

تابع

مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است که هیچ دو عضو متفاوت آن دارای مؤلفه‌های یکسان نباشند، به عبارت دیگر اگر زوج مرتب‌های (x, y) و (x', y') متعلق به تابع f باشند، داریم:

$$(x, y), (x', y') \in f \Rightarrow y = y'$$

تذکره: این بدان معنی است که اگر دو زوج مرتب که دارای مؤلفه‌های اول یکسان باشند باید مؤلفه‌های دوم آن نیز با هم برابر باشند.

مثال ۱: به ازای کدام مقدار a ، $f = \{(1, 2), (a, 3), (4, 0), (4, a^2 - 1)\}$ ضابطه‌ی یک تابع است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) -۱ یا ۱ (۴) صفر

$$a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = \pm 1$$

اگر $a = 1$ آن‌گاه $(1, 3) \in f$ و $(1, 2) \in f$ که در این صورت f تابع نمی‌باشد. بنابراین فقط $a = -1$ قابل قبول است.

مثال ۲: اگر مجموعه $\{(1, 2), (-1, m-1), (-1, 2m)\}$ تابع باشد m کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) -۱

$$\begin{aligned} (-1, m-1) &\Rightarrow m-1 = 2m \Rightarrow m = -1 \\ (-1, 2m) &\Rightarrow m = -1 \end{aligned}$$

مثال ۳: به ازای کدام مقدار a رابطه زیر بیانگر یک تابع است؟

$$f = \{(2, 5), (3, -1), (2a + 4, 5), (6, 7)\}$$

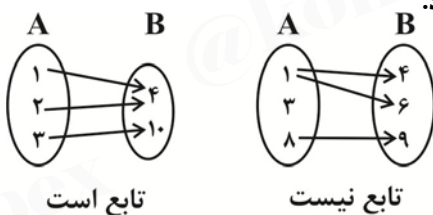
- (۱) $a \in \{-1\}$ (۲) $a \in \mathbb{R} - \{-1\}$ (۳) $a \in \{-\frac{1}{2}, 1\}$ (۴) $a \in \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}, 1\}$

گزینه ۴ صحیح است.

نمایش‌های گوناگون یک تابع

(۱) تابع از دید نمودار پیکانی:

در نمودار پیکانی تابع از هر عضو مجموعه‌ی اول نایبستی از یک پیکان بیش‌تر خارج شود.



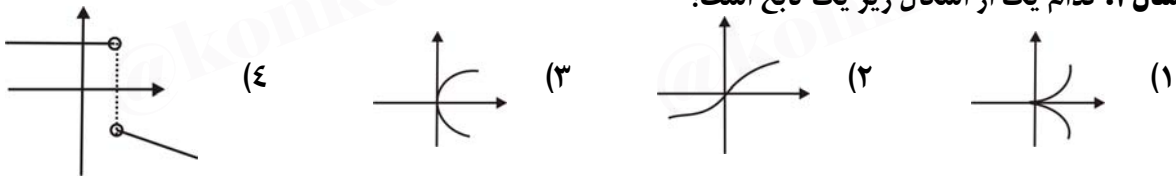
(۲) تابع از دید نمودار مختصاتی:

در نمودار مختصاتی تابع هر خط موازی محور y نایبستی نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع کند.

(۳) تابع از دید ضابطه:

هرگاه ضابطه‌ی رابطه‌ی f مفروض باشد برای تشخیص تابع بودن آن با استفاده از ضابطه، y را بر حسب x به دست می‌آوریم. اگر به ازای هر x یک y حاصل شود، ضابطه یک تابع است و در غیر این صورت تابع نیست. (x متغیر و y تابع است).

😊 مثال ۴: کدام یک از اشکال زیر یک تابع است؟



تشخیص تابع از روی نمودار باید یک خط موازی محور y ها کنیم و حداکثر نمودار را در یک نقطه قطع کند. بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۵: کدام یک از روابط زیر یک تابع است؟

۱) $y^2 - 2y + 1 = \cos x$

$$(y-1)^2 = \cos x \Rightarrow y = 1 \pm \sqrt{\cos x} \xrightarrow{x=0} y = 2, y = 0$$

به ازای $x = 0$ دو مقدار $y = 0$ و $y = 2$ بدست آمده لذا رابطه‌ی فوق تابع نیست.

۲) $[x][y] = 5$

۳) $5x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 4 = 0$

ابتدا رابطه‌ی فوق را مرتب می‌کنیم.

$$4x^2 + 4xy + y^2 + x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow (2x+y)^2 + (x+2)^2 = 0$$

با توجه به این نکته که مجموع چند عبارت مثبت زمانی صفر می‌شود که تک تک آن‌ها برابر صفر می‌شود، داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+y=0 \\ x+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases}$$

لذا رابطه‌ی فوق یک تابع است.

۴) $(x^2 - y)((x+1)^2 + (y-1)^2) = 0$

۵) $\sin y = x$

به x مقدار صفر را می‌دهیم داریم:

$$\sin y = 0 \Rightarrow y = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

به ازای $x = 0$ بی‌شمار y بدست می‌آید لذا رابطه‌ی فوق تابع نیست.

۶) $x^3 + xy^2 + x - x^2y - y^3 - y = 0$

$$x^2(x-y) + y^2(x-y) + (x-y) = 0 \Rightarrow (x-y)(x^2 + y^2 + 1) = 0 \xrightarrow{x^2 + y^2 + 1 \neq 0} \Rightarrow y = x$$

تابع است.

عبارت $x^2 + y^2 + 1$ چون همواره مثبت است، لذا هیچ گاه صفر نمی شود.

۷) $y = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

رابطه‌ی فوق تابع نیست، زیرا دو زوج $(0, 1), (0, 0)$ در آن صدق می کنند که مؤلفه‌ی اول آن‌ها برابر است.

۸) $y = \pm \sqrt{a-x} \pm \sqrt{x-a}$

مثال ۶: چه تعداد از روابط زیر معرف یک تابع است؟

الف) $x^2 + y^2 = 6$ (۱) ب) $|x| + y^2 = 0$ (۲) ج) $y^3 + 3y^2 + 3y + x = 5$ (۳) د) $y + |x| = 3$ (۴)

رابطه‌ی (ب) تابع است، زیرا مجموع $|x|$ و y^2 تنها زمانی برابر صفر است که هر کدام صفر باشند، پس $f = \{(0, 0)\}$. رابطه‌ی (ج) تابع است، زیرا اگر به طرفین تساوی یک واحد اضافه کنیم، آن گاه خواهیم داشت:

$$(y+1)^3 + x = 6 \Rightarrow (y+1)^3 = 6-x \Rightarrow y+1 = \sqrt[3]{6-x} \Rightarrow y = \sqrt[3]{6-x} - 1$$

چون به ازای هر x فقط یک مقدار برای y به دست می آید، پس این رابطه نیز تابع است.

رابطه (د) تابع است، زیرا به ازای هر x فقط یک مقدار برای y به دست می آید.

$$y = 3 - |x|$$

مثال ۷: کدام یک از معادله‌های زیر در اعداد حقیقی ضابطه‌ی یک تابع است؟ (x متغیر مستقل است.)

۱) $x^2 + y^2 = 4xy$ ۲) $|y| + x = 0$ ۳) $x^2 + y^2 - 2 = 2xy$ ۴) $x^2 + y^2 = 2xy$

$$(x-y)^2 = 0 \Rightarrow y = x$$

گزینه ۴:

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱:

$$x^2 + y^2 = 4xy \Rightarrow y^2 - 4xy + x^2 = 0 \Rightarrow (y-2x)^2 - 3x^2 = 0 \Rightarrow y-2x = \pm\sqrt{3}x \Rightarrow y = (2 \pm \sqrt{3})x$$

تابع نیست.

گزینه ۲:

$$x = -1 \Rightarrow y = \pm 1$$

تابع نیست.

گزینه ۳:

$$x = 0 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$$

تابع نیست.

