac{\pi}{10} + \sin \frac{\pi}{10}}{3 \sin \frac{\pi}{10} - \sin \frac{\pi}{10}} = \frac{3}{2}$$

$$B = \tan 23^\circ \times \tan 40^\circ \times \tan 50^\circ \times \tan 67^\circ$$

$$\text{حل) } 23^\circ + 67^\circ = 90^\circ \Rightarrow \tan 23^\circ = \cot 67^\circ, \quad 40^\circ + 50^\circ = 90^\circ \Rightarrow \tan 40^\circ = \cot 50^\circ$$

$$B = \tan 23^\circ \times \tan 40^\circ \times \tan 50^\circ \times \tan 67^\circ = 1$$

$$C = \cos 80^\circ \times \frac{\sin 80^\circ + \cos 10^\circ}{\cos 80^\circ + \sin 10^\circ}$$

$$\text{حل) } \cos 80^\circ = \sin 10^\circ \Rightarrow \cos 80^\circ \times \frac{\sin 80^\circ + \cos 10^\circ}{\cos 80^\circ + \sin 10^\circ} = \sin 10^\circ \times \frac{2 \sin 80^\circ}{2 \sin 10^\circ} = \sin 80^\circ$$

تمرین ۸) زاویه حاده چون x را چنان بیابید که $\sin x = \cos(20^\circ + x)$.

$$\text{حل) } x + 20^\circ + x = 90^\circ \Rightarrow 2x = 70^\circ \Rightarrow x = 35^\circ$$

تمرین ۹) حاصل عبارت زیر را بیابید؟

$$A = \frac{\cot(\theta - 10\pi) + \tan\left(\theta + \frac{9\pi}{2}\right) + 3 \cos\left(\theta - \frac{11\pi}{2}\right) - \sin(\theta - 5\pi)}{\cot\left(\theta - \frac{5\pi}{2}\right) + \tan(\theta - 9\pi) + 3 \cos(\theta - 8\pi) + \sin\left(\theta + \frac{7\pi}{2}\right)} \times \sin\left(\theta + \frac{3\pi}{2}\right)$$

تمرین ۱۰) ثابت کنید، $\sin^2\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) + \sin^2(x - 3\pi) = 1$

تمرین ۱۱) اگر $\cot\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{3}{4}$ باشد و α یک زاویه حاده باشد، در این صورت مقدار $\sin(8\pi - \alpha)$ را بیابید؟

تمرین ۱۲) مقدار عددی $\cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8}$ را بیابید؟

تمرین ۱۳) اگر $\tan\theta = 0/2$ باشد، مقدار عبارات $A = \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)}$ را بیابید؟

تمرین ۱۴) اگر $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}$ باشد، مقدار $\tan\left(\theta + \frac{11\pi}{6}\right)$ را بیابید؟

تمرین ۱۵) مقدار $A = \frac{3\cos^2 24^\circ - \sqrt{2}\cos 225^\circ}{3 - 2\cos 120^\circ \times \tan^2 6^\circ}$ را بیابید؟

تمرین ۱۶) درستی تساویهای زیر را ثابت کنید؟

$$1) \cos\left(\frac{7\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sin(2\pi - \theta) - \frac{\tan \frac{5\pi}{6}}{\tan \frac{25\pi}{6}} = \cos^2 \theta$$

$$2) \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(\pi - x)\right] \left[\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos(2\pi - x)\right] = \cos^2 x - \sin^2 x$$

تمرین ۱۷) از تساوی $2 = \frac{2\sin(\alpha - 3\pi) + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}$ مقدار $\tan \alpha$ را بیابید؟

تمرین ۱۹) اگر $\tan 20^\circ = 0/36$ باشد، مقدار عبارت $A = \frac{\sin 160^\circ - \cos 20^\circ}{\cos 110^\circ + \sin 70^\circ}$ زیر را بدست آورید؟

تمرین ۱۷) حاصل عبارت زیر را بیابید؟

$$۱) \sin\left(۲۴\pi + \frac{\pi}{۳}\right) + \tan\left(\frac{۱۹\pi}{۶}\right)$$

$$۲) \tan(۹۳^\circ) + \cot\left(\frac{۱۹۹۹\pi}{۳}\right)$$

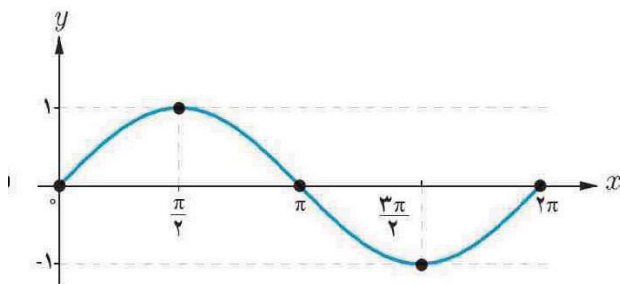
$$۳) \sin\frac{۱۲۱\pi}{۶} + \cos\left(\frac{۱۲۳\pi}{۴}\right) + \tan\left(\frac{۱۲۴\pi}{۲}\right)$$

$$\Delta) \frac{\sin\left(\frac{\Delta\pi}{۳}\right) \times \cos\left(\frac{۳\pi}{۲} + \frac{\pi}{۳}\right) \times \tan\left(۲\pi + \frac{\pi}{۶}\right)}{\tan\left(\frac{۷\pi}{۶}\right)}$$

توابع مثلثاتی: توابعی مانند $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = ۲ \sin ۳x$ که در آنها نسبت‌های مثلثاتی وجود داشته باشد، را توابع مثلثاتی می‌گویند.

نکته) دامنه توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ برابر با \mathbb{R} و برد آن برابر با $[-۱, ۱]$ است.

نمودار تابع $y = \sin x$ در بازه $[۰, ۲\pi]$:



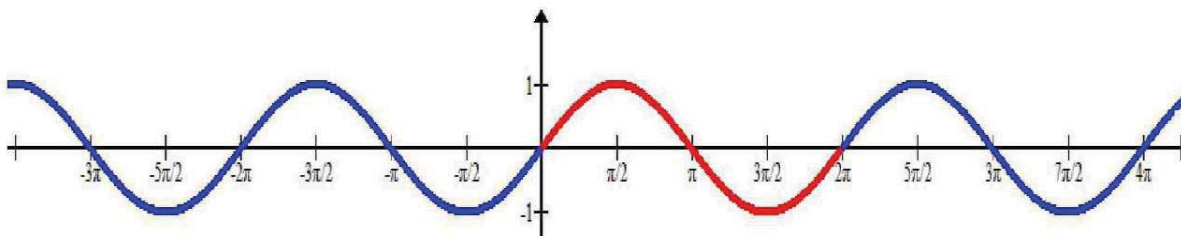
نکته ۱) حداکثر مقدار تابع $y = \sin x$ برابر با یک است که در نقاط به طولهای $x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$ ، که در آن $k \in \mathbb{Z}$ بدست می‌آید.

نکته ۲) حداقل مقدار تابع $y = \sin x$ برابر با یک است که در نقاط به طولهای $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ ، که در آن $k \in \mathbb{Z}$ بدست می آید.

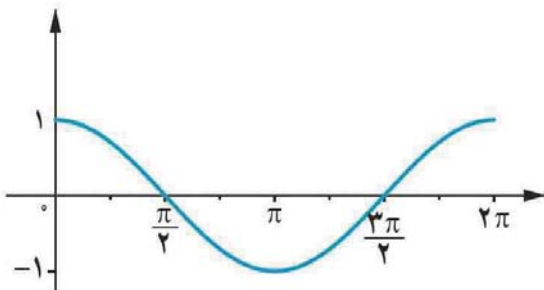
نکته ۳) مقدار تابع $y = \sin x$ در نقاط به طول $x = k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$ برابر با صفر است.

نکته ۴) با توجه به نمودار تابع $y = \sin x$ در بازه های $[0, \frac{\pi}{2}]$ و $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ صعودی (افزایشی - ناحیه اول و چهارم) و در بازه $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ نزولی (کاهشی - ناحیه دوم و سوم) است.

نمودار تابع سینوسی در \mathbb{R} :



نمودار تابع $y = \cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$:



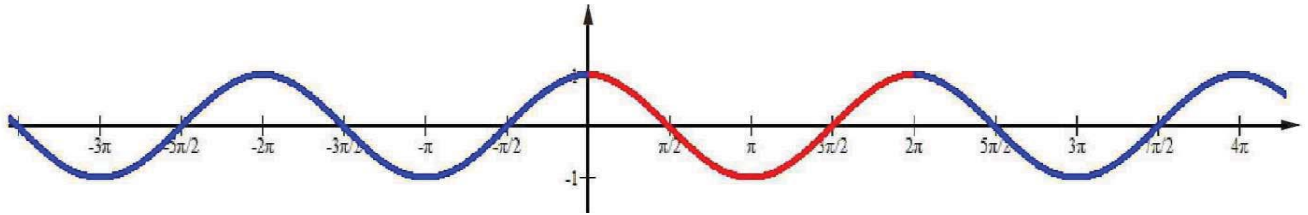
نکته ۱) حداکثر مقدار تابع $y = \cos x$ برابر با یک است که در نقاط به طولهای $x = 2k\pi$ ، که در آن $k \in \mathbb{Z}$ بدست می آید. (مضارب زوج π)

نکته ۲) حداقل مقدار تابع $y = \cos x$ برابر با یک است که در نقاط به طولهای $x = 2k\pi + \pi$ ، که در آن $k \in \mathbb{Z}$ بدست می آید. (مضارب فرد π)

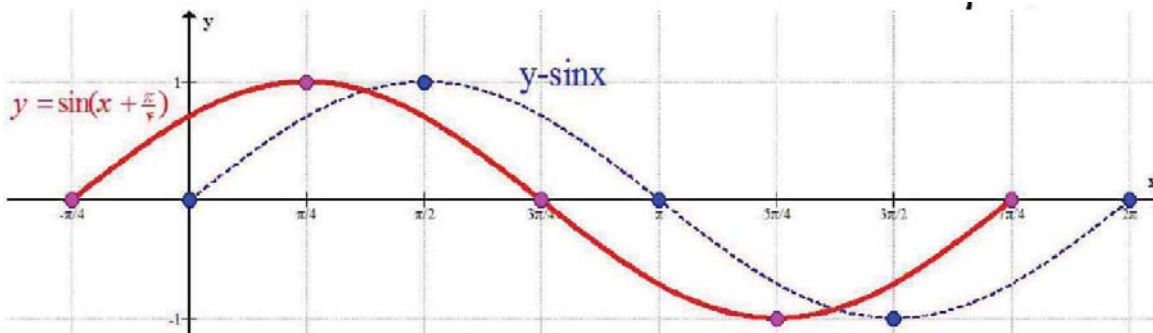
نکته ۳) مقدار تابع $y = \cos x$ در نقاط به طول $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ، $k \in \mathbb{Z}$ برابر با صفر است.

نکته ۴) با توجه به نمودار تابع $y = \cos x$ در بازه های $[0, \pi]$ نزولی (کاهشی - ناحیه اول و دوم) و در بازه $[\pi, 2\pi]$ صعودی (افزایشی - ناحیه سوم و چهارم) است.

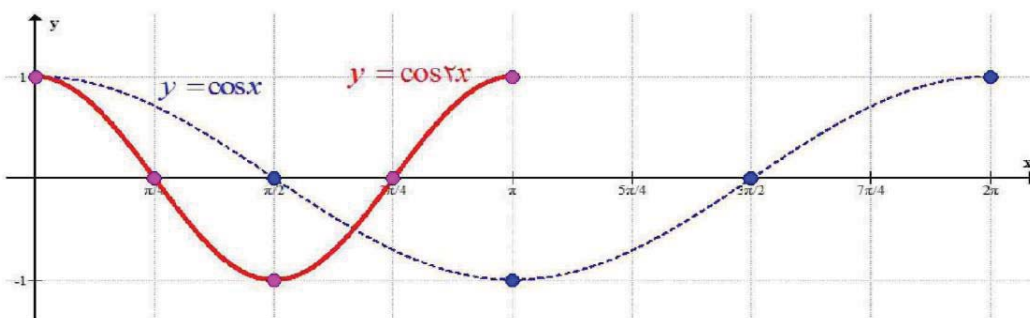
نمودار تابع $y = \cos x$ در \mathbb{R} :



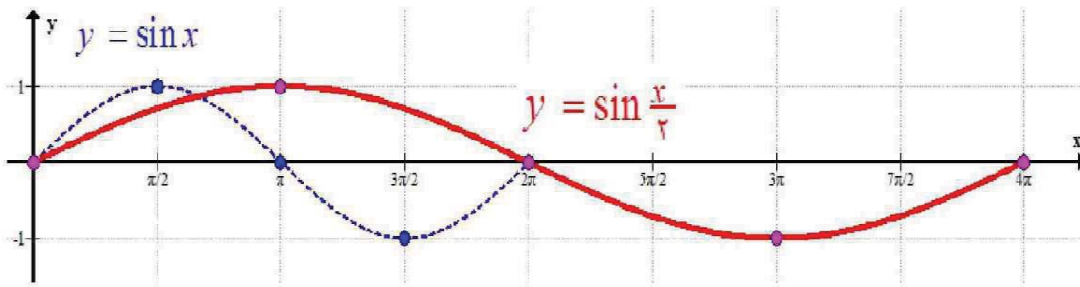
تمرین ۱) نمودار $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ را رسم کنید؟



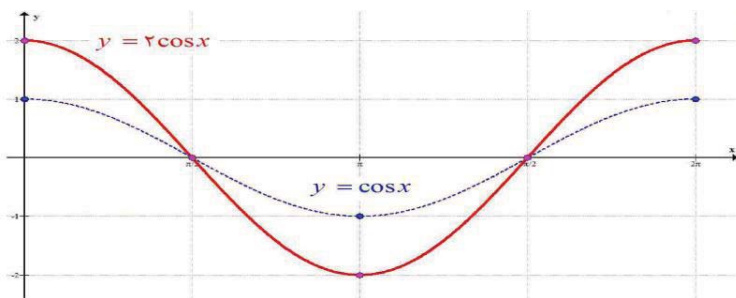
تمرین ۲) نمودار $y = \cos 2x$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید؟



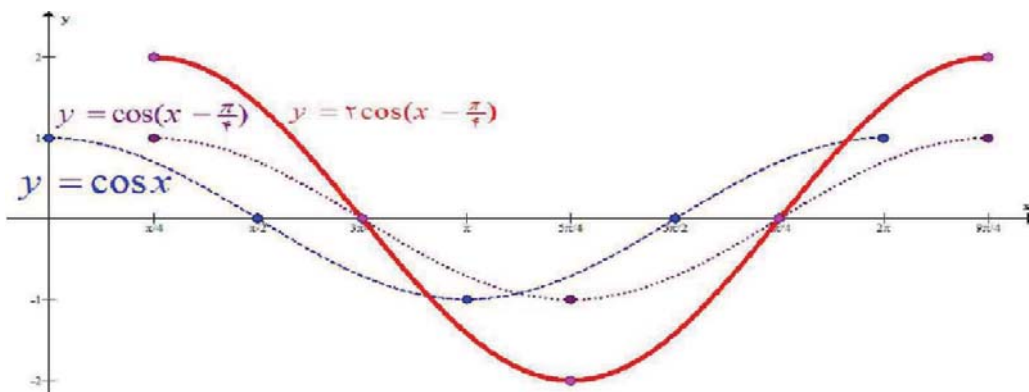
تمرین ۳) نمودار تابع $y = \sin\left(\frac{x}{4}\right)$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید؟



تمرین ۴) نمودار تابع $y = 2 \cos x$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید؟



تمرین ۵) نمودار تابع $y = 2 \cos(x - \frac{\pi}{4})$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید؟



تمرین ۶) نمودارهای زیر را در بازه های داده شده رسم کنید.

الف) $y = 1 - \sin x$, $[-2\pi, 2\pi]$

ب) $y = -1 + \cos x$, $[-4\pi, 4\pi]$

ج) $y = 1 + \sin(x + \frac{\pi}{4})$, $[0, 2\pi]$

تمرین ۷) در تابع $y = a \sin x + b$ مقادیر a و b را بیابید بطوری که این تابع از $(\frac{\pi}{3}, 1)$ بگذرد و محور طولها را در نقطه به طول $\frac{\pi}{6}$ قطع کند و سپس نمودار آنرا رسم کنید؟

تست:

۱- حاصل $A = \frac{2 \sin(2\pi + \alpha) + 3 \sin(\pi + \alpha)}{5 \cos(2\pi + \alpha) - 6 \cos(\pi + \alpha)}$ چند برابر $\tan \alpha$ است؟

$$\begin{array}{cccc} -5(1) & 5(2) & \frac{5}{11}(3) & \frac{-1}{11}(4) \end{array}$$

$$\text{حل) } A = \frac{2 \sin(2\pi + \alpha) + 3 \sin(\pi + \alpha)}{5 \cos(2\pi + \alpha) - 6 \cos(\pi + \alpha)} = \frac{2 \sin \alpha - 3 \sin \alpha}{5 \cos \alpha + 6 \cos \alpha} = \frac{-\sin \alpha}{11 \cos \alpha} = \frac{-1}{11} \tan \alpha$$

۲- مقدار $A = \sin(20\pi + \alpha) + \sin(4\pi + \alpha) + \sin(5\pi + \alpha)$ چند برابر $\sin \alpha$ است؟

$$\begin{array}{cccc} -1(1) & -3(2) & 3(3) & 1(4) \end{array}$$

$$\text{حل) } A = \sin \alpha + \sin \alpha - \sin \alpha = \sin \alpha$$

۳- مقدار $A = \cos(13\pi + \alpha) - 3 \cos(-137\pi + \alpha) + 5 \cos(1200\pi + \alpha)$ چند برابر $\cos \alpha$ است؟

$$\begin{array}{cccc} 3(1) & 7(2) & -3(3) & 7(4) \end{array}$$

$$A = -\cos \alpha + 3 \cos \alpha + 5 \cos \alpha = 7 \cos \alpha$$

۴- حاصل $A = \tan \alpha \cdot \cot(-\alpha) + \sin \alpha \cdot \sin(-\alpha) - \cos \alpha \cdot \cos(-\alpha)$ کدام است؟

$$\begin{array}{cccc} 2(1) & -2(2) & 1(3) & -1(4) \end{array}$$

$$A = -1 - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = -1 - 1 = -2$$

۵- حاصل $A = -2 \cos\left(127\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2 \tan\left(-123\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 3 \cot\left(-1400\pi - \frac{\pi}{3}\right)$ کدام است؟

$$\begin{array}{cccc} 2(1) & -2 - \sqrt{3}(2) & -2(3) & -2 + 3\sqrt{3}(4) \end{array}$$

$$A = 2 \cos \frac{\pi}{6} - 2 \tan \frac{\pi}{4} - 3 \cot \frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \times 1 - 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = -2$$

۶- حاصل عبارت $A = 3 \tan 30^\circ + 4 \cos 57^\circ$ کدام است؟

(۱) $-\sqrt{3}$ (۲) $-4\sqrt{3}$ (۳) $-7\sqrt{3}$ (۴) $-5\sqrt{3}$

۷- حاصل عبارت $A = \sin \frac{\pi}{4} + 2 \sin \frac{3\pi}{4} + 4 \sin \frac{5\pi}{4} + 6 \sin \frac{7\pi}{4}$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) $-4\sqrt{2}$ (۳) $-\frac{7\sqrt{2}}{2}$ (۴) $-\frac{11\sqrt{2}}{2}$

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 4 \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + 6 \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{-7\sqrt{2}}{2}$$

۸- اگر $\tan \frac{\pi}{5} = b$ باشد، حاصل $A = \frac{3 \sin \frac{6\pi}{5} + \sin \frac{9\pi}{5}}{4 \cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right) - \cos\left(-\frac{11\pi}{5}\right)}$ چند برابر b است؟

(۱) $\frac{4}{5}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $-\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{2}{5}$

$$A = \frac{3 \sin \frac{6\pi}{5} + \sin \frac{9\pi}{5}}{4 \cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right) - \cos\left(-\frac{11\pi}{5}\right)} = \frac{3 \sin\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{5}\right)}{4 \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) - \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{5}\right)} = \frac{-3 \sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{\pi}{5}}{-4 \cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{\pi}{5}} = \frac{4}{5} \tan \frac{\pi}{5}$$

۹- اگر $\tan 20^\circ = 0.36$ باشد، حاصل $\frac{\sin 160^\circ - \cos 20^\circ}{\cos 110^\circ + \sin 70^\circ}$ کدام است؟ سراسری تجربی ۸۴

(۱) $\frac{9}{4}$ (۲) $\frac{15}{8}$ (۳) $\frac{17}{8}$ (۴) $\frac{31}{16}$

$$\frac{\sin(180^\circ - 20^\circ) - \cos(180^\circ + 20^\circ)}{\cos(90^\circ + 20^\circ) + \sin(90^\circ - 20^\circ)} = \frac{\sin 20^\circ + \cos 20^\circ}{-\sin 20^\circ + \cos 20^\circ} = \frac{\tan 20^\circ + 1}{-\tan 20^\circ + 1} = \frac{17}{8}$$

۱۰- اگر $\tan \theta = 0.2$ باشد، حاصل $A = \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)}$ کدام است؟

(۱) -2 (۲) $1/2$ (۳) 2 (۴) 3

$$\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta + \sin \theta} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{2 \sin \theta} = \frac{1}{2} + \frac{\cot \theta}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 5 = \frac{6}{2} = 3$$

۱۱- اگر $\tan 15^\circ = a$ باشد، مقدار $A = \frac{3 \sin 375^\circ + 2 \sin 105^\circ}{\cos 165^\circ}$ کدام است؟

$3a + 2(4)$ $-3a + 2(3)$ $3a - 2(2)$ $-3a - 2(1)$

$$A = \frac{3 \sin(360^\circ + 15^\circ) + 2 \sin(90^\circ + 15^\circ)}{\cos(180^\circ - 15^\circ)} = \frac{3 \sin 15^\circ + 2 \cos 15^\circ}{-\cos 15^\circ} = -3a - 2$$

۱۲- حاصل عبارت $\frac{\cos(7\pi + \alpha)}{\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha)} + \frac{\sin(5\pi - \alpha)}{\sin(\frac{7\pi}{2} - \alpha)} \times \tan(\frac{3\pi}{2} + \alpha)$ کدام است؟

$0(4)$ $\frac{-1}{\sin \alpha}(3)$ $2(2)$ $\frac{1}{\cos \alpha}(1)$

$$\frac{-\cos \alpha}{-\cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} \times \cot \alpha = 1 - 1 = 0$$

۱۳- اگر $A + B = \frac{\pi}{2}$ باشد، حاصل $A = \frac{2 \sin A + \cos B}{3 \sin B + 4 \cos A}$ چند برابر $\tan A$ است؟

$\frac{1}{\sqrt{2}}(4)$ $\frac{2}{\sqrt{2}}(3)$ $-1(2)$ $\frac{\sqrt{2}}{3}(1)$

$$\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2} - A) = \sin A \\ \sin(\frac{\pi}{2} - A) = \cos A \end{cases} \Rightarrow A = \frac{2 \sin A + \sin A}{3 \cos A + 4 \cos A} = \frac{3}{7} \tan A$$

۱۴- تابع $y = 4 \sin 2x$ روی بازه $[\pi, 2\pi]$ در $x = k_1$ بیشترین و در $x = k_2$ کمترین مقدار خود را اختیار می کند،

مقدار $k_1 + k_2$ کدام است؟

$3\pi(4)$ $2\pi(3)$ $\frac{5\pi}{2}(2)$ $\frac{3\pi}{2}(1)$

$$2\pi = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \\ k = 1 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4} = k_1 \end{cases}$$

$$2\pi = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \Rightarrow x = \frac{-\pi}{4} \\ k = 1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} = k\pi \end{cases}$$

۱۵- حاصل عبارت $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ}$ را با فرض $\tan 15^\circ = \frac{1}{2}$ بیابید؟ سراسری تجربی ۹۴

$$\frac{-16}{9}(4) \quad \frac{9}{16}(3) \quad \frac{-9}{16}(2) \quad \frac{-1}{16}(1)$$

$$\frac{\cos(270^\circ + 15^\circ) - \sin(270^\circ - 15^\circ)}{\sin(3 \times 180^\circ - 15^\circ) - \sin(90^\circ + 15^\circ)} = \frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ} = \frac{\tan 15^\circ + 1}{\tan 15^\circ - 1} = -\frac{16}{9}$$

۱۶- اگر $\tan \alpha = 2\sqrt{2}$ و انتهای کمان α در ناحیه سوم مثلثاتی باشد، مقدار $\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha)$ کدام است؟

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}(4) \quad \frac{1}{3}(3) \quad \frac{-1}{3}(2) \quad \frac{-2\sqrt{2}}{3}(1)$$

$$\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha) = \cos \alpha \Rightarrow 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + 8 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{9} \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \cos \alpha = \frac{-1}{3}$$

۱۷- حاصل $\sin(\pi + \alpha) \cdot \sin(\frac{\pi}{4} + \alpha) - \sin(\pi - \alpha) \cdot \cos(-\alpha)$ کدام است؟ سراسری تجربی ۸۲

$$\cdot(4) \quad \cos 2\alpha(3) \quad \sin 2\alpha(2) \quad -\sin 2\alpha(1)$$

$$-\sin \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha = -\sin 2\alpha$$

۱۸- اگر α زاویه منفرجه و $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ باشد، مقدار $\tan(\frac{\pi}{4} + \alpha)$ کدام است؟ تجربی خارج کشور ۸۵

$$7(4) \quad \frac{1}{7}(3) \quad \frac{-1}{7}(2) \quad -7(1)$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{-4}{5} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{3}{-4}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = \frac{1 + \frac{3}{-4}}{1 - \frac{3}{-4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{4}} = \frac{1}{7}$$

۱۹- اگر $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{2}{3}$ باشد، آنگاه $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ کدام است؟ تجربی ۸۸ خارج از کشور

$\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{-1}{5}$ (۲) $\frac{-1}{3}$ (۱)

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{2}{3} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{1 - \frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{-1}{5}$$

۲۰- نمودار تابع $y = -4 \cos\left(\frac{\pi}{4} - 3\pi x\right)$ در چند نقطه دارای بیشترین مقدار است؟ سراسری تجربی ۹۱

۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

$$\frac{\pi}{4} - 3\pi x = 2k\pi \Rightarrow \frac{1}{4} - 2k = 3x \Rightarrow \frac{1}{4} - \frac{2}{3}k = x \Rightarrow \begin{cases} k = -2 \Rightarrow x = \frac{19}{12} \\ k = -1 \Rightarrow x = \frac{11}{12} \\ k = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \\ k = 1 \Rightarrow x = \frac{-5}{12} \\ k = 2 \Rightarrow x = \frac{-13}{12} \end{cases}$$

۲۱- حاصل $A = \frac{\sin 250^\circ + \sin 70^\circ}{\cos 560^\circ - \cos 110^\circ}$ با فرض $\tan 20^\circ = \frac{1}{4}$ کدام است؟ تجربی ۹۴ خارج از کشور

$\frac{5}{8}$ (۴) $\frac{7}{3}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{-3}{4}$ (۱)

$$\frac{\sin(270^\circ - 20^\circ) + \sin(2 \times 360^\circ - 20^\circ)}{\cos(3 \times 180^\circ + 20^\circ) - \cos(90^\circ + 20^\circ)} = \frac{-1 - \tan 20^\circ}{-1 + \tan 20^\circ} = \frac{7}{3}$$

۲۲- اگر $\tan \beta = \frac{1}{2}$ و $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$ باشد، حاصل $\sin 2\alpha$ کدام است؟

۰/۸(۴) ۰/۷۵(۳) ۰/۶(۲) ۰/۴۵(۱)

$$\sin 2\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\beta\right) = \cos 2\beta$$

$$\cos 2\beta = 2 \cos^2 \beta - 1, \quad 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos 2\beta = 2 \cos^2 \beta - 1 = 0/6$$

فصل ششم: تابع نمایی و لگاریتم

بخش اول: تابع نمایی

هر تابع به شکل $f(x) = a^x$ که در آن a عددی ثابت $a > 0$ و $a \neq 1$ باشد، را تابع نمایی می گویند.

تمرین ۱) کدام تابع زیر نمایی است؟ چرا؟

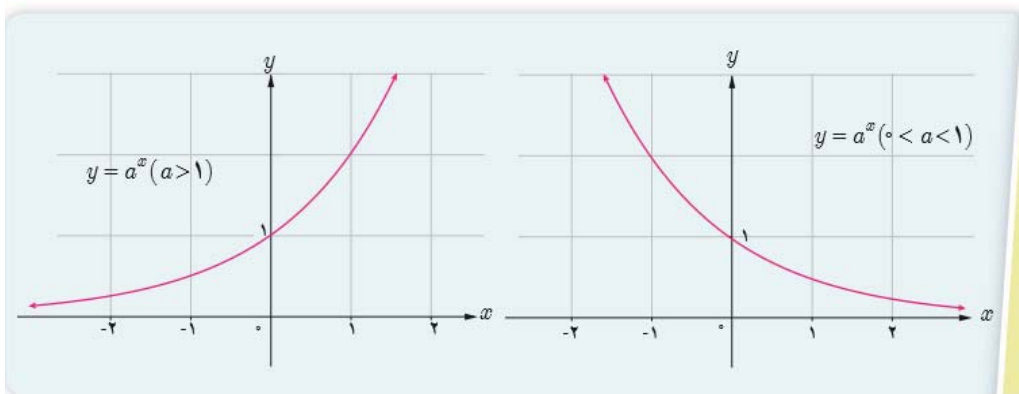
$$a) y = 1^x \quad b) y = \left(-\frac{1}{y}\right)^x \quad c) y = \left(-\frac{1}{y}\right)^{2x} \quad d) y = (1 - \sqrt{2})^x \quad e) y = \frac{4^x}{\sqrt{2x+1}}$$

حل) توابع نمایی a, b, d هستند، چون شرایط تابع نمایی را دارند.

دامنه این توابع اعداد حقیقی و برد آن اعداد حقیقی مثبت است و نمودارهای آن به شکل های زیر است.

۱) اگر $a > 1$ ، نمودار تابع افزایشی، یک به یک و در نتیجه وارون پذیر است.

۲) اگر $0 < a < 1$ ، نمودار تابع کاهش، یک به یک و در نتیجه وارون پذیر است.



دو نکته مهم در مورد تابع نمایی حائز اهمیت است:

الف) تابع نمایی همواره مثبت است. (ب) تابع نمایی در هر دو حالت از نقطه $(0, 1)$ می گذرد.

تمرین ۲) با توجه به نمودارهای تابع نمایی در جاهای خالی علامت مناسب بگذارید؟

$$۲^{۳/۵} \circlearrowleft ۲^{۳ \frac{۷}{۵}}$$

$$۲\sqrt{۷} \circlearrowleft ۲\sqrt{۵}$$

$$\left(\frac{1}{۲}\right)^{۱/۵} \circlearrowleft \left(\frac{1}{۲}\right)^{۱/۵}$$

$$\left(\frac{1}{۲}\right)\sqrt{۲} \circlearrowleft \left(\frac{1}{۲}\right)^۴$$

تمرین ۳) نمودارهای زیر را رسم کنید؟

$$y = \frac{۳^x}{۵^x}, \quad y = ۳ \times ۲^x, \quad y = ۳^{x+1} - ۳^x, \quad y = ۲^{|x|}, \quad y = ۲^{-|x|},$$

$$y = |۲^x|, \quad y = |۲^{-x}|$$

ویژگی های توان های حقیقی (تابع نمایی):

$$۱) a^0 = 1, a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$۲) a^x \times a^y = a^{x+y}$$

$$۳) \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$۴) a^x \times b^x = (ab)^x$$

$$۳) \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$۴) (a^x)^y = a^{xy}$$

معادلات نمایی:

برای حل معادلات نمایی از قاعده زیر استفاده می کنیم.

$$a^x = a^y \Rightarrow x = y$$

تمرین ۴) معادلات نمایی زیر را حل کنید؟

$$۱) ۲^{x^2+1} = ۸\sqrt[۳]{x}$$

$$\text{حل) } x^2 + 1 = ۲x \Rightarrow x^2 - ۲x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$۲) \left(\frac{1}{۳}\right)^{۲x-۵} = ۸1^{x+1}$$

$$\text{حل) } ۳^{-۲x+۵} = ۳^{۴x+۴} \Rightarrow -۲x + ۵ = ۴x + ۴ \Rightarrow x = \frac{1}{۶}$$

$$۳) (\sqrt{۳})^{۲x^2+۴} = ۲۷^x$$

$$\text{حل) } ۳^{x^2+۲} = ۳^{۳x} \Rightarrow x^2 - ۳x + ۲ = 0 \Rightarrow x = 1, x = ۲$$

$$۴) ۲^{x^۳} = (. / ۵)^{x^۲-x}$$

$$\text{حل) } ۲^{x^۳} = ۲^{-x^۲+x} \Rightarrow x^۳ + x^۲ - x = ۰ \Rightarrow x = ۰, x^۲ + x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{۲}$$

نکته) گاهی اوقات برای حل معادلات نمایی از روش تغییر متغیر معادله را حل می کنیم.

تمرین ۵) معادلات زیر را به روش تغییر متغیر حل کنید؟

$$۱) ۳^{x+1} + ۳^x = ۱۰۸$$

$$\text{حل) } ۳^x = t \Rightarrow ۳t + t = ۱۰۸ \Rightarrow ۴t = ۱۰۸ \Rightarrow t = ۲۷ \Rightarrow ۳^x = ۲۷ \Rightarrow t = ۳$$

$$۲) ۴^x - ۲^x - ۳ = ۰$$

$$\text{حل) } ۲^x = t \Rightarrow t^۲ - t - ۳ = ۰ \Rightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{۲}$$

$$۳) ۳^{x+1} + ۳^{-x} - ۴ = ۰$$

$$\text{حل) } ۳^x = t \Rightarrow ۳t + \frac{1}{t} - ۴ = ۰ \Rightarrow ۳t + \frac{1}{t} = ۴ \Rightarrow \frac{۳t^۲ + 1}{t} = ۴ \Rightarrow ۳t^۲ + 1 - ۴t = ۰$$

$$\Rightarrow t = 1, t = \frac{1}{۳} \Rightarrow \begin{cases} ۳^x = 1 \Rightarrow x = ۰ \\ ۳^x = \frac{1}{۳} \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

$$۴) ۴^x - ۳ \times ۲^{x+۲} + ۳۲ = ۰$$

$$\text{حل) } ۲^x = t \Rightarrow t^۲ - ۱۲t + ۳۲ = ۰ \Rightarrow (t - ۴)(t - ۸) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۸ \Rightarrow x = ۳ \\ t = ۴ \Rightarrow x = ۲ \end{cases}$$

تمرین ۶) نمودار توابع $f(x) = ۳^{ax+b}$ و $g(x) = \left(\frac{1}{9}\right)^x$ در نقطه ای به طول ۱- متقاطع اند. اگر $f(۲) = \frac{1}{۳}$ مقدار $f^{-1}(۲۷)$ را بیابید؟

$$\begin{cases} f(-1) = g(-1) \Rightarrow ۳^{-a+b} = \left(\frac{1}{9}\right)^{-1} \Rightarrow -a + b = ۲ \\ f(۲) = \frac{1}{۳} \Rightarrow ۳^{2a+b} = ۳^{-1} \Rightarrow ۲a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow a = -1, b = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = ۳^{-x+1} \Rightarrow f(t) = ۲۷ \Rightarrow ۳^{-t+1} = ۲۷ \Rightarrow -t + 1 = ۳ \Rightarrow t = -۲$$

نامعادلات نمایی: برای بدست آوردن مجموعه جواب نامعادلات نمایی از نکات زیر استفاده می کنیم:

الف) اگر $a > 1$ و $a^x < a^y$ باشند آنگاه $x < y$.

ب) اگر $0 < a < 1$ و $a^x < a^y$ باشند آنگاه $x > y$.

تمرین ۷) مجموعه جواب نامعادلات زیر را بدست آورید؟

$$۱) ۲^{۳x-۲} > ۲^x$$

$$\text{حل) } ۳x - ۲ > x \Rightarrow ۲x > ۲ \Rightarrow x > ۱$$

$$۲) \left(\frac{1}{2}\right)^{\Delta x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{۳x+۴}$$

$$\text{حل) } \Delta x > ۳x + ۴ \Rightarrow ۲x > ۴ \Rightarrow x > ۲$$

$$۳) ۸^{\frac{۳x}{۲}+1} < (\sqrt[۳]{2})^{\Delta x}$$

$$\text{حل) } \frac{۹x}{۲} + ۳ < \frac{\Delta x}{۳} \Rightarrow ۲۷x + ۱۸ < ۱۰x \Rightarrow ۱۷x < -۱۸ \Rightarrow x < \frac{-۱۸}{۱۷}$$

$$۴) \left(\frac{1}{2}\right)^{۳-x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x-۳}$$

تمرین ۸) دامنه توابع زیر را بیابید؟

$$۱) f(x) = \sqrt{9 - 3^{1-x}}$$

$$۲) g(x) = \sqrt{3 - 3^{1-2x}}$$

$$۳) h(x) = \frac{\sqrt{2^x - 8}}{\sqrt{81 - 3^x}}$$

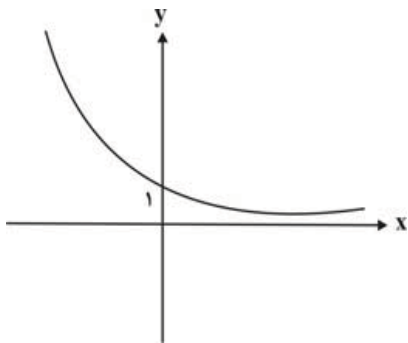
$$\text{حل } ۱) 9 - 3^{1-x} \geq 0 \Rightarrow 3^{1-x} \leq 9 \Rightarrow 1 - x \leq 2 \Rightarrow x \geq -1$$

$$۲) 3 - 3^{1-2x} \geq 0 \Rightarrow 3^{1-2x} \leq 3 \Rightarrow 1 - 2x \leq 1 \Rightarrow x \geq 0$$

$$۳) \begin{cases} 2^x - 8 \geq 0 \Rightarrow 2^x \geq 8 \Rightarrow x \geq 3 \\ 81 - 3^x > 0 \Rightarrow 3^x < 81 \Rightarrow x < 4 \end{cases} \Rightarrow 3 \leq x < 4$$

تست های تابع نمایی:

۱- اگر نمودار تابع $y = (a^2 - 4a + 4)^x$ به صورت مقابل باشد، حدود a را تعیین کنید؟



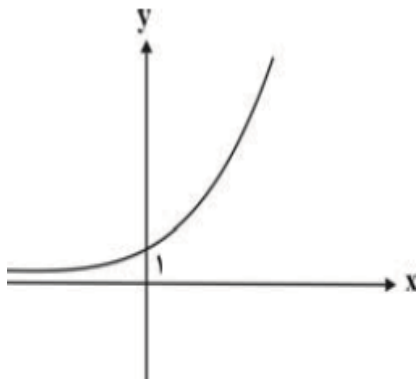
$$0 < a^2 - 4a + 4 < 1 \Rightarrow 0 < |a - 2| < 1 \quad a > 1 \quad (1)$$

$$0 < a < 3 \quad (2)$$

$$1 < a < 3 \quad (3)$$

$$a < 3, a > 0 \quad (4)$$

۲- اگر نمودار تابع $y = (-a^2 + 3a - 1)^x$ به صورت مقابل باشد، حدود a را تعیین کنید؟



$$a > 1 \quad (1) \quad a > 2 \quad (2) \quad 1 < a < 2 \quad (3) \quad a < 0 \quad (4)$$

$$-a^2 + 3a - 1 > 1 \Rightarrow -a^2 + 3a - 2 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - 3a + 2 < 0 \Rightarrow (a - 2)(a - 1) < 0 \Rightarrow 1 < a < 2$$

۳- اگر تابع $f(x) = 5^{x-1} + 3$ و مقدار $f^{-1}(t) = 1$ ، مقدار t چقدر است؟

$$3 \quad (1) \quad 5 \quad (2) \quad 8 \quad (3) \quad 13 \quad (4)$$

$$f^{-1}(t) = 1 \Rightarrow f(1) = t \Rightarrow t = 5 + 3 = 8 \quad \text{گزینه ۳}$$

۴- اگر نمودار تابع نمایی $f(x) = a b^x - 1$ از دو نقطه $A(\frac{-1}{4}, \frac{1}{4})$ و $B(1, 11)$ بگذرد، $f(-1)$ کدام است؟

$$\frac{-3}{4} \quad (1) \quad \frac{-1}{2} \quad (2) \quad \frac{-1}{4} \quad (3) \quad \frac{3}{4} \quad (4)$$

حل) گزینه ۳-

$$\begin{cases} A\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{1}{2} = ab^{\frac{-1}{2}} - 1 \Rightarrow \frac{3}{2} = ab^{\frac{-1}{2}} \Rightarrow b^{\frac{3}{2}} = 8 \Rightarrow \sqrt{b} = 2 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow a = 3 \\ B(1, 11) \Rightarrow 11 = ab - 1 \Rightarrow 12 = ab \end{cases}$$

$$f(x) = 3 \times 4^x - 1 \Rightarrow f(-1) = -\frac{1}{4}$$

۵- نمودار تابع $f(x) = 4^{x+a} + b$ محور طول ها و عرض ها را به ترتیب در نقاط ۱ و $\frac{-3}{4}$ قطع می کند. مقدار $a + b$ را

بیابید؟

$$2(1) \quad -2(2) \quad 3(3) \quad -3(4)$$

(حل) گزینه ۲-

$$\begin{cases} (1, 0) \Rightarrow 0 = 4^{1+a} + b \\ \left(0, \frac{-3}{4}\right) \Rightarrow \frac{-3}{4} = 4^a + b \end{cases} \Rightarrow 4^{1+a} - 4^a = \frac{3}{4} \Rightarrow 4^a(4 - 1) = \frac{3}{4} \Rightarrow 4^a(3) = \frac{3}{4} \Rightarrow 4^a = \frac{1}{4} \Rightarrow a = -1 \Rightarrow 1 + b = 0 \Rightarrow b = -1$$

$$\Rightarrow a + b = -2$$

۶- نمودار تابع $f(x) = a \times 3^{x+b} - 12$ محور عرض ها را در نقطه ای به عرض $\frac{-32}{3}$ قطع می کند. این نمودار محور طولها

را در نقطه ای با کدام طول قطع می کند؟

$$1(1) \quad 2(2) \quad 3(3) \quad 4(4)$$

(حل) گزینه ۲-

$$\begin{cases} \left(0, \frac{-32}{3}\right) \Rightarrow \frac{-32}{3} = a \times 3^b - 12 \Rightarrow a \times 3^b = \frac{4}{3} \\ (x, 0) \Rightarrow 0 = a \times 3^{x+b} - 12 \Rightarrow 0 = a \times 3^b \times 3^x = 12 \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

۷- در تابع $f(x) = ab^x$ و $f(-2) = \frac{3}{33}$ ، $f(0) = \frac{3}{2}$ و $b > 0$ مقدار $f\left(\frac{3}{2}\right)$ کدام است؟ تجربی ۹۱

$$6(1) \quad 8(2) \quad 12(3) \quad 24(4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\cdot) = \frac{3}{2} \Rightarrow ab^{\cdot} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{2} \\ f(-2) = \frac{3}{32} \Rightarrow ab^{-2} = \frac{3}{32} \Rightarrow \frac{3}{2} \times b^{-2} = \frac{3}{32} \Rightarrow b^{-2} = \frac{1}{16} \Rightarrow b = 4 \\ f(x) = \frac{3}{2} \times 4^x \Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \times 8 = 12 \end{array} \right. \Rightarrow$$

۸- نمودارهای دو تابع $y = 3^x + \frac{1}{3}$ و $y = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2x}$ در نقطه A متقاطع اند. فاصله ی نقطه A از نقطه $(-1, 1)$ کدام است؟

سراسری ریاضی ۹۶

۱ (۱) $\sqrt{2}$ (۲) ۲ (۳) $\sqrt{5}$ (۴)

حل) گزینه ۳-

$$3^x + \frac{1}{3} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2x} \Rightarrow (3^x)^2 + \frac{1}{3} (3^x) = \frac{1}{3^x} \Rightarrow 3^x = t \Rightarrow t^2 + \frac{1}{3}t - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$3t^2 + 1t - 3 = 0 \Rightarrow t = -3 \text{ ق ق } , t = \frac{1}{3} \text{ ق ق } \Rightarrow 3^x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = -1 \Rightarrow$$

$$y = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-2} = 3 \Rightarrow A(-1, 3) \Rightarrow \sqrt{(3-1)^2 + (-1+1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

۹- فاصله نقطه تلاقی دو منحنی $y = 2^x$ و $y = (\sqrt{2})^{x+1}$ از نقطه $(0, 4)$ کدام است؟

$\sqrt{3}$ (۱) ۴ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴)

حل) گزینه ۳-

$$(\sqrt{2})^{x+1} = 2^x \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}} = x \Rightarrow x + 1 = 2x \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (1, 2) \Rightarrow$$

$$AB = \sqrt{(2-4)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5}$$

۱۰- نمودارهای دو تابع $f(x) = 4^x$ و $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + \frac{3}{2}$ در نقطه A متقاطع اند. فاصله نقطه A از نقطه $\left(\frac{-1}{2}, 1\right)$ کدام

است؟ خارج از کشور ۹۶ ریاضی

۱ (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) ۲ (۴)

حل) گزینه ۲-

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + \frac{3}{2} = 4^x \Rightarrow \frac{1}{4^x} + \frac{3}{2} = 4^x \Rightarrow 1 + \frac{3}{2}(4^x) = (4^x)^2 \Rightarrow 2(4^x)^2 - 3(4^x) - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4^x = t \Rightarrow 2t^2 - 3t - 2 = 0 \Rightarrow t = 2 \text{ ق ق } , \quad t = \frac{-1}{2} \text{ غ ق ق } \Rightarrow t = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$y = 2 \Rightarrow A\left(\frac{1}{2}, 2\right) \Rightarrow AB = \sqrt{(2-1)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{2}$$

۱۱- اگر α و β ریشه های $4^x - 2^x - 3 = 0$ باشند، مقدار $2^{\alpha+\beta}$ کدام است؟

۱ (۳) ۳ (۲) -۳ (۱) -۱ (۴)

$$2^x = t \Rightarrow t^2 - t - 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2^\alpha = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \\ 2^\beta = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1 - 13}{4} = -3$$

۱۲- معادله $3^{x+1} + 3^{-x} - 4 = 0$ چند جواب دارد؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

$$3^x = t \Rightarrow 3t + \frac{1}{t} = 4 \Rightarrow 3t^2 + 1 = 4t \Rightarrow 3t^2 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{4 \pm 2}{6} \Rightarrow$$

$$t = 1, t = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 0, x = -1$$

۱۳- اگر α و β ریشه های معادله $4^x - 3 \times 2^{x+2} + 32 = 0$ باشند، مقدار $\alpha^\beta + \beta^\alpha$ کدام است؟

۱۴ (۱) ۱۷ (۲) ۳۲ (۳) ۱۵ (۴)

$$2^x = t \Rightarrow t^2 - 12t + 32 = 0 \Rightarrow (t-8)(t-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=8 \Rightarrow x=3 \\ t=4 \Rightarrow x=2 \end{cases} \Rightarrow 8+9=17$$

۱۴- در دستگاه معادلات $\begin{cases} x+y = \frac{-1}{2} \\ 4^x + 2^{-y} = 4 \end{cases}$ مقدار x کدام است؟

$$1) \quad \frac{1}{2} (2) \quad -1 (3) \quad \frac{3}{2} (4)$$

$$\begin{cases} y = \frac{-1}{2} - x \\ 4^x + 2^{-y} = 4 \end{cases} \Rightarrow 4^x + 2^{\frac{1}{2}+x} = 4 \Rightarrow t^2 + \sqrt{2}t - 4 = 0 \Rightarrow t = 2\sqrt{2}, t = -\sqrt{2}$$

$$4^x = 2\sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

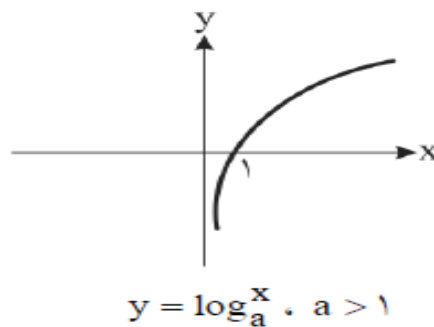
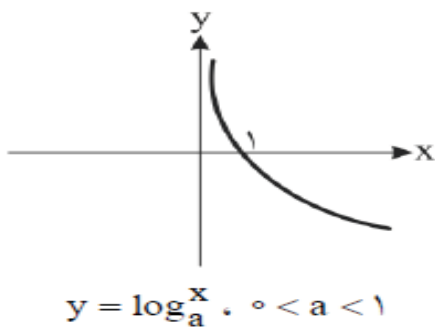
بخش دوم: تابع لگاریتمی

با توجه به اینکه تابع نمایی یک به یک است، لذا وارون پذیر است، به وارون تابع نمایی تابع لگاریتمی می نامند.

$$f(x) = a^x \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_a x$$

به a مبنا لگاریتم و به x آنتی لگاریتم می گویند.

نمودار تابع لگاریتمی به شکل های زیر است:



نکته) رابطه بین تابع نمایی و تابع لگاریتمی:

$$\log_b^a = c \xleftrightarrow{\text{تعریف لگاریتم}} a = b^c$$

تمرین (عبارت های لگاریتمی را به نمایی و بالعکس تبدیل کنید؟

۱) $\log_9^1 = 2$

$$۲) \left(\frac{1}{۲}\right)^۳ = \frac{1}{۸}$$

$$۳) \log_۸ 1 = ۰$$

$$۸^۰ = 1 \quad (۳)$$

$$\log_{\frac{1}{۲}} \frac{1}{۸} = ۳ \quad (۲)$$

$$۸^۱ = ۸ \quad (۱)$$

تمرین (وارون تابع $f(x) = ۳^{x-1} + ۲$ را بیابید؟

$$y = ۳^{x-1} + ۲ \Rightarrow y - ۲ = ۳^{x-1} \Rightarrow x - 1 = \log_۳(y - ۲) \Rightarrow x = \log_۳(y - ۲) + 1 \Rightarrow \text{حل}$$

$$f^{-1}(x) = \log_۳(x - ۲) + 1$$

تمرین نمودار تابع $f(x) = \log_{.۵}(x - 1)$ را رسم کنید؟

تمرین ضابطه وارون تابع $f(x) = \log_۳(۴x - 1)$ را بیابید؟

نکته) اگر $y = \log_{g(x)} f(x)$ باشد، برای بدست آوردن دامنه تابع لگاریتمی به صورت زیر عمل می کنیم:

$$\begin{cases} f(x) > ۰ \\ g(x) > ۰ \Rightarrow \text{اشتراک} \\ g(x) \neq 1 \end{cases}$$

تمرین (دامنه توابع زیر را بیابید؟

$$۱) y = \log_x(x-۳)$$

$$۳) y = \log_{x-1}(x^2 + 2x - ۳)$$

$$۲) y = \log_x \frac{۳-x}{۳+x-1}$$

نکته) لگاریتم اعداد منفی تعریف نشده است.

نکته) قوانین زیر که به قوانین لگاریتم معروف است، در حل مسائل کاربرد زیادی دارد.

قوانین لگاریتم

۱) $\log_a^1 = 0$

۲) $\log_a^a = 1$

۳) $\log_c^{ab} = \log_c^a + \log_c^b \quad (a, b, c \in \mathbb{R}^+, c \neq 1)$

۴) $\log_c^{\frac{a}{b}} = \log_c^a - \log_c^b \quad (a, b, c \in \mathbb{R}^+, c \neq 1)$

۵) $\log_b^{a^n} = n \log_b^a$

۶) $\log_b^{a^m} = \frac{1}{m} \log_b^a$

۷) $\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$

۸) $\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$

۹) $\overset{\log^b}{\underset{a}{\curvearrowright}} \log^c = \overset{\log^a}{\underset{b}{\curvearrowright}} \log^c$

مثال) مقدار لگاریتم های زیر را محاسبه کنید؟

(الف) $\log_{\frac{1}{10}}^{\frac{1000}{1}}$

(ب) $\log_{\sqrt[4]{7}}$

(ج) \log_2^3

تمرین) حاصل عبارات زیر را بیابید؟

۱) $\log_3 54 - \log_3 2 =$

۲) $3 \log \sqrt[3]{4} - \log 50 =$

۳) $2 \log_{1.5} + \log_{1.4} =$

۴) $\log_{1.24} - \frac{1}{2} \log_{1.9} + \log_{1.125} =$

تمرین) حاصل عبارات زیر را بیابید؟

$A = 5 \log_3 \sqrt[5]{81} - 2 \log_7 \frac{1}{49} + 3 \log_{1.0/0.01}$

$B = \log_{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[5]{\sqrt[6]{8\sqrt{32}}}}}}$

$C = \log_{\sqrt[3]{16}} \frac{1}{\sqrt{2}} + \log_{\sqrt[2]{\sqrt{2}}} 32 - \log_{\frac{1}{125}} \sqrt[3]{25}$

تمرین) حاصل عبارات لگاریتمی زیر را بیابید؟

$$(\sqrt{1}) \log_{1^4} - \log_{1^4}$$

$$y^2 + \log_y^3$$

$$81 (\log_9^5 + \log_3 \sqrt{2})$$

معادلات لگاریتمی :

برای حل معادلات لگاریتمی از دو نکته زیر کمک می گیریم :

$$1) \log_a U = k \Leftrightarrow U = a^k$$

$$2) \log_a U = \log_a V \Leftrightarrow U = V$$

تمرین (معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید؟

$$1) \log_3(2x - 1) = \log_3(x + 5)$$

$$2) \log_5 x^2 - 3x = \log_5 - 2x$$

$$3) \log_{99}(2x - 1) + \log_{99}(2x + 1) = 1$$

$$4) \log_2 2 + \log_3 \frac{2x - 1}{x + 1} = 1$$

$$5) 2 \log_3 x - \log_3(x^2 + 2) = -1$$

$$6) \log(2x - 1) + \log(x - 7) = \log 7$$

نکته) اگر $a, b > 1$ و یا $0 < a, b < 1$ در این صورت $\log_b a > 0$.

نکته) اگر a, b یکی بزرگتر از 1 و یکی بین صفر و یک باشند، در این صورت $\log_b a < 0$.

مثال) $\log_7 4 > 0$, $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} > 0$, $\log_7 \frac{1}{3} < 0$, $\log_{\frac{1}{5}} 7 < 0$.

نامعادلات لگاریتمی:

۱) اگر $a > 1$ و $\log_a x > \log_a y$ آنگاه $x > y$.

۲) اگر $0 < a < 1$ و $\log_a x > \log_a y$ آنگاه $x < y$.

توجه) بعد از حل نامعادله به روش های مذکور با توجه به دامنه جواب مورد نظر را انتخاب می کنیم. (اشتراک با دامنه می گیریم.)

تمرین) دامنه تابع $f(x) = \sqrt{-1 - \log_2 \frac{x+4}{5}}$ را بیابید؟

تمرین) نامعادلات لگاریتمی زیر را حل کنید؟

$$1) \log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 4) > 1$$

$$2) \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x+1}{2}\right) < -1$$

$$3) \log_{\frac{1}{5}}(x-1) > 1$$

تست های بخش دوم

۱) با فرض $\log 2 = A$ و $\log 3 = B$ حاصل $\log 5\sqrt[3]{3}$ کدام است؟

$$-A + 1 + \frac{B}{3} \quad \frac{1}{3}(1 - A + B) \quad -A + 1 + \frac{B}{3} \quad 1 + A - \frac{B}{3}$$

حل) گزینه ۲-

$$\log 5\sqrt[3]{3} = \log 5 + \frac{1}{3}\log 3 = 1 - \log 2 + \frac{1}{3}\log 3 = 1 - A + \frac{B}{3}$$

۲) اگر $\log_6 2 = \alpha$ باشد، آنگاه حاصل $\log_9 8$ کدام است؟

$$\frac{3\alpha}{2-2\alpha} \quad \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \quad \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \quad \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$$

حل) گزینه ۴

$$\log_6 2 = \alpha \Rightarrow \log_2 6 = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow 1 + \log_2 3 = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \log_2 3 = \frac{1}{\alpha} - 1 = \frac{1 - \alpha}{\alpha}$$

$$\log_9 8 = \frac{3}{2}\log_3 2 = \frac{3}{2}\left(\frac{\alpha}{1 - \alpha}\right) = \frac{3\alpha}{2 - 2\alpha}$$

۳) اگر $x = \log_9 3\sqrt[3]{3}$ باشد، حاصل $\log_3 \frac{x}{6}$ چقدر است؟

$$-4 \quad -3 \quad -2 \quad -1$$

$$x = \log_9 3\sqrt[3]{3} \Rightarrow x = \frac{\frac{4}{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{2}{3} \Rightarrow \log_3 \frac{x}{6} = \log_3 \frac{1}{9} = -2$$

حل) گزینه ۲-

۴) حاصل $7^{\log_{\sqrt{7}} 2}$ برابر است با:

$$49 \quad 64 \quad \sqrt{8} \quad 8$$

$$7^{\log_{\sqrt{7}} 2} = 7^{\log_{\sqrt{7}} 8} = 8^{\log_{\sqrt{7}} 7} = 64$$

حل) گزینه ۳-

(۵) حاصل $\log_n 2 + \log_n \frac{3}{2} + \dots + \log_n \frac{n}{n-1}$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) $n \log_n 2$ (۴) $\left(\frac{n+1}{n}\right) \log_n 2$

حل) گزینه ۲- $\log_n 2 + \log_n \frac{3}{2} + \dots + \log_n \frac{n}{n-1} = \log_n 2 \times \frac{3}{2} \times \dots \times \frac{n}{n-1} = \log_n n = 1$

(۶) حاصل $\log_a \tan 1^\circ + \log_a \tan 2^\circ + \dots + \log_a \tan 89^\circ$ برابر است با:

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) a (۴) $89!$

حل) گزینه ۱-

$\log_a \tan 1^\circ + \log_a \tan 2^\circ + \dots + \log_a \tan 89^\circ = \log_a (\tan 1^\circ \times \tan 2^\circ \times \dots \times \tan 89^\circ) = 0$

(۷) حاصل $\sqrt{1 \cdot 3 + \frac{1}{4} \log 16}$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{1 \cdot 0}$ (۲) $\sqrt{2 \cdot 0}$ (۳) $\sqrt{2 \cdot 0 \cdot 0}$ (۴) $1 \cdot 0$

حل) گزینه ۳- $\sqrt{1 \cdot 3 + \frac{1}{4} \log 16} = \sqrt{1 \cdot 3 + 1 \cdot \frac{1}{4} \log 16} = \sqrt{1 \cdot 3 + 1 \cdot 1} = \sqrt{4} = 2$

(۸) اگر $\log_3 8 = a$ باشد، آنگاه حاصل $\log_3 12 + \log_3 48$ کدام است؟

(۱) $2a + 2$ (۲) $2a$ (۳) $2a - 2$ (۴) $-2a$

حل) گزینه ۱- $\log_3 8 = a \Rightarrow \log_3 2 = \frac{a}{3}$

$\log_3 12 + \log_3 48 = 1 + 2 \log_3 2 + 4 \log_3 2 + 1 = 2 + 6 \log_3 2 = 2 + 6 \times \frac{a}{3} = 2 + 2a$

(۹) اگر $\log_{15} 3 = a$ باشد، آنگاه حاصل $\log_3 3 \times \log_5 4 \times \log_6 5 \times \dots \times \log_{25} 24$ کدام است؟

(۱) $\frac{1-a}{2a}$ (۲) $\frac{a}{2(1-a)}$ (۳) $\frac{2a}{1-a}$ (۴) $\frac{a}{1-a}$

حل) گزینه ۲- $\log_{15} 3 = a \Rightarrow \log_3 15 = \frac{1}{a} \Rightarrow 1 + \log_3 5 = \frac{1}{a} \Rightarrow \log_3 5 = \frac{1}{a} - 1 = \frac{1-a}{a}$

$\log_3 3 \times \log_5 4 \times \log_6 5 \times \dots \times \log_{25} 24 = \log_{25} 3$

$$\log_3 25 = 2 \log_3 5 = 2 \left(\frac{1-a}{a} \right) \Rightarrow \log_{25} 3 = \frac{a}{2(1-a)}$$

۱۰. حاصل $2^{\log_6 18} \times 3^{\log_6 3}$ کدام است؟

- ۱۲ (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۱۸ (۴)

حل) گزینه ۳-

$$2^{\log_6 18} = 2^{\log_6 3 \times 6} = 2^1 \times 2^{\log_6 3}$$

$$2^{\log_6 18} \times 3^{\log_6 3} = 2 \times 2^{\log_6 3} \times 3^{\log_6 3} = 2 \times 6^{\log_6 3} = 2 \times 3 = 6$$

۱۱. اگر $\log_2 y \sqrt{x} = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل $\log_x \sqrt[3]{x} 8 y^3$ کدام است؟

- $\frac{9}{4}$ (۱) $\frac{4}{9}$ (۲) $\frac{9}{8}$ (۳) $\frac{8}{9}$ (۴)

حل) گزینه ۱-

$$\log_x \sqrt[3]{x} 8 y^3 = \log_x \frac{4}{3} (2y)^3 = \frac{3}{4} \log_x 2y = \frac{9}{4} \log_x 2y$$

$$\log_2 y \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \log_{2^2} x = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_{2^2} x = 1 \Rightarrow \frac{9}{4} \log_x 2y = \frac{9}{4}$$

۱۲. اگر $\log_3 5 = t$ باشد، حاصل $\log_{\sqrt{27}} \frac{1}{125}$ کدام است؟

- $-2t$ (۱) $-2t$ (۲) $-3t$ (۳) $-3t$ (۴)

$$\log_{\sqrt{27}} \frac{1}{125} = \log_{3^{\frac{3}{2}}} 5^{-3} = \frac{-3}{\frac{3}{2}} \log_3 5 = -2t$$

حل) گزینه ۱-

۱۳. اگر لگاریتم عدد $2\sqrt[3]{0.25}$ در مبنای ۸ برابر با A باشد، لگاریتم $(\frac{1}{A} - 1)$ در مبنای عدد ۴ کدام است؟ سراسری

ریاضی ۹۰

- $\frac{2}{3}$ (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

حل) گزینه ۲-

$$\log_8 2\sqrt[3]{0.25} = A \Rightarrow \log_{2^3} \left(2 \times 2^{\frac{-2}{3}} \right) = \log_{2^3} 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$\log_f \left(\frac{1}{A} - 1 \right) = \log_f (9 - 1) = \log_f 8 = \frac{3}{2}$$

۱۴) فاصله ی نقطه برخورد تابع $f(x) = 4^x + 2$ با محور عرض ها تا نقطه برخورد تابع معکوس این تابع با محور طولها کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $3\sqrt{2}$ ۴) $4\sqrt{2}$

حل) گزینه ۳-

$$x = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow A(0, 3)$$

$$y = 4^x + 2 \Rightarrow 4^x = y - 2 \Rightarrow x = \log_4(y - 2) \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_4(x - 2) \Rightarrow$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow B(3, 0) \Rightarrow AB = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

۱۵) دامنه تابع $f(x) = \log_{1-x} 4 - x^2$ کدام است؟

۱) $(-2, 1)$ ۲) $(-2, 2)$ ۳) $(-2, 1) - \{0\}$ ۴) $(-2, 2) - \{0\}$

حل) گزینه ۳- با قرار دادن $x = 0$ در تابع اصلی گزینه های ۱ و ۲ رد می شوند. با قرار دادن $x = 1/5$ گزینه ۴ رد می شود.

۱۶) اگر $4^a = 2\sqrt{2}$ باشد، حاصل $\log_4 4^a + 1$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

حل) گزینه ۲- $2^{2a} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 2a = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{4} \Rightarrow \log_4(4^a + 1) = \log_4 \left(4 \times \frac{3}{4} + 1 \right) = 1$

۱۷) کدام گزینه درست است؟

۲) $\log_5 3 > \log_3 5$

۱) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{100} > \log_{\frac{1}{2}} 100$

$$\log_{\frac{1}{2}} 3 > \log_{\frac{1}{2}} 2 \quad (۴)$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 3 > \log_3 2 \quad (۳)$$

حل) گزینه ۱- گزینه ۳ رد است چون سمت راست نامساوی مثبت و سمت چپ منفی است.