مثال ۸: کدام رابطه‌ی زیر یک تابع را بر حسب متغیر x مشخص می کند؟

۱) $y^2 - 2y + 1 = \cos x$ ۲) $\sqrt{x-1} + \sqrt{y^2-2} = 0$

۳) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$ ۴) $xy^3 + xy - y^2 = 1$

$$xy^3 + xy - y^2 - 1 = 0 \Rightarrow xy(y^2 + 1) - (y^2 + 1) = 0 \Rightarrow (y^2 + 1)(xy - 1) = 0 \Rightarrow xy - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$$

تابع است.

دلیل نادرستی سایر گزینه‌ها:

(۱) گزینه‌ی $(y-1)^2 = \cos x \Rightarrow y = 1 \pm \sqrt{\cos x} \xrightarrow{x=0} y = 2, y = 0$

(۲) گزینه‌ی $\sqrt{x-1} + \sqrt{y^2-2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y^2=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\pm\sqrt{2} \end{cases}$

(۳) گزینه‌ی $x^2 - 2xy + 2y^2 = 0 \Rightarrow (x-y)(x-2y) = 0 \Rightarrow y = x$ یا $y = \frac{x}{2}$

مثال ۹: کدام یک از روابط زیر در مجموعه‌ی اعداد حقیقی ضابطه‌ی یک تابع بر حسب x را نمایش می‌دهد؟

(۴) $[x][y] = 1$

(۳) $x[y] = 1$

(۲) $[xy] = 1$

(۱) $y[x] = 1$

گزینه ۱ صحیح است.

تابع چند ضابطه‌ای:

هرگاه رابطه‌ای با چند ضابطه بیان شد در صورتی آن رابطه تابع است که دارای شرایط زیر باشد:

(۱) تک تک آن ضابطه‌ها در دامنه‌ی تعریفشان، تابع باشند.

(۲) اشتراک دو به دو ضابطه‌ها تهی باشند.

(۳) در صورتی که اشتراک فاصله‌های مطرح شده تهی نباشد (دامنه‌های آن‌ها) به ازای عضوهای آن فاصله مشترک y های تولید شده دو ضابطه با هم برابر باشند.

با بیان ریاضی رابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in D_1 \\ f_2(x) & x \in D_2 \\ f_3(x) & x \in D_3 \end{cases}$ یک تابع است هرگاه:

(۱) $f_1(x)$ و $f_2(x)$ و $f_3(x)$ خود در فاصله‌های D_1 ، D_2 و D_3 تابع باشند.

(۲) $D_1 \cap D_2 = D_2 \cap D_3 = D_1 \cap D_3 = \emptyset$

(۳) اگر $D_1 \cap D_2 = [a, b]$ باشد به ازای هر عضو مانند t از فاصله‌ی $[a, b]$ رابطه‌ی $f_1(t) = f_2(t)$ برقرار باشد.

مثال ۱۰: کدام یک از روابط زیر یک تابع است؟

۱) $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & x \leq 1 \\ x^2 \pm 3x & x > 1 \end{cases}$

تابع نیست زیرا ضابطه‌ی $x^2 \pm 3x$ در فاصله‌ی $x > 1$ تابع نمی‌باشد.

۲) $g(x) = \begin{cases} x^3 & x < -1 \\ x^2+1 & x \geq -1 \end{cases}$

تابع است زیرا تک تک ضابطه‌ها در دامنه تعریفشان تابع هستند و اشتراک فاصله‌های ذکر شده تهمی است.

$$۳) h(x) = \begin{cases} ۲x^۲ + ۳ & x \leq ۰ \\ ۴x + ۳ & x \geq ۰ \end{cases}$$

$$۴) k(x) = \begin{cases} ۳x - ۱ & x \leq ۱ \\ x + ۲ & x \geq ۰ \end{cases}$$

مثال ۱۱: اگر $f(x) = \begin{cases} a+x & |x| \leq ۱ \\ x^۲ + bx & |x| \geq ۱ \end{cases}$ تابع باشد، مقادیر a و b را بیابید.

تابع بصورت $f(x) = \begin{cases} a+x & -۱ \leq x \leq ۱ \\ x^۲ + bx & x \geq ۱ \text{ یا } x \leq -۱ \end{cases}$ می‌باشد. اشتراک دامنه‌ها برابر با $x = \pm ۱$ است، که باید به ازای آن‌ها، مقادیر ضابطه‌ها یکسان باشد.

$$f_۱(x) = a + x \xrightarrow{x=۱} f_۱(۱) = a + ۱$$

$$f_۲(x) = x^۲ + bx \xrightarrow{x=۱} f_۲(۱) = ۱ + b \Rightarrow f_۱(۱) = f_۲(۱) \Rightarrow a + ۱ = ۱ + b \Rightarrow a = b \quad (۱)$$

$$f_۱(x) = a + x \xrightarrow{x=-۱} f_۱(-۱) = a - ۱$$

$$f_۲(x) = x^۲ + bx \xrightarrow{x=-۱} f_۲(-۱) = ۱ - b \Rightarrow f_۱(-۱) = f_۲(-۱) \Rightarrow a - ۱ = ۱ - b \Rightarrow a + b = ۲ \xrightarrow{(۱)} \begin{cases} a = ۱ \\ b = ۱ \end{cases}$$

مثال ۱۲: فرض کنیم $f(x) = \begin{cases} \frac{x(x+۱)}{x^{\wedge}[x]+۱} & x > ۱ \\ \frac{x^۲[x]+ax}{x^{\wedge}+۱} & x < ۲ \end{cases}$ یک تابع باشد، a کدام است؟

۱ (۴)

$\frac{۱}{۲}$ (۳)

۲ (۲)

-۱ (۱)

گزینه ۴ صحیح است.

روش‌های تعیین دامنه:

۱- اگر $f(x)$ تابعی خطی باشد:

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{h(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های منفرجه}\}$$

۲- برای توابع کسری $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ دامنه‌ی تعریف برابر است با:

۳- اگر تابع رادیکالی باشد:

$$f(x) = \sqrt[n]{g(x)} \Rightarrow \begin{cases} n = 2k \Rightarrow D_f : g(x) \geq 0 \\ n = 2k + 1 \Rightarrow D_f : D_g \end{cases}$$

۴- اگر تابع مثلثاتی باشد:

$$f(x) = \sin(u) \Rightarrow D_f = D_u$$

$$f(x) = \cos(u) \Rightarrow D_f = D_u$$

$$f(x) = \tan(u) \Rightarrow D_f : u \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = \cot g(u) \Rightarrow D_f : u \neq k\pi$$

۵- اگر تابع آرک مثلثاتی باشد:

$$f(x) = \text{Arcsin}(u) \Rightarrow D_f : -1 \leq u \leq 1$$

$$f(x) = \text{Arc cos}(u) \Rightarrow D_f : -1 \leq u \leq 1$$

$$f(x) = \text{Arctg}(u) \Rightarrow D_f : D_u$$

$$f(x) = \text{Arccotg}(u) \Rightarrow D_f : D_u$$

۶- اگر تابع لگاریتمی باشد:

$$y = \log_{g(x)} h(x)$$

$$(h(x) > 0, g(x) > 0, g(x) \neq 1)$$

آنگاه بین جواب‌های بدست آمده اشتراک می‌گیریم.

۷- اگر ضابطه تابع به صورت قدر مطلق یا جزء صحیح باشد، دامنه‌ی تابع برابر است با دامنه‌ی عبارت داخل آن‌ها:

$$f(x) = |g(x)| \Rightarrow D_f = D_g$$

$$f(x) = [g(x)] \Rightarrow D_f = D_g$$

مثال ۱۳: تابع $f(x) = \frac{x+2}{x^2 - ax + b}$ مفروض است اگر دامنه‌ی آن برابر $\mathbb{R} - \{1\}$ باشد، $a + b$ کدام است؟

۱ (۴

۲ (۳

۳ (۲

۴ (۱)

$$x^2 - ax + b = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow a = 2, b = 1 \Rightarrow a + b = 3$$

مثال ۱۴: دامنه تابع $\frac{1 + \sin x}{3 - [x+1]}$ کدام است؟

۱ (۴) $\mathbb{R} - (3, 4]$

۲ (۳) $\mathbb{R} - [3, 4)$

۳ (۲) $\mathbb{R} - (2, 3]$

۴ (۱) $\mathbb{R} - [2, 3)$

$$3 - [x+1] = 0 \Rightarrow [x+1] = 3 \Rightarrow 3 \leq x+1 < 4 \Rightarrow 2 \leq x < 3 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - [2, 3)$$

مثال ۱۵: دامنه‌ی تابع $y = \frac{3}{[\sin x][x-1]}$ در بازه‌ی $(0, 2\pi)$ شامل چند عدد صحیح است؟

- گزینه ۱ صحیح است.
- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

مثال ۱۶: اگر دامنه تعریف تابع $f(x) = \frac{2x^2 + 5}{x^2 + mx + \log n}$ برابر با $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ باشد، مقدار $m+n$ کدام است؟

- گزینه ۴ صحیح است.
- ۳ (۱) ۴ (۲) ۷ (۳) ۴ (صفر)

مثال ۱۷: دامنه $f(x) = \frac{2 - \frac{1}{|x|}}{4 - \frac{1}{|x+1|}}$ برابر با $D_f = \mathbb{R} - A$ مجموعه A چند عضو دارد؟

- گزینه ۴ صحیح است.
- ۲ (۴) ۵ (۳) ۳ (۲) ۴ (۱)

در ابتدا ریشه‌های مخرج $x = -1$ و $x = 0$ لذا باید $x \neq 0$ و $x \neq -1$ باشد، سپس:

$$f(x) = \frac{\frac{2|x|-1}{|x|}}{\frac{4|x+1|-1}{|x+1|}} \Rightarrow f(x) = \frac{(x+1)(2|x|-1)}{(x)(4|x+1|-1)} \Rightarrow 4|x+1|-1 \neq 0 \Rightarrow |x+1| \neq \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{3}{4} \\ x \neq -\frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0, -1, -\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}\}$$

مجموعه A ، ۴ عضو دارد.

مثال ۱۸: دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{2-x-x^2}$ کدام است؟

- ۳ (۱) $[-1, 2]$ ۲ (۲) $[-2, 0]$ ۳ (۳) $[-2, 1]$ ۴ (۴) $[-1, 1]$

$$-x^2 - x + 2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 \leq 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) \leq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 1 \Rightarrow D_f: [-2, 1]$$

مثال ۱۹: دامنه‌ی کدام تابع با دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{x+2}\sqrt{x-2}$ برابر است؟

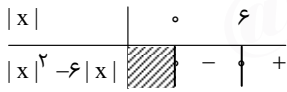
- ۱ (۱) $g(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-2}}$ ۲ (۲) $p(x) = \sqrt{x^2-4}$ ۳ (۳) $h(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$ ۴ (۴) $s(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}}$

$$D_f = [2, +\infty)$$

$$\begin{cases} D_g = (-\infty, -2] \cup (2, +\infty) \\ D_p = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty) \\ D_h = (2, +\infty) \\ D_s = [2, +\infty) \end{cases} \Rightarrow D_f = D_s$$

مثال ۲۰: در بازه ی $[-10, 10]$ چند عدد صحیح به دامنه ی تابع با ضابطه ی $f(x) = \sqrt{x^2 - 6|x|}$ تعلق دارد؟

- (۱) ۲۱ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۱۵



$$|x|^2 - 6|x| \geq 0 \Rightarrow |x|(|x| - 6) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ |x| \geq 6 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x \leq -6 \text{ یا } x \geq 6$$

در بازه ی $[-10, 10]$ اعداد صحیح $0, \pm 6, \pm 7, \pm 8, \pm 9, \pm 10$ به دامنه ی تابع تعلق دارند.

مثال ۲۱: تعداد اعداد صحیح در دامنه ی تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - x - 6}}{\sqrt{100 - x^2}}$ کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۷ (۳) ۱۶ (۴) ۱۴

$$\begin{cases} x^2 - x - 6 \geq 0 \\ 100 - x^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+2)(x-3) \geq 0 \\ -10 < x < 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -2 \text{ یا } x \geq 3 \\ -10 < x < 10 \end{cases} \Rightarrow -10 < x \leq -2 \text{ یا } 3 \leq x < 10$$

مجموعه ی اعداد صحیح در دامنه ی تابع $\{-9, -8, \dots, -2, 3, 4, \dots, 9\}$ می باشد که تعداد آن ها ۱۵ تا است.

مثال ۲۲: دامنه $f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x}}$ کدام است؟

- (۱) \mathbb{R} (۲) $[2, +\infty)$ (۳) $(-\infty, 2)$ (۴) $(0, +\infty)$

$|x| \geq 0 \Rightarrow$ همواره برقرار است.

$$\begin{aligned} \sqrt{x-2} \geq 0 &\Rightarrow x \geq 2 \\ \sqrt{x} \geq 0 &\Rightarrow x \geq 0 \end{aligned}$$

مثال ۲۳: دامنه ی تابع $f = \sqrt{[x^2] + [-x^2]}$ در بازه ی $[0, 3]$ شامل چند عضو است؟

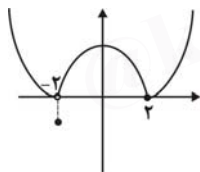
- (۱) ۵ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

$$[x^2] + [-x^2] = \begin{cases} 0 & x^2 \in \mathbb{Z} \\ -1 & x^2 \notin \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow D_f = \{\pm\sqrt{k} \mid k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow D_f \cap [0, 3] = \{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, 3\}$$

مثال ۲۴: بزرگ ترین دامنه تابع $y = \sqrt{([x] + [-x])(2x - 1)}$ کدام است؟

- (۱) $\mathbb{Z} \cup \{x \mid x \geq \frac{1}{2}\}$ (۲) $\mathbb{R} - \mathbb{Z} \cup \{x \mid x \geq \frac{1}{2}\}$ (۳) $\mathbb{Z} \cup \{x \mid x \leq \frac{1}{2}\}$ (۴) $\mathbb{R} - \mathbb{Z} \cup \{x \mid x \leq \frac{1}{2}\}$

گزینه ۳ صحیح است.



مثال ۲۵: اگر نمودار تابع $f(x)$ به شکل مقابل باشد تمام دامنه کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R} - \{0\}$ (۲) \mathbb{R} (۳) $(0, +\infty)$ (۴) $(0, +\infty) \cup \{-2\}$

گزینه ۴ صحیح است.

مثال ۲۶: دامنه تابع $f(x) = \sqrt{(\sin x + \cos x)^2 - 1}$ در بازه $[0, 2\pi]$ شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۲ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

عبارت زیر رادیکال را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{(\sin x + \cos x)^2 - 1} = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x - 1} \Rightarrow f(x) = \sqrt{1 + 2\sin x \cos x - 1} = \sqrt{2\sin x \cos x}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{\sin 2x} \Rightarrow \sin 2x \geq 0$$

کمان در ناحیه اول و دوم قرار می‌گیرد.

$$\Rightarrow 2k\pi \leq 2x \leq 2k\pi + \pi \Rightarrow k\pi \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{2}$$

در بازه $[0, 2\pi]$ دامنه تابع $f(x)$ برابر $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ است که شامل سه عدد صحیح صفر، ۱، ۴ می‌باشد.

مثال ۲۷: تابع $f(x) = \begin{cases} -x & x \geq 0 \\ \frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$ مفروض است. دامنه تابع $y = \sqrt{\text{sgn}(x) + f(x)}$ کدام است؟

- (۱) $(-\infty, 1)$ (۲) $[0, 1]$ (۳) $(-1, 1)$ (۴) $(-\infty, 0]$

گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۲۸: دامنه تابع $f(x) = \sqrt{[x]^2 - 3[x] - 4}$ کدام است؟

- (۱) $(-\infty, 0) \cup [4, +\infty)$ (۲) $[-1, 4]$ (۳) $(-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$ (۴) $[1, 4] \cup (4, 5]$

$$[x]^2 - 3[x] - 4 \geq 0 \Rightarrow [x] = -1, [x] = 4$$

$$\frac{[x]}{p} \begin{matrix} -\infty & -1 & & & 4 & +\infty \\ + & \phi & // & // & \phi & + \end{matrix} \Rightarrow [x] \geq 4 \text{ یا } [x] \leq -1 \Rightarrow \begin{cases} [x] \geq 4 \Rightarrow x \geq 4 \\ [x] \leq -1 \Rightarrow x < 0 \end{cases} \Rightarrow D_f = (-\infty, 0) \cup [4, +\infty)$$

مثال ۲۹: دامنه‌ی توابع زیر را بیابید.