گزینه ۴ رد است چون مبنای بین صفر و یک است و این نامساوی نادرست است، گزینه ۲ با مقایسه مبنای و جلوی لگاریتم رد می شود.

(۱۸) اگر $\log_3 2 = a$ باشد، مقدار $\log_{24} 12$ کدام است؟

$$\frac{1+3a}{1+2a} \quad (۴)$$

$$\frac{1+2a}{1+3a} \quad (۳)$$

$$\frac{1-2a}{1-3a} \quad (۲)$$

$$\frac{1+2a}{3} \quad (۱)$$

حل) گزینه ۴-

$$\log_{12} 24 = 1 + \log_{12} 2$$

$$\log_2 12 = \log_2 4 + \log_2 3 = 2 + \frac{1}{a} = \frac{2a+1}{a} \Rightarrow 1 + \log_{12} 2 = 1 + \frac{a}{2a+1} = \frac{3a+1}{2a+1}$$

(۱۹) اگر $\log_5 3 = a$ باشد، مقدار $\log_{45} 75$ کدام است؟

$$\frac{2a+1}{2+a} \quad (۴)$$

$$\frac{2a}{1+a} \quad (۳)$$

$$\frac{2+a}{1+2a} \quad (۲)$$

$$\frac{2-a}{1-2a} \quad (۱)$$

$$\log_{45} 75 = \frac{\log_5 75}{\log_5 45} = \frac{\log_5 3 \times 25}{\log_5 9 \times 5} = \frac{a+2}{2a+1}$$

حل) گزینه ۲-

(۲۰) اگر $\log 2 = k$ باشد، حاصل $\log(6 - 2\sqrt{5}) + 2 \log(1 + \sqrt{5})$ کدام است؟

$$4k \quad (۴)$$

$$5k \quad (۳)$$

$$3k \quad (۲)$$

$$2k \quad (۱)$$

حل) گزینه ۴-

$$\begin{aligned} \log(6 - 2\sqrt{5}) + 2 \log(1 + \sqrt{5}) &= \log(6 - 2\sqrt{5}) + \log(1 + \sqrt{5})^2 = \log(6 - 2\sqrt{5})(6 + 2\sqrt{5}) \\ &= \log 16 = 4 \log 2 = 4k \end{aligned}$$

(۲۱) اگر $\log_2 \sqrt[5]{e^2} = A$ باشد، حاصل $\log_{\sqrt{e}} 32$ کدام است؟

$$\frac{4}{A} \quad (1)$$

$$\frac{2}{A} \quad (2)$$

$$\frac{A}{4} \quad (3)$$

$$\frac{A}{2} \quad (4)$$

حل) گزینه ۱-

$$\log_r \sqrt[5]{e^r} = A \Rightarrow \log_r e^{\frac{r}{5}} = \frac{r}{5} \log_r e = A \Rightarrow \log_r e = \frac{5A}{r}$$

$$\log_{\sqrt{e}} 32 = \log_{e^{\frac{1}{2}}} 2^5 = \frac{5}{\frac{1}{2}} \log_e 2 = 10 \times \frac{2}{5A} = \frac{4}{A}$$

(۲۲) از دو معادله $\log_3 x + \log_3 y = 2$ و $x^2 + y^2 = 46$ لگاریتم $x + y$ بر مبنای ۴ کدام است؟

$$1/5 \quad (1)$$

$$2 \quad (2)$$

$$3 \quad (3)$$

$$2/5 \quad (4)$$

حل) گزینه ۱

$$\log_3 x + \log_3 y = 2 \Rightarrow \log_3 xy = 2 \Rightarrow xy = 9$$

$$x^2 + y^2 = 46 \Rightarrow (x + y)^2 - 2xy = 46 \Rightarrow (x + y)^2 = 46 + 18 = 64 \Rightarrow x + y = 8$$

$$\log_4 x + y = \log_4 8 = \frac{3}{2}$$

(۲۳) اگر لگاریتم a در پایه $\sqrt{3}$ برابر با $\frac{4}{3}$ باشد، آنگاه لگاریتم $(a^3 + 7)$ در پایه ۸ کدام است؟

$$\frac{2}{3} \quad (1)$$

$$\frac{4}{3} \quad (2)$$

$$\frac{19}{24} \quad (3)$$

$$\frac{7}{4} \quad (4)$$

$$\log_{\sqrt{3}} a = \frac{4}{3} \Rightarrow a = 3^{\frac{4}{3}} \Rightarrow \log_8 (a^3 + 7) = \log_8 16 = \frac{4}{3} \quad \text{حل) گزینه ۲-}$$

(۲۴) اگر $\log_{12} 3 = a$ باشد، حاصل $\log_{27} 26 \times \log_{27} 2 \times \log_4 3 \times \log_3 2$ برابر است با:

$$\frac{1}{6a} \quad (1)$$

$$\frac{1-a}{6a} \quad (2)$$

$$\frac{1-a}{3a} \quad (3)$$

$$\frac{1}{3a} \quad (4)$$

$$\log_3 2 \times \log_4 3 \times \log_{27} 26 \times \log_{27} 2 = \log_{27} 2 = \frac{1}{3} \log_3 2 \quad \text{حل) گزینه ۲-}$$

$$\log_{12} 3 = a \Rightarrow \log_3 12 = \frac{1}{a} \Rightarrow 1 + 2 \log_3 2 = \frac{1}{a} \Rightarrow 2 \log_3 2 = \frac{1}{a} - 1 \Rightarrow \log_3 2 = \frac{1-a}{2a}$$

$$\frac{1}{3} \log_3 2 = \frac{1}{3} \left(\frac{1-a}{2a} \right) = \frac{1-a}{6a}$$

(۲۵) اگر $3^{2a-1} = 9\sqrt[3]{3}$ باشد، مقدار لگاریتم $27a + 36$ در مبنای $\sqrt{3}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۸ (۳) ۳ (۴) ۴

حل) گزینه ۲-

$$3^{2a-1} = 9\sqrt[3]{3} \Rightarrow 3^{2a-1} = 2 \cdot 3^{\frac{1}{3}} \Rightarrow 2a-1 = \frac{1}{3} \Rightarrow 2a = \frac{4}{3} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$\log_{\sqrt{3}} 27a + 36 = \log_{\sqrt{3}} 81 = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$$

(۲۶) اگر $\log_2 5 = x$ و $\log_2 3 = y$ باشند، حاصل $\log_{15} 10$ بر حسب x و y کدام است؟

- (۱) $\frac{x-1}{x+y}$ (۲) $\frac{x+1}{x+y}$ (۳) $\frac{x+1}{x-y}$ (۴) $\frac{y-1}{x+y}$

حل) گزینه ۲-

$$\log_{15} 10 = \frac{\log_2 10}{\log_2 15} = \frac{1 + \log_2 5}{\log_2 3 + \log_2 5} = \frac{1+x}{x+y}$$

(۲۷) اگر $\log 2 = 2 + \log \frac{2}{3} + \log \frac{3}{4} + \dots + \log \frac{n}{n+1}$ باشد، مقدار $\log_3 \frac{n}{11}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

حل) گزینه ۲-

$$\log 2 = 2 + \log \frac{2}{3} + \log \frac{3}{4} + \dots + \log \frac{n}{n+1} \Rightarrow \log 2 = 2 + \log \frac{2}{n+1}$$

$$\Rightarrow \log 2 = 2 + \log 2 - \log n + 1 \Rightarrow \log n + 1 = 2 \Rightarrow n + 1 = 10 \Rightarrow n = 9$$

$$\log_3 \frac{n}{11} = \log_3 9 = 2$$

۲۸) جواب معادله ی $\log(x + 4) = \frac{1}{2} \log(2x + 11)$ کدام است؟

- ۰ (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۵ (۴)

حل) گزینه ۲-

$$\log(x + 4) = \frac{1}{2} \log(2x + 11) \Rightarrow (x + 4)^2 = \sqrt{2x + 11} \Rightarrow x^2 + 8x + 16 = 2x + 11$$

$$x^2 + 6x + 5 = 0 \Rightarrow x = -1, x = -5$$

۲۹) اگر $\log_{x-1} 4 + \log_3 \frac{1}{9} = 0$ باشد، آنگاه حاصل $\log_{\sqrt{3}} x$ کدام است؟

- ۰ (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴)

حل) گزینه ۴-

$$\log_{x-1} 4 + \log_3 \frac{1}{9} = 0 \Rightarrow \log_{x-1} 4 = -\log_3 \frac{1}{9} \Rightarrow \log_{x-1} 4 = 2 \Rightarrow (x-1)^2 = 4$$

$$\begin{cases} x - 1 = -2 \Rightarrow x = -1 \text{ غ ق} \\ x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow \log_{\sqrt{3}} x = 2 \end{cases}$$

۳۰) با فرض اینکه $\log(x + 1) = \frac{1}{3} \log(x^3 + x^2 + 3)$ باشد، حاصل $\log_3(4|x| + 1)$ کدام است؟

- ۲ (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴)

حل) گزینه ۲-

$$\log(x + 1) = \frac{1}{3} \log(x^3 + x^2 + 3) \Rightarrow (x + 1)^3 = x^3 + x^2 + 3 \Rightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^3 + x^2 + 3$$

$$= x^3 + x^2 + 3 \Rightarrow 2x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\log_3(4|x| + 1) = \log_3 3 = 1$$

(۳۱) معادله $\log_x(x^3 - 2x) = 2$ چند ریشه دارد؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۱ (۳) ۰ (۴)

حل) گزینه ۳-

$$\log_x(x^3 - 2x) = 2 \Rightarrow (x^3 - 2x) = x^2 \Rightarrow x^3 - x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 - x - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \text{ غ ق ق} \\ x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ غ ق ق}, x = 2 \end{cases}$$

(۳۲) اگر $\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0 \\ x^2 - 3y^2 = 4 \end{cases}$ باشد، مقدار x کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

حل) گزینه ۴-

$$\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \log_2 x - \log_2 y = 0 \Rightarrow \log_2 \sqrt{x} = \log_2 y \Rightarrow x = y^2 \\ x^2 - 3y^2 = 4 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ غ ق ق}, x = 4 \end{cases}$$

(۳۳) اگر $f(x) = \log_3(2x - k)$ و $f^{-1}(3) = 29$ ، مقدار k چقدر است؟

- ۶۹ (۱) ۵۷ (۲) ۵۲ (۳) ۳۱ (۴)

حل) گزینه ۴-

$$f(29) = 3 \Rightarrow 3 = \log_3(2(29) - k) \Rightarrow 27 = 58 - k \Rightarrow k = 58 - 27 = 31$$

(۳۴) تابع با ضابطه $f(x) = a + \log_2(bx - 4)$ از دو نقطه $(2, 6)$ و $(12, 10)$ می‌گذرد، a کدام است؟ سراسری

ریاضی ۹۶

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

حل) گزینه ۳-

$$\begin{cases} (2, 6) \Rightarrow 6 = a + \log_2(2b - 4) \\ (12, 10) \Rightarrow 10 = a + \log_2(12b - 4) \end{cases} \Rightarrow 4 = \log_2(12b - 4) - \log_2(2b - 4) \Rightarrow$$

$$4 = \log_2 \frac{12b - 4}{2b - 4} \Rightarrow 16 = \frac{12b - 4}{2b - 4} \Rightarrow b = 3 \Rightarrow 6 = a + \log_2 2 \Rightarrow a = 5$$

(۳۵) تابع با ضابطه $f(x) = a + \log_2(3x + b)^2$ از دو نقطه $(5, 11)$ و $(21, 15)$ می‌گذرد، a کدام است؟ خارج از

کشور ریاضی ۹۶

۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

حل) گزینه ۳-

$$\begin{cases} (5, 11) \Rightarrow 11 = a + \log_2(15 + b)^2 \\ (21, 15) \Rightarrow 15 = a + \log_2(63 + b)^2 \end{cases} \Rightarrow 4 = \log_2(63 + b)^2 - \log_2(15 + b)^2 \Rightarrow$$

$$4 = \log_2 \frac{(63 + b)^2}{(15 + b)^2} \Rightarrow 4 = 2 \log_2 \frac{63 + b}{15 + b} \Rightarrow 4 = \frac{63 + b}{15 + b} \Rightarrow 60 + 4b = 63 + b$$

$$\Rightarrow 3b = 3 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow 11 = a + \log_2 16^2 \Rightarrow a = 11 - 8 = 3$$

(۳۶) تابع با ضابطه $f(x) = \log_3(ax + b)$ فقط برای $(\frac{-1}{3}, +\infty)$ بامعنی است، اگر $f(4) = 2$ و $f(\frac{-4}{9})$ آنگاه f کدام

است؟ سراسری ریاضی ۹۴

۱ (۴) $\frac{1}{2}$ (۳) -۱ (۲) -۲ (۱)

حل) گزینه ۱-

$$\begin{cases} \frac{-1}{2}a + b = 0 \Rightarrow -a - 2b = 0 \Rightarrow a = 2b \end{cases}$$

$$f(4) = 2 \Rightarrow 2 = \log_3(4a + b) \Rightarrow 9 = 4a + b \Rightarrow 9 = 8b + b \Rightarrow 9b = 9 \Rightarrow b = 1$$

$$a = 2$$

$$f(x) = \log_3(2x + 1) \Rightarrow f\left(\frac{-4}{9}\right) = \log_3\left(2 \times \frac{-4}{9} + 1\right) = -2$$

(۳۷) نمودار تابع $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(ax + b)$ محور طولها را در نقطه ای به طول ۱- و نیمساز ناحیه چهارم را در نقطه ای به

عرض ۱- قطع کرده است. مقدار b کدام است؟ خارج از کشور ۹۴ ریاضی

۳ (۴)

$\frac{5}{2}$ (۳)

۲ (۲)

$\frac{3}{2}$ (۱)

حل) گزینه ۱-

$$\begin{cases} (-1, 0) \Rightarrow 0 = \log_{\frac{1}{3}}(-a + b) \Rightarrow -a + b = 1 \\ (1, -1) \Rightarrow -1 = \log_{\frac{1}{3}}(a + b) \Rightarrow a + b = 2 \Rightarrow 2b = 3 \Rightarrow b = \frac{3}{2} \Rightarrow a = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

(۳۸) اگر $3^a = A$ مقدار $\log_3 9A^2$ بر حسب a کدام است؟ سراسری ریاضی ۹۱

$3 + a^2$ (۴)

$2 + a^2$ (۳)

$3 + 2a$ (۲)

$2 + 2a$ (۱)

حل) گزینه ۱-

$$\log_3 9A^2 = \log_3 9 + 2 \log_3 A = 2 + 2a$$

(۳۹) از دو معادله دو مجهولی، $\begin{cases} 2^{x-y} \times 4^{x+y} = 1 \\ \log y = 2 \log 3 + \log x \end{cases}$ مقدار y کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

حل) گزینه ۳-

$$\begin{cases} 2^{x-y} \times 4^{x+y} = 1 \Rightarrow 2^{3x+2y-7} = 1 \Rightarrow 3x + 2y - 7 = 0 \Rightarrow 3x + 18x - 7 = 0 \\ \log y = 2 \log 3 + \log x \Rightarrow y = 9x \end{cases}$$

$$21x = 7 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 3$$

(۴۰) معادله $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x^2 - 2x} = \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)$ چند جواب دارد؟

۰ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

حل) گزینه ۲-

$$\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x^2 - 2x} = \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow x^2 - 2x = 3 \Rightarrow$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 3$$

(۴۱) از معادله لگاریتمی $\log_3(2x^2 + 1) - \log_3(x + 2) = 1$ ، مقدار لگاریتم $(2x - 1)$ در پایه ۸ کدام است؟

سراسری تجربی ۹۵

$$\frac{2}{3}(۴) \quad \frac{1}{2}(۳) \quad \frac{-1}{2}(۲) \quad \frac{-2}{3}(۱)$$

(حل) گزینه ۴-

$$\log_3(2x^2 + 1) - \log_3(x + 2) = 1 \Rightarrow \log_3\left(\frac{2x^2 + 1}{x + 2}\right) = 1 \Rightarrow \frac{2x^2 + 1}{x + 2} = 3 \Rightarrow$$

$$2x^2 + 1 = 3x + 6 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0 \Rightarrow x = -1, x = \frac{5}{2}$$

$$\log_8(2x - 1) = \log_8 4 = \frac{2}{3}$$

(۴۲) از تساوی $\log_x(3x + 8) = 2 - \log_x(x - 6)$ مقدار $\log_4 x$ کدام است؟ خارج از کشور ۹۳ تجربی

$$\frac{-2}{3}(۴) \quad \frac{2}{2}(۳) \quad \frac{2}{3}(۲) \quad \frac{1}{2}(۱)$$

(حل) گزینه ۳-

$$\log_x(3x + 8) = 2 - \log_x(x - 6) \Rightarrow \log_x(3x + 8) + \log_x(x - 6) = 2 \Rightarrow$$

$$(3x + 8)(x - 6) = x^2 \Rightarrow x^2 - 5x - 24 = 0 \Rightarrow (x - 8)(x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$\log_4 x = \log_4 8 = \frac{3}{2}$$

(۴۳) از تساوی $\log_x(x^2 + 4) = 1 + \log_x 5$ ، مقدار لگاریتم x در پایه ۲ کدام است؟ سراسری تجربی ۹۳

$$۲(۴) \quad \frac{3}{2}(۳) \quad \frac{1}{2}(۲) \quad -۱(۱)$$

(حل) گزینه ۴-

$$\log_x(x^2 + 4) - \log_x 5 = 1 \Rightarrow \log_x \frac{x^2 + 4}{5} = 1 \Rightarrow x^2 + 4 = 5x \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1, x = 4 \Rightarrow \log_2 x = \log_2 4 = 2$$

۴۴) از تساوی $\log(2x - 1) + \frac{1}{4} \log x^2 = \log 3$ مقدار $\log_{\frac{x}{3}}$ کدام است؟ خارج از کشور ریاضی ۸۸

$\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{-1}{4}$ (۲) $\frac{-1}{2}$ (۱)

حل) گزینه ۱-

$$\log(2x - 1) + \log x = \log 3 \Rightarrow x(2x - 1) = 3 \Rightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1, x = \frac{3}{2}$$

$$\log_{\frac{x}{3}} = \log_{\frac{1}{2}} = \frac{-1}{2}$$

۴۵) از معادله لگاریتمی $\log(x^2 - x - 6) - \log(x - 3) = \log(2x - 5)$ مقدار لگاریتم $\sqrt[3]{x+1}$ در پایه ۴ کدام

است؟

1 (۴) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۱)

حل) گزینه ۲-

$$\log(x^2 - x - 6) - \log(x - 3) = \log(2x - 5) \Rightarrow \log \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \log(2x - 5)$$

$$\frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = (2x - 5) \Rightarrow x^2 - x - 6 = 2x^2 - 11x + 15 \Rightarrow x^2 - 10x + 21 = 0 \Rightarrow$$

$$(x - 7)(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 7, x = 3$$

$$\log_{\frac{1}{4}} \sqrt[3]{7+1} = \log_{\frac{1}{4}} \sqrt[3]{8} = \frac{1}{2}$$

۴۶) اگر α, β ریشه های معادله $x^2 - 10x + 1 = 0$ باشند، حاصل $\log \alpha + \log \beta - \log(\alpha + \beta)$ کدام

است؟ خارج از کشور تجربی ۸۸

1 (۴) 0 (۳) -1 (۲) -2 (۱)

حل) گزینه ۱-

$$\log \alpha + \log \beta - \log(\alpha + \beta) = \log \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} = \log \frac{P}{S} = \log \frac{1}{10} = -2$$

۴۷) حاصل $[\log_6 2] + [\log_2 6]$ کدام است؟ آزاد ریاضی ۸۱

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۰

حل) گزینه ۲-

$$\begin{cases} 1 < 2 < 6 \Rightarrow \log_6 1 < \log_6 2 < \log_6 6 \Rightarrow 0 < \log_6 2 < 1 \Rightarrow [\log_6 2] = 0 \\ 4 < 6 < 8 \Rightarrow \log_2 4 < \log_2 6 < \log_2 8 \Rightarrow 2 < \log_2 6 < 3 \Rightarrow [\log_2 6] = 2 \end{cases}$$

۴۸) از معادله $\log_3(x^2 - 1) = 1 + \log_3(x + 3)$ مقدار لگاریتم $(x - 3)$ در مبنای ۴ کدام است؟ سراسری

ریاضی ۸۸

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) $\frac{3}{2}$

حل) گزینه ۳-

$$\log_3(x^2 - 1) = 1 + \log_3(x + 3) \Rightarrow \log_3(x^2 - 1) - \log_3(x + 3) = 1$$

$$\log_3 \frac{x^2 - 1}{x + 3} = 1 \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x + 3} = 3 \Rightarrow x^2 - 1 - 3x - 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow$$

$$(x - 5)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 5, x = -2 \Rightarrow \log_4(x - 3) = \frac{1}{2}$$

۴۹) اگر $\log a$ و $\log b$ ریشه های معادله $x^2 - 4mx - 30 = 0$ باشند، آنگاه کسر $\frac{\log(ab)}{\log a \times \log b}$ برابر است با:

- ۱ (۱) $\frac{2m}{30}$ ۲ (۲) $\frac{-2m}{30}$ ۳ (۳) $\frac{2m}{15}$ ۴ (۴) $\frac{-2m}{15}$

$$\frac{\log(ab)}{\log a \times \log b} = \frac{\log a + \log b}{\log a \times \log b} = \frac{S}{P} = \frac{4m}{-30} = \frac{-2m}{15} \quad \text{حل) گزینه ۴-}$$

۵۰) مجموعه جواب نامعادله $\log_x(-x + 3) < 1$ کدام است؟

- ۱ (۱) $(1, 3)$ ۲ (۲) $(\frac{3}{2}, 3)$ ۳ (۳) $\{1\} - (0, 3)$ ۴ (۴) $(0, 1)$

حل) گزینه ۲- با قرار دادن $x = \frac{3}{2}$ گزینه های ۱ و ۳ رد می شوند.

فصل هفتم: حد و پیوستگی

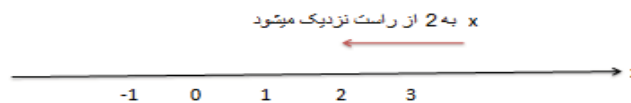
در این بخش می‌خواهیم رفتار یک تابع مانند f را در اطراف نقطه $x = a$ بررسی کنیم. یعنی می‌خواهیم بدانیم اگر مقادیر x به a نزدیک شود (میل کند) مقادیر f به چه عددی نزدیک می‌شود، این مفهوم را حد گیری از تابع f در نقطه $x = a$ می‌نامند. این مفهوم را در ریاضی به صورت زیر نمایش می‌دهند.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

مفهوم میل کردن: وقتی می‌گوییم x به عدد a میل می‌کند یعنی اینکه مقادیر x به مقدار a نزدیک می‌شود.

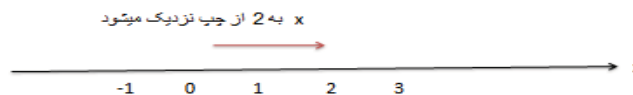
میل کردن از راست:

وقتی می‌گوییم x به a از سمت راست میل می‌کند، $(x \rightarrow a^+)$ یعنی اینکه x در اطراف نقطه a از مقادیر بیشتر از a به a نزدیک می‌شود.



میل کردن از چپ:

وقتی می‌گوییم x به a از سمت چپ میل می‌کند، $(x \rightarrow a^-)$ یعنی اینکه x در اطراف نقطه a از مقادیر کمتر از a به a نزدیک می‌شود.



حدود یکطرفه (حد چپ و راست):

حد راست: اگر f در بازه چون (a, b) تعریف شده باشد. گوییم حد تابع f از سمت راست برابر با l_1 است، هرگاه مقادیر x از سمت راست به a نزدیک شوند، مقادیر $f(x)$ به عدد l_1 نزدیک می‌شوند.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l_1$$

حد چپ: اگر f در بازه چون (c, a) تعریف شده باشد. گوییم حد تابع f از سمت چپ برابر با l_1 است، هرگاه مقادیر x از سمت چپ به a نزدیک شوند، مقادیر $f(x)$ به عدد l_1 نزدیک می شوند.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l_2$$

حد تابع در یک نقطه:

اگر f در اطراف نقطه a (بجز احتمالاً در نقطه a) تعریف شده باشد. اگر مقادیر x به a نزدیک شوند و مقادیر f به عدد l نزدیک شوند گوییم حد تابع f در نقطه a برابر با l است و می نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

نتیجه: حد تابع f در نقطه $x = a$ موجود است اگر و فقط اگر حد راست و حد چپ موجود و برابر با هم باشند.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

نتیجه: اگر حد راست و چپ تابع f در نقطه $x = a$ دو مقدار متمایز شود، گوییم f در این نقطه حد ندارد.

تمرین) با توجه به نمودار تابع f زیر حدود خواسته شده را بدست آورید؟

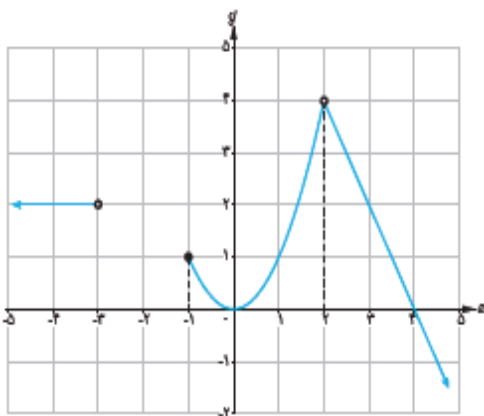
الف) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \dots$

ب) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \dots$

ج) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \dots$

د) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \dots$

ه) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \dots$



نکته) شرط لازم برای اینکه تابع f در دارای حد باشد آنست که تابع f در اطراف نقطه a تعریف شده باشد و اگر فقط از طرف چپ یا راست نقطه a تعریف شده باشد، گوییم تابع f در این نقطه حد ندارد.

تمرین (نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x-2}$ را رسم کنید و حدود زیر را محاسبه کنید؟

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \dots$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \dots$

ج) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \dots$

تمرین (نمودار توابع زیر را رسم کنید و حد توابع را در نقاط داده شده بررسی کنید؟

۱) $f(x) = \sqrt{3-x}$, $x = 3$

۲) $g(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$, $x = 2$

۳) $h(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 1 & , x > 0 \\ -x^2 + 2 & , x < 0 \end{cases}$, $x = 0$

۴) $f(x) = [x] - 1$, $x = -1$

تمرین (ابتدا دامنه تابع $f(x) = \frac{x}{[x]-2}$ را بدست آورید و سپس در مورد حد تابع f در نقطه $x = 2$ بحث کنید؟

حل) $[x] - 2 = 0 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow 2 \leq x < 3 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - [2, 3)$

$\Rightarrow D_f = (-\infty, 2) \cup [3, +\infty)$

چون از سمت راست عدد دو نمی توان به ۲ نزدیک شد، چون تابع در این قسمت تعریف نشده است، پس حد این تابع در نقطه موجود نیست.

تمرین) وجود حد تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید؟

حل) ابتدا دامنه این تابع را می یابیم،

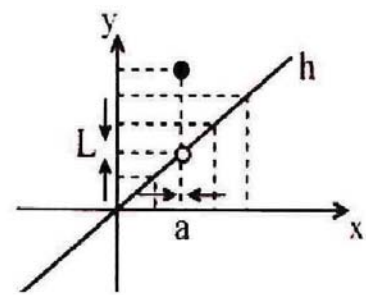
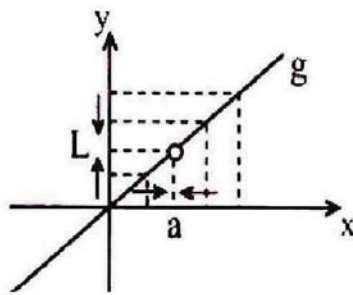
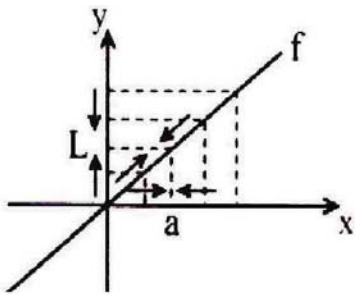
$$x^2 - x \geq 0 \Rightarrow x(x - 1) \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \text{ یا } x \geq 1 \Rightarrow x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$$

چون این تابع از سمت چپ عدد یک تعریف نشده است، لذا حد این تابع در نقطه $x = 1$ موجود نیست.

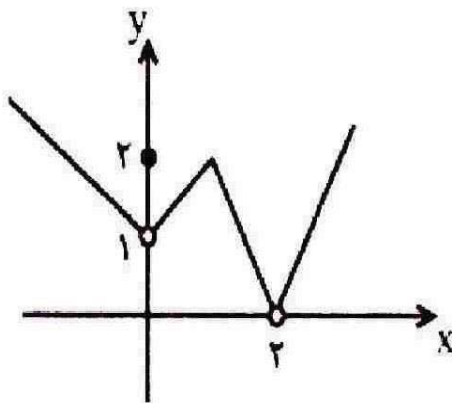
تمرین (نمودار تابع $f(x) = x - [x]$ را در بازه $[-2, 2]$ رسم کنید و در مورد حد این تابع در نقطه $x = 1$ بحث کنید؟

تمرین (نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ را رسم کنید و حد آن را در $x = 0$ بررسی کنید؟

نکته) حد تابع در یک نقطه به مقدار تابع در آن نقطه بستگی ندارد، بلکه فقط به مقدار تابع در اطراف آن نقطه وابسته است.



تمرین) با توجه به نمودار زیر مقادیر خواسته شده را بیابید؟



الف) $f(0) = \dots, f(2) = \dots$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \dots$

ج) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \dots$

(حل)

ت. ن. $f(0) = 2, f(2) = 0$ (الف)

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ ج) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$

تمرین نموداری از یک تابع رسم کنید که :

الف) در اطراف نقطه ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه دارای حد باشد.

ب) در اطراف نقطه ۲ تعریف شده باشد ولی در این نقطه حد نداشته باشد.

ج) در اطراف نقطه ۲ تعریف شده باشد حد داشته باشد ولی با مقدار در نقطه ۲ برابر نباشد.

قضایای حد :

۱) حد تابع ثابت $f(x) = k$ در هر نقطه مانند a برابر با همان مقدار ثابت k است. مثال: $\lim_{x \rightarrow 5} 2 = 2$.

۲) حد تابع همانی $f(x) = x$ در هر نقطه a برابر با همان نقطه a است.

۳) اگر تابع f و g در نقطه $x = a$ دارای حد باشند و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$ آنگاه داریم :

$$۱) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l + m$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l - m$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l \times m$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{l}{m}, \quad m \neq 0$$

۴) اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ و k عددی ثابت باشد، در این صورت داریم :

$$\lim_{x \rightarrow a} (k f(x)) = k \cdot l$$

۵) اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ ، در این صورت داریم :

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = l^n$$

۶) اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ ، در این صورت داریم :

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \begin{cases} \sqrt[n]{l} \geq 0, & n = \text{زوج} \\ \sqrt[n]{l}, & n = \text{فرد} \end{cases}$$

(۷) گر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ در این صورت داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |l|$$

نکته) عکس مطلب فوق درست نیست، چرا؟

نتیجه) تمام قوانین فوق برای حد راست و چپ نیز برقرار است.

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a, \quad \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a \quad (\text{۸})$$

تمرین) اگر f در $x = 1$ حد داشته باشد و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x)-1}{f(x)+1} = 1$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ را بیابید؟

(حل) فرض کنید، $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = l$ در واقع داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x)-1}{f(x)+1} = 1 \Rightarrow \frac{2l-1}{l+1} = 1 \Rightarrow 2l-1 = l+1 \Rightarrow l = 2$$

تمرین) حد های زیر را بدست آورید؟

۱) $\lim_{x \rightarrow 0} -\sqrt{x} = -\sqrt{0}$

۲) $\lim_{x \rightarrow -2} (-2x^2 + x + 3) = -2(-2)^2 + (-2) + 3 = -8 - 2 + 3 = -7$

۳) $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x-3} = \text{وجود ندارد} \iff \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{x-3} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x-3} = 0 \end{cases}$

۴) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x + \cos x = \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} = 1$

۵) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - 3x + 4} = \sqrt{4} = 2$

۶) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} (\sin^2 x + \sin 5x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$۷) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 1}{\cos x} = \frac{0 + 1}{1} = 1$$

$$۸) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(x-1)}{x-2} = \frac{1}{-1} = -1$$

نکته) اگر تابع f در حد نداشته باشد و تابع g در حد داشته باشد، آنگاه توابع $f+g, f-g, \frac{f}{g}$ در حد ندارند. البته ممکن است $f \times g$ و $\frac{g}{f}$ در حد داشته باشند.