۱) $f(x) = \tan\left(\pi x + \frac{3\pi}{4}\right)$

$$D_f = \left\{ x \mid \pi x + \frac{3\pi}{4} \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \right\} = \left\{ x \mid x + \frac{3}{4} \neq k + \frac{1}{4} \right\} = \left\{ x \mid x \neq k - 1 \right\}$$

چون $K \in \mathbb{Z}$ پس $K - 1 \in \mathbb{Z}$ بنابراین $D_f = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ می‌باشد.

۲) $f(x) = \cot\left(\pi x + \frac{1}{4}\right)$

$$D_f = \left\{ \pi x + \frac{1}{4} \neq k\pi \right\} = \left\{ x \mid \pi x \neq k\pi - \frac{1}{4} \right\} = \left\{ x \mid x \neq k - \frac{1}{4\pi} \right\}$$

۳) $f(x) = \cot \frac{1}{x}$

$$D_f = \left\{ x \mid \frac{1}{x} \neq k\pi \right\} = \left\{ x \mid x \neq \frac{1}{k\pi} \right\} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{k\pi}, 0 \right\} \quad (K \in \mathbb{Z})$$

۴) $f(x) = \tan \sqrt{x-1}$

ابتدا دامنه‌ی تابع $y = \sqrt{x-1}$ را بدست می‌آوریم که دامنه برابر است با $D_y = [1, +\infty)$ حال شرط دامنه‌ی \tan را لحاظ می‌کنیم.

$\Rightarrow D_f = [1, +\infty) - \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x-1} = k\pi + \frac{\pi}{2}, (K \in \mathbb{Z}) \right\} \Rightarrow D_f = [1, +\infty) - \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)^2 + 1, (K \in \mathbb{Z}) \right\}$

مثال ۳۰: دامنه تابع $y = (|x|-x)\sqrt{-\sin^2 \pi x}$ کدام است؟

- Z (۴) Q (۳) N (۲) IR (۱)

$-\sin^2 \pi x \geq 0 \Rightarrow \sin \pi x = 0 \Rightarrow \pi x = k\pi \Rightarrow x = k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow D_f = \mathbb{Z}$

مثال ۳۱: دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\frac{1-\delta^x}{\gamma^{-x}-\gamma}}$ شامل چند عدد صحیح نمی‌شود؟

- ۴۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

$\frac{1-\delta^x}{\gamma^{-x}-\gamma} \geq 0 \Rightarrow 1-\delta^x = 0 \Rightarrow \delta^x = 1 \Rightarrow x = 0$

$\gamma^{-x}-\gamma = 0 \Rightarrow \frac{1}{\gamma^x} = \gamma \Rightarrow \gamma^{x+1} = \gamma^0 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$

	-1	*
$\frac{1-\delta^x}{\gamma^{-x}-\gamma}$	+	+
	ج	ج

فقط $x = -1$ داخل دامنه نیست. (ریشه مخرج)

مثال ۳۲: دامنه تابع $f(x) = \log_{(x^2-1)}[x+2]$ کدام است؟

- $(-\infty, -1)$ (۴) $(1, +\infty) - \{\sqrt{2}\}$ (۳) $(-\infty, -1) - \{\sqrt{2}\}$ (۲) $(4, +\infty)$ (۱)

$[x+2] > 0 \Rightarrow [x]+2 > 0 \Rightarrow [x] > -2 \Rightarrow x \geq -1$ (۱)

$x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases}$ (۲) $\Rightarrow D_f = (1, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty) = (1, +\infty) - \{\sqrt{2}\}$

$x^2 - 1 \neq 1 \Rightarrow x^2 \neq 2 \Rightarrow x \neq \pm\sqrt{2}$ (۳)

مثال ۳۳: چه تعداد عدد طبیعی در دامنه $f(x) = \log_3([x]-1)([x]-\sqrt{2})$ واقع نمی‌گردد؟

- ۳ (۴) ۲ (۳) ۱ (۲) ۰ (۱)

گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۳۴: دامنه‌ی تعریف تابع $f(x) = \log \log \log (4x - 6)$ کدام است؟

- (۱) $[\frac{3}{2}, +\infty)$ (۲) $(\frac{3}{2}, +\infty)$ (۳) $[4, +\infty)$ (۴) $(4, +\infty)$

مثال ۳۵: دامنه‌ی تعریف تابع $f(x) = \lfloor \log \log (4 - |x|) \rfloor$ برابر است با:

- (۱) $[-4, 4]$ (۲) $[-2, 2]$ (۳) $(-\infty, 4]$ (۴) $(-3, 3)$

$$\log(4 - |x|) > 0 \Rightarrow 4 - |x| > 1 \Rightarrow |x| < 3 \Rightarrow -3 < x < 3$$

مثال ۳۶: دامنه‌ی تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-2)}$ به صورت $(a, b]$ می‌باشد. مقدار $b - a$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{5}{2}$

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(x - 2) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ \log_{\frac{1}{2}}(x - 2) \geq \log_{\frac{1}{2}} 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x - 2 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow 2 < x \leq 3 \Rightarrow (2, 3] = (a, b] \Rightarrow b - a = 1$$

مثال ۳۷: کل دامنه تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt[4]{\log_{\frac{5}{8}}(2x+3)}$ کدام است؟

- (۱) $(-\frac{3}{4}, -1]$ (۲) $(-\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}]$ (۳) $(-\frac{3}{4}, -1]$ (۴) $(-\frac{3}{4}, +\infty)$

$$\begin{cases} 2x + 3 > 0 \\ \log_{\frac{5}{8}}(2x + 3) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\frac{3}{2} \\ 2x + 3 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow D_f = (-\frac{3}{2}, -1]$$

مثال ۳۸: دامنه‌ی تابع $y = \arccos \frac{2x+1}{x-1}$ شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) بی‌شمار

$$\left| \frac{2x+1}{x-1} \right| \leq 1 \Rightarrow \frac{(2x+1)^2}{(x-1)^2} \leq 1 \xrightarrow{x \neq 1} (2x+1)^2 \leq (x-1)^2 \Rightarrow 4x^2 + 4x + 1 \leq x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 3x^2 + 6x \leq 0$$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$3x^2 + 6x$		+	-	+

با توجه به جدول تغییر علامت بالا، دامنه‌ی تابع عبارت است از $D_f = [-2, 0]$ که شامل اعداد صحیح -2 و -1 و 0 و 1 و 2 است.

مثال ۳۹: دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \arccos \sqrt{x - [x]}$ کدام است؟

- (۱) $[-1, 1]$ (۲) $(0, 1)$ (۳) \mathbb{R} (۴) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$

گزینه ۳ صحیح است.

برد تابع:

طرز تعیین برد توابع:

۱) به طور کلی می توان گفت در $ax^2 + bx + c = 0$ داریم:

الف) اگر $a > 0$ برد تابع $y = ax^2 + bx + c$ برابر است با: $R_f = [\frac{-\Delta}{4a}, +\infty)$

ب) اگر $a < 0$ برد تابع $y = ax^2 + bx + c$ برابر است با: $R_f = (-\infty, -\frac{\Delta}{4a}]$

۲) x را بر حسب y به دست آورده دامنه تابع بر حسب y برد تابع خواهد بود.

۳) استفاده از مربع کامل کردن: برای این کار مربع نصف ضریب x را اضافه و کم می نماییم.