نکته) اگر f و g هر دو در $x = a$ حد نداشته باشند، ممکن است توابع $f+g, f-g, f \times g, \frac{f}{g}$ تابع $f \circ g$ در $x = a$ حد داشته باشند.

نکته) اگر حد تابع $f+g$ در نقطه $x = a$ موجود باشد نمی توان نتیجه گرفت که حد توابع f و g نیز در $x = a$ موجودند.

نکته) اگر حد تابع $f+g$ و f در نقطه $x = a$ موجود باشند می توان نتیجه گرفت که حد تابع g نیز در $x = a$ موجود است.

تست) اگر f در نقطه حد داشته باشد و g در $x = a$ حد نداشته باشد کدام تابع زیر در $x = a$ حتما حد ندارد؟

$$\frac{f}{g} + g \quad (۴) \quad \frac{f}{g} + f \quad (۳) \quad \frac{g}{f} + g \quad (۲) \quad \frac{g}{f} + f \quad (۱)$$

حل) گزینه ۲- بر طبق نکات بالا

محاسبه حد توابع شامل جز صحیح: برای محاسبه حد تابع $f(x) = [x]$ داریم:

الف) اگر $a \in \mathbb{Z}$ باشد در این صورت حد چپ و راست را به صورت زیر محاسبه می کنیم.

$$۱) \lim_{x \rightarrow a^+} [x] = [a^+] = a \quad , \quad ۲) \lim_{x \rightarrow a^-} [x] = [a^-] = a - 1$$

ب) اگر $a \notin \mathbb{Z}$ باشد، در این صورت نیازی به محاسبه حد راست و چپ نیست و کافی است آن عدد را به جای x فقط جایگذاری کنیم. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a} [x] = [a]$$

نکته) اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ آنگاه:

(۱) اگر $l \notin \mathbb{Z}$,

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)] = [l]$$

(۲) اگر l عددی صحیح باشد و مقادیر f در اطراف نقطه a از l بیشتر باشد، آنگاه داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)] = [l^+] = l$$

(۳) اگر l عددی صحیح باشد و مقادیر f در اطراف نقطه a از l کمتر باشد، آنگاه داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)] = [l^-] = l - 1$$

تمرین: حدهای زیر را بدست آورید؟

$$۱) \lim_{x \rightarrow 1} x - [x]$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} x - [x] = 1 - [1^-] = 1 - 0 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} x - [x] = 1 - [1^+] = 1 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 3}{[x] - 1} = \dots$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x - 3}{[x] - 1} = \frac{4 - 3}{[4^+] - 1} = \frac{1}{3} \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x - 3}{[x] - 1} = \frac{4 - 3}{[4^-] - 1} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow \frac{-1}{2}} \frac{1}{[x]} = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{-1}{2}} \frac{1}{[x]} = \frac{1}{[\frac{-1}{2}]} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow 6} \left[\frac{x}{2} \right] + \left[\frac{x}{3} \right] = \dots$$

$$\begin{cases} x \rightarrow 6^+ \Rightarrow x > 6 \Rightarrow \frac{x}{2} > 3 \Rightarrow [3^+] = 3 \\ x \rightarrow 6^+ \Rightarrow x > 6 \Rightarrow \frac{x}{3} > 2 \Rightarrow [2^+] = 2 \end{cases} \Rightarrow x \rightarrow 6^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 6^+} \left[\frac{x}{2} \right] + \left[\frac{x}{3} \right] = 5$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow 6^- \Rightarrow x < 6 \Rightarrow \frac{x}{2} < 3 \Rightarrow [3^-] = 2 \\ x \rightarrow 6^- \Rightarrow x < 6 \Rightarrow \frac{x}{3} < 2 \Rightarrow [2^-] = 1 \end{array} \right. \Rightarrow x \rightarrow 6^- \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 6^+} \left[\frac{x}{2} \right] + \left[\frac{x}{3} \right] = 3$$

$$۵) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x] + [-x]}{-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x] + [-x]}{-3} = \frac{-1}{-3}$$

$$۶) \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} \left[\frac{1}{x} \right] + \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \left[\frac{1}{x} \right] = \dots$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow (\frac{1}{2})^- \Rightarrow x < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{x} > 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \left[\frac{1}{x} \right] = [2^+] = 2 \\ x \rightarrow (\frac{1}{2})^+ \Rightarrow x > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{x} < 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} \left[\frac{1}{x} \right] = [2^-] = 1 \end{array} \right. \Rightarrow 2 + 1 = 3$$

$$۷) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{[x] + [-x]} = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{[x] + [-x]} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$۸) \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{x}{2} \right] + [\sqrt{x}] = \dots$$

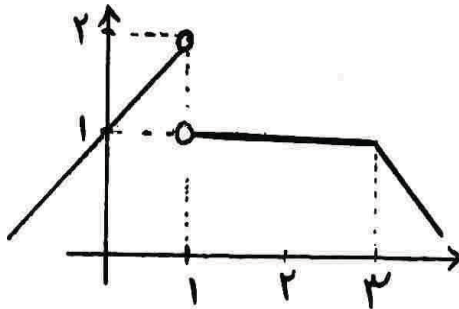
$$\left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow 2^+ \Rightarrow x > 2 \Rightarrow \frac{x}{2} > 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{x}{2} \right] = [1^+] = 1 \\ x \rightarrow 2^- \Rightarrow x < 2 \Rightarrow \frac{x}{2} < 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{x}{2} \right] = [1^-] = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2} [\sqrt{x}] = 1 \end{array} \right.$$

$$۹) \lim_{x \rightarrow 0^-} [x^2 - 2x + 2] = \dots$$

$$y = x^2 - 2x + 2 \Rightarrow y = (x - 1)^2 + 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} [x^2 - 2x + 2] = [2^+] = 2$$

تمرین) با توجه به نمودار زیر مقدار $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(f(x))$ را بیابید؟

$$x \rightarrow 3^+ \Rightarrow f(x) \rightarrow 1^- \Rightarrow f(f(x)) \rightarrow 2$$



محاسبه حد توابع قدرمطلقی:

۱) اگر a ریشه داخل قدر مطلق باشد، برای محاسبه حد تابع حتما باید تابع داخل قدر مطلق تعیین علامت شود. یعنی در واقع باید حد چپ و راست محاسبه شود.

۲) اگر a ریشه داخل قدر مطلق نباشد، نیازی به تعیین علامت تابع داخل قدر مطلق نیست و فقط کافی است مقدار a به جای x در تابع داخل قدر مطلق جایگذاری کنیم.

تمرین) حد توابع زیر را بدست آورید؟

$$۱) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2|}{x - 2}$$

$$\text{حل) } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x - 2|}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2}{x - 2} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x - 2|}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x - 2)}{x - 2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{حد ندارد}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x - 3|}{x - 3} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x - 3}{x - 3} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-(x - 3)}{x - 3} = -1 \end{cases}$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = \frac{x}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = \frac{-x}{x} = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{حد ندارد}$$

نکته) حد تابع چند جمله ای $P(x)$ برابر با مقدار آن تابع در آن نقطه است. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 - 3x + 2) = 2 \times 0^2 - 3 \times 0 + 2 = 2 \quad (\text{مثال})$$

بررسی حدود توابع کسری در حالت مبهم $\frac{0}{0}$:

الف) توابع کسری شامل عبارات چند جمله ای: برای رفع ابهام در این حالت کافی است عامل صفر را یافته و عامل صفر را از صورت و مخرج حذف می کنیم. اگر $x \rightarrow a$ عامل صفر به شکل $x - a$ است. برای یافتن این عامل صفر کافی است از سه روش زیر استفاده کنیم: (۱) فاکتورگیری در صورت و مخرج (۲) تجزیه به کمک اتحادهای جبری مهم که در زیر ذکر شده است.

(۳) تقسیم کردن صورت و مخرج بر عامل صفر

$$۱) a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \quad \text{مزدوج}$$

$$۲) x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b) \quad \text{جمله مشترک}$$

$$۳) a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) \quad \text{چاق و لاغر}$$

$$۴) a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + 1)$$

ب) توابع کسری شامل عبارات رادیکالی: برای رفع ابهام در این حالت کافی است صورت و مخرج یا هر دو را گویا می کنیم.

ج) توابع کسری شامل عبارات مثلثاتی: برای رفع ابهام در این حالت از روابط مثلثاتی استفاده می کنیم، همچنین روابط زیر نیز مهم هستند.

$$۱) 1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$$

$$۲) 1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$$

تمرین) حد های زیر را در صورت وجود محاسبه کنید؟

$$۱) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{2}{2-1} = 2$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x^2 - x - 2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)(x+1)}{x-2} = 6$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 12}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)} = 4$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^2 - 4x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{x(x^2 - 4)} = \frac{8}{2} = 4$$

$$۵) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\cos x + \sin x) = \sqrt{2}$$

$$۶) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin x} = 0$$

$$۷) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x \cdot \cos^2 x}{1 - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x \cdot (1 - \sin^2 x)}{1 - \sin x} = 0$$

$$۸) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2} + 2)} = \frac{1}{16}$$

$$۹) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{4}{1}$$

$$۱۰) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x-2} = \frac{12}{1} = 12$$

$$۱۱) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - \sqrt{x})(x + \sqrt{x})(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x})(\sqrt{x} + 1)} = \frac{2}{2} = 1$$

$$۱۲) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 + 1}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{5}{1} = 5$$

$$۱۳) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{|\sin x|}{x - \pi} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{-\sin x}{x - \pi} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin(\pi + t)}{t} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin x}{x - \pi} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi + t)}{t} = -1 \end{cases}$$

$$۱۴) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x+6} - 2}{\sqrt{x+14} - 4} =$$

تمرین) حدهای زیر را در صورت وجود بیابید؟

$$۱) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \cos x}{|x| + \cos 2} =$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} [x] + \left[\frac{x}{2} \right] + [-x] = \dots$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 0} [\sin x] = \dots$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} [\sin x] = \dots$$

$$۵) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sqrt{1 - \sin x} = \dots$$

$$۶) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \right] = \dots$$

تمرین) با فرض $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x > 2 \\ ax + b, & x < 2 \end{cases}$ و a و b چنان بیابید که تابع در $x = 2$ دارای حد باشد و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$ باشد.

$$\text{حل) } \begin{cases} 4 + 2 = 2a + b \Rightarrow 2a + b = 6 \\ -a + b = 0 \Rightarrow b = a \end{cases} \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow b = 2, a = 2$$

تمرین) به ازای چه مقدار از m تابع $f(x) = 2[x] - m[x+1] + x$ در $x = 5$ دارای حد است؟

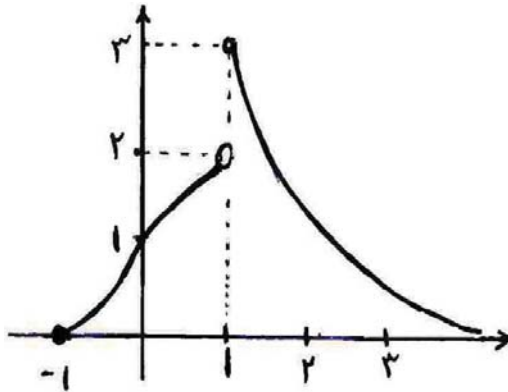
$$\text{حل) } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 5^+} 2[x] - m[x+1] + x = 2[5^+] - m[5^+ + 1] + 5 = 10 - 6m + 5 = 15 - 6m \\ \lim_{x \rightarrow 5^-} 2[x] - m[x+1] + x = 2[5^-] - m[5^- + 1] + 5 = 8 - 5m + 5 = 13 - 5m \end{cases}$$

$$15 - 6m = 13 - 5m \Rightarrow 2 = m$$

تمرین) اگر $f(x) = \begin{cases} x + a[x] + 1, & x \leq 0 \\ \sin x + 2a \cos x, & x > 0 \end{cases}$ باشد، a را چنان بیابید که:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) - f(0) = 7$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \sin 0 + 2a \cos 0 = 2a \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 + a[0^-] + 1 = -a + 1 \Rightarrow 2a - a + 1 + a - 1 = 7 \Rightarrow a = \frac{7}{2} \\ f(0) = -a + 1 \end{cases}$$



تمرین) با توجه به نمودار زیر حدهای زیر را بیابید؟

الف) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(-x) = ..$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x - 3) = \dots$

$$\begin{cases} x \rightarrow (-1)^- \Rightarrow x < -1 \Rightarrow -x > 1 \Rightarrow -x \rightarrow 1^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(-x) = 3 \\ x \rightarrow 3 \Rightarrow x - 3 \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x - 3) = 1 \end{cases}$$

پیوستگی:

تابع f که در بازه I تعریف شده است را در نقطه a از این بازه پیوسته می گوئیم هر گاه سه شرط زیر با هم برقرار باشد،

۱) تابع f در a تعریف شده باشد، یعنی نمودار در این نقطه توپر باشد.

۲) حد تابع f در نقطه a موجود باشد، یعنی حد راست و چپ موجود و با هم برابر باشند.

۳) حد تابع با مقدار تابع در این نقطه با هم برابر باشند.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

پیوستگی راست: اگر حد راست موجود و با مقدار تابع برابر باشد، تابع را در پیوسته راست می گویند.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

پیوستگی چپ: اگر حد چپ موجود و با مقدار تابع برابر باشد، تابع را در پیوسته چپ می گویند.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

تمرین) پیوستگی توابع زیر را در نقاط داده شده بررسی کنید؟

$$1) f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x < 1 \\ x^2, & x \geq 1 \end{cases}, \quad x = 1$$

$$\text{حل) } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2(1) - 3 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = (1)^2 = 1, \quad f(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{حد چپ} \neq \text{حد راست}$$

این تابع حد ندارد، پس در کل پیوسته نیست. اما چون حد راست با مقدار برابر است لذا در این نقطه پیوسته راست است.

$$2) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}, & x \neq 1 \\ -3, & x = 1 \end{cases}, \quad x = 1$$

$$3) g(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{|x - 3|}, & x > 3 \\ 2, & x = 3 \\ 5x - 13, & x < 3 \end{cases}, \quad x = 3$$

$$\text{تمرین) مقدار } a, b \text{ را طوری بیابید که تابع } f(x) = \begin{cases} 3 + ax^2, & x > 2 \\ 7, & x = 2 \\ \frac{b}{x-1} - 1, & x < 2 \end{cases} \text{ در } x = 2 \text{ پیوسته باشد؟}$$

حل) باید حد راست و حد چپ و مقدار موجود و با هم برابر باشند،

$$\begin{cases} \text{حد راست} = 3 + 4a \\ \text{مقدار} = 7 \\ \text{حد چپ} = \frac{b}{2-1} - 1 \end{cases} \Rightarrow 3 + 4a = 7 = b - 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 8 \end{cases}$$

$$\text{تمرین) عدد های } a \text{ و } b \text{ را طوری بیابید که تابع } f(x) = \begin{cases} \frac{|x| + ax}{x}, & x > 0 \\ 2, & x = 0 \\ x^3 + 4b, & x < 0 \end{cases} \text{ در } x = 0 \text{ پیوسته باشد.}$$

نکته) تابع $f(x) = [x]$ در نقاط صحیح ناپیوسته اما در این نقاط پیوسته راست است.

نکته) تابع $f(x) = [kx]$ فقط در نقاطی که داخل جز صحیح را صحیح می کند، پیوسته نیست.

پیوستگی روی بازه:

تابع f روی بازه (a, b) پیوسته است؛ هرگاه، در هر نقطه این بازه پیوسته باشد.
 تابع f روی بازه $[a, b]$ پیوسته است؛ هرگاه f در بازه (a, b) پیوسته باشد و در نقطه a پیوسته راست و در نقطه b پیوسته چپ باشد.

به همین ترتیب می توان پیوستگی روی بازه های نیمه باز $(a, b]$, $[a, b)$ را نیز تعریف کرد.

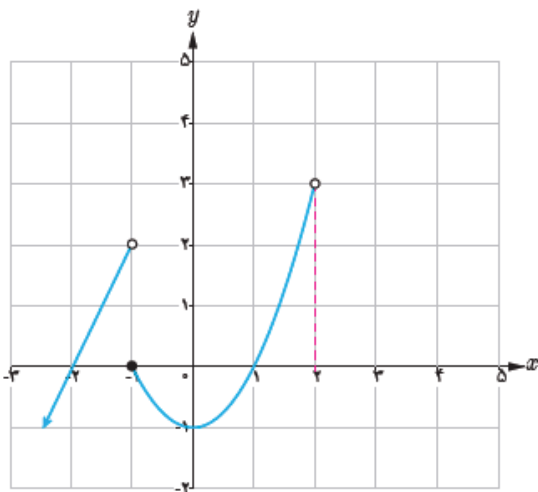
اگر $D_f = \mathbb{R}$ و f در هر نقطه از دامنه اش پیوسته باشد، می گوییم f روی بازه $(-\infty, +\infty)$ پیوسته است.

(مثال) توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ و توابع چند جمله ای در کل \mathbb{R} پیوسته هستند.

(نکته) اگر تابعی روی یک بازه پیوسته باشد، روی هر زیر بازه از آن نیز پیوسته است.

(تمرین) ابتدا نمودار تابع زیر را رسم کنید، سپس پیوستگی این تابع را در بازه های $[-1, 1]$ و $(0, 2)$ بررسی کنید؟

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & x < -1 \\ x^2 - 1 & -1 \leq x < 2 \\ -x + 5 & 2 < x < 5 \end{cases}$$



(حل) ابتدا نمودار این تابع را رسم می کنیم.

این تابع در بازه $(-1, 1)$ پیوسته است، چون در تمام نقاط این

بازه پیوسته است. اما در نقطه $x = -1$ پیوسته نیست و در نقطه

$x = 1$ پیوسته است. پس در کل بازه پیوسته نیست. در بازه

$(0, 2)$ این تابع پیوسته است چون در تمامی نقاط این بازه

پیوسته است.

تمرین) مقدار b را طوری بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} [x] + b x, & x > 1 \\ \frac{-1}{2}, & x = 1 \\ \frac{|x-1|}{x^2-1}, & x < 1 \end{cases}$ در $x = 1$ پیوسته باشد.

$$\begin{cases} \text{حد راست} = 1 + b \\ \text{حد چپ} = \frac{-1}{2} \\ \text{مقدار} = \frac{-1}{2} \end{cases} \Rightarrow 1 + b = -\frac{1}{2} \Rightarrow b = -\frac{3}{2}$$

تمرین) عدد های a و b را طوری بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}, & x > 0 \\ a + 1, & x = 0 \\ [x + 2] + b, & x < 0 \end{cases}$ در $x = 0$ پیوسته باشد.

تمرین) عدد های a و b را طوری بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2-9|}{x-3} + ax + 5, & x > 0 \\ 2, & x = 0 \\ \frac{2x-6}{x^2-5x+6} + bx, & x < 0 \end{cases}$ در $x = 0$ پیوسته باشد.

تست:

۱- اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2a}{x^2-4a^2} = \frac{1}{8}$ باشد، a کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۵

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2a}{x^2-4a^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{ax+2a} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{4a} = \frac{1}{8} \Rightarrow a = 2$$

۲- اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+ax+b}{x-1} = 4$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۰ ۴) ۲

حل) گزینه ۴-

$$\begin{cases} 1+a+b = 0 \\ x^2+ax+b = (x-1)(x+(a+1)) \Rightarrow a+1=3 \Rightarrow a=2 \end{cases}$$

۳- اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-\sqrt{3x-2}}{ax+b} = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل b کدام است؟ تجربی خارج از کشور ۹۵

- ۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) ۲

حل) گزینه ۱-

$$\begin{cases} 2 \square + b = 0 \Rightarrow b = -2 \square \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-\sqrt{3x-2}}{ax+b} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x+2}{(ax+b)(x+\sqrt{3x-2})} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)}{a(x+\frac{b}{a})(x+\sqrt{3x-2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)}{a(x+\sqrt{3x-2})} = \frac{1}{4a} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow b = -1$$

۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2-\sqrt{x+6}}{\sqrt{x^2-4x+4}}$ کدام است؟ تجربی ۹۳ خارج از کشور

- ۱) $\frac{-1}{6}$ ۲) $\frac{-1}{12}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{1}{6}$

حل) گزینه ۲-

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{8 - x - 6}{(x-2)(4 + 2\sqrt[3]{x+6} + \sqrt[3]{(x+6)^2})} = \frac{-1}{12}$$

۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}}$ کدام است؟ تجربی ۸۸ خارج از کشور

۴ (۴) ۲ (۳) -۲ (۲) -۴ (۱)

حل) گزینه ۲-

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{2 - \sqrt{5-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{4-5+x} \times \frac{2 + \sqrt{5-x}}{1 + \sqrt{x}} = \frac{-(2+2)}{2} = -2$$

۶- در تابع $f(x) = \left[\frac{x}{2}\right]$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ کدام است؟

۲ (۴) ۰ (۳) -۱ (۲) ۱ (۱)

$$\begin{cases} x \rightarrow 2^+ \Rightarrow x > 2 \Rightarrow \frac{x}{2} > 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = [1^+] = 1 \\ x \rightarrow 2^- \Rightarrow x < 2 \Rightarrow \frac{x}{2} < 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = [1^-] = 0 \end{cases} \Rightarrow 1 + 0 = 1$$

۷- در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x < -2 \\ 3x + 4, & x > -2 \end{cases}$ مقدار a کدام است؟

مقدار a کدام است؟ (۱) ۳ (۲) ۳/۵ (۳) -۴ (۴) -۴/۵

$$\begin{cases} \text{حد چپ} = 4 + a \\ \text{حد راست} = -2 \end{cases} \Rightarrow 4 + a = \frac{-1}{2} \Rightarrow a = -4/5$$

۸- در تابع با ضابطه $f(x) = (x+a)[x]$ اگر $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$ مقدار a کدام است؟

۰ (۴) -۱ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = (2+a)[2^-] = 2+a \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = (2+a)[2^+] = 2(2+a) \end{cases} \Rightarrow 2+a+4+2a = 3 \Rightarrow 3a = -3 \Rightarrow a = -1$$

۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\tan x - \cot x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{-\sqrt{2}}{4}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\tan x - \cot x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{\sin x - \cos x}{\frac{(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)}{\sin x \cdot \cos x}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

۱۰- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2 \sin^2 x}{\sin x - \cos x}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $-\sqrt{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2 \sin^2 x}{\sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \cos x + \sin x = \sqrt{2}$$

(۱۱) حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 - 3x + 2}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) -۱ (۴) $\frac{-1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{(x - 2)(x - 1)(x + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{(x - 2)(x + \sqrt{x})} = \frac{1}{-2}$$

(۱۲) حاصل $\lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-3x}}{x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{5}{8}$ (۴) $\frac{5}{16}$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-3x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{1 + 2\Box - 1 + 3\Box}{x(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-3x})} = \lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{5}{(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-3x})} = \frac{5}{2}$$

۱۳- در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{|x^2 - 3x + 2|}{x^2 - 1}$ تفاضل حد چپ از حد راست در نقطه $x = 1$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{-1}{2}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-2)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2} \\ \text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = -\frac{1}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

۱۴- حاصل حد $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^3 + x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{2}{4}$ ۳) $\frac{2}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^3 + x^2 - 4}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)((x-2)^2 + x + 2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{4}{3}$$

۱۵- مجموع حد راست و چپ تابع با ضابطه $f(x) = \frac{|x^2-1|}{x-1} + x + 1$ در $x = 1$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{4}$ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) $\frac{1}{2}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^2-1|}{x-1} + x + 1 = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)(x+1)}{x-1} + x + 1 = -(1+1) + 1 + 1 = 0 \\ \text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2-1|}{x-1} + x + 1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} + x + 1 = (1+1) + 1 + 1 = 4 \end{array} \right.$$

۱۶- حاصل حد $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{x + 3}$ کدام است؟

- ۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۲۷ ۴) ۱۲

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x^2 - 3x + 9)}{x + 3} = 27$$

۱۷- حاصل حد $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{4})^+} \left[\frac{-1}{x} \right]$ کدام است؟

- ۱) ۴ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) -۴

$$x \rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^+ \Rightarrow x > \frac{1}{4} \Rightarrow -x < -\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{-1}{x} > -4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{4})^+} \left[\frac{-1}{x} \right] = [(-4)^+] = -4$$

۱۸- حاصل حد $\lim_{x \rightarrow 1} (x - [x])[x]$ کدام است؟

(۴) وجود ندارد.

(۳) ۰

(۲) -۱

(۱) ۱

$$\begin{cases} \text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - [x])[x] = (1 - [1^+])[1^+] = 0 \\ \text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - [x])[x] = (1 - [1^-])[1^-] = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{حد راست} = \text{حد چپ} = 0$$

۱۹- کدام تابع زیر همواره در کل دامنه اش پیوسته نیست؟

$$f(x) = [x + 1] \quad (۴) \quad f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x} \quad (۳) \quad f(x) = \log(-x) \quad (۲) \quad f(x) = |x| \quad (۱)$$

حل) توابع قدر مطلق و لگاریتمی و نمایی در کل دامنه شان پیوسته هستند ولی توابع جز صحیحی در نقاط صحیح پیوسته نیستند.

۲۰- تابع $f(x) = [x] + [-2x]$ چه وضعی در $x = 8$ دارد؟

(۱) پیوسته است. (۲) پیوسته چپ است. (۳) پیوسته راست است. (۴) ناپیوسته است.

حل) گزینه ۴

$$\begin{cases} \text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow 8^+} [x] + [-2x] = 8 + (-17) = -9 \\ \text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 8^-} [x] + [-2x] = 7 + (-16) = -9 \quad \text{مقدار} = -8 \end{cases}$$

$$۲۲- به ازای کدام مقدار a تابع $f(x) = \begin{cases} 3x - [x] & , x < 2 \\ a & , x = 2 \\ x + 2 & , x > 2 \end{cases}$ در $x = 2$ پیوسته است؟ تجربی ۹۲$$

(۴) هیچ مقدار

(۳) ۵

(۲) ۴/۵

(۱) ۴

$$\begin{cases} \text{حد راست} = 2 + 2 = 4 \\ \text{هیچ مقدار} \Rightarrow \text{حد چپ} \neq \text{حد راست} \Rightarrow \text{مقدار} = a \\ \text{حد چپ} = 6 - 1 = 5 \end{cases}$$

۲۳- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ax + b & , |x| > 1 \\ x[x] & , |x| \leq 1 \end{cases}$ روی \mathbb{R} پیوسته باشد، نمودار تابع خط $x = 3$ در چه عرضی قطع می کند؟

ریاضی سراسری ۹۰

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۴

حل) چون این تابع روی همه اعداد حقیقی پیوسته است، لذا در نقاط ۱ و ۱- نیز پیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & |x| < 1 \\ x[x], & |x| \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} ax + b, & x > 1 \text{ یا } x < -1 \\ x[x], & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}, a = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow y = -1$$

۲۴- تابع $f(x) = \frac{|x|}{x} [x]$ از نظر پیوستگی در $x = 0$ چگونه است؟ ریاضی ۹۱

۱) پیوسته است. ۲) پیوسته چپ است. ۳) پیوسته راست است. ۴) ناپیوسته است.

$$\begin{cases} [x], & x > 0 \\ -[x], & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{حد راست} = 0 \\ \text{حد چپ} = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{حد چپ} \neq \text{حد راست} \Rightarrow \text{ناپیوسته}$$

۲۵- به ازای کدام مقدار a تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{a(1+\sqrt[3]{1-x})}{x^2-2x}, & x > 2 \\ x-a, & x \leq 2 \end{cases}$ همواره پیوسته است؟

۱) ۱/۲ ۲) ۲/۴ ۳) ۱/۶ ۴) ۳/۲

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{a(1+\sqrt[3]{1-x})}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{a(1+1-x)}{x(x-2)(1-\sqrt[3]{1-x}+(\sqrt[3]{1-x})^2)} = \frac{-a}{2(3)} = \frac{-a}{6} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} x-a = 2-a$$

$$2-a = \frac{-a}{6} \Rightarrow \frac{5a}{6} = 2 \Rightarrow a = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$$

۲۶- به ازای کدام مقدار a تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ در $x = 0$ پیوسته است؟ تجربی ۹۵

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) هیچ مقدار

۲۷- به ازای کدام مقدار a تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 5, & x > 2 \\ ax - 1, & x \leq 2 \end{cases}$ در روی اعداد حقیقی پیوسته است؟

۱) هر مقدار a ۲) فقط $a = 2$ ۳) فقط $a = -2$ ۴) هیچ مقدار

۲۸- به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , 0 < x < a \\ 1 - \frac{x}{4} & , x \geq a \end{cases}$ همواره در $x = a$ پیوسته است؟

خارج از کشور ۹۵ ریاضی

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (هیچ مقدار)

فصل هشتم: اصول شمارش (چگونه بدون شمردن، بشماریم.)

۱- اصل ضرب ۲- اصل جمع

اصل ضرب: اگر انجام کاری از دو مرحله تشکیل شده باشد و مرحله اول به m طریق و مرحله دوم به طریق n قابل انجام باشد و این دو مرحله همزمان انجام شوند، آنگاه آن عمل به $m \times n$ قابل انجام است.

مثال ۱) از بین ۴ نوع سوپ و ۶ نوع سالاد به ۲۴ طریق می توان غذا شامل سوپ و سالاد سفارش داد.

مثال ۲) فرض کنید از شهر A به شهر B ، ۳ راه و از شهر B به شهر C شهر ۴ راه وجود داشته باشد، شخصی می خواهد از شهر A به C برود بطوری که از شهر B بگذرد، این کار به چند طریق قابل انجام است؟

حل) بر طبق اصل ضرب کل حالات برابر با ۱۲ راه است.

اصل جمع: اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد بطوریکه روش اول به m طریق و روش دوم به n طریق قابل انجام باشد، و این دو روش مستقل و غیر همزمان باشند، آنگاه آن کار به $m + n$ طریق قابل انجام است.

مثال ۱) شخص ۳ پیراهن آبی و ۲ پیراهن مشکی دارد، این شخص به ۵ طریق می تواند پیراهن بپوشد.

مثال ۲) فرض کنید از شهر A به شهر B ، سه راه زمینی، دو راه دریایی و یک راه هوایی وجود داشته باشد، این شخص به چند طریق می تواند از شهر A به شهر B برود؟

حل) بر طبق اصل جمع چون این سه روش مستقل اند پس برابر با $3 + 2 + 1 = 6$.