۴) استفاده از روابط موجود:

در بسیاری از موارد می توانیم به طور مستقیم یا غیر مستقیم از روابط ریاضی برد را بیابیم.

۱) $0 \leq x - [x] < 1$

۲) $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in Z \\ -1 & x \notin Z \end{cases}$

۳) $x + \frac{1}{x} \geq 2, x > 0$

۴) $x + \frac{1}{x} \leq -2, x < 0$

۵) $y = |x - a| \Rightarrow R_f = [0, +\infty)$

۶) $y = |x - a| + |x - b| \Rightarrow R_f = [|b - a|, +\infty)$

۷) $y = -|x - a| \Rightarrow R_f = (-\infty, 0]$

۸) $y = |x - a| - |x - b| \Rightarrow R_f = [-|b - a|, |b - a|]$

۹) $y = \frac{2x}{x^2 + 1} \Rightarrow R_f = [-1, 1]$

۱۰) $y = \frac{x^2}{x^2 + 1} \Rightarrow R_f = [0, 1]$

۱۱) $y = \frac{|x|}{|x| + 1} \Rightarrow R_f = [0, 1)$

۵) استفاده از فرمولها و روابط مثلثاتی:

۱) $y = a \sin x + b \cos x + c \Rightarrow -\sqrt{a^2 + b^2} + c \leq y \leq \sqrt{a^2 + b^2} + c$

۲) $y = \sin^n x + \cos^n x \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n-1}} \leq y \leq 1$

۳) $y = a \tan x + b \cot x, 0 < x < \frac{\pi}{2} \quad R_f = [2\sqrt{ab}, +\infty)$

۴) $y = a \tan x + b \cot x, \frac{\pi}{2} < x < \pi \quad R_f = (-\infty, -2\sqrt{ab}]$

۵) $y = a \sin^2 x + b \sin x + c$

با قرار دادن $\sin x = 1$ و $\sin x = -1$ اگر $-\frac{b}{2a} < 1 < \frac{-b}{2a}$ باشد حدود تغییرات y را می یابیم.

۶) $y = a \cos^2 x + b \cos x + c$

با قرار دادن $\cos x = 1$ و $\cos x = -1$ اگر $-\frac{b}{2a} < 1 < \frac{-b}{2a}$ باشد حدود تغییرات y را می یابیم.

۶) برد تابع $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ با شرط $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ است با: $R_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{a}{c} \right\}$

و اگر n عددی فرد باشد، برد تابع $y = \frac{ax^n + b}{cx^n + d}$ با شرط $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ برابر با $R_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{a}{c} \right\}$

😊 مثال ۴۰: برد تابع $y = \sqrt{1-x^2}$ کدام است؟

- (۱) $[-1, 1]$ (۲) $[0, 1]$ (۳) $\{0, 1\}$ (۴) $R > 0$
- گزینه ۲ صحیح است.

😊 مثال ۴۱: برد تابع $y = \frac{5x}{x^2+1}$ کدام است؟

- (۱) $[-5, 5]$ (۲) $[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}]$ (۳) $[\frac{5}{2}, \frac{5}{2}]$ (۴) $[0, 5]$
- گزینه ۲ صحیح است.

😊 مثال ۴۲: کدامیک از اعداد زیر در مجموعه برد تابع $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ قرار ندارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) -۱

$$y = \frac{1-x^2}{1+x^2} \Rightarrow y + yx^2 = 1 - x^2 \Rightarrow (y+1)x^2 + y - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1-y}{y+1} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1-y}{y+1}} \Rightarrow \frac{1-y}{y+1} \geq 0 \Rightarrow R_f = (-1, 1]$$

😊 مثال ۴۳: برد تابع با ضابطه $y = x - 2\sqrt{x-1}$ کدام است؟

- (۱) $y \geq -2$ (۲) $y \geq -1$ (۳) $y \geq 0$ (۴) $y \geq 1$

$$y = x - 2\sqrt{x-1} \Rightarrow y = (\sqrt{x-1} - 1)^2 \Rightarrow y \geq 0$$

😊 مثال ۴۴: اگر برد تابع f برابر با $[-1, 2]$ باشد، برد تابع $g(x) = \sqrt{2+f(x)-f^2(x)}$ کدام است؟

- (۱) $[0, +\infty)$ (۲) $(0, \frac{3}{2}]$ (۳) $(\frac{3}{2}, +\infty)$ (۴) $[0, \frac{3}{2}]$

گزینه ۴ صحیح است.

مثال ۴۵: برد تابع به معادله $y = \frac{\Delta x + 3}{x} - \left[\frac{-x + 3}{x} \right] - \gamma$ کدام است؟

- (۱) \mathbb{R} (۲) $(0, 1)$ (۳) $[-1, 0)$ (۴) $[-2, -1)$

$$y = 5 + \frac{3}{x} - \left(-1 + \frac{3}{x} \right) - \gamma = -1 + \frac{3}{x} - \left[\frac{3}{x} \right] \Rightarrow 0 \leq \frac{3}{x} - \left[\frac{3}{x} \right] < 1 \Rightarrow -1 \leq -1 + \frac{3}{x} - \left[\frac{3}{x} \right] < 0 \Rightarrow -1 \leq y < 0$$

مثال ۴۶: برد تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x}{\gamma} - \sqrt{\left(\left[\frac{x}{\gamma} \right] - \frac{x}{\gamma} \right)^2}$ کدام است؟

- (۱) \mathbb{R} (۲) Z (۳) $\mathbb{R} - Z$ (۴) \emptyset

$$f(x) = \frac{x}{\gamma} - \left| \left[\frac{x}{\gamma} \right] - \frac{x}{\gamma} \right|$$

می‌دانیم که همواره $-1 < [U] - U \leq 0$ پس عبارت $\left[\frac{x}{\gamma} \right] - \frac{x}{\gamma}$ منفی است. بنابراین:

$$f(x) = \frac{x}{\gamma} - \left(-\left[\frac{x}{\gamma} \right] + \frac{x}{\gamma} \right) \Rightarrow f(x) = \frac{x}{\gamma} + \left[\frac{x}{\gamma} \right] - \frac{x}{\gamma} \Rightarrow f(x) = \left[\frac{x}{\gamma} \right] \Rightarrow R_f = Z$$

مثال ۴۷: برد تابع $f(x) = (-1)^{[x]}(x - [x])$ کدام است؟

- (۱) $(-1, 1)$ (۲) $[-1, 1]$ (۳) $(-1, 1]$ (۴) $[-1, 1)$

گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۴۸: برد تابع $f(x) = \frac{x^2 + 3x + m}{x + 1}$ مجموعه‌ی \mathbb{R} می‌باشد حدود m کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2} < m < 2$ (۲) $m \geq 2$ (۳) $m \leq 2$ (۴) $m < 2$

$$y = \frac{x^2 + 3x + m}{x + 1}$$

$$xy + y = x^2 + 3x + m \Rightarrow x^2 + (3 - y)x + m - y = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} (3 - y)^2 - 4(1)(m - y) > 0 \Rightarrow y^2 - 6y + 9 - 4m + 4y = y^2 - 2y + 9 - 4m > 0$$

$$\Delta' < 0 \Rightarrow 4 - 4(1)(9 - 4m) < 0 \Rightarrow m < 2$$

مثال ۴۹: اگر برد تابع با ضابطه $f(x) = x^2 + ax + 2$ ، $[-2, +\infty)$ باشد، a کدام است؟

- (۱) ± 2 (۲) ± 4 (۳) ± 8 (۴) ± 16

گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۵۰: برد تابع $f(x) = \frac{1}{2 + \sqrt{|x+3|}}$ برابر کدام است؟

- (۱) R^+ (۲) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ (۳) $(0, \frac{1}{2}]$ (۴) $(0, \frac{1}{2 + \sqrt{3}})$

با توجه به نامساوی $|x+3| \geq 0$ داریم:

$$\sqrt{|x+3|} \geq 0 \Rightarrow 2 + \sqrt{|x+3|} \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{2 + \sqrt{|x+3|}} \leq \frac{1}{2}$$