تمرین ۱) با حروف کلمه ی $STORE$ چند کلمه سه حرفی بدون تکرار حروف می توان نوشت؟

حل) اصل ضرب $= 5 \times 4 \times 3 = 60$

تمرین ۲) با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ چند عدد زوج سه رقمی و بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

حل) اصل ضرب $= 4 \times 3 \times 2 = 24$

تمرین ۳) با حروف کلمه ی $COMPUTER$ چند کلمه ی ۴ حرفی می توان نوشت که با حروف صدا دار شروع شود؟

$$\text{حل} (۶ \times ۷ \times ۳)$$

تمرین ۴) یک آزمون چند گزینه ای شامل ۱۲ سوال چهار گزینه ای و ۸ سوال دو گزینه ای است. فردی قصد دارد به همه سوالات پاسخ دهد، او به چند روش می تواند این کار را انجام دهد به طوریکه:

الف) مجبور باشد به همه ی سوالات پاسخ دهد؟

ب) بتواند برخی سوالات را پاسخ ندهد؟

ج) به ۵ سوال اول مجبور باشد پاسخ دهد ولی به سوالات دیگر می تواند پاسخ ندهد؟

$$\text{حل الف)} \quad ۲^۸ \times ۴^{۱۲} \quad \text{ب)} \quad ۳^۸ \times ۵^{۱۲} \quad \text{ج)} \quad ۳^۸ \times ۵^۷ \times ۴^۵$$

تمرین ۵) مسئله ای طراحی کنید که پاسخ آن به صورت $۲ \times ۲ \times ۲ + ۳ \times ۳$ باشد؟

حل) تعداد راه پاسخگویی به دو سوال سه گزینه ای یا سه سوال دو گزینه ای چند تاست؟

تمرین ۶) با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ چند عدد زوج ۴ رقمی می توان نوشت؟

حل) دو حالت را بررسی می کنیم،

$$\text{الف)} \quad \text{یکان این عدد چهار رقمی عدد صفر باشد،} \quad ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۱ = ۶۰$$

$$\text{ب)} \quad \text{یکان این عدد چهار رقمی غیر صفر باشد،} \quad ۴ \times ۴ \times ۳ \times ۲ = ۹۶$$

$$\text{حال بر طبق اصل جمع تعداد کل حالات برابر با } ۱۵۶ = ۶۰ + ۹۶ .$$

تمرین ۷) از یک کیسه محتوی ۳۰ مهره به چند طریق می توان ۵ مهره را:

الف) با جایگذاری بیرون آورد؟

ب) بدون جایگذاری بیرون آورد؟

$$\text{حل الف)} \quad ۳۰^۵ = ۳۰ \times ۳۰ \times ۳۰ \times ۳۰ \times ۳۰$$

$$\text{ب)} \quad ۳۰ \times ۲۹ \times ۲۸ \times ۲۷ \times ۲۶$$

تمرین ۸) با حروف a, b, c, d, e, f چند کلمه ۴ حرفی متمایز می توان نوشت که فاقد a باشد؟

$$\text{حل) } 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$$

تمرین ۹) با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ چند عدد چهار رقمی بزرگتر از ۵۰۰۰ می توان نوشت؟

$$\text{حل) } 2 \times 5 \times 4 \times 3 = 120$$

تمرین ۱۰) چند عدد ۴ رقمی با ارقام متمایز و فرد و بزرگتر از ۳۰۰۰ می توان نوشت؟

حل) ابتدا اعداد دقت می کنیم اعداد فرد مجموعه $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ هستند پس تعداد حالات برابر است با:

$$4 \times 4 \times 3 \times 2 = 96$$

تمرین ۱۱) ۴ مهره و ۶ جعبه در اختیار داریم،

الف) به چند طریق می توان ۴ مهره را در ۶ جعبه قرار داد؟

ب) به چند طریق می توان ۴ مهره را در شش جعبه قرار داد بطوریکه در هر جعبه بیش از یک مهره قرار نگیرد؟

$$\text{حل الف) } 6^4 = 6 \times 6 \times 6 \times 6 \quad \text{ب) } 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

تمرین ۱۲) فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{7, 9, 8\}$ دو مجموعه باشند،

الف) چند تابع مانند f از A به B موجود است؟

ب) چند تابع مانند f از A به B موجود است که $f(1) = 9$.

ج) چند تابع مانند f از A به B موجود است که شامل زوج مرتب $(2, 7)$ نباشد؟

د) چند تابع مانند f از A به B موجود است که $f(2) = 7$ و $f(4) \neq 8$.

حل) الف- هر عضو A را می توان به یکی از سه عضو B وصل کرد. پس تعداد حالات برابر است با:

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

ب- برای عضو $1 \in A$ فقط یک حالت وجود دارد و برای بقیه سه حالت وجود دارد.

$$1 \times 3 \times 3 \times 3 = 27$$

ج- برای عضو $2 \in A$ ، دو حالت و برای بقیه سه حالت وجود دارد.

$$3 \times 2 \times 3 \times 3 = 54$$

د- برای عضو $2 \in A$ فقط یک حالت و برای عضو $4 \in A$ دو حالت و برای بقیه سه حالت وجود دارد.

$$3 \times 1 \times 3 \times 2 = 18$$

درسنامه ۲) جایگشت n شی متمایز

معرفی نماد فاکتوریل:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

قرار داد: $0! = 1! = 1$

$$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 7 \times 6! = 7 \times 6 \times 5! \text{ (مثال)}$$

مثال) ضرب های زیر را به صورت فاکتوریل بنویسید؟

$$5 \times 4 = \frac{5!}{3!}, \quad n(n-1)(n-2) = \frac{n!}{(n-3)!}$$

تمرین ۱۳) حاصل عبارات زیر را بیابید؟

$$\text{الف) } \frac{(n+1)!}{(n-1)!} \quad \text{ب) } \frac{n!}{(n-3)!}$$

$$\text{الف) } \frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)(n)(n-1)!}{(n-1)!} = (n+1)(n) = n^2 + n$$

$$\text{ب) } \frac{n!}{(n-3)!} = \frac{(n)(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = (n)(n-1)(n-2)$$

تمرین ۱۴) معادله زیر را حل کنید؟

$$\frac{6!}{(n-1)!} = \frac{(n+5)!}{(n+4)!}$$

$$\text{حل) } \frac{6!}{(n-1)!} = \frac{(n+5)!}{(n+4)!} \Rightarrow \frac{6(n)(n-1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+5)(n+4)!}{(n+4)!} \Rightarrow 6n = n+5 \Rightarrow n = 1$$

جایگشت n شی متمایز: تعداد حالات قرار گرفتن n شی متمایز در کنار هم را جایگشت n شی می گویند.

نکته) جایگشت n شی متمایز (تعداد صف ایستادن n شی متمایز در کنار هم) برابر با $n!$ است.

مثال) تعداد حالات چیدن هشت کتاب مختلف در یک قفسه برابر با $n!$ است.

تمرین ۱۵) در چند جایگشت از حروف کلمه ی *LAGRANGE* حروف مثل هم کنار هم قرار می گیرند؟

$$\text{حل) } L - AA - GG - R - N - E \Rightarrow 6! = 720$$

تمرین ۱۶) حروف کلمه (جهانگردی) را در نظر بگیرید، در چند جایگشت از این حروف با حروف (ج) شروع و به حرف (ن) ختم می شود؟

حل) جایگاه دو حرف مشخص شده است، پس کافی جایگشت شش حرف باقی مانده را بدست آوریم.

$$1 \times 6! \times 1 = 6!$$

تمرین ۱۷) با حروف کلمه ی (کتاب) چند کلمه چهار حرفی می توان نوشت که به حرف (ت) ختم شود؟

$$3! \times 1 = 3!$$

تمرین ۱۸) در چند جایگشت از حروف کلمه *ACTION*،

الف) حروف صدادار کنار هم قرار دارند؟ ب) حروف صدادار یکی در میان قرار می گیرند؟

حل) الف- حروف صدا دار عبارتند از (A, I, O) در واقع حروف صدادار را یک حرف در نظر می گیریم

$$\text{پس داریم: } 4! \times 3!$$

ب) دو حالت داریم: با حروف صدادار شروع شود و با حروف بی صدا شروع شود پس جواب را در عدد ۲ ضرب می

$$\text{کنیم. } 3! \times 3! \times 2$$

تمرین ۱۹) می خواهیم سه کتاب ریاضی و چهار کتاب فیزیک را در قفسه‌ای قرار دهیم، در هر حالت تعداد جایگشتها را بیابید:

الف. قرار گیری کتابها شرط خاصی نداشته باشد؟
ب. کتابهای ریاضی کنار هم باشند؟

ج. کتابهای هم نوع کنار هم باشند؟
د. کتابهای ریاضی و فیزیک یکی در میان قرار بگیرند؟

الف) $7!$ (ب) کتابهای ریاضی را یک کتاب در نظر می گیریم: $5! \times 3!$ (ج) کتابهای ریاضی را یک کتاب و کتابهای فیزیک را نیز یک کتاب می گیریم: $4! \times 3! \times 2!$

د) ابتدا کتابهای فیزیک را می چینیم و سپس کتابهای ریاضی را بین آنها قرار می دهیم. $4! \times 3!$

تمرین ۲۰) شش نفر به نام های A, B, C, D, E, F می خواهند در یک صف کنار هم بایستند. A و B برادرند:

الف. فرد C در ابتدای صف قرار گیرد؟
ب. فرد B در ابتدا و A در انتها صف باشد؟

ج. دو برادر در ابتدا و انتهای صف باشند؟
د. بین دو برادر دو نفر فاصله باشد؟

و. نفر A از B جلوتر باشد؟

حل) به عهده خواننده واگذار می شود.

نکاتی چند در مورد جایگشت :

۱) جایگشتهای یکی در میان : دو حالت را بررسی می کنیم ،

الف) تعداد هر دو گروه با هم برابر باشند، آنگاه تعداد جایگشت برابر با $2 \times n! \times n!$.

ب) تعداد گروه اول n و گروه دوم $n + 1$ باشند، $n! \times (n + 1)!$.

تمرین ۲۱) با ارقام $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ چند عدد هفت رقمی و بدون تکرار ارقام می توان نوشت که ارقام زوج و فرد یکی در میان قرار بگیرند؟

حل) $4! \times 3!$

(۲) جایگشت N شی غیر متمایز (جایگشتهای تکراری):

فرض کنید بخواهیم N شی که n_1 شی از نوع اول و n_2 شی از نوع دوم و... و n_k شی از نوع k ام باشند، کنار هم قرار دهیم و $n_1 + n_2 + \dots + n_k = N$ در این صورت داریم:

$$\frac{N!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$$

(مثال) با حروف کلمه ی " دامداران " چند کلمه ی هشت حرفی می توان نوشت؟

$$\frac{8!}{2! \times 3! \times 1! \times 1! \times 1!} = 3360$$

تمرین (۲۲) با ارقام ۷, ۷, ۰, ۶, ۶ چند عدد پنج رقمی فرد می توان نوشت؟

$$\text{حل) } \frac{3 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2}{2! \times 2!} = 9$$

تمرین (۲۳) با ارقام ۰, ۰, ۰, ۹, ۸ چند عدد چهار رقمی می توان نوشت؟

$$\text{حل) } \frac{2 \times 4 \times 3 \times 2}{3!} = 8$$

تمرین (۲۴) با ارقام ۳, ۳, ۳, ۲, ۲, ۱ چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟

(حل) سه حالت را در نظر می گیریم،

$$(۱) \text{ هر سه رقم ۳ باشد. } \frac{3!}{3!} = 1 \quad (۲) \text{ دو رقم ۳ باشد، پس حالت های ۳, ۳, ۲ یا ۳, ۳, ۱ می شود، } \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} = 6$$

$$(۳) \text{ یک رقم ۳ باشد، پس حالت های ۳, ۲, ۱ یا ۳, ۲, ۲ یا ۳, ۲, ۳ است، } \frac{3!}{1!} + \frac{3!}{2!} = 9$$

$$(۴) \text{ هیچ ۳ ای نداشته باشد، تنها حالت برابر با ۲, ۲, ۱، که برابر با } \frac{3!}{2!} = 3$$

$$\text{پس تعداد کل حالات برابر با } 1 + 6 + 9 + 3 = 19$$

۳) جایگشتهای دوری: تعداد جایگشتهای n شی متمایز وقتی جهت دور مهم باشد برابر با $(n-1)!$ و اگر جهت دور اهمیت نداشته باشد برابر با $\frac{(n-1)!}{2}$.

(مثال) رئیس و منشی و ۴ کارمند، دور یک میز دایره ای می نشینند.

الف) این کار به چند طریق امکان پذیر است؟ (ب) در چند حالت از این حالات منشی مقابل رئیس است؟

ج) در چند حالات منشی در کنار رئیس است؟

حل) الف- $5! = (6-1)!$ (ب) ابتدا رئیس و منشی را رو به رو هم قرار می دهیم و سپس ۴ کارمند را روی ۴ صندلی قرار می دهیم که برابر با $4!$ است.

ج) منشی و رئیس را یک نفر فرض می کنیم، در نتیجه مجموعاً برابر ۵ نفر می شود، که $(5-1)!$ است حال رئیس و منشی هم به ۲ طریق می توانند کنار هم باشند که کل حالات برابر با $48 = 2 \times 24$ است.

جایگشت r از میان n شی متمایز (انتخاب r شی از بین n شی با توجه به ترتیب قرار گرفتن در کنار هم):

اگر n شی متمایز داشته باشیم و بخواهیم از بین آنها r شی انتخاب کنیم و در کنار هم قرار دهیم از فرمول زیر کمک بگیریم

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}, \quad r \leq n$$

تمرین ۲۵) عبارت $\frac{P(n+1, 3)}{P(n-1, 2)}$ را ساده کنید؟

$$\begin{aligned} \frac{P(n+1, 3)}{P(n-1, 2)} &= \frac{\frac{(n+1)!}{(n-2)!}}{\frac{(n-1)!}{(n-3)!}} = \frac{(n+1)! \times (n-3)!}{(n-2)! \times (n-1)!} = \frac{(n+1)(n)(n-1)! \times (n-3)!}{(n-2)(n-3)! \times (n-1)!} \\ &= \frac{(n+1)(n)}{(n-2)} = \frac{n^2 + n}{n-2} \end{aligned}$$

تمرین ۲۶) معادله $P(n, 5) = 3P(n, 4)$ را حل کنید؟

$$\text{حل) } P(n, 5) = 3P(n, 4) \Rightarrow \frac{n!}{(n-5)!} = 3 \times \frac{n!}{(n-4)!} \Rightarrow \frac{n!}{(n-5)!} = 3 \times \frac{n!}{(n-4)(n-5)!}$$

$$\Rightarrow n-4 = 3 \Rightarrow n = 7$$

تمرین ۲۷) با حروف کلمه (جمهوریت) و بدون تکرار حروف:

الف) چند کلمه ی ۷ حرفی می توان نوشت؟

ب) چند کلمه ی ۷ حرفی می توان نوشت که با (م) شروع شود و به (ت) ختم شود؟

ج) چند کلمه سه حرفی می توان نوشت؟

د) چند کلمه ی ۷ حرفی می توان نوشت که در آنها کلمه ی (هور) وجود داشته باشد؟

و) چند کلمه ی ۷ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف کلمه ی (هور) کنار هم باشند؟

حل الف) $7!$ ب) $1 \times 5! \times 1 = 5!$ ج) $P(7,3) = \frac{7!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 = 210$ د) $4!$

و) $5! \times 3!$

تمرین ۲۸) به چند طریق می توان ۶ مهره متمایز را درون ۱۰ جعبه یکسان قرار داد به طوری که در هر جعبه حداکثر یک مهره قرار بگیرد؟

حل) چون مهره ها شبیه هم نیستند پس ترتیب قرار گرفتن مهره ها در جعبه ها مهم است.

$$P(10, 6) = \frac{10!}{(10-6)!} = \frac{10!}{4!} = 151200$$

تمرین) ۴ سرباز و ۵ افسر می خواهند در یک صف قرار بگیرند، مطلوبست:

الف) هیچ محدودیتی وجود نداشته باشد. ب) سربازها کنار هم باشند.

ج) سربازها کنار هم و افسرها کنار هم باشند. د) سربازها و افسرها یکی در میان قرار بگیرند.

تمرین) با ارقام ۱, ۱, ۲, ۲, ۲:

الف) چند عدد ۵ رقمی می توان نوشت؟ ب) چند عدد ۵ رقمی فرد می توان نوشت؟

ج) چند عدد ۴ رقمی می توان نوشت؟

تمرین) به چند طریق می توان ۸ نفر را دور یک میز بنشینند، بطوریکه ۳ نفر اصرار داشته باشند کنار هم باشند؟

ترکیب (انتخاب r شی از میان n شی متمایز بدون توجه به ترتیب قرار گرفتن):

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \quad r \leq n$$

رابطه ی بین $P(n, r)$ و $\binom{n}{r}$:

$$P(n, r) = r! \times \binom{n}{r}$$

تمرین) به چند طریق می توان ۶ مهره یکسان را درون ۱۰ جعبه یکسان قرار داد به طوریکه در هر جعبه حداکثر یک مهره قرار بگیرد؟

حل) چون مهره ها یکسان هستند، پس ترتیب قرار گرفتن مهره ها در جعبه مهم نیست و حالت جدید ایجاد نمی شود.

$$\binom{10}{6} = \frac{10!}{6!(10-6)!} = \frac{10!}{6! \times 4!} = 210$$

نکته) چند قید مهم که در مسائل کاربرد دارد عبارتند از:

۱) حداقل (لااقل - دست کم) n تا یعنی n تا و یا بیشتر از n (۲) حداکثر n تا یعنی n تا و یا کمتر از n

۳) فقط (دقیقا) n تا یعنی n تا نه کمتر و نه بیشتر از n

نکته) در مسائل اگر حرف (و) آمد باید از ضرب استفاده کنیم و اگر کلمه (یا) آمد باید از جمع استفاده کنیم.

تمرین) از بین ۵ دانش آموز تجربی و ۳ دانش آموز ریاضی، به چند طریق می توان سه نفر را برای کار آزمایشگاه انتخاب کرد به طوریکه لااقل دو نفر از آنها تجربی باشند؟ سراسری تجربی خارج از کشور ۹۰

حل) لااقل دو نفر یعنی دو نفر تجربی و یک نفر ریاضی یا سه نفر تجربی

$$\binom{5}{2} \times \binom{3}{1} + \binom{5}{3} = 30 + 10 = 40$$

تمرین) از بین ۴ مهندس و ۳ پزشک و ۲ نویسنده می خواهیم شورائی ۳ نفره تشکیل دهیم، در چند حالت :

الف) از هر شغل یک نماینده در شورا وجود دارد؟ (ب) دو پزشک و یک مهندس عضو شورا باشند؟

پ) همه اعضا شورا دارای یک شغل هستند؟ (ت) حداقل دو مهندس عضو شورا هستند؟

ث) حداکثر یک نویسنده عضو شورا است؟ (ج) اعضای شورا فقط از دو شغل مختلف هستند؟

$$\text{حل الف) } \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} = 24 \quad \text{ب) } \binom{3}{2} \times \binom{4}{1} = 12 \quad \text{پ) } \binom{4}{3} + \binom{3}{3} = 4 + 1 = 5$$

$$\text{ت) } \binom{4}{2} \times \binom{5}{1} + \binom{4}{3} \times \binom{2}{1} \quad \text{ث) } \binom{2}{1} \times \binom{7}{2} + \binom{2}{2} \times \binom{7}{3}$$

$$\text{ج) } \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} + \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} + \binom{2}{1} \times \binom{4}{1}$$

تمرین) از میان ۵ جفت کفش ۴ لنگه به تصادف انتخاب می کنیم، مطلوبست تعداد حالاتی :

الف) هیچ دو تایی متعلق به یک جفت نباشد. (ب) دقیقا یک جفت در میان آنها موجود باشد.

حل) الف- ابتدا ۴ جفت از بین ۵ جفت کفش انتخاب کرده و سپس از هر جفت یکی را انتخاب می کنیم.

$$\text{الف) } \binom{5}{4} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} = 80$$

ب) ابتدا از بین ۵ جفت یک جفت کفش انتخاب می کنیم و سپس از بین چهار جفت کفش باقی مانده دو جفت انتخاب کرده و

از هر جفت یک لنگه انتخاب می کنیم.

$$\text{ب) } \binom{5}{1} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} = 120$$

چند رابطه مهم از ترکیب :

$$1) \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$2) \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

$$۳) \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \Rightarrow \binom{a+b}{a} = \binom{a+b}{b}$$

تمرین (درون کیسه ای محتوی ۵ توپ سفید و ۴ توپ سیاه و ۳ توپ زرد وجود دارد، به چند طریق می توان سه توپ هم رنگ از درون کیسه انتخاب کرد؟

(حل) سه تا هم رنگ (سه تا سفید یا سه تا سیاه یا سه تا زرد)

$$\binom{5}{3} + \binom{4}{3} + \binom{3}{3} = 10 + 4 + 1 = 15$$

نکته) تعداد زیر مجموعه های r یک مجموعه n عضوی برابر با $\binom{n}{r}$ است.

نکته) تعداد کل زیر مجموعه های یک مجموعه عضوی برابر با :

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

نکته) تعداد انتخاب های r از n شی که شامل t شی خاص باشد برابر است با: $\binom{n-t}{r-t}$.

نکته) تعداد انتخاب های r از n شی که شامل t شی خاص نباشد برابر است با: $\binom{n-t}{r}$.

تمرین) مجموعه ای دارای ۲۸ زیر مجموعه ی ۲ عضوی است. این مجموعه دارای چند عضو است؟

$$\binom{n}{2} = 28 \Rightarrow \frac{n(n-2)}{2} = 28 \Rightarrow n = 8$$

تمرین) فرض کنید در یک جمع ۹ نفر حاضر هستند،

الف) به چند طریق می توان از بین آنها ۵ نفر انتخاب کرد که بطوریکه شامل ۳ شخص خاص باشد؟

ب) به چند طریق می توان ۴ نفر انتخاب کرد بطوریکه شامل ۲ شخص خاص نباشد؟

$$\text{الف) } \binom{9-3}{5-3} = \binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15 \quad \text{ب) } \binom{9-2}{4} = \binom{7}{4} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{24} = 35$$

تمرین (مجموعه ی $A = \{a, b, \{a\}, \{b\}\}$ چند زیر مجموعه شامل عضو a است؟

(حل) تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه n عضوی برابر با 2^n است چون یک عضو مشخص است پس برابر با $2^3 = 8$ است.

تمرین (مجموعه $A = \{a, b, \{a\}, \{b\}\}$ دارای چند زیر مجموعه ۳ عضوی شامل عضو a دارد؟

$$\text{حل) } \binom{4-1}{3-1} = \binom{3}{2} = 3$$

تمرین) با حروف کلمه ی *computer* چند کلمه ی می توان نوشت که در همه ی آنها حروف t و p به کار رفته باشد؟

$$\text{حل) } \binom{8-2}{6-2} \times 6! = \binom{6}{4} \times 6! = 10800$$

تمرین) به چند طریق می توان ۳ کتاب از بین ۵ کتاب اول و ۴ کتاب از بین ۶ کتاب دوم انتخاب و در یک قفسه چید؟

$$\text{حل) } \binom{5}{3} \times \binom{6}{4} \times 3! \times 4! = 21600$$

تمرین (از کیسه ای محتوی ۶ مهره آبی و ۵ مهره قرمز ۲ مهره به روش های زیر انتخاب می کنیم، در هر حالت تعداد راه های ممکن را بیابید؟

الف) دو مهره را با هم بیرون بیاوریم؟

ب) ابتدا یک مهره بیرون بیاوریم و کنار بگذاریم و سپس مهره بعدی را انتخاب کنیم؟

ج) یک مهره انتخاب کرده و رنگ آن را مشاهده کرده و سپس به کیسه باز گردانیم؟

$$\text{حل الف) } \binom{11}{2} = \frac{11 \times 10}{2} = 55 \quad \text{ب) } \binom{11}{1} \times \binom{10}{1} = 110 \quad \text{ج) } \binom{11}{1} \times \binom{11}{1} = 121$$

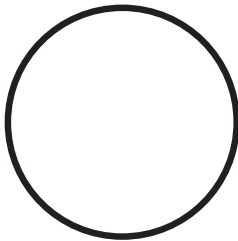
تمرین های تکمیلی

۱- روی ۹ کارت اعداد ۱ تا ۹ نوشته شده است، و آنها را درون یک کیسه می ریزیم، دو کارت بیرون می آوریم در چند حالت:

الف) مجموع دو کارت فرد است؟
ب) مجموع دو کارت زوج است؟

ج) مجموع دو کارت حداقل برابر با ۴ است؟

۲- ۹ نقطه $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ روی یک دایره داریم،



الف) چند مثلث می توان ساخت که این نقاط رئوس این مثلث باشند؟

ب) چند مثلث می توان ساخت که همگی در راس A مشترک باشند؟

ج) چند مثلث می توان ساخت که در ضلع مشترک باشند؟

د) چند چهار ضلعی می توان ساخت که قطر آن BG باشد؟

ه) چند چهار ضلعی می توان ساخت که BG ضلعی از آن باشد؟

۳- ۱۱ نقطه مطابق شکل روی محیط شکل قرار گرفته اند،

الف) چند مثلث می توان ساخت که رئوس آن از بین نقاط داده شده انتخاب شود؟

ب) چند چهار ضلعی می توان ساخت که رئوس آن از بین نقاط باشند؟



۴- دانش آموزی می خواهد به ۸ سوال از ۱۰ سوال امتحانی پاسخ دهد، این کار به چند طریق امکان پذیر است، مشروط به

اینکه پاسخ به ۳ سوال اول اجباری باشد؟

۵- به چند طریق می توان حروف A, A, A, A, B, B, B را کنار هم قرار داد بطوریکه هیچ کدام از کنار هم قرار نگیرند؟

۶- تعداد جایگشت های حروف کلمه ی $system$ بطوریکه S ها کنار هم نباشد را بیابید؟

تست های ترکیبیات:

۱- اگر $\frac{P(n,4)}{\binom{n-1}{4}}$ برابر با ۲۶ باشد، مقدار n کدام است؟ تجربی خارج کشور ۹۴

۵۲ (۱) ۵۳ (۲) ۵۴ (۳) ۵۵ (۴)

(حل) گزینه ۱-

$$\frac{P(n,4)}{\binom{n-1}{4}} = 26 \Rightarrow \frac{\frac{n!}{(n-4)!}}{\frac{(n-1)!}{4!(n-5)!}} = 26 \Rightarrow \frac{4!n}{n-4} = 26 \Rightarrow n = 52$$

۲- از بین ۵ دانش آموز تجربی و ۳ دانش آموز ریاضی، به چند طریق می توان سه نفر را برای کار در آزمایشگاه انتخاب کرد بطوریکه لااقل دو نفر از آنها دانش آموز تجربی باشند؟ تجربی خارج از کشور ۹۰

۲۵ (۱) ۳۰ (۲) ۳۵ (۳) ۴۰ (۴)

(حل) گزینه ۴- لااقل دو دانش آموز تجربی باشند، یعنی دو دانش آموز یا سه دانش آموز تجربی باشند.

$$\binom{5}{2} \binom{3}{1} + \binom{5}{3} \binom{3}{0} = 10 \times 3 + 10 \times 1 = 40$$

۳- چند عدد چهار رقمی با ارقام متمایز و فرد بزرگتر از ۳۰۰۰ وجود دارد؟ تجربی ۹۰

۷۲ (۱) ۸۴ (۲) ۹۶ (۳) ۱۰۸ (۴)

(حل) گزینه ۳- $4 \times 4 \times 3 \times 2 = 96$

۴- از هر یک از مدارس A, B, C, D, E چهار نفر به اردوگاه دانش آموزی دعوت شده اند، به چند طریق می توان سه دانش

آموز که دو به دو هم مدرسه ای نیستند، را انتخاب کرد؟ تجربی ۹۲

۱۶۰ (۱) ۳۲۰ (۲) ۴۸۰ (۳) ۶۴۰ (۴)

حل گزینه ۴- $\binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{5}{3} = 640$

۵- با ارقام ۱, ۲, ۳, ۴, ..., ۹ چند عدد چهار رقمی می توان ساخت که فقط یک رقم آن زوج باشد؟

۶۴۰ (۱) ۷۲۰ (۲) ۷۸۰ (۳) ۹۶۰ (۴)

حل گزینه ۴- $(4 \times 5 \times 4 \times 3) \times 4 = 960$

۶- در یک همایش ۵ نفر جهت سخنرانی ثبت نام کرده اند. چند طریق ترتیب سخنرانی برای آنها وجود دارد، بطوری که بین سخنرانی دو فرد مورد نظر a و b از آنان، فقط یک نفر سخنرانی کند؟ ریاضی ۸۷

۲۰ (۱) ۲۴ (۲) ۳۶ (۳) ۴۰ (۴)

حل گزینه ۳- فرض کنید این پنج نفر a, b, c, d, e باشند. اگر شخص x بین a و b باشد، تعداد جایگشت های ۵ نفر به صورت زیر محاسبه می شود، چون به جای x هر یک از اشخاص c, d, e می توانند قرار بگیرند پس کل حالات را در ۳ ضرب می کنیم. $(3! \times 2!) \times 3 = 36$

۷- از ۱۰ پرسش موجود، به چند طریق ۸ پرسش را جهت پاسخگویی انتخاب کرد، بطوریکه حداقل ۴ پرسش از ۵ پرسش اول، انتخاب شوند؟ ریاضی ۸۹

۲۵ (۱) ۳۰ (۲) ۳۲ (۳) ۳۵ (۴)

حل گزینه ۴- $\begin{cases} \binom{5}{4} \times \binom{5}{4} = 5 \times 5 = 25 \\ \binom{5}{5} \times \binom{5}{3} = 1 \times 10 = 10 \end{cases} \Rightarrow 25 + 10 = 35$

۸- با ارقام ۱, ۳, ۵, ۷, ۹ چند عدد سه رقمی می توان نوشت که (رقم صدگان < رقم دهگان < رقم یکان) باشد؟ ریاضی

۹۱

۱۲ (۴) ۱۰ (۳) ۹ (۲) ۸ (۱)

حل) گزینه ۱۰- ابتدا سه رقم از بین ۵ رقم انتخاب می کنیم، $\binom{5}{3} = 10$. حال با این سه رقم موجود تنها در یک حالت این شرط وجود دارد یعنی تعداد کل حالات برابر با $10 \times 1 = 10$ است.