از طرفی تابع f همواره مثبت و غیر صفر است پس:

$$0 < \frac{1}{2 + \sqrt{|x+3|}} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow R_f = (0, \frac{1}{2}]$$

مثال ۵۱: برد تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{2x-3}|x|$ کدام است؟

- (۱) $[0, +\infty)$ (۲) $(0, 1)$ (۳) $\{0\}$ (۴) $[0, 3)$

$$2x-3|x| \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 3|x| \Rightarrow x=0 \Rightarrow D_f = \{0\} \Rightarrow f = \{(0, 0)\}$$

مثال ۵۲: برد تابع $f(x) = \sqrt{(6x-x^2-9)|x-1|}$ کدام است؟

- (۱) $\{0\}$ (۲) $\{0\}$ (۳) $R \geq 0$ (۴) Z

$$(6x-x^2-9)|x-1| \geq 0 \Rightarrow -(x-3)^2|x-1| \geq 0 \Rightarrow (x-3)^2|x-1| \leq 0$$

از طرفی $(x-3)^2 \geq 0$ و $|x-1| \geq 0$ بنابراین فقط:

$$(x-3)^2|x-1| = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow R_f = \{0\}$$

مثال ۵۳: برد تابع $f(x) = \frac{1}{|x-1| + |x+3|}$ کدام است؟

- (۱) $(0, \frac{1}{4}]$ (۲) $(0, \frac{1}{2}]$ (۳) $(0, \frac{1}{4})$ (۴) $(0, \frac{1}{2})$

مینیم مقدار عبارت $y = |x-1| + |x+3|$ به ازای هر کدام از ریشه‌های درون قدر مطلق‌ها حاصل می‌گردد و عبارت است از:

$$\text{Min}_y = |-1| + |1+3| = 4 \text{ و تابع ماکزیمم مطلق ندارد، بنابراین } 4 \leq y < +\infty \text{ و در نتیجه } 0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{4}$$

مثال ۵۴: برد تابع $f(x) = |x+4| - |x+1|$ کدام است؟

- (۱) $[-3, 3)$ (۲) $[-4, -1]$ (۳) $[1, 4]$ (۴) $[0, 3)$

$$y = |x-a| - |x-b| \Rightarrow R_f = [-|b-a|, |b-a|] \Rightarrow -|-4+1| \leq |x+4| - |x+1| \leq |-4+1| \Rightarrow -3 \leq y \leq 3$$

مثال ۵۵: برد تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \cos^2 x + \sin^2 x$ برابر است با:

- (۱) $[\frac{3}{4}, 1]$ (۲) $(\frac{3}{4}, 1)$ (۳) $[\frac{1}{2}, 1]$ (۴) $(0, 1]$

$$f(x) = \cos^2 x + \sin^2 x = \cos^2 x - \cos^2 x + 1 \Rightarrow f(x) = \cos^2 x - \cos^2 x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 \Rightarrow f(x) = (\cos^2 x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$$

$$\begin{cases} \text{Max} \left\{ \left(\cos^2 x - \frac{1}{2} \right)^2 \right\} = \frac{1}{4} \\ \text{Min} \left\{ \left(\cos^2 x - \frac{1}{2} \right)^2 \right\} = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq \left(\cos^2 x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \leq \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{3}{4} \leq f(x) \leq 1$$

مثال ۵۶: برد تابع $f(x) = 2 \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2$ کدام است؟

- (۱) $[0, 2]$ (۲) $[0, 4]$ (۳) $[-1, 2]$ (۴) $[1, 4]$

$$f(x) = 2 \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \right) = 2(1 + \sin x)$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1 + \sin x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq 2(1 + \sin x) \leq 4 \Rightarrow \text{برد} = [0, 4]$$

مثال ۵۷: اگر برد تابع $f(x) = \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) - \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$ بازه $[a, b]$ باشد، آن گاه $b - a$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) ۱

ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} - \left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \sin \frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow f(x) = 2 \cos x \sin \frac{\pi}{4} = 2 \cos x \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \cos x$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq f(x) \leq \sqrt{2} \Rightarrow R_f = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \Rightarrow \sqrt{2} - (-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

مثال ۵۸: برد تابع $f(x) = \frac{\sin^3 x}{\sin x} - \frac{\cos^3 x}{\cos x}$ آن گاه برد تابع f کدام است؟

- (۱) $\{ \}$ (۲) $\{ 2 \}$ (۳) $\{ \frac{1}{2} \}$ (۴) $\{ 4 \}$

گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۵۹: برد تابع $f(x) = \frac{2x}{1+x^2} + \frac{1-x^2}{1+x^2}$ برابر است با:

- (۱) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ (۲) $[-1, \sqrt{2}]$ (۳) $[-\sqrt{2}, 1]$ (۴) $(-1, 1)$

$$x = \text{tg} \theta \Rightarrow f(\text{tg} \theta) = \frac{2 \text{tg} \theta}{1 + \text{tg}^2 \theta} + \frac{1 - \text{tg}^2 \theta}{1 + \text{tg}^2 \theta}$$

$$f(\text{tg} \theta) = \sin 2\theta + \cos 2\theta$$

$$-\sqrt{a^2 + b^2} \leq \sin ax + \cos ax \leq \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow -\sqrt{2} \leq \sin 2\theta + \cos 2\theta \leq \sqrt{2} \Rightarrow R_f = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

مثال ۶۰: برد تابع با ضابطه $y = \frac{\sqrt{12x}}{1+x^2} + \frac{x^2+3}{1+x^2}$ کدام است؟

- (۱) $[-2, \sqrt{2}]$ (۲) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ (۳) $[-2, 2]$ (۴) $[0, 4]$

$$y = \frac{\sqrt{3}x}{1+x^2} + \frac{2(1+x^2)+1-x^2}{1+x^2} = \frac{\sqrt{3}x}{1+x^2} + \frac{1-x^2}{1+x^2} + 2$$

حال اگر فرض کنیم $x = \tan(\alpha)$ داریم:

$$y = \frac{\sqrt{3} \times 2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + 2 \Rightarrow y = \sqrt{3} \sin 2\alpha + \cos 2\alpha + 2$$

از طرفی داریم:

$$-\sqrt{4} \leq \sqrt{3} \sin 2\alpha + \cos 2\alpha \leq \sqrt{4} \Rightarrow 0 \leq \sqrt{3} \sin 2\alpha + \cos 2\alpha + 2 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq y \leq 4$$

مثال ۶۱: برد تابع $y = \frac{2x^2 + 4}{\sqrt{2x^2 + 3}}$ برابر است با:

(۴) $[1, 4]$

(۳) $[2, +\infty)$

(۲) $[1, +\infty)$

(۱) $[1, 2]$

$$f(x) = \frac{(2x^2 + 3) + 1}{\sqrt{2x^2 + 3}} = \frac{2x^2 + 3}{\sqrt{2x^2 + 3}} + \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 3}} = \sqrt{2x^2 + 3} + \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 3}} \geq 2$$

پس: $R_f = [2, +\infty)$

مثال ۶۲: برد تابع $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ را بدست آورید.

$$y = \sin^4 x + \cos^4 x \Rightarrow n = 2, 2n = 4 \Rightarrow \frac{1}{2^{n-1}} \leq y \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2^{2-1}} \leq y \leq 1 \Rightarrow R_f = \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$$

مثال ۶۳: برد تابع $y = \sin^2 x + \sin x + 3$ را بدست آورید.

$$y = \sin^2 x + \sin x + 3 \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow y = 1^2 + 1 + 3 = 5$$

$$\sin x = -1 \Rightarrow y = (-1)^2 - 1 + 3 = 3$$

$$\sin x = \frac{-b}{2a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 3 = \frac{11}{4} \Rightarrow R_f = \left[\frac{11}{4}, 5 \right]$$

مثال ۶۴: اگر برای تابع $f(x) = \frac{x+m}{x-m}$ داشته باشیم $D_f = R_f$ آن گاه $f(2m+1)$ کدام است؟