۹- از هر یک ۶ منطقه کشوری، ۱۵ دانش آموز به اردوی فرهنگی دعوت شده اند، به چند طریق می توان ۳ دانش آموز از بین آنها انتخاب کرد بطوریکه دو به دو هم منطقه ای نیستند؟ ۹۲ ریاضی

۷۶۵۰۰ (۴)

۷۵۶۰۰ (۳)

۶۷۵۰۰ (۲)

۵۷۶۰۰ (۱)

حل) گزینه ۲- $\binom{6}{3} \times \binom{15}{1} \times \binom{15}{1} \times \binom{15}{1} = 67500$

۱۰- با ارقام ۱, ۲, ..., ۹ چند عدد ۵ رقمی می توان ساخت که بطوریکه درست ۲ رقم آن زوج باشد؟ ۹۴ ریاضی

۹۶۰۰ (۴)

۸۴۰۰ (۳)

۷۲۰۰ (۲)

۶۴۰۰ (۱)

حل) گزینه ۲- $\binom{4}{2} \times \binom{5}{3} \times 5! = 7200$

۱۱- تعداد جایگشت های سه حرفی انتخاب شده از حروف کلمه ی *DELAVAR* کدام است؟ انسانی ۹۰

۱۳۵ (۴)

۱۳۰ (۳)

۱۲۵ (۲)

۱۱۵ (۱)

حل) گزینه ۴-

روش اول: حالت اول: اگر دو حرف A در کلمه ی سه حرفی وجود داشته باشد: AAO

$$\left(\binom{5}{1} \right) \times \frac{3!}{2!} = 5 \times 3 = 15 \quad \text{یا} \quad \text{شامل دو حرف A: جایگشت با تکرار} \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & A & \\ \hline \end{array} = 5 \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array} = 5 \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array} = 5 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{OELVR} \\ + \\ \\ \end{array}$$

حالت دوم: اگر سه حرف غیر تکراری باشند.

$$\left(\binom{6}{3} \right) \times 3! = 20 \times 6 = 120 \quad \text{یا} \quad \text{DELAVR} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & 5 & 4 \\ \hline \end{array} = 120$$

$$15 + 120 = 135$$

۱۲- حروف کلمه *EARNEST* را به چند طریق می توان در کنار هم قرار داد، به طوریکه حرف N در وسط باشد؟ ریاضی

انسانی ۹۱

۳۶۰ (۴)

۲۴۰ (۳)

۲۱۶ (۲)

۱۸۰ (۱)

			N		
--	--	--	---	--	--

$$1 \times \frac{6!}{2!} = 360$$

حل گزینه ۴-

۱۳- پنج حرف از ۸ حرف کلمه ی BUSINESS را با جایگشت های متمایز در کنار هم قرار بگیرد، تعداد گروه هایی که هر سه حرف S در آنها موجود باشد کدام است؟ ریاضی انسانی ۹۲

۲۴۰ (۴)

۲۰۰ (۳)

۱۶۰ (۲)

۱۵۰ (۱)

حل گزینه ۳-

$$\binom{5}{2} \times \frac{5!}{3!} = 10 \times 20 = 200$$

۱۴- به چند طریق می توان شش اسباب بازی را بین ۳ بچه به طور یکسان تقسیم کرد؟ انسانی ۹۳

۹۰ (۴)

۷۲ (۳)

۶۰ (۲)

۵۴ (۱)

$$\binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2} = 90$$

حل گزینه ۴-

۱۵- با حروف RANGIN چند رمز سه حرفی می توان ساخت؟ انسانی ۹۴

۱۲۰ (۴)

۸۴ (۳)

۷۲ (۲)

۶۰ (۱)

$$N, N, \dots \Rightarrow \frac{\binom{4}{1} \times 3!}{2!} = 12$$

$$N, \dots, \dots \Rightarrow (1 \times 4 \times 3) \times 3 = 36$$

$$R, A, G, I \Rightarrow 4 \times 3 \times 2 = 24$$

$$12 + 36 + 24 = 72$$

۱۶- شش رقم ۸، ۴، ۷، ۸، ۳، ۲ را از مقوا بریده و هر سه رقم انتخابی از آنها را در کنار هم جابجا می کنیم، چند عدد سه

رقمی متمایز حاصل می شود؟ انسانی ۹۵

۷۵ (۴)

۷۲ (۳)

۶۳ (۲)

۶۰ (۱)

حل) گزینه ۳- حالت اول: دو رقم ۸ انتخاب شوند، $\frac{{}^4P_2 = 12}{2!} = 12$ ، ۸، ۸، ... \Rightarrow

حالت دوم: یک رقم ۸ انتخاب شود، $3 \times (1 \times 4 \times 3) = 36$ ، ۸، ...، ... \Rightarrow

حالت سوم: هیچ رقم ۸ انتخاب نشود، $4 \times 3 \times 2 = 24$ ، ۲، ۳، ۷، ۴ \Rightarrow

کل حالات: $12 + 36 + 24 = 72$

۱۷- با جایگشت ارقام ۶، ۵، ۵، ۲، ۱ چند عدد پنج رقمی بخش پذیر بر ۵ می توان ساخت؟

۱۸ (۱) ۲۰ (۲) ۲۴ (۳) ۳۰ (۴)

حل) گزینه ۳- $\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2}{2!} = 24$

۱۸- در یک پرواز ۴ جای خالی وجود دارد و ۹ نفر در لیست انتظار قرار دارند، به چند طریق می توان ۴ نفر آنان را سوار کردند؟ انسانی ۸۳

۵۶ (۱) ۶۳ (۲) ۱۱۲ (۳) ۱۲۶ (۴)

حل) گزینه ۴- $\binom{9}{4} = 126$

۱۹- هریک از حروف کلمه ی DELAVARAN را روی ۹ گوی نوشته ایم، به چند طریق می توان ۳ گوی از بین ۹ گوی انتخاب کرد؟ انسانی ۸۶

۳۵ (۱) ۴۲ (۲) ۵۶ (۳) ۸۴ (۴)

حل) گزینه

۲۰- تعداد جایگشتهای سه حرفی کلمه ی SERESHT کدام است؟ انسانی ۸۷

۶۰ (۱) ۷۲ (۲) ۸۴ (۳) ۹۶ (۴)

حل) گزینه ۳- حالت (۱) هیچ حرف تکراری وجود نداشته باشد، $5 \times 4 \times 3 = 60$ ، $S, E, R, H, T \Rightarrow$

حالت ۲) دو حرف S باشند، $\Rightarrow \frac{\binom{4}{1} \times 3!}{2!} = 12$

حالت ۳) دو حرف E باشند، $\Rightarrow \frac{\binom{4}{1} \times 3!}{2!} = 12$

کل حالات برابر با: $60 + 12 + 12 = 84$

۲۱- تعداد جایگشت های ۴ حرفی از کلمه ی $SALAMAT$ که دو حرف آن A باشد؟ انسانی ۸۹

۷۲ (۴)

۵۶ (۳)

۳۶ (۲)

۲۴ (۱)

حل) گزینه ۴- دو حرف A قطعی است، حال دو حرف دیگر را از بین ۴ حرف S, L, M, T انتخاب می کنیم.

$$\binom{4}{2} \times \frac{4!}{2!} = 72$$

۲۲- با حروف کلمه ی $DANESH$ چند کلمه چهار حرفی می توان ساخت، بطوریکه حرف S در هر کلمه باشد؟ انسانی ۹۷

۲۶۰ (۴)

۲۷۰ (۳)

۲۵۰ (۲)

۲۴۰ (۱)

حل) گزینه ۱- $(1 \times 5 \times 4 \times 3) \times 4 = 240$

۲۳- یک عدد سه رقمی را متقارن می گوئیم هرگاه رقم صدگان و یکان مثل هم باشند، تعداد اعداد سه رقمی فرد کدام است؟

۴۵۰ (۴)

۲۵۰ (۳)

۵۰ (۲)

۴۵ (۱)

حل) گزینه ۲- $1 \times 10 \times 5 = 50$

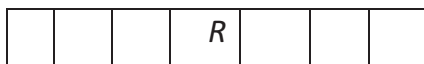
۲۴- حروف کلمه ی $SERESHT$ را به چند طریق می توان کنار هم قرار داد، بطوریکه حرف R در وسط باشد؟

۳۶۰ (۴)

۷۲۰ (۳)

۱۸۰ (۲)

۳۲۰ (۱)



حل) گزینه ۲- $\frac{6!}{2! \times 2!} = 180$

۲۵- ارقام ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ را طوری کنار هم قرار می دهیم، که رقم های فرد کنار هم قرار می گیرند، تعداد پنج رقمی حاصل کدام است؟ تجربی ۸۲

۴۸ (۴)

۳۶ (۳)

۲۴ (۲)

۱۲ (۱)

حل) گزینه ۳ - $3! \times 3! = 36$

۱, ۳, ۵	۲	۴
---------	---	---

۲۶- تعداد جایگشت های حروف کلمه ی SYSTEM که در آن حروف S کنار هم نباشند؟ خارج تجربی ۹۲

۳۶۰ (۴)

۲۴۰ (۳)

۱۸۰ (۲)

۱۲۰ (۱)

حل) گزینه ۳- ابتدا تعداد جایگشتهایی را در نظر می گیریم که حروف کنار هم باشند سپس از اصل متمم کمک میگیریم.

$$5! = 120, \quad \text{کل حالات} = \frac{6!}{2!} = 360 \Rightarrow \text{اصل متمم} = 360 - 120 = 240$$

۲۷- بر روی یک دایره ۸ نقطه وجود دارد، تعداد چهار ضلعی های محدب که با این هشت نقطه می توان ساخت کدام است؟ تجربی ۸۰

۷۲ (۴)

۷۰ (۳)

۶۸ (۲)

۵۶ (۱)

حل) گزینه ۳- برای چهار ضلعی نیاز به ۴ نقطه برای راس نیاز دارد، پس: $\binom{8}{4} = 70$

فصل نهم: احتمال

بخش اول: احتمال مقدماتی

پدیده ها در جهان هستی دو دسته هستند،

(۱) پدیده های قطعی: پدیده هایی هستند که نتیجه ی آنها قبل از آزمایش مشخص و قطعی است.

مثال: اگر تویی را از بلندی، رها کنیم به طور حتم به زمین می خورد.

(۲) پدیده های تصادفی: پدیده هایی هستند که نتیجه آن ها قبل از آزمایش مشخص نیست و با هر بار آزمایش نتیجه ی آن ممکن است تغییر کند. مثال: پرتاب تاس شش وجهی - پرتاب سکه - تولد نوزاد-برد و باخت در بازی فوتبال و...

پدیده های تصادفی:

(۱) فضای نمونه ای: همه حالات ممکن که در یک پدیده تصادفی رخ می دهد را فضای نمونه ای آن پدیده تصادفی می گویند. فضای نمونه ای را با S نمایش می دهند.

تمرین) در هر یک از حالات زیر فضای نمونه ای را مشخص کنید؟

الف) پرتاب یک تاس و یک سکه با هم

$$S = \{(پ, ۱), (پ, ۲), \dots, (پ, ۶), (ر, ۱), (ر, ۲), \dots, (ر, ۶)\}$$

ب) تولد سه نوزاد

$$S = \{(bbb), (bbg), (bgb), (gbb), (ggb), (gbg), (bgg), (ggg)\}$$

(۲) پیشامد تصادفی: هر زیر مجموعه از یک فضای نمونه یک تجربه تصادفی را پیشامد تصادفی می گویند. پیشامدها را با حروف بزرگ لاتین نمایش می دهند. ($A \subseteq S$)

نکته) به پیشامد تهی، پیشامد نشدنی یا ناممکن و به پیشامد S پیشامد حتمی یا شدنی می گویند.

مثال) در پرتاب دو تاس پیشامد آنکه مجموع دو تاس کمتر از ۴ باشد را بنویسید؟

$$A = \{(۱, ۱), (۱, ۲), (۲, ۱)\}$$

تمرین) خانواده ای دارای سه فرزند است مطلوبست:

الف) فضای نمونه ای این تجربه تصادفی

ب) پیشامد اینکه حداقل یک فرزند پسر باشد؟

ج) پیشامد اینکه فقط دو فرزند دارای یک جنسیت باشند؟

الف) $S = \{(bbb), (bbg), (bgb), (gbb), (ggb), (gbg), (bgg), (ggg)\}$

ب) $A = \{(bbb), (bbg), (bgb), (gbb), (ggb), (gbg), (bgg)\}$

ج) $B = \{(bbg), (bgb), (gbb), (ggb), (gbg), (bgg)\}$

اعمال جبری روی پیشامدها:

اجتماع دو پیشامد: پیشامد $A \cup B$ زمانی رخ می دهد که A یا B یا هر دو رخ دهند. (حداقل یکی رخ دهد)

اشتراک دو پیشامد: پیشامد $A \cap B$ زمانی رخ می دهد که هر دو باهم رخ دهند.

تفاضل دو پیشامد: پیشامد $A - B$ زمانی رخ می دهد که A رخ دهد ولی B رخ ندهد.

متمم یک پیشامد: پیشامد A' زمانی رخ می دهد که A رخ ندهد. $A' = S - A$

دو پیشامد ناسازگار: دو پیشامد A و B را ناسازگار می گوئیم هرگاه $A \cap B = \emptyset$ باشد، در غیر این صورت این دو پیشامد را سازگار می گوئیم.

مثال) پیشامدهای A و A' ناسازگارند.

۳) احتمال یا شانس:

اگر A پیشامدی از فضای نمونه ای S باشد، در این صورت احتمال وقوع پیشامد A را که با $P(A)$ نمایش می دهیم به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد حالت های مطلوب}}{\text{تعداد همه حالت های ممکن}}$$

نکته) اصول کلموگروف:

$$P(S) = 1, P(\emptyset) = 0 \quad 0 \leq P(A) \leq 1 \quad (1)$$

۳) قانون جمع احتمالات: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

نکته) اگر پیشامدهای A_1, A_2, \dots, A_n دوجه دو ناسازگار باشند، داریم:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

نکته) چند فرمول مهم و پرکاربرد در مسایل احتمال:

۱) $P(A') + P(A) = 1$

۲) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

۳) $P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B)$

تمرین) تاسی را سه بار می اندازیم. مطلوبست محاسبه احتمال اینکه:

الف) هر سه عدد رو شده مثل هم باشند؟

ب) دقیقا در دو پرتاب عدد ۴ ظاهر شود؟

$$\text{حل) } n(S) = 6 \times 6 \times 6 = 216$$

الف) $A = \{(1,1,1), (2,2,2), (3,3,3), \dots, (6,6,6)\} \Rightarrow P(A) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$

ب) $(4,4, \dots), (4, \dots, 4), (\dots, 4, 4) \Rightarrow P(B) = \frac{5 + 5 + 5}{216} = \frac{15}{216}$

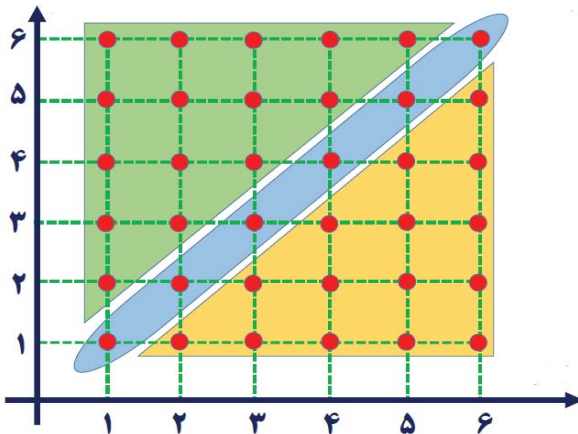
تمرین) در پرتاب همزمان دو تاس سالم، احتمال آنکه:

الف) عدد تاس اول و دوم با هم برابر باشند؟

ب) عدد تاس اول از عدد تاس دوم بیشتر باشد؟

ج) عدد تاس اول بزرگتر یا مساوی عدد تاس دوم باشد؟

د) حداقل یکی از برآمدها عدد ۵ باشد؟



نکته (مجموع اعداد رو شده در پرتاب دو تاس به صورت جدول زیر است.

مجموع	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

تمرین) در پرتاب همزمان دو تاس سالم، احتمال اینکه،

الف) مجموع اعداد رو شده برابر با ۴ باشد؟ (ب) مجموع اعداد رو شده بزرگتر یا مساوی ۱۱ باشد؟

ج) مجموع اعداد رو شده کوچکتر از ۷ باشد؟ (د) مجموع اعداد رو شده بزرگتر یا مساوی ۷ باشد؟

(حل)

$$\text{الف) } P(A) = \frac{3}{36}, \quad \text{ب) } P(B) = \frac{3}{36}, \quad \text{ج) } P(C) = \frac{15}{36}, \quad \text{د) } P(D) = \frac{21}{36}$$

تمرین) در پرتاب همزمان دو تاس سالم، احتمال آنکه مجموع اعداد رو شده هم مضرب ۲ و هم مضرب ۳ باشد؟

مجموع	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

(حل) کافی است مضرب ۶ باشند.

$$P(A) = \frac{6}{36}$$

تمرین) در پرتاب دو تاس احتمال آنکه مجموع اعداد رو ده بزرگتر از ۳ و کوچکتر از ۸ باشد؟

مجموع	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

$$P(A) = \frac{18}{36}$$

تمرین) در پرتاب همزمان دو تاس احتمال اینکه مجموع اعداد رو شده بین ۲ و ۷ باشند، چند برابر احتمال آنکه مجموع دو عدد رو شده بین ۷ و ۱۲ باشند؟

مجموع	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

$$P_1 = \frac{14}{36}, \quad P_2 = \frac{14}{36} \Rightarrow \text{برابر ۱}$$

تمرین) در پرتاب دو تاس احتمال اینکه مجموع دو عدد رو شده مربع یک عدد طبیعی باشد؟

مجموع	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

$$P(A) = \frac{7}{36}$$

تمرین) در پرتاب همزمان دو تاس سالم، احتمال اینکه مجموع اعداد رو شده اول باشد؟

مجموع	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

$$P(A) = \frac{15}{36}$$

تمرین) در پرتاب همزمان دو تاس سالم، احتمال آنکه مجموع اعداد رو شده بزرگتر از ۱۰ نباشد؟

مجموع	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

$$P(A) = \frac{33}{36}$$

نکته) در مورد اعداد زوج و فرد این نکات را بخاطر بسپارید:

۱- برای اینکه حاصل ضرب دو عدد فرد باشد، باید هر دو عدد فرد باشند.

۲- برای اینکه حاصل جمع دو عدد فرد شود، باید اولی فرد و دومی زوج یا اولی زوج و دومی فرد باشد.

۳- برای اینکه حاصل ضرب دو عدد زوج باشد، باید هر دو عدد زوج یا اولی زوج و دومی فرد یا اولی فرد و دومی زوج باشد.

۴- برای اینکه حاصل جمع دو عدد زوج باشد، باید هر دو عدد زوج یا هر دو عدد فرد باشند.

نکته (در پرتاب دو تاس

$$\left\{ \begin{array}{l} 9 \Rightarrow \text{هر دو زوج} \\ 9 \Rightarrow \text{هر دو فرد} \\ 9 \Rightarrow \text{دومی فرد - اولی زوج} \\ 9 \Rightarrow \text{دومی زوج - اولی فرد} \end{array} \right. \Rightarrow \text{حالت } 36$$

تمرین) در پرتاب همزمان دو تاس مطلوبست احتمال آنکه حاصل ضرب هر دو عدد رو شده زوج باشند؟

$$P(A) = \frac{9 + 9 + 9}{36} = \frac{27}{36}$$

تمرین) در پرتاب همزمان دو تاس احتمال آنکه حاصل جمع اعداد رو شده فرد باشند، چقدر است؟

$$P(A) = \frac{9 + 9}{36} = \frac{18}{36}$$

تمرین) خانواده ای دارای سه فرزند است، مطلوبست احتمال آنکه :

الف) حداکثر یکی از فرزندان پسر باشد. ب) دو فرزند آخر پسر باشد. ج) حداقل دو فرزند دختر باشد.

$$\text{الف) } P(A) = \frac{4}{8}, \quad \text{ب) } P(B) = \frac{2}{8}, \quad \text{ج) } P(C) = \frac{4}{8}$$

نکته) یادآوری از ترکیبیات :

الف) انتخاب بدون ترتیب (ترکیب) : در این نوع انتخاب ترتیب مهم نیست. ترکیب r شی از n شی متمایز را با نماد $\binom{n}{r}$

نمایش می دهند و به صورت زیر تعریف می شود.

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

۲) انتخاب با ترتیب (جایگشت-ترتیب): در این نوع انتخاب ترتیب چیدن اشیا مهم است، جایگشت r شی از n شی متمایز را با نماد $P(n, r)$ نمایش می دهند و به صورت زیر تعریف می شود.

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

تمرین) از جعبه ای که شامل ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه است، ۳ مهره به تصادف انتخاب می کنیم، مطلوبست احتمال اینکه:

الف) حداقل دو مهره سفید باشند. ب) دقیقا یک مهره سفید باشد. ج) سه مهره هم رنگ باشند؟

حل الف) حداقل دو مهره سفید، یعنی دو مهره سفید یا سه مهره سفید باشند.

$$P(A) = \frac{\binom{5}{2}\binom{4}{1} + \binom{5}{3}\binom{4}{0}}{\binom{9}{3}} = \frac{50}{84}$$

ب) دقیقا یک سفید یعنی یک سفید و ۲ سیاه

$$P(B) = \frac{\binom{5}{1}\binom{4}{2}}{\binom{9}{3}} = \frac{30}{84}$$

ج) سه مهره هم رنگ یعنی سه تا سفید یا سه تا سیاه

$$P(C) = \frac{\binom{5}{3} + \binom{4}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{14}{84}$$

تمرین) از جعبه ای که شامل ۵ مهره سبز و ۴ مهره آبی و ۲ مهره زرد می باشد، ۳ مهره به تصادف خارج می کنیم، مطلوبست احتمال آنکه:

الف) هر ۳ مهره سبز باشند؟ ب) فقط یک مهره سبز باشند؟ ج) دقیقا ۲ مهره آبی باشند؟

د) یک مهره سبز و حداقل یک مهره آبی باشد؟ ه) هر سه مهره هم رنگ باشند؟

$$n(S) = \binom{11}{3} = 165 \quad \text{حل}$$

$$\text{الف) } P(A) = \frac{\binom{5}{3}}{165} = \frac{10}{165}, \quad \text{ب) } P(B) = \frac{\binom{5}{1}\binom{6}{2}}{165} = \frac{30}{165}, \quad \text{ج) } P(C) = \frac{\binom{4}{2}\binom{7}{1}}{165} = \frac{42}{165}$$

$$\text{د) } P(D) = \frac{\binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{2}{1} + \binom{5}{1}\binom{4}{2}}{165} = \frac{60}{165}, \quad \text{ه) } P(E) = \frac{\binom{5}{3} + \binom{4}{3}}{165} = \frac{14}{165}$$

تمرین) در جعبه ای ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز قرار دارد، به تصادف ۳ مهره از آن خارج می کنیم، با چه احتمالی فقط یکی از مهره ها سفید است؟

$$\text{حل) } P(A) = \frac{\binom{4}{1}\binom{5}{2}}{\binom{9}{3}} = \frac{40}{84} = \frac{10}{21}$$

تمرین) در کیسه ای ۵ سفید و ۴ سیاه و ۳ مهره آبی وجود دارد، ۳ مهره به تصادف از کیسه خارج می کنیم، با کدام احتمال رنگ مهره های خارج شده متفاوت است؟

$$P(A) = \frac{\binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{3}{11}$$

تمرین) در جعبه ای ۵ مهره آبی، ۳ مهره سبز و ۲ مهره قرمز وجود دارد، اگر سه مهره به تصادف از آن خارج کنیم، با کدام احتمال فقط دو مهره خارج شده، هم رنگ هستند؟

$$P(A) = \frac{\binom{5}{2}\binom{5}{1} + \binom{3}{2}\binom{7}{1} + \binom{2}{2}\binom{8}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{79}{120}$$

تمرین) در ظرفی ۵ مهره به شماره های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ قرار دارند. دو مهره با هم بیرون می آوریم، با کدام احتمال مجموع شماره های این دو مهره یک عدد زوج است؟

حل) مجموع زوج باشد یعنی هر دو زوج یا هر دو فرد باشند.

$$P(A) = \frac{\binom{2}{2} + \binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{4}{10}$$

تمرین) از میان ده نقطه شکل زیر، ۴ نقطه به تصادف انتخاب می کنیم، احتمال آنکه با این چهار نقطه بتوان یک چهار ضلعی

ساخت بطوریکه روی هر خط فقط یک راس آن قرار بگیرد، چقدر است؟

$$P(A) = \frac{\binom{2}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{4}{1}}{\binom{10}{4}} = \frac{4}{35}$$

تمرین) در جعبه اول ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در جعبه دوم ۳ مهره سفید و ۶ مهره سیاه موجود است. به تصادف یکی از جعبه ها را انتخاب کرده و دو مهره با هم از آن بیرون می آوریم، با کدام احتمال هر دو مهره سفید هستند؟

حل) ابتدا جعبه را انتخاب نموده سپس سفید بودن مهره خارج شده از جعبه ها را بدست می آوریم.

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{\binom{3}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{31}{168}$$

تمرین) در جعبه ای ۳ مهره قرمز و ۵ مهره سیاه وجود دارد، به طور تصادفی و بدون جایگذاری ۲ مهره از داخل ظرف بیرون می آوریم، احتمال آنکه مهره اول سیاه و مهره دوم قرمز باشد، کدام است؟

$$\text{حل) } \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$$

تمرین) در جعبه ای ۳ مهره قرمز و ۵ مهره سیاه وجود دارد، به طور تصادفی و با جایگذاری ۲ مهره از داخل ظرف بیرون می آوریم، احتمال آنکه مهره اول سیاه و مهره دوم قرمز باشد، کدام است؟

$$\text{حل) } \frac{5}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{15}{64}$$

تمرین) در جعبه ای ۳ مهره سبز و ۴ آبی و ۲ قرمز موجود است، به طور تصادفی و بدون جایگذاری ۳ مهره از داخل ظرف بیرون می آوریم، احتمال آنکه مهره اول آبی و مهره دوم سبز و مهره سوم آبی باشد، کدام است؟

$$\text{حل) } \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{9}{126}$$

تمرین) در جعبه ای ۳ مهره سفید و ۵ مهره قرمز و ۷ مهره سیاه وجود دارد، به طور تصادفی و بدون جایگذاری ۴ مهره از داخل ظرف بیرون می آوریم، احتمال آنکه مهره اول سفید و مهره چهارم قرمز باشد، را بیابید؟

$$\text{حل) } \frac{3}{15} \times \frac{5}{14} = \frac{1}{14}$$

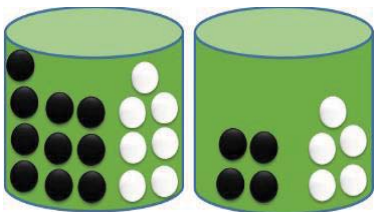
تمرین) در کیسه ای ۳ مهره سفید و ۷ مهره سیاه و ۵ مهره قرمز وجود دارد، چهار مهره متوالیا و بدون جایگذاری از این کیسه خارج می کنیم. بدون توجه به اولین و دومین و سومین مهره با کدام احتمال مهره چهارم سفید است؟

$$\text{حل) } P(A) = \frac{3}{15}$$

تمرین) در جعبه ای سه ظرف مشابه داریم، ظرف اول شامل یک مهره سفید و یک مهره سیاه، ظرف دوم شامل یک مهره سفید و ۲ مهره سیاه و در ظرف سوم شامل ۳ مهره سفید و ۲ مهره سیاه است. در برداشتن یک مهره از این جعبه احتمال آنکه مهره خارج شده سیاه باشد، را بیابید؟

$$\text{حل) } P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{47}{90}$$

تمرین) دو ظرف داریم، در ظرف اول ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و در ظرف دوم ۷ مهره سفید و ۱۰ مهره سیاه است، از ظرف اول یک مهره برداشته و بدون روئت در ظرف دوم قرار می دهیم. آنگاه از ظرف دوم یک مهره بیرون می آوریم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟



$$P(A) = \frac{5}{9} \times \frac{8}{18} + \frac{4}{9} \times \frac{7}{18} = \frac{34}{81}$$

حل مسائل احتمال به کمک جایگشت:

تمرین) اگر یک عدد سه رقمی با کنار هم گرفتن اعداد ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ به وجود آید، با کدام احتمال عدد به وجود آمده زوج است؟

$$\text{حالات کل} = 4 \times 4 \times 3 = 48$$

$$\text{حالات مطلوب} \begin{cases} 4 \times 3 \times 1 = 12 \\ 3 \times 3 \times 2 = 18 \end{cases} \Rightarrow 12 + 18 = 30 \Rightarrow P(A) = \frac{30}{48} = \frac{5}{8}$$

تمرین (تاس سالمی را ۳ بار می اندازیم ، با کدام احتمال هیچ دو عدد رو شده مثل هم نمی باشند؟

$$\begin{cases} n(S) = 6 \times 6 \times 6 = 216 \\ n(A) = 6 \times 5 \times 4 = 120 \end{cases} \Rightarrow P(A) = \frac{5}{9}$$

تمرین) حروف کلمه ی *ATAXIA* را بریده و به طور تصادفی کنار هم قرار می دهیم، با کدام احتمال هر سه حرف شبیه به هم کنار هم قرار می گیرند؟

$$\begin{cases} n(S) = \frac{6!}{3!} = 120 \\ n(A) = 4! \times 1 = 4! \quad AAATXI \end{cases} \Rightarrow P(A) = \frac{4!}{120} = \frac{1}{5}$$

تمرین) حروف کلمه ی *LAGRANGE* را بریده و به طور تصادفی کنار هم قرار می دهیم، با کدام احتمال حروف یکسان کنار هم قرار می گیرند؟

$$\begin{cases} AAGGLRNE \Rightarrow n(A) = 6! \times 1 \times 1 = 6! \\ n(S) = \frac{8!}{2! \times 2!} \end{cases} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{14}$$

تمرین) خانواده دارای ۴ فرزند است، مطلوبست احتمال اینکه :

الف) دارای ۲ فرزند پسر و ۲ فرزند دختر باشد. (ب) دارای ۳ فرزند پسر و ۱ دختر باشد.

ج) دارای ۲ فرزند پسر یا ۳ فرزند دختر باشد. (د) تعداد پسرها از تعداد دخترها بیشتر باشد.

$$n(S) = 16 \text{ (حل)}$$

تعداد پسر (دختر)	۴	۳	۲	۱	۰
تعداد حالات	۱	۴	۶	۴	۱

حل مسائل احتمال به کمک اصل متمم :

تمرین) جعبه ای شامل ۵ مهره سبز و ۴ مهره آبی و ۲ مهره زرد می باشد، ۳ مهره به تصادف خارج می کنیم، مطلوبست احتمال اینکه :

الف) حداقل یک مهره آبی باشد. (ب) حداکثر دو مهره سبز باشد. (ج) هر ۳ مهره هم رنگ نباشد.

$$n(S) = \binom{11}{3} = 165 \text{ (حل)}$$

الف) متمم حداقل یک مهره آبی باشد، هیچ مهره آبی نباشد.

$$P(A') = \frac{\binom{7}{3}}{165} = \frac{35}{165} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{35}{165} = \frac{130}{165}$$

ب) متمم حداکثر دو مهره سبز باشد، یعنی هر سه مهره سبز باشند.

$$P(A') = \frac{\binom{5}{3}}{165} = \frac{10}{165} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{10}{165} = \frac{155}{165}$$

ج) متمم اینکه هر ۳ مهره هم‌رنگ نباشند یعنی هر ۳ هم‌رنگ باشند.

$$P(A') = \frac{\binom{5}{3} + \binom{4}{3}}{165} = \frac{14}{165} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{14}{165} = \frac{151}{165}$$

تمرین (از بین ۴ دانش آموز سال دهم و ۵ دانش آموز سال یازدهم، چهار نفر را به تصادف انتخاب می‌کنیم، احتمال آنکه از هر دو گروه انتخاب شوند را بیابید؟

حل) متمم اینکه از هر دو گروه انتخاب شوند برابر با همه از یک گروه هستند.

$$n(S) = \binom{9}{4} = 126 \Rightarrow P(A') = \frac{\binom{4}{4} + \binom{5}{4}}{126} = \frac{6}{126} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{6}{126} = \frac{120}{126}$$

تمرین (در پرتاب همزمان دو تاس با کدام احتمال لااقل یکی از اعداد رو شده در این دو تاس مضرب ۳ است؟

حل) متمم مضرب ۳ باشد برابر با مضرب ۳ نباشد.

$$P(A') = \frac{16}{36} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{16}{36} = \frac{20}{36}$$

تمرین (از بین اعداد ۳ رقمی به تصادف یک عدد برداشته ایم، با کدام احتمال لااقل یک بار رقم ۲ در این عدد ظاهر شده است؟

حل) متمم لااقل یک بار عدد ۲ ظاهر شود برابر با رقم ۲ اصلاً ظاهر نشود.

$$\begin{cases} n(S) = 9 \times 10 \times 10 = 900 \\ n(A') = 8 \times 9 \times 9 \end{cases} \Rightarrow P(A') = \frac{72}{900} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{72}{900} = \frac{28}{100}$$

تمرین (در یک خانواده ی ۵ فرزندی با کدام احتمال حداقل ۲ فرزند پسر داریم؟

حل) متمم حداقل دو فرزند پسر برابر با هیچ فرزند پسری نداشته باشیم یا ۴ دختر (۱ پسر) داشته باشیم.

$$\begin{cases} n(S) = 32 \\ P(A') = \frac{6}{32} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{6}{32} = \frac{13}{16} \end{cases}$$

تمرین) حروف کلمه ی $ABADN$ را بریده و به طور تصادفی در کنار هم قرار می دهیم، با کدام احتمال دو حرف A کنار هم قرار نمی گیرند؟

حل) متمم اینکه دو حرف کنار هم قرار نگیرند برابر با اینکه دو حرف کنار هم باشند.

$$\begin{cases} n(S) = \frac{5!}{2!} = 60 \\ P(A') = \frac{1 \times 4!}{60} = \frac{24}{60} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{24}{60} = \frac{3}{5} \end{cases}$$

قانون جمع احتمالات:

تمرین) اگر داشته باشیم $P(A) = \frac{2}{10}$ و $P(B) = \frac{1}{10}$ و $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$ مقدار $P(A \cup B)$ را بیابید؟

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{10} = \frac{2}{10}$$

تمرین) اگر $P(A) = \frac{2}{3}$ و $P(B) = \frac{1}{3}$ و $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ باشند، حاصل $\frac{P(A-B)}{P(A' \cap B')}$ را بیابید؟

$$\text{حل) } \frac{P(A-B)}{P(A' \cap B')} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(A \cup B)} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}}{1 - \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right]} = \frac{\frac{3}{6}}{1} = \frac{3}{1} = 3$$

تمرین) از بین اعداد مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$ عددی را به تصادف انتخاب می کنیم، احتمال اینکه:

الف) عدد انتخابی زوج یا مضرب ۵ باشد را بدست آورید؟ ب) عدد انتخابی فرد و اول باشد؟

$$\text{حل الف) } P(A) = \frac{12}{20} \quad \text{ب) } P(B) = \frac{9}{20}$$

گروه خونی

A	O	AB	B
---	---	----	---

درصد	۳۸٪	۱۲٪	۲۷٪	۲۳٪
------	-----	-----	-----	-----

تمرین) فرض کنید در جامعه ای درصد گروه های خونی به صورت

جدول زیر باشد، فردی به تصادف از این جامعه انتخاب می شود، احتمال آنکه:

الف) این فرد دارای گروه خونی A یا O باشد؟

ب) این فرد دارای گروه خونی AB نباشد؟

تمرین) احتمال آنکه حمید در شرکت استخدام شود برابر با $۰/۶$ و در شرکت استخدام شود برابر با $۰/۷۵$ است. اگر احتمال