(۴) ۱

(۳) ۲

(۲) ۴

(۱) ۳

گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۶۵: اگر $f(x) = \begin{cases} x + 2a^2 & x \leq 0 \\ x^2 + (a+3) & x > 0 \end{cases}$ آن گاه همه مقادیر a که به ازای آن $D_f = R_f$ کدام است؟

(۴) $a \leq \frac{3}{2}$

(۳) $a \geq -1$

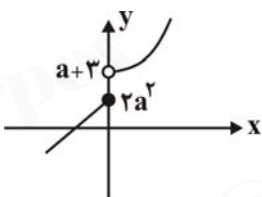
(۲) $-1 \leq a \leq \frac{3}{2}$

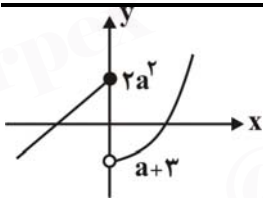
(۱) $a \leq -1$ یا $a \geq \frac{3}{2}$

اگر $x \leq 0$ آن گاه $y \leq 2a^2$ و اگر $x > 0$ آن گاه $x^2 > 0$ و $x^2 + (a+3) > a+3$ در نتیجه $R_f = (-\infty, 2a^2] \cup (a+3, +\infty)$ دامنه تابع R است و برای

آن که برد تابع نیز R باشد طبق شکل باید $2a^2 \geq a+3$ یعنی انتهای بازه سمت چپ از ابتدای بازه سمت راست

بزرگتر یا مساوی باشد لذا باید





$$2a^2 - a - 3 \geq 0$$

پس داریم:

$$2a^2 - a - 3 \geq 0 \Rightarrow (a+1)(2a-3) \geq 0 \Rightarrow a \leq -1 \text{ یا } a \geq \frac{3}{2}$$

برد توابع چند ضابطه‌ای:

اگر مقادیر تابع بر مجموعه A_1 با ضابطه (۱) و بر مجموعه A_2 با ضابطه ۲ تعریف شود. در این صورت اجتماع A_1 و A_2 دامنه تابع خواهد بود و اجتماع بردها برد تابع کل می باشد.

مثال ۶۶: برد تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 2 \\ \frac{1}{x} & 0 < x < 2 \end{cases}$ کدام است؟

- (۱) $(0, +\infty)$ (۲) $(\frac{1}{2}, +\infty)$ (۳) $(0, \frac{1}{2}) \cup [2, +\infty)$ (۴) $[2, +\infty)$

برد ضابطه‌ی اول، یعنی $y = x^2$ روی بازه‌ی $[2, +\infty)$ برابر $[4, +\infty)$ است. از طرفی در مورد ضابطه‌ی $y = \frac{1}{x}$ بر بازه‌ی $(0, 2)$ داریم:

$$0 < x < 2 \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{2}$$

پس برد ضابطه‌ی دوم $(\frac{1}{2}, +\infty)$ است. اجتماع این دو بازه $(\frac{1}{2}, +\infty)$ می‌باشد. پس $R_f = (\frac{1}{2}, +\infty)$.

مثال ۶۷: اگر برد تابع $f(x) = \begin{cases} [x]+1 & x > 1 \\ -2x^2 & x \leq 1 \end{cases}$ به صورت $\{y | y \leq a, y \geq b\}$ باشد آن گاه $a-b$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) -۲ (۴) ۲

گزینه ۳ صحیح است.

تساوی دو تابع

$y = f(x)$ و $y = g(x)$ را مساوی گویند هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:
 الف) دامنه هر دو یکسان باشند.
 ب) به ازای x های مشترک، y های برابر داشته باشند.

مثال ۶۸: در کدام گزینه دو تابع برابرند؟

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{|x|} \\ g(x) = |x| \end{cases} \quad (۴)$$

$$\begin{cases} f(x) = (\sqrt{x})^2 \\ g(x) = x \end{cases} \quad (۳)$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{|x|} \\ g(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x} \end{cases} \quad (۲)$$

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2} \\ g(x) = x \end{cases} \quad (۱)$$

گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۶۹: هرگاه توابع $f(x) = \begin{cases} b & x = 2 \\ \frac{x^2 - 5x + a}{x - 2} & x \neq 2 \end{cases}$ و $g(x) = x + c$ برابر باشند، مقدار b چه قدر است؟

(۴) -۲

(۳) ۲

(۲) -۱

(۱) ۱

$$f(2) = b, f(x) = g(x) \Rightarrow g(2) = 2 + c = f(2) \Rightarrow 2 + c = b$$

$$f(0) = \frac{a}{-2}, g(0) = c \Rightarrow -\frac{a}{2} = c \Rightarrow a = -2c \quad (I)$$

$$f(1) = \frac{-4 + a}{-1} = 4 - a, g(1) = 1 + c \Rightarrow 4 - a = 1 + c \quad (II)$$

$$(I), (II) \Rightarrow 4 = 1 - c \Rightarrow c = -3 \Rightarrow b = -1$$

مثال ۷۰: به ازای کدام مقادیر a دو تابع $g(x) = 1$ و $f(x) = \frac{x^2 + ax + 2}{x^2 + ax + 2}$ مساوی هستند؟

(۴) همه مقادیر a

(۳) $|a| > \sqrt{2}$

(۲) $|a| < 2\sqrt{2}$

(۱) $|a| \neq 2$

گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۷۱: کدام یک از جفت توابع زیر با یکدیگر برابرند؟

$$\begin{cases} g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = \cos \pi x \end{cases} \quad \begin{cases} f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = (-1)^{x+1} \end{cases} \quad (۲)$$

$$\begin{cases} g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = \cos^2 \pi x \end{cases} \quad \begin{cases} f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = (-1)^x \end{cases} \quad (۴)$$

$$\begin{cases} f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = \sin \pi x + \cos \pi x \end{cases} \quad \begin{cases} g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = 1 - \sin^2 \pi x \end{cases} \quad (۱)$$

$$\begin{cases} g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = (-1)^{2x} + (-1)^{2x+1} \end{cases} \quad \begin{cases} f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = \sin \pi x \end{cases} \quad (۳)$$

گزینه ۱) $g(x) = 1 - 0 = 1 \quad f(x) = 0 \pm 1 = \pm 1$

گزینه ۲) $g(x) = (-1)^x \quad f(x) = (-1)^{x+1}$

گزینه ۳) $g(x) = 1 - 1 = 0 \quad f(x) = 0$

گزینه ۴) $g(x) = (-1)^{2x} = 1 \quad f(x) = (-1)^x = \pm 1$

مثال ۷۲: کدام یک از توابع زیر با تابع $f(x) = 2$ با فرض $D_f = D_g = \mathbb{R} - \{0\}$ مساوی است؟

$$g(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2} \quad (۴)$$

$$g(x) = \frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1} \quad (۳)$$

$$g(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1} \quad (۲)$$

$$g(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1} \quad (۱)$$

مثال ۷۳: کدام جفت از توابع زیر مساویند؟

$$g(x) = \log(x+1) - \log(x-1), \quad f(x) = \log \frac{x+1}{x-1} \quad (۱)$$

$$g(x) = 1, \quad f(x) = (-1)^{2x} \quad (۳)$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}, \quad f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+1}} \quad (۲)$$

$$y = -1 + \sqrt[3]{x+1}, \quad y^3 + 3y^2 + 3y - x = 0 \quad (۴)$$

$$y^3 + 3y^2 + 3y - x = 0 \Rightarrow (y+1)^3 = 1+x \Rightarrow y = -1 + \sqrt[3]{x+1}$$

در سایر گزینه‌ها دامنه‌ی توابع داده شده مساوی نیستند.

گزینه ۱) $D_g = (1, +\infty), D_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

گزینه ۲) $D_g = [0, +\infty), D_f = (-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$

گزینه ۳) مثلاً اگر در $f, x = \frac{1}{4}$ قرار دهیم، تابع f تعریف نمی‌شود در صورتی که دامنه g برابر \mathbb{R} است.