استخدام در هر دو شرکت $۰/۵۵$ باشد، با کدام احتمال فقط در یکی از شرکت ها استخدام می شود؟

$$\text{حل) } P(A - B) + P(B - A) = \frac{6}{100} + \frac{75}{100} - 2 \times \frac{55}{100} = \frac{25}{100}$$

تمرین) دو تاس را با هم می اندازیم، با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده دو تاس برابر با ۸ یا اعداد رو شده هر دو تاس

زوج است؟

$$\text{حل) } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{36} + \frac{9}{36} - \frac{3}{36} = \frac{11}{36}$$

تست های بخش احتمال مقدماتی

۱- اعداد ۱ تا ۹ را روی ۹ کارت یکسان نوشته ایم، دو کارت به تصادف از بین آنها بیرون می آوریم، با چه احتمالی مجموع

اعداد رو شده برابر با ۱۱ می باشد؟ ریاضی ۹۱

$$\frac{1}{6} (۴) \quad \frac{1}{9} (۳) \quad \frac{1}{۱۲} (۲) \quad \frac{1}{۸} (۱)$$

حل) گزینه ۳-

$$A = \{(6, 5), (7, 4), (8, 3), (9, 2)\} \Rightarrow P(A) = \frac{4}{\binom{9}{2}} = \frac{1}{9}$$

۲- هریک از ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ را روی پنج کارت یکسان نوشته و به تصادف ۳ کارت از بین آنها را کنار هم قرار می دهیم، با کدام احتمال عدد سه رقمی حاصل مضرب ۳ است؟ سراسری تجربی ۹۵

۰/۳(۱) ۰/۴(۲) ۰/۵(۳) ۰/۶(۴)

حل) گزینه ۲-

$$\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{1, 3, 5\} \Rightarrow P(B) = \frac{3! + 3! + 3! + 3!}{\binom{5}{3}} = 0/4$$

۳- در ظرفی ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در ظرف دیگر ۴ مهره سفید و ۲ مهره سیاه موجود است، به تصادف از هر ظرف دو مهره بیرون می آوریم، با کدام احتمال ۴ مهره خارج شده هم رنگ هستند؟ سراسری ریاضی ۹۳

۰/۱۲(۱) ۰/۱۵(۲) ۰/۱۸(۳) ۰/۲۴(۴)

حل) گزینه ۲-

$$P_{\text{هم رنگ}} = P_{\text{سفید}} + P_{\text{سیاه}} \Rightarrow \frac{\binom{5}{2}\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}\binom{6}{2}} + \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}\binom{6}{2}} = 0/15$$

۴- در کیسه ای ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و ۳ مهره قرمز موجود است، سه مهره به تصادف از این کیسه خارج می کنیم، با چه احتمالی حداکثر دو مهره خارج شده هم رنگ هستند؟ سراسری ریاضی ۹۵

$\frac{41}{44}$ (۴) $\frac{39}{44}$ (۳) $\frac{19}{22}$ (۲) $\frac{17}{22}$ (۱)

حل) گزینه ۴ - از اصل متمم کمک می گیریم،

$$P(A) = 1 - \frac{\binom{5}{3} + \binom{4}{3} + \binom{3}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{41}{44}$$

۵- در جعبه ای ۷ مهره سفید، ۵ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز وجود دارد، ۴ مهره به تصادف از این جعبه بیرون می آوریم، چقدر احتمال دارد که یک مهره قرمز و حداقل دو مهره سفید باشد؟ سراسری تجربی خارج از کشور ۹۴

$$\frac{30}{91} (1) \quad \frac{25}{77} (2) \quad \frac{40}{143} (3) \quad \frac{50}{143} (4)$$

حل) گزینه ۳- حداقل دو سفید یعنی دو تا سفید یا سه تا سفید

$$P(A) = \frac{\binom{7}{1}[\binom{5}{2} + \binom{5}{3}]}{\binom{14}{4}} = \frac{40}{143}$$

۶- دو تاس را باهم پرتاب می کنیم، با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده مضرب ۴ است؟ تجربی ۹۲

$$\frac{2}{9} (1) \quad \frac{5}{18} (2) \quad \frac{1}{4} (3) \quad \frac{5}{12} (4)$$

حل) گزینه ۳

مجموع	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

$$P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

۷- دو تاس را باهم پرتاب می کنیم، احتمال آنکه دو عدد رو شده متوالی باشند، کدام است؟

تجربی خارج از کشور ۹۵

$$\frac{2}{9} (1) \quad \frac{5}{18} (2) \quad \frac{7}{18} (3) \quad \frac{4}{9} (4)$$

حل) گزینه ۲

$$A = \{(1,2)(2,1)(2,3)(3,2)(3,4)(4,3)(4,5)(5,4)(5,6)(6,5)\} \Rightarrow P(A) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

۸- در کیسه ای ۵ مهره سفید و ۳ سیاه و ۲ قرمز موجود است، سه مهره به تصادف از کیسه خارج می کنیم، با کدام احتمال فقط دو مهره خارج شده هم رنگ هستند؟ تجربی خارج از کشور ۹۶

$$\frac{31}{60} (4) \quad \frac{37}{60} (3) \quad \frac{79}{120} (2) \quad \frac{41}{120} (1)$$

حل گزینه ۲

$$P(A) = \frac{\binom{5}{2}\binom{5}{1} + \binom{3}{2}\binom{7}{1} + \binom{2}{2}\binom{8}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{79}{120}$$

۹- در کیسه ای ۵ سفید و ۴ سیاه و ۳ آبی وجود دارد، ۳ مهره به تصادف خارج می کنیم با کدام احتمال رنگ مهره های خارج شده متفاوت است؟ سراسری تجربی ۹۶

$$\frac{3}{11}(1) \quad \frac{5}{22}(2) \quad \frac{7}{22}(3) \quad \frac{4}{11}(4)$$

حل گزینه ۱

$$P(A) = \frac{5 \times 4 \times 3}{\binom{12}{3}} = \frac{3}{11}$$

۱۰- در آزمایشگاهی ۵ موش سالم و ۳ موش دیابتی وجود دارد، اگر دو موش از قفس گریخته باشند، با چه احتمالی فقط یکی از موش های فراری دیابتی است؟ تجربی ۸۱

$$\frac{15}{56}(1) \quad \frac{5}{14}(2) \quad \frac{3}{8}(3) \quad \frac{15}{28}(4)$$

حل گزینه ۴

$$P(A) = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{15}{28}$$

۱۱- در کیسه ای ۵ سفید و ۷ سیاه موجود است، دو مهره به تصادف خارج می کنیم، با چه احتمالی دو مهره هم رنگ نباشند، کدام است؟ ریاضی ۸۴

$$\frac{6}{11}(1) \quad \frac{19}{33}(2) \quad \frac{35}{66}(3) \quad \frac{37}{66}(4)$$

حل گزینه ۳-

$$P(A) = \frac{\binom{5}{1}\binom{7}{1}}{\binom{12}{2}} = \frac{35}{66}$$

۱۲- هر یک از اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ را روی شش گوی یکسان نوشته و به طور تصادف و به طور متوالی گوی ها را از جعبه خارج می کنیم، با چه احتمالی گوی ها یک در میان زوج و فرد هستند؟ سراسری ۹۴

$$0/1 \quad (1) \quad 0/12 \quad (2) \quad 0/15 \quad (3) \quad 0/2 \quad (4)$$

حل) گزینه ۱ - دو حالت را بررسی می کنیم، گوی ها با عدد زوج شروع شوند یا گوی ها با عدد فرد شروع شوند.

$$n(S) = 6! = 720$$

$$\begin{cases} 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 36 \\ 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 36 \end{cases} \Rightarrow P(A) = \frac{72}{720} = 0/1$$

۱۳- از بین ۱۲ کتاب که ۷ تای آنها ادبیات و ۵ تای آنها تاریخ است، ۵ کتاب به تصادف انتخاب می کنیم، با چه احتمالی ۳ کتاب ادبیات و ۲ کتاب تاریخ انتخاب شده است؟ خارج ۹۱

$$\frac{15}{66} \quad (1) \quad \frac{17}{166} \quad (2) \quad \frac{35}{132} \quad (3) \quad \frac{17}{132} \quad (4)$$

حل) گزینه ۳ -

$$P(A) = \frac{\binom{7}{3} \binom{5}{2}}{\binom{12}{5}} = \frac{35}{132}$$

۱۴- اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای باشد $P(A) = 0/6$ و $P(B) = 0/7$ و $P(A \cap B) = 0/2$ باشند، آنگاه $P(B \cap A')$ کدام است؟ ریاضی ۹۲

$$0/1 \quad (1) \quad 0/3 \quad (2) \quad 0/4 \quad (3) \quad 0/5 \quad (4)$$

حل) گزینه ۲ -

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{2}{10} = \frac{6}{10} - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{4}{10}$$

$$P(B \cap A') = \frac{7}{10} - \frac{4}{10} = \frac{3}{10}$$

۱۵- اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای باشند، در کدام حالت $P(B - A) = P(B) - P(A)$ درست است؟ خارج ۹۱

$$A \subseteq B \quad (۱) \quad \text{همواره } (۳)$$

$$A \cap B = \emptyset \quad (۲) \quad P(A) < P(B) \quad (۴)$$

حل) گزینه ۱

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \Rightarrow A \subseteq B$$

۱۶- در جعبه ای ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه موجود است، ۲ مهره بدون رویت از جعبه خارج می کنیم، سپس از بین مهره های باقیمانده یک مهره به تصادف انتخاب می کنیم، احتمال اینکه مهره سفید باشد کدام است؟ سراسری خارج از کشور ۹۶

$$\frac{1}{7} \quad (۱) \quad \frac{2}{7} \quad (۲) \quad \frac{3}{7} \quad (۳) \quad \frac{5}{7} \quad (۴)$$

$$\text{حل) گزینه ۳- حالت ۱) اولی سفید و دومی سفید و سومی سفید} \quad \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{6}{210}$$

$$\text{حالت ۲) اولی سفید و دومی سیاه و سومی سفید} \quad \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{36}{210}$$

$$\text{حالت ۳) اولی سیاه و دومی سیاه و سومی سفید} \quad \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{24}{210}$$

$$\text{حالت ۴) اولی سیاه و دومی سفید و سومی سفید} \quad \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{24}{210}$$

$$\text{کل حالات: } \frac{6}{210} + \frac{36}{210} + \frac{24}{210} + \frac{24}{210} = \frac{3}{7}$$

بخش دوم: احتمال شرطی (کاهش فضای نمونه ای)

گاهی اوقات مسئله یک پیش فرض نیز دارد، یعنی نتیجه آزمایش را دقیقاً نمی دانیم اما می دانیم که یک پیشامد خاص اتفاق افتاده است. به دو مسئله زیر دقت کنید:

الف) تاسی را می اندازیم با چه احتمالی عدد ۴ می آید؟ در این مسئله کل حالات برابر با $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و احتمال برابر با $\frac{1}{6}$ است.

ب) تاسی را می اندازیم، اگر عدد رو شده زوج باشد با چه احتمالی عدد ۴ می آید؟ در این مسئله کل حالات برابر با $\{۲,۴,۶\}$ است و احتمال برابر با $\frac{۱}{۳}$ است.

با توجه به مسائل بالا می بینیم که فضای نمونه در حالت ب محدود شده است که به این احتمال شرطی می گویند.

نکته) در مسائلی که کلمات شرطی مثل اگر ، مشروط به اینکه، بطوریکه ، ... می آید باید از احتمال شرطی کمک بگیریم.

نکته) منظور از احتمال A به شرط B که با نماد $P(A|B)$ نمایش داده می شود، احتمال وقوع پیشامد A است به شرطی که بدانیم پیشامد B رخ داده است که به صورت زیر محاسبه می شود:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

البته این فرمول زمانی قابل تعریف است که احتمال وقوع پیشامد B صفر نباشد.

تمرین) در پرتاب یک تاس اگر بدانیم اعداد رو شده زوج هستند با چه احتمالی عدد رو شده اول می باشد؟

$$B = \{۲,۴,۶\} , A = \{۲\} \Rightarrow P(A) = \frac{۱}{۳}$$

تمرین) از بین اعداد یک رقمی طبیعی دو عدد به تصادف انتخاب می کنیم، اگر این دو عدد اول باشند با چه احتمالی متوالی هستند؟

$$B = \{(۲,۳), (۲,۵), (۲,۷), (۳,۵), (۳,۷), (۵,۷)\} , A = \{(۲,۳)\} \Rightarrow P(A) = \frac{۱}{۶}$$

تمرین) در پرتاب چهار تاس اعداد رو شده متوالی هستند، با چه احتمالی یکی از تاس ها ۲ رو شده است؟

$$B = \{(۱,۲,۳,۴), (۲,۳,۴,۵), (۳,۴,۵,۶)\} , A = \{(۱,۲,۳,۴), (۲,۳,۴,۵)\} \Rightarrow P(A) = \frac{۲}{۳}$$

تمرین) در پرتاب دو تاس اگر حاصل ضرب ارقام رو شده زوج باشد با کدام احتمال مجموع ارقام رو شده ۸ است؟

حل) حاصل ضرب دو عدد زمانی زوج است که هر دو عدد زوج یا اولی زوج و دومی فرد یا اولی فرد یا دومی زوج باشند .

$$n(B) = 9 + 9 + 9 = 27, \quad A = \{(2,6), (6,2), (4,4)\} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$$

تمرین) ۷۵ درصد دانش آموزان یک کلاس در درس ادبیات و ۶۰ درصد در درس عربی و ۴۰ درصد در هر دو درس قبول شده اند، مطلوبست:

الف) احتمال آنکه دانش آموز قبول شده در درس ادبیات در درس عربی نیز قبول شود، چقدر است؟

ب) احتمال آنکه دانش آموز قبول شده در درس عربی در درس ادبیات نیز قبول شود، چقدر است؟

(حل)

$$\text{الف) } P(A|F) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{40}{100}}{\frac{75}{100}} = \frac{40}{75}$$

$$\text{ب) } P(F|A) = \frac{P(A \cap F)}{P(A)} = \frac{\frac{40}{100}}{\frac{60}{100}} = \frac{4}{6}$$

نکته (متمم احتمال شرطی :

$$P(A'|B') = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)}$$

تمرین ۶) اگر $P(A) = \frac{1}{3}$ و $P(B) = \frac{1}{4}$ و $P(A \cup B) = \frac{5}{12}$ در این صورت $P(A'|B')$ چند برابر $P(A|B)$ است؟

$$P(A'|B') = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)} = \frac{1 - \frac{5}{12}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{7}{12}}{\frac{3}{4}} = \frac{7}{9}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{5}{12}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{P(A'|B')}{P(A|B)} = \frac{\frac{7}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{7}{6}$$

تمرین ۷) اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند و $P(A) = 0.4$ و $P(B) = 0.5$ و

$P(A \cup B) = 0.7$ مقدار $P(A|B')$ را بیابید؟

$$P(A \cap B) = \frac{4}{10} + \frac{5}{10} - \frac{7}{10} = \frac{2}{10}$$

$$P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{\frac{4}{10} - \frac{2}{10}}{1 - \frac{5}{10}} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{5}{10}} = \frac{2}{5}$$

تمرین) اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند و $P(A) = \frac{2}{4}$ و $P(B) = \frac{1}{5}$ و مقدار $P(A \cup B)$ را بیابید؟

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) + P(B) - P(A \cup B)}{P(B)} = \frac{0/1}{0/2} = \frac{1}{2}$$

تمرین) در یک کشور ۴۰ درصد سالمندان ناراحتی قلبی و ۳۰ درصد آنها بیماری خونی دارند، اگر سالمندی به عارضه ی خونی مبتلا شود احتمال بروز ناراحتی قلبی ۶۰ درصد است. با کدام احتمال یکی از سالمندان حداقل به یکی از این دو مبتلا می شود؟

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow \frac{6}{10} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{3}{10}} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{18}{100}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{6}{10} + \frac{3}{10} - \frac{18}{100} = \frac{52}{100}$$

تمرین ۸) توزیع درصد لامپ های ۱۰۰ و ۲۰۰ وات از دو کارخانه A و B به صورت جدول زیر است، احتمال اینکه لامپی از کارخانه A ، ۱۰۰ وات باشد چقدر است؟

B	A	کارخانه
۴۰	۲۰	۱۰۰ وات
۳۵	۱۵	۲۰۰ وات

حل) پیشامد اینکه لامپ ۱۰۰ وات باشد برابر با S و پیشامد اینکه از کارخانه A باشد را T در نظر می گیریم:

$$P(S|T) = \frac{n(S \cap T)}{n(T)} = \frac{20}{20 + 15} = \frac{20}{45}$$

نکته) برای هر پیشامد ناتهی دلخواه A از فضای نمونه ای S داریم:

$$۱) P(A|A) = 1 \quad ۲) P(\emptyset|A) = 0 \quad ۳) P(A|A') = 0$$

$$۴) P(A|S) = P(A) \quad ۵) P(S|A) = 1$$

نکته) اگر A و B دو پیشامد ناسازگار و C یک پیشامد ناتهی از فضای نمونه ای S باشند، آنگاه داریم:

$$P((A \cup B)|C) = P(A|C) + P(B|C)$$

تمرین ۹) اگر A و B دو پیشامد ناسازگار از فضای نمونه ای S باشند، اگر بدانیم C رخ داده و احتمال A برابر با $۰/۳$ است و احتمال اینکه دست کم یکی از دو پیشامد A و B رخ دهد برابر $۰/۵$ باشد، مقدار $P(B'|C)$ را بیابید؟

$$P((A \cup B)|C) = P(A|C) + P(B|C) \Rightarrow \frac{5}{10} = \frac{3}{10} + P(B|C) \Rightarrow P(B|C) = \frac{2}{10} \Rightarrow$$

$$P(B'|C) = 1 - P(B|C) = 1 - \frac{2}{10} = \frac{8}{10}$$

تمرین ۱۰) دو تاس را باهم می اندازیم، در حالی که حداقل عدد یک تاس مضرب ۳ نباشد، با کدام احتمال جمع دو عدد رو شده مضرب ۳ است؟

حل) فضای پرتاب دو تاس ۳۶ حالت دارد که از این ۳۶ حالت حالت‌های هر دو مضرب سه هستند،

$$n(A) = 36 - 4 = 32 \quad \text{در نتیجه تعداد حالت‌هایی که حداقل یک تاس مضرب سه نباشد برابر با } 36 - 4 = 32$$

۳۲ است، اگر B را پیشامد اینکه جمع دو عدد رو شده مضرب ۳ باشند در نظر بگیریم داریم:

$$A \cap B = \{(1,2)(2,1)(1,5)(5,1)(2,4)(4,2)(4,5)(5,4)\} \Rightarrow P(B|A) = \frac{8}{32}$$

تمرین ۱۱) احتمال زدن گل اول توسط یک تیم برابر با $۰/۲$ است، اگر گل اول را بزند با احتمال $۰/۶$ بازی را می برد، احتمال اینکه بازی را نبرد در صورتی که بدانیم گل اول را زده است، چقدر است؟

$$\begin{cases} P(A) = \frac{2}{10} \\ P(B|A) = \frac{6}{10} \end{cases} \Rightarrow P(B'|A) = 1 - P(B|A) = 1 - \frac{6}{10} = \frac{4}{10}$$

تمرین ۱۲) اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند، و $A \subseteq B$ ، $P(B) = \frac{3}{4}$ ، $P(A) = \frac{1}{3}$ مطلوبست، $P(B|A')$.

$$\begin{cases} P(A \cap B) = P(A) \\ P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{5}{8} \end{cases}$$

	با سواد	بی سواد
بالای ۶۰ سال	۵۰	۱۰۰
بین ۳۰ تا ۶۰ سال	۱۵۰	۵۰
زیر ۳۰ سال	۲۰۰	۵۰

تمرین ۱۳) ترکیب جمعیتی یک شهر کوچک به صورت جدول زیر است، اگر احتمال آنکه فرد بالای ۳۰ سال باسواد باشد، P_1 و احتمال اینکه فرد باسواد بالای ۳۰ سال باشد، را P_2 بگیریم، مقدار $\frac{P_1}{P_2}$ کدام است؟

$$P_1 = P(\text{بالای ۳۰ سال} | \text{باسواد}) = \frac{P(\text{بالای ۳۰ سال و باسواد})}{P(\text{بالای ۳۰ سال})}$$

$$= \frac{50 + 150}{50 + 100 + 150 + 50} = \frac{200}{350}$$

$$P_2 = P(\text{باسواد} | \text{بالای ۳۰ سال}) = \frac{P(\text{بالای ۳۰ سال و باسواد})}{P(\text{باسواد})} = \frac{50 + 150}{400} = \frac{200}{400} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{4}{7}}{\frac{1}{2}} = \frac{8}{7}$$

تمرین ۱۴) فرض کنید $S = \{a, b, c, d, e\}$ فضای نمونه باشد و $P(\{a\}) = \frac{1}{4}$ ، $P(\{a, b, c\}) = \frac{1}{2}$ حاصل $P(\{b, c, d\} | \{a, b, c\})$ را بیابید؟

$$P(\{b, c, d\} | \{a, b, c\}) = \frac{P(\{b, c\})}{P(\{a, b, c\})} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

تمرین) در پرتاب همزمان دو تاس سالم اگر مجموع اعداد رو شده بزرگتر از ۶ باشد، احتمال آنکه عدد اول باشد را بیابید؟

مجموع	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

$$P(A) = \frac{8}{21}$$

تمرین) در پرتاب همزمان دو تاس سالم اگر مجموع اعداد رو شده کوچکتر از ۶ باشد، احتمال آنکه شماره ی یکی از تاس ها رو شده ۲ باشد را بیابید؟

مجموع	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
-------	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----

تعداد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱
-------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

$$B = \{(1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,2)\} \Rightarrow P = \frac{5}{10}$$

تمرین) تاسی را دو بار پرتاب می کنیم، اگر مجموع اعداد رو شده برابر با ۸ باشد با کدام احتمال هر دو عدد ظاهر شده اول هستند؟

مجموع	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	$P(A) = B = \{(3,5), (5,3)\}$ $\frac{2}{5}$
تعداد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱	

تمرین) در پرتاب دو تاس سالم اگر حداقل یکی از تاس ها عدد ۵ ظاهر شود، با کدام احتمال دو عدد رو شده متوالی هستند؟

$$B = \{(1,5), (2,5), (3,5), \dots, (6,5), (5,5), (5,1), (5,2), (5,3), \dots, (5,6)\}$$

$$A = \{(4,5), (5,4), (5,6), (6,5)\} \Rightarrow P(A) = \frac{4}{11}$$

تمرین) در یک خانواده ۴ فرزند می دانیم حداقل یکی از فرزندان دختر است، با کدام احتمال این خانواده ۳ فرزند دختر دارد؟

حل) کل حالات یک خانواده چهار فرزند ۱۶ می باشد که ۱۵ حالت آن حداقل یک فرزند دختر دارد. از این ۱۵ حالت ۴ حالت آن سه فرزند دختر می باشند در این صورت احتمال برابر:

$$P(A) = \frac{4}{15}$$

تمرین) ارقام ۳ و ۵ و ۶ و ۶ و ۷ را به تصادف کنار هم قرار می دهیم، اگر عدد حاصله زوج باشد، احتمال آنکه دو رقم یکسان کنار هم باشند را بیابید؟

حل) تعداد کل اعداد زوج برابر $1 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ است و تعداد حالات مطلوب برابر با $1 \times 1 \times 1 \times 2 \times 3 = 6$ است. در این صورت احتمال برابر با $P = \frac{6}{24}$ است.

تمرین) در کیسه ای ۶ مهره آبی و ۴ مهره سفید وجود دارد، از این کیسه دو مهره به تصادف خارج می کنیم، اگر دو مهره خارج شده هم رنگ باشند با کدام احتمال آبی می باشد؟

$$\text{کل حالات} = \binom{6}{2} + \binom{4}{2} = 21$$

$$\text{مطلوب} = \binom{6}{2} = 15 \Rightarrow P = \frac{15}{21}$$

تمرین) ارقام ۱ تا ۹ را روی نه کارت نوشته و به تصادف ۲ کارت را انتخاب می کنیم، اگر مجموع اعداد ظاهر شده زوج باشد، با کدام احتمال هر دو عدد فرد هستند؟

$$\text{کل حالات} = \binom{5}{2} + \binom{4}{2} = 16, \quad \text{مطلوب} = \binom{5}{2} = 10 \Rightarrow P = \frac{10}{16}$$

تمرین) درون جعبه ای ۳ مهره سفید و ۵ مهره سیاه و ۲ مهره آبی وجود دارد. از این جعبه ۳ مهره به تصادف خارج می کنیم، اگر حداکثر یکی از مهره های خارج شده آبی باشد، با کدام احتمال دو مهره سیاه خارج شده است؟

$$\text{کل حالات} = \binom{2}{1} \times \binom{8}{2} + \binom{8}{3} = 112, \quad \text{مطلوب} = \binom{5}{2} \times \binom{5}{1} = 50 \Rightarrow P = \frac{50}{112}$$

پیشامدهای مستقل:

الف) دو پیشامد A و B را مستقل می گوئیم هرگاه وقوع یا عدم وقوع یکی بر دیگری تاثیری نداشته باشد.

ب) دو پیشامد A و B را مستقل می گوئیم هرگاه داشته باشیم: $P(A|B) = P(A)$

ج) اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند، داریم: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

تمرین ۱) اگر $S = \{a, b, c, d\}$ و $A = \{a, b\}$ و $B = \{b, c\}$ باشند، مستقل بودن A و B را بررسی کنید؟

$$\begin{cases} P(A) = \frac{2}{4} \\ P(B) = \frac{2}{4} \end{cases} \Rightarrow P(A) \times P(B) = \frac{1}{4} = P(A \cap B) = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{مستقلند}$$

تمرین) دو تاس سالم را همزمان با هم پرتاب می کنیم، احتمال اینکه هر دو عدد رو شده زوج باشند، را بیابید؟

$$P = \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{9}{36}$$

تمرین) تاس سالمی را ۳ بار پرتاب می کنیم، احتمال اینکه هر سه عدد رو شده مضرب سه نباشند را بیابید؟

$$P = \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{64}{216} = \frac{8}{27}$$

تمرین) دو سکه و یک تاس را با هم پرتاب می کنیم، احتمال اینکه سکه ها رو و تاس عدد ۵ بیاید را بیابید؟

$$P = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$$

تمرین) خانواده ای دارای دو فرزند پسر است، با کدام احتمال فرزند سوم آن دختر است؟

(حل) از آنجاییکه فرزندان در خانواده مستقل از یکدیگر هستند، لذا احتمال همان $P = \frac{1}{2}$ است.

تمرین) در یک خانواده چهار فرزندی احتمال آنکه فرزند اول و سوم دختر نباشند، را بیابید؟

$$P = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

تمرین) احتمال موفقیت عمل جراحی برای شخص A برابر با ۰/۹ و برای شخص B برابر با ۰/۸ است، با کدام احتمال حداقل عمل جراحی برای یکی از این دو نفر، موفقیت آمیز است؟

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{9}{10} + \frac{8}{10} - \frac{9}{10} \times \frac{8}{10} = \frac{98}{100}$$

تمرین) از بین جوانان یک شهر ۶۰ درصد دارای گواهینامه رانندگی و ۵۰ درصد دارای تحصیلات دانشگاهی هستند، اگر فردی از این گروه انتخاب شود با کدام احتمال این فرد دارای گواهینامه رانندگی یا تحصیلات دانشگاهی است؟

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{60}{100} + \frac{50}{100} - \frac{60}{100} \times \frac{50}{100} = \frac{75}{100}$$

تمرین) احتمال تاثیر مثبت یک داروی ساخته شده روی فرد A برابر با ۰/۹ و روی فرد B برابر با ۰/۸ است، احتمال آنکه این دارو فقط روی یکی از آنها تاثیر مثبت داشته باشد، را بیابید؟

$$P(A - B) + P(B - A) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{9}{10} + \frac{8}{10} - 2 \times \frac{9}{10} \times \frac{8}{10} = \frac{17}{10} - \frac{144}{100} = \frac{26}{100}$$

تمرین ۲) احتمال قبولی علی در درس فیزیک ۹۰ درصد و احتمال قبولی علی در درس ریاضی ۷۰ درصد است.

الف) احتمال اینکه در هر دو درس قبول شود چقدر است؟

ب) با چه احتمالی حداقل در یک درس قبول شود چقدر است؟

حل) پیشامد A را قبولی در درس فیزیک و پیشامد B را قبولی در درس ریاضی قرار می دهیم، در نتیجه این دو پیشامد مستقلند.

$$\text{الف) } P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{9}{10} \times \frac{7}{10} = \frac{63}{100}$$

$$\text{ب) } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{90}{100} + \frac{70}{100} - \frac{63}{100} = \frac{97}{100}$$

نکته) در حالت کلی انتخاب هایی که به صورت با جایگذاری انجام می شوند، مستقل اند. در واقع در مورد مسائل پیشامدهای مستقل از اصل ضرب استفاده می کنیم.

تمرین ۵) ظرفی دارای ۲ مهره سفید و ۳ مهره سیاه باشد، دو مهره به صورت پی در پی و با جایگذاری انتخاب شود، مطلوبست احتمال اینکه :

الف) مهره اول سفید و مهره دوم سیاه است. ب) هر دو مهره سفید باشد.

$$\text{الف) } P = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}, \quad \text{ب) } P = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

نکته) سه پیشامد C و B و A را مستقل می گوئیم هرگاه دو به دو مستقل باشند و داریم :

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

نکته) اگر A و B مستقل باشند،

الف) پیشامدهای A, B' نیز مستقل اند. ب) پیشامدهای A', B' نیز مستقل اند.

تمرین) اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، بطوریکه $P(A \cap B) = ۰/۱$ و $P(A \cap B') = ۰/۴$ حاصل $P(A \cup B')$ را بیابید؟

$$\begin{cases} P(A \cap B) = ۰/۱ \Rightarrow P(A) \times P(B) = \frac{۱}{۱۰} \\ P(A \cap B') = ۰/۴ \Rightarrow P(A) \times P(B') = \frac{۴}{۱۰} \end{cases} \Rightarrow \frac{P(B')}{P(B)} = ۴ \Rightarrow ۱ - P(B) = ۴P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{۱}{۵}$$

$$\Rightarrow P(B') = \frac{۴}{۵} \Rightarrow P(A) = \frac{۱}{۲}$$

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B') = \frac{۱}{۲} + \frac{۴}{۵} - \frac{۴}{۱۰} = \frac{۹}{۱۰}$$

تمرین) احتمال اینکه رضا در کنکور قبول شود $۰/۵$ و احتمال اینکه در آزمون رانندگی قبول شود $۰/۶$ است. مطلوبست:

الف) احتمال اینکه رضا در کنکور قبول شود و در رانندگی قبول نشود، چقدر است؟

ب) احتمال اینکه فقط در یکی قبول شود چقدر است؟

ج) احتمال اینکه حداقل در یکی قبول شود، چقدر است؟

$$\text{الف) } P(A \cap B') = P(A) \times P(B') = \frac{۵}{۱۰} \times \left(1 - \frac{۶}{۱۰}\right) = \frac{۲۰}{۱۰۰}$$

$$\text{ب) } P(A - B) + P(B - A) = P(A) \times P(B') + P(B) \times P(A') = \frac{۵}{۱۰} \times \frac{۴}{۱۰} + \frac{۶}{۱۰} \times \frac{۵}{۱۰} = \frac{۱}{۲}$$

$$\text{ج) } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = \frac{۵}{۱۰} + \frac{۶}{۱۰} - \frac{۵}{۱۰} \times \frac{۶}{۱۰} = \frac{۸۰}{۱۰۰} = \frac{۴}{۵}$$

تمرین) احتمال اینکه A و B و C بتوانند یک پرتاب را از منطقه سه امتیازی تبدیل به گل کنند، برابر با $۰/۳$ و $۰/۲$ و $۰/۵$ است. با چه احتمالی فقط یکی از آنها پرتاب خود را گل می کند؟

$$\begin{aligned} & P(A \cap B' \cap C') + P(A' \cap B \cap C') + P(A' \cap B' \cap C) \\ &= \frac{۳}{۱۰} \times \frac{۸}{۱۰} \times \frac{۵}{۱۰} + \frac{۷}{۱۰} \times \frac{۲}{۱۰} \times \frac{۵}{۱۰} + \frac{۷}{۱۰} \times \frac{۸}{۱۰} \times \frac{۵}{۱۰} = \frac{۴۷۰}{۱۰۰۰} = ۰/۴۷ \end{aligned}$$

تست های بخش (۲)

۱- اگر $P(A) = 2P(B) = 0.4$ و $P(B|A) = 0.5$ باشند، مقدار $P(A|B)$ کدام است؟

- ۰/۲ (۱) ۱ (۲) ۰/۵ (۳) ۰/۱ (۴)

حل) گزینه ۲-

$$\begin{cases} P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow \frac{0.5}{1.0} = \frac{P(A \cap B)}{0.4} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.2 \\ P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.2}{0.2} = 1 \end{cases}$$

۲- احتمال اینکه یک عمل جراحی برای شخص موفقیت آمیز باشد برابر با 0.9 و برای شخص برابر با 0.8 است، با چه احتمالی

لااقل برای یکی از دو نفر عمل جراحی موفقیت آمیز است؟ تجربی ۹۵

- ۰/۹۲ (۱) ۰/۹۴ (۲) ۰/۹۶ (۳) ۰/۹۸ (۴)

حل) گزینه ۴-

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{9}{10} + \frac{8}{10} - \frac{9}{10} \times \frac{8}{10} = \frac{98}{100}$$

۳- در جعبه ای ۳ مهره سفید و ۲ مهره سیاه و ۵ مهره قرمز وجود دارد، ۲ مهره به تصادف از آن بیرون می آوریم، با چه

احتمالی این دو مهره هم رنگ نیستند؟ تجربی ۹۴

- $\frac{28}{45}$ (۱) $\frac{29}{45}$ (۲) $\frac{31}{45}$ (۳) $\frac{32}{45}$ (۴)

حل) گزینه ۳

$$P(A) = \frac{3 \times 2 + 2 \times 5 + 3 \times 5}{\binom{10}{2}} = \frac{31}{45}$$

۴- اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند، و $P(A|B) = \frac{6}{11}$ ، $P(B) = \frac{4}{11}$ ، $P(A) = \frac{3}{11}$ در این صورت مقدار

$P(B|A)$ کدام است؟

$$\frac{1}{3} (۴)$$

$$\frac{2}{3} (۳)$$

$$\frac{3}{5} (۲)$$

$$\frac{4}{5} (۱)$$

$$\left\{ \begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow \frac{6}{10} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{4}{10}} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{24}{100} \\ P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{24}{100}}{\frac{3}{10}} = \frac{4}{5} \end{aligned} \right.$$

۵- پنج مهره سفید با شماره های ۱ تا ۵ و همچنین ۵ مهره سیاه با شماره های ۱ تا ۵ یکسان را در ظرفی قرار می دهیم. به تصادف ۲ مهره از بین آنها بیرون می آوریم، اگر مجموع شماره های دو مهره ۶ باشد، با کدام احتمال هر دو مهره هم رنگ هستند؟ ریاضی ۹۲

$$\frac{3}{5} (۴)$$

$$\frac{4}{9} (۳)$$

$$\frac{5}{9} (۲)$$

$$\frac{2}{5} (۱)$$

$$\{(10, 50)(10, 50)(10, 50)(10, 50)(20, 40)(20, 40)(20, 40)(30, 30)\}$$

$$A = \{(10, 50)(10, 50)(20, 40)(20, 40)\} \Rightarrow P(A) = \frac{4}{9}$$

۶- دانشجویان دانشکده ای به صورت جدول زیر توزیع شده اند، احتمال آنکه دانشجوی زنی در مقطع کارشناسی ارشد مشغول به تحصیل باشد کدام است؟

	زن	مرد
ارشد	۱۵	۲۵
دکترا	۵	۱۵

$$\frac{5}{8} (۲)$$

$$\frac{1}{4} (۱)$$

$$\frac{3}{8} (۴)$$

$$\frac{3}{4} (۳)$$

$$P(\text{زن | ارشد}) = \frac{P(\text{زن و ارشد})}{P(\text{زن})} = \frac{15}{15 + 5} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

۹- اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند، و $P(B) = \frac{3}{4}$ ، $P(A) = \frac{1}{3}$ ، $A \subseteq B$ ، آنگاه مقدار $P(B|A')$ کدام است؟ خارج از کشور ۹۰

$$\frac{5}{8} (۴)$$

$$\frac{7}{12} (۳)$$

$$\frac{1}{2} (۲)$$

$$\frac{3}{8} (۱)$$

$$P(A \cap B) = P(A)$$

$$P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{5}{8}$$

۱۰- اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند و $P(A) = 0.2$ و $P(B) = 0.22$ و

$P(A|B) = 0.7$ آنگاه حاصل $P(B'|A')$ کدام است؟ سراسری ۹۰

۰/۸۴ (۴)

۰/۹۲ (۳)

۰/۹۰ (۲)

۰/۹۶ (۱)

$$\left\{ \begin{aligned} P(B'|A') &= \frac{P(B' \cap A')}{P(A')} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(A)} = \frac{1 - \left(\frac{2}{10} + \frac{22}{100} - \frac{154}{1000} \right)}{1 - \frac{2}{10}} = 0.9 \\ P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow \frac{7}{10} = \frac{P(A \cap B)}{0.22} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{154}{1000} \end{aligned} \right.$$

۱۱- اگر A و B دو پیشامد مستقل از هم باشند و $P(A) = \frac{1}{3}$ ، $P(B) = \frac{1}{3}$ آنگاه $P(A' \cup B')$ کدام است؟

$\frac{5}{6}$ (۴)

$\frac{4}{5}$ (۳)

$\frac{1}{6}$ (۲)

$\frac{1}{5}$ (۱)

$$\text{حل) } P(A' \cup B') = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

۱۲- در گروه زنان یک روستا ۶۰ درصد مهارت قالی بافی و ۲۵ درصد مهارت گلدوزی دارند، اگر یک فرد از بین آنها

انتخاب شود با چه احتمالی مهارت قالی بافی یا گلدوزی دارد؟

۰/۸۵ (۴)

۰/۸ (۳)

۰/۷۵ (۲)

۰/۷ (۱)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{60}{100} + \frac{25}{100} - \frac{60}{100} \times \frac{25}{100} = \frac{7}{10}$$

۱۳- اگر A و B پیشامدهای مستقل باشند و $P(A|B) = \frac{1}{3}$ و $P(B) = \frac{1}{3}$ ، حاصل $P(A' \cup B')$ کدام است؟

$\frac{5}{6}$ (۴)

$\frac{4}{5}$ (۳)

$\frac{1}{6}$ (۲)

$\frac{1}{5}$ (۱)

$$\begin{cases} P(A|B) = P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \\ P(A' \cup B') = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \end{cases}$$

۱۴- در پرتاب دو سکه و تاس با هم احتمال اینکه حداقل یک سکه رو و عدد تاس مضرب ۳ باشند، کدام است؟ خارج از

کشور ۹۱ تجربی

$$\frac{1}{12}(1) \quad \frac{1}{6}(2) \quad \frac{1}{4}(3) \quad \frac{1}{3}(4)$$

$$\begin{cases} A = \{(r, p), (r, r), (p, r)\} \\ B = \{3, 6\} \end{cases} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{6} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

۱۵- دو سکه و یک تاس را با هم پرتاب می کنیم، با کدام احتمال هر دو سکه رو یا تاس عدد ۶ ظاهر شود؟ سراسری ریاضی

۹۶

$$\frac{3}{8}(1) \quad \frac{5}{8}(2) \quad \frac{5}{12}(3) \quad \frac{7}{12}(4)$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

۱۶- یک سکه و دو تاس را پرتاب می کنیم، با کدام احتمال جمع دو تاس بیشتر از ۴ یا سکه رو ظاهر شده است؟ ریاضی

خارج از کشور ۹۶

$$\frac{7}{12}(1) \quad \frac{5}{8}(2) \quad \frac{7}{8}(3) \quad \frac{11}{12}(4)$$

مجموع	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

$$P(A \cup B) = \frac{30}{36} + \frac{1}{2} - \frac{30}{36} \times \frac{1}{2} = \frac{11}{12}$$

۱۷- در پرتاب دو تاس می دانیم که جمع اعداد رو شده کمتر از ۱۰ است، با چه احتمالی دو عدد رو شده فرد

هستند؟ سراسری ریاضی ۸۶

$$\frac{4}{15}(1) \quad \frac{2}{9}(2) \quad \frac{1}{5}(3) \quad \frac{1}{4}(4)$$

مجموع	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

$$P(A|B) = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$$

$$A = \{(1,1)(1,3)(3,1)(1,5)(5,1)(5,3)(3,5)(3,3)\}$$

۱۸- تاس همگنی را با چشم بسته پرتاب می کنیم، و فقط می دانیم برآمد عدد رو شده زوج است، احتمال اینکه عدد ۴ یا ۶

ظاهر شود کدام است؟ ریاضی خارج از کشور ۹۱

$$\frac{3}{4}(4)$$

$$\frac{2}{3}(3)$$

$$\frac{1}{3}(2)$$

$$\frac{1}{2}(1)$$

$$B = \{2,4,6\}, A = \{4,6\} \Rightarrow P(A|B) = \frac{2}{3}$$

فصل دهم: آمار

علم آمار: مجموعه ای از روشها جمع آوری داده و اطلاعات و سازماندهی و نمایش داده و تحلیل و تفسیر داده ها و در نتیجه

قضاوت و نتیجه گیری و پیش بینی در پدیده های تصادفی نامیده می شود.

جامعه: مجموعه ای از افراد یا اشیا که می خواهیم در مورد آنها موضوع یا موضوعاتی را مورد بررسی قرار دهیم.

به عبارت دیگر مجموعه ای از افراد یا اشیا که در یک صفت مشترک هستند.

مثال: دبیران ریاضی شهرستان کلاله (موضوع: بررسی مدرک تحصیلی)

اندازه جامعه: به تعداد اعضای یک جامعه آماری اندازه جامعه می گویند.

سرشماری: اگر تمامی افراد یک جامعه را مورد بررسی قرار دهیم می گوئیم سرشماری کرده ایم.

مشکلات سرشماری: در دسترس نبودن تمام اعضای جامعه، وقت گیر بودن، هزینه بر بودن، از بین رفتن جامعه در برخی از مطالعات.

نمونه آماری: بخش از جامعه آماری که بیانگر خواص جامعه آماری باشد.

نکته: نمونه آماری هرچه بزرگتر انتخاب شود، خصوصیات جامعه آماری را بهتر نمایش می دهد.

عمل نمونه گیری: نمونه گیری بهترین بخش آمار را تشکیل می دهد که این انتخاب باید به صورت تصادفی باشد تا تمام افراد جامعه از شانس کافی برخوردار باشند.

اندازه نمونه: تعداد اعضای نمونه را اندازه نمونه می نامند.

نمونه تصادفی: زیر مجموعه ای از جامعه آماری که به طور تصادفی انتخاب می شود، در نمونه تصادفی امکان انتخاب همه اعضای جامعه وجود دارد و قبل از انتخاب نمونه نمی توان وجود یا عدم وجود افراد را به طور قطعی مشخص کرد.

داده: نتایج حاصل از اندازه گیری یا بررسی نمونه را داده می گویند.

روشهای جمع آوری داده:

الف) از طریق پرسش (پرسشنامه کتبی - مصاحبه)

ب) از طریق مشاهده و ثبت وقایع

ج) از طریق آزمایش

د) استفاده از داده های از پیش تهیه شده (دادگان)

تمرین) برای موارد زیر جامعه و نمونه مناسب انتخاب کنید؟

(۱) بررسی کنسرو های تولیدی یک کارخانه

(جامعه: کل کنسرو های تولیدی یک کارخانه - نمونه: ۴۰۰ تا کنسرو تولیدی کارخانه)

(۲) بررسی علل افزایش مرگ و میر ماهی های دریای خزر

(جامعه: ماهی های دریای خزر - نمونه: بررسی ۱۰۰۰ ماهی دریای خزر)

(۳) بررسی وضعیت استخدام معلمان دبیرستان دخترانه حجاب

(جامعه: کل معلمان دبیرستان حجاب - نمونه: بررسی ۱۰ تا معلمان دبیرستان حجاب)

تمرین) بهترین روشهای جمع آوری داده برای فرضیه های زیر چیست؟

(۱) تاثیر مواد مخدر بر قلب انسان (آزمایش)

(۲) رنگ مورد علاقه دانش آموزان ، قرمز است. (مصاحبه یا پرسش نامه)

(۳) بیشترین آمار مرگ و میر در سال اخیر مربوط به حوادث رانندگی است. (دادگان)

(۴) معدل دانش آموزان مدارس شهرستان کلاله (دادگان)

متغیر تصادفی: به موضوع مورد مطالعه در هر جامعه آماری، متغیر تصادفی می گویند.

انواع متغیر تصادفی :

(۱) متغیر کمی (۲) متغیر کیفی

متغیر کمی: متغیر هایی هستند که قابل اندازه گیری با عدد هستند، مثل وزن، قد، معدل، شاخص توده بدنی، ...

متغیر کیفی: متغیر هایی که قابل اندازه گیری با عدد نیستند. مثل گروه خونی، مراحل رشد یک انسان، ...

متغیر های کمی خود دو دسته هستند:

(۱) کمی پیوسته: متغیرهایی هستند که اگر دو مقدار a و b را اختیار کنند، مقادیر بین آن دو عدد را نیز بتوانند اختیار کنند. مثل قد، وزن، ...

(۲) کمی گسسته: متغیرهایی هستند که پیوسته نباشند. مثل تعداد دانش آموزان، تعداد ماهی ها، ...
متغیر های کیفی نیز دو دسته هستند:

(۱) کیفی ترتیبی: متغیرهایی که نوع ترتیب در آنها وجود دارد. مثل مراحل رشد کودک

(۲) کیفی اسمی: متغیرهایی هستند که ترتیبی نیستند و فقط برای نامگذاری یا برچسب گذاری استفاده می شوند. مثل گروه خونی، میزان تحصیلات یک شخص، ...

تمرین جدول زیر را کامل کنید؟

نوع متغیر	متغیر	نوع متغیر	متغیر
کمی گسسته	تعداد مکالمات تلفنی	کمی گسسته	تعداد بیماران مراجعه کننده به یک مطب
کمی پیوسته	طول مکالمات تلفنی	کیفی اسمی	جنسیت افراد یک شهر
کمی پیوسته	گنجایش آب یک تانکر	کیفی اسمی	وضعیت مسکن
کیفی اسمی	وضعیت تاهل	کمی پیوسته	میزان آلودگی هوا
کیفی ترتیبی	مراحل تحصیل یک فرد	کیفی اسمی	غذای مورد علاقه

آمار توصیفی

معیارهای گرایش به مرکز: شاخص هایی که محل تمرکز داده را مشخص می کنند.

میانگین: میانگین داده های x_1, x_2, \dots, x_n برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

میانگین در هر جامعه آماری منحصر به فرد است و همه داده ها در میانگین تاثیر دارند.

تمرین) میانگین داده های ۱۰، ۱۲، ۱۱، ۱۴، ۲۰، ۱۵ را بیابید؟

$$\bar{x} = \frac{10 + 12 + 11 + 14 + 20 + 15}{6} = \frac{82}{6} = 13\frac{5}{6}$$

تمرین) میانگین ۱۰ داده آماری برابر با $32/5$ است، اگر دو داده ۵۰ و ۲۵ را از بین داده ها حذف کنیم، میانگین داده های باقی مانده را بیابید؟

$$10 \times 32/5 = 325 \Rightarrow \bar{x} = \frac{325 - (25 + 50)}{8} = \frac{250}{8} = 31\frac{3}{8}$$

نکته) برای مجموعه ای از داده ها مجموع اختلاف داده ها از میانگین صفر است.

$$(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \dots + (x_n - \bar{x}) = 0$$

نکته) اگر تمام داده ها با هم برابر باشند، میانگین برابر با داده ها است.

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n \Rightarrow \bar{x} = x_1$$

نکته) اگر تمام داده ها را با عدد جمع یا تفریق کنیم میانگین نیز با آن عدد جمع یا تفریق می شود.

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \Rightarrow (x_1 + b, x_2 + b, \dots, x_n + b) \Rightarrow \bar{x}_{\text{جدید}} = \bar{x}_{\text{قدیم}} + b$$

نکته) اگر هر یک از داده ها در عددی ضرب شود، میانگین نیز در همان عدد ضرب می شود.

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \Rightarrow (ax_1, ax_2, \dots, ax_n) \Rightarrow \bar{x}_{\text{جدید}} = \bar{x}_{\text{قدیم}} \times a$$

تمرین) میانگین تعدادی از داده های آماری برابر با ۵۷ است، ابتدا از هر داده آماری ۱۲ واحد کم می کنیم و سپس داده های حاصل را سه برابر می کنیم، میانگین داده های نهایی چند است؟

$$\bar{x}_{\text{جدید}} = (57 - 12) \times 3 = 135$$

نکته) اگر میانگین m داده آماری \bar{x} و میانگین n داده آماری برابر با \bar{y} باشد، آنگاه میانگین همه داده های آماری برابر است با:

$$\bar{u} = \frac{m\bar{x} + n\bar{y}}{m+n}$$

تمرین) میانگین ۸ داده آماری برابر با ۵ و ۱۲ داده آماری دیگر برابر با ۱۰ است، میانگین این ۲۰ داده آماری را بیابید؟

$$\bar{u} = \frac{m\bar{x} + n\bar{y}}{m+n} = \frac{۸ \times ۵ + ۱۲ \times ۱۰}{۱۲ + ۸} = \frac{۱۶۰}{۲۰} = ۸$$

میانه: داده ای که تعداد داده های قبل و بعد آن با هم برابرند.

روش بدست آوردن میانه:

(۱) داده ها را به صورت صعودی یا نزولی مرتب می کنیم.

(۲) اگر تعداد داده ها فرد باشد، داده وسطی میانه است و اگر تعداد داده ها زوج باشد میانگین دو داده وسطی برابر با میانه است.

نکته) در هر جامعه آماری فقط یک میانه وجود دارد، یعنی میانه منحصر به فرد است.

نکته) میانه نسبت به بزرگی یا کوچکی داده ها حساسیت نشان نمی دهد، در نتیجه با وجود داده دور افتاده بهتر است از میانه به جای میانگین استفاده کنیم.

نکته) اگر داده ها در عددی ضرب یا با عددی جمع یا تفریق شوند میانه نیز در همان عدد ضرب یا جمع یا تفریق می شود.

تمرین) میانه و میانگین داده های ۱۱، ۴، ۴، ۱۴، ۱۲، ۱۲، ۱۱، ۱۰، ۳، ۱، ۲ را بیابید؟

چارک ها:

چارک اول (Q_1): میانه داده های قبل از میانه اصلی را چارک اول می گویند.

چارک دوم (Q_2): همان میانه اصلی است.

چارک سوم (Q_3): میانه داده های بعد از میانه اصلی را چارک سوم می گویند.

تمرین) چارک اول تا سوم داده های ۱۰, ۹, ۱۱, ۱۴, ۱۲, ۱۵, ۱۰, ۱۵, ۱۴, ۱۳, ۱۶ را بیابید؟

$$9, 10, 10, 11, 12, 13, 14, 14, 15, 15, 16 \Rightarrow \begin{cases} Q_1 = 10 \\ Q_2 = 13 \\ Q_3 = 15 \end{cases}$$

تمرین) میانگین داده های بین چارک اول تا سوم داده های زیر را بیابید؟

۶۲, ۶۵, ۶۳, ۵۴, ۷۰, ۷۷, ۶۵, ۶۵, ۷۱, ۷۰, ۵۷, ۵۹, ۵۹, ۵۰, ۵۱, ۶۶, ۷۰, ۶۰, ۵۱, ۵۰

حل) ابتدا داده ها را از کوچک به بزرگ مرتب می کنیم.

$$50, 50, 51, 51, 54, 57, 59, 60, 62, 63, 65, 65, 66, 70, 70, 71, 77 \Rightarrow \begin{cases} Q_1 = 10 \\ Q_2 = 13 \\ Q_3 = 15 \end{cases}$$

تست های بخش (۳)

۱- اگر میانگین داده های x_1, x_2, x_3, x_4 برابر با \bar{x} باشد، میانگین داده های

$x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4$ برابر با کدام است؟

۹- اختلاف چارک اول و سوم در داده های ۲۲, ۲۰, ۲۲, ۵, ۶, ۶, ۱۰, ۱۶, ۱۷, ۱۱, ۱۱, ۱۳, ۱۳, ۱۹, ۱۹ کدام است؟

۱۲ (۴)

۱۱ (۳)

۱۰ (۲)

۹ (۱)

بخش چهارم: شاخص های پراکندگی

الف) دامنه تغییرات: اختلاف بین بزرگترین داده با کوچکترین داده را دامنه تغییرات گویند.

$$R = \max(x_i) - \min(x_i)$$

نکته) از آنجایی که دامنه تغییرات به بزرگترین و کوچکترین داده وابسته است، پس با تغییر تعداد و مقدار داده های میانی تغییری در دامنه تغییرات ایجاد نمی شود.

تمرین) دامنه تغییرات داده های ۱۷, ۱۳, ۱۰, ۴, ۷, ۵ را بیابید؟

نکته) اگر همه داده ها با هم برابر باشند، دامنه تغییرات صفر است و بالعکس.

نکته) اگر همه داده های آماری با عدد ثابتی جمع شوند، دامنه تغییرات تغییری نمی کند.

نکته) اگر همه داده ها در عددی ضرب شود، دامنه تغییرات در قدر مطلق همان عدد ضرب می شود.

تمرین) اگر دامنه تغییرات داده های x_1, x_2, \dots, x_n برابر با ۱۲ باشد، دامنه تغییرات داده های

$$\frac{1}{3}x_1 - 4, \frac{1}{3}x_2 - 4, \dots, \frac{1}{3}x_n - 4$$

تمرین) اگر دامنه تغییرات داده های $y + 2, 3x - 3, x + 1, x - 1$ صفر باشد، میانگین داده های $9, 4, x, y$ را بیابید؟

واریانس: واریانس برابر با میانگین مجذور اختلاف داده ها از میانگین است و آن را با نماد σ^2 نمایش می دهیم.

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

به عبارت دیگر داریم:

$$\sigma^2 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} - \bar{x}^2$$

انحراف معیار: جذر واریانس را انحراف معیار می گویند. $\sqrt{\sigma^2}$

تمرین) انحراف معیار داده های ۱، ۳، ۵، ۷ را بیابید؟

نکته) اگر همه داده ها با هم برابر باشند، انحراف معیار و واریانس صفر است و بالعکس.

نکته) اگر همه داده های آماری با مقداری ثابت جمع یا تفریق شود، تغییری در واریانس یا انحراف معیار ایجاد نمی شود.

نکته) اگر داده های آماری در عددی ثابت ضرب یا تقسیم شود، واریانس در مربع آن عدد و انحراف معیار در قدر مطلق آن عدد ضرب یا تقسیم شود.

تمرین) اگر واریانس داده های برابر $2 + 3x_1, 2 + 3x_2, \dots, 2 + 3x_n$ باشد، واریانس داده های $2x_1 - 3, 2x_2 - 3, \dots, 2x_n - 3$ را بیابید؟

تمرین) اگر انحراف معیار برابر ۱۰، x_1, x_2, x_3 با باشد، آنگاه میانگین داده ها را بیابید؟

ضریب تغییرات: ضریب تغییرات که با نماد CV نمایش داده شده است، از طریق رابطه زیر بدست می آید:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

نکته) ضریب تغییرات معمولا به صورت درصد نمایش داده می شود، ضریب تغییرات به واحد اندازه گیری بستگی ندارد.

نکته) ضریب تغییرات برای مقایسه بکار می رود و هرچه ضریب تغییرات کمتر باشد، بهتر است.

نکته) اگر همه داده ها با عددی جمع شوند، ضریب تغییرات کوچکتر می شود و اگر همه داده ها را با عددی تفریق کنیم ضریب تغییرات بیشتر می شود.

نکته) اگر همه داده ها را در عددی ثابت ضرب کنیم ضریب تغییرات تغییری نمی کند.

تست های بخش (۴)

۱- اگر واریانس داده های x_1, x_2, \dots, x_n برابر با صفر باشد، میانگین داده ها کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۵/۵ ۴) ۱۶

۲- در ۲۵ داده های آمار انحراف معیار و میانگین به ترتیب برابر با ۸ و ۳۰ است، اگر داده های

۵۰، ۴۵، ۱۵، ۱۰ از بین داده ها حذف شود، واریانس داده های باقی مانده کدام است؟ تجربی ۹۳

۱) ۱۴/۷۲ ۲) ۱۴/۸۱ ۳) ۱۵/۳۳ ۴) ۱۶/۶۶

۳- انحراف معیار داده های x_1, x_2, \dots, x_n برابر با صفر است، میانگین داده های

۱۰، ۲۰، ۳۰، x_1, x_2, \dots, x_n کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰

۴- در ۸۵ داده های آماری واریانس برابر با $10/24$ و ضریب تغییرات برابر با $0/08$ است، مجموع تمام داده ها برابر با کدام است؟

۱) ۲۷۲۰ ۲) ۲۹۱۰ ۳) ۳۲۰۰ ۴) ۳۴۰۰

۵- بین دو گروه کدام شاخص متفاوت است؟

گروه اول: ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵ گروه دوم: ۶۰، ۶۱، ۶۲، ۶۳، ۶۴، ۶۵

۱) دامنه تغییرات ۲) واریانس ۳) انحراف معیار ۴) ضریب تغییرات

۶- در ۱۵۰ داده آماری با میانگین ۱۲، به دو برابر هریک داده ها ۳ واحد اضافه کنیم، تا داده های جدید تولید شود، ضریب تغییرات داده های جدید چند برابر ضریب تغییرات داده های قبلی است؟ تجربی ۹۲

$$\frac{7}{9}(1) \quad \frac{5}{6}(2) \quad \frac{7}{8}(3) \quad \frac{8}{9}(4)$$

۷- داده های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، x_i مفروض اند، ضریب تغییرات داده های $u_i = 12x_i + 6$ کدام است؟ سراسری ریاضی ۹۵

$$0/4(1) \quad 0/48(2) \quad 0/52(3) \quad 0/6(4)$$

۸- در داده آماری x_1, x_2, \dots, x_n ضریب تغییرات برابر با $1/2$ است. میانگین داده های را به هریک از داده ها اضافه می کنیم. ضریب تغییرات در داده های جدید کدام است؟ خارج از کشور ۸۵ ریاضی

$$0/6(1) \quad 1(2) \quad 1/2(3) \quad 2/4(4)$$

۹- نمرات آزمون فنی دو کارگر فنی A, B به صورت زیر است.

$$A: 15, 14, 15, 16, 17, 19 \quad , \quad B: 16, 14, 17, 14, 17, 18$$

دقت عمل کدام بیشتر است؟ سراسری ریاضی ۹۳

$$A(1) \quad B(2) \quad (3) \text{ یکسان} \quad (4) \text{ غیر پیش بینی}$$

۱۰- دستگاه کالای A با وزن ۱۵۰ و انحراف معیار $3/6$ و دستگاه B همان کالا را با میانگین ۱۶۰ و انحراف معیار $3/84$

بسته بندی می کنیم. دقت عمل پیرامون میانگین، با اطمینان بیشتر است؟ سراسری ریاضی ۹۵

$$(1) \text{ یکسان} \quad (2) A \quad (3) B \quad (4) \text{ نمی توان اظهار نظر کرد.}$$

۱۱- در داده های آماری ۱۸، ۷، ۲۰، ۱۶، ۱۷، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۷، ۲۱، ۱۲، ۱۳، واریانس داده های بین چارک اول و

چارک سوم کدام است؟

$$4/59(1) \quad 4/95(2) \quad 5/24(3) \quad 5/71(4)$$

۱۲- انحراف معیار داده های ۱۱, ۱۵, ۱۷, ۱۶, ۱۴, ۹, ۱۱, ۱۲, ۱۵, ۱۸, ۱۴ بزرگتر از چارک اول و کوچکتر از چارک سوم کدام است؟

۱/۱ (۱) ۱/۲ (۲) ۱/۲۵ (۳) ۱/۳ (۴)

۱۳- در ۶۰ داده آماری، میانگین ۳ و انحراف معیار ۱/۲ است، اگر به تمام داده ها ۹ واحد اضافه شود، ضریب تغییرات داده های جدید کدام است؟

۰/۱ (۱) ۰/۲ (۲) ۰/۳ (۳) ۰/۴ (۴)

۱۴- مجموع ۲۵ داده آماری ۱۲۵ و ضریب تغییرات آن برابر با ۰/۴ است، اگر تمام داده ها را در عدد ۲ ضرب کنیم و ۶ واحد به آنها اضافه کنیم. ضریب تغییرات جدید کدام است؟

۱ (۱) ۰/۸ (۲) ۰/۵ (۳) ۰/۲۵ (۴)

۱۵- میانگین طول اضلاع مربع هایی ۱۵ واحد و ضریب تغییرات آنها برابر با ۰/۲ است، میانگین مساحت این مربع ها کدام است؟ تجربی ۹۵

۲۲۹ (۱) ۲۳۲ (۲) ۲۳۴ (۳) ۲۳۶ (۴)

۱۶- در ۳۰ داده آماری مجموع داده ها برابر با ۲۴۰ و مجموع مربعات این داده ها برابر با ۲۱۹۰ است، ضریب تغییرات کدام است؟ سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۵

۰/۲۲۵ (۱) ۰/۲۷۵ (۲) ۰/۳۲۵ (۳) ۰/۳۷۵ (۴)

۱۷- در ۱۰۰ داده آماری مجموع داده ها برابر با ۱۲۰ و مجموع مجذورات داده ها برابر با ۴۰۰ است، ضریب تغییرات این داده ها کدام است؟

۱ (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{5}{3}$ (۳) ۲ (۴)

۱۸- میانگین طول اضلاع مربع هایی ۱۲ و واریانس برابر با ۵ است، میانگین مساحت های این مربع ها کدام است؟ خارج از کشور ۹۲ ریاضی

۱۲۴ (۱)

۱۳۴ (۲)

۱۴۹ (۳)

۱۶۹ (۴)

۱۹- در یک نمونه گیری آماری مجموع ۱۰ داده برابر با ۵۰ و ضریب تغییرات برابر با $\frac{1}{5}$ است، مجموع مربعات این داده ها کدام است؟

۲۴۹ (۱)

۲۵۲ (۲)

۲۵۷ (۳)

۲۶۰ (۴)

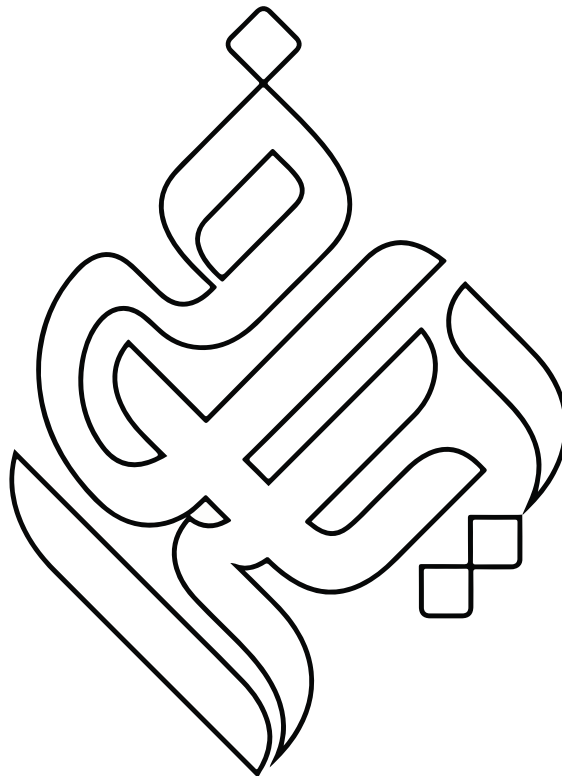
۲۰- در یک نمونه گیری آماری تعداد داده ها برابر با ۱۰ و مجموع مربعات تفاضل داده از میانگین برابر با $14/4$ است، اگر ضریب تغییرات برابر با ۴ درصد باشد، میانگین کدام است؟

۱۸ (۱)

۲۴ (۲)

۳۰ (۳)

۳۲ (۴)



RIAZISARA