مثال ۷۴: کدام تابع زیر با تابع $f(x) = \sqrt{-x^3}$ برابر است؟

$$y = \sqrt{\frac{x^4}{-x}} \quad (۴)$$

$$y = -x\sqrt{x} \quad (۳)$$

$$y = -x\sqrt{-x} \quad (۲)$$

$$y = x\sqrt{-x} \quad (۱)$$

از آن‌جا که دامنه‌ی f بازه‌ی $[-\infty, 0]$ است پس داریم:

$$f(x) = \sqrt{-x^3} = \sqrt{-x(x^2)} = |x| \sqrt{-x} = -x\sqrt{-x}$$

مثال ۷۵: کدام جفت از توابع زیر برابر هستند؟

(۲) $g(x) = \sqrt{x - x^2}, f(x) = \sqrt{x}, \sqrt{1 - x}$

(۴) $g(x) = \sqrt{x - 1}, f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x + 1}}$

(۱) $g(x) = 2 \log x, f(x) = \log x^2$

(۳) $g(x) = x - 1, f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۷۶: کدام جفت از توابع داده شده مساوی هستند؟

(۴) $\begin{cases} f(x) = 2 \log_2 x \\ g(x) = \log_2 2^x \end{cases}$

(۳) $\begin{cases} f(x) = \log x^2 \\ g(x) = 2 \log x \end{cases}$

(۲) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{1 + x(x + 2)} \\ g(x) = |x + 1| \end{cases}$

(۱) $\begin{cases} f(x) = \sin x \\ g(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x} \end{cases}$

$$f(x) = \sqrt{1 + x(x + 2)} = \sqrt{1 + x^2 + 2x} = \sqrt{(x + 1)^2} = |x + 1| = g(x)$$

دلیل نادرستی سایر گزینه‌ها:

(۱) گزینه‌ی $f(x) = \sin x, g(x) = |\sin x| \Rightarrow f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1, g\left(-\frac{\pi}{4}\right) = |-1| = 1$

(۳) گزینه‌ی $D_f = \mathbb{R} - \{0\}, D_g = (0, +\infty) \Rightarrow D_f \neq D_g$

(۴) گزینه‌ی $D_f = (0, +\infty), D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_f \neq D_g$

اعمال روی توابع

اگر f و g با دامنه‌های D_f و D_g باشند.

۱) $(kf)(x) = k f(x)$

۲) $(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad D_{f+g} = D_f \cap D_g$

۳) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$

۴) $(f - g)(x) = f(x) - g(x) \quad D_{f-g} = D_f \cap D_g$

۵) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$

مثال ۷۷: اگر $f = \{(0, 1), (1, 1), (-1, 2), (2, 0)\}$ و $g = \{(-1, -1), (2, -2), (3, 0)\}$ باشد، کدام است؟

- (۱) $\{(2, -1), (2, 0)\}$ (۲) $\{(1, -2), (4, 0)\}$ (۳) $\{(-1, -2), (2, 0)\}$ (۴) $\{(-1, 1), (2, -2)\}$

زوج‌هایی که مؤلفه‌های اول برابر دارند، مؤلفه‌ی دومشان در هم ضرب می‌شوند.

$$f \cdot g = \{(-1, -1 \times 2), (2, -2 \times 0)\} = \{(-1, -2), (2, 0)\}$$

مثال ۷۸: هرگاه $f = \{(1, 2), (3, 4), (5, 0)\}$ و $g = \{(5, -1), (3, 2), (4, 1)\}$ آن‌گاه تابع $\frac{f+g}{2f}$ کدام است؟

- (۱) $\{(5, 0), (3, \frac{3}{16})\}$ (۲) $\{(3, \frac{3}{4})\}$ (۳) $\{(3, \frac{3}{16})\}$ (۴) $\{(5, 0), (3, \frac{3}{8})\}$

$$\begin{cases} f + g = \{(3, 6), (5, -1)\} \\ 2f = \{(1, 4), (3, 8), (5, 0)\} \end{cases} \Rightarrow \frac{f+g}{2f} = \{(3, \frac{6}{8})\} = \{(3, \frac{3}{4})\}$$

مثال ۷۹: اگر $f = \{(0, 1), (-4, 4), (4, -9), (16, 0)\}$ آن‌گاه تابع $\frac{1}{\sqrt{f}}$ کدام است؟

- (۱) $\{(0, 1), (-2, \frac{1}{\sqrt{4}}), (4, 0)\}$ (۲) $\{(0, 1), (-2, \frac{1}{\sqrt{4}})\}$ (۳) $\{(0, 1), (-4, \frac{1}{\sqrt{4}}), (4, -\frac{1}{\sqrt{9}})\}$ (۴) $\{(0, 1), (-4, \frac{1}{\sqrt{4}})\}$

گزینه ۴ صحیح است.

مثال ۸۰: اگر $f = \{(1, 2), (0, a^2), (a, 0)\}$ و $g = \{(-1, 2), (-2, 1), (0, 4)\}$ و دامنه $f - g$ برابر $\{0, -2\}$ باشد آن‌گاه زوج مرتب $\frac{fg}{f}$ کدام است؟

- (۱) $(-2, 1)$ (۲) $(-2, 0)$ (۳) $(0, 4)$ (۴) $(0, 1)$

گزینه ۴ صحیح است.

مثال ۸۱: اگر $f(x) = \sqrt{[x]+1}$ و $g(x) = \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{|x-3|}$ آن گاه حاصل $(f \cdot g)(\frac{3}{2})$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{9}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{2}{9}$ (۴) $-\frac{2}{3}$

گزینه ۴ صحیح است.

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\left[\frac{3}{2}\right]+1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\cos \frac{3\pi}{4}}{\left|\frac{3}{2}-3\right|} = \frac{\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{3}{2}} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow (f \cdot g)\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) \cdot g\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{2}{3}$$

مثال ۸۲: اگر $f(x) = \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x-1}$ و $g(x) = \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+1}$ باشند، $D_{f \cdot g}$ کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R} - [-1, 1]$ (۲) $\mathbb{R} - (-1, 1)$ (۳) \mathbb{R} (۴) $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$D_f: x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x \leq -1 \text{ یا } x \geq 1, \text{ و } x \neq 1 \Rightarrow x \leq -1 \text{ یا } x > 1$$

$$D_g: x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x \leq -1 \text{ یا } x \geq 1, \text{ و } x \neq -1 \Rightarrow x < -1 \text{ یا } x \geq 1$$

$$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = \{x \mid x < -1 \text{ یا } x > 1\} = \mathbb{R} - [-1, 1]$$

مثال ۸۳: اگر $f(x) = \sqrt{5+\sqrt{9-x}}$ و $g(x) = \sqrt{5-\sqrt{9-x}}$ باشند، دامنه تابع $f \cdot g$ کدام است؟

- (۱) $[-\infty, 16]$ (۲) $[9, 16]$ (۳) $[-16, 5]$ (۴) $[-16, 9]$

گزینه ۴ صحیح است.

مثال ۸۴: با فرض $f(x) = \{(1, -1), (2, 0), (3, 1)\}$ نمایش تابع $g(x) = \frac{x^2}{1+f(x)}$ به کدام صورت است؟

- (۱) $\{(1, 0), (3, \frac{3}{4})\}$ (۲) $\{(2, 4), (3, \frac{9}{4})\}$ (۳) $\{(2, 2), (3, \frac{9}{4}), (1, 0)\}$ (۴) $\{(1, 0), (2, 4), (3, \frac{3}{4})\}$

گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۸۵: اگر $f = \{(-1, -1), (0, 3), (1, 5), (2, 0)\}$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ، برد تابع $(\frac{f+g}{g})(x)$ کدام است؟

- (۱) $\{1, 6\}$ (۲) $\{\frac{1}{2}, 1, 6\}$ (۳) $\{3, 6\}$ (۴) $\{\frac{1}{3}, \sqrt{2}\}$

$$D_f = \{-1, 0, 1, 2\}$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow D_g : x > 0 \Rightarrow D_f \cap D_g = \{1, 2\}$$

$$\frac{D_{f+g}}{g} = D_{f+g} \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} \Rightarrow \frac{D_{f+g}}{g} = \{1, 2\}$$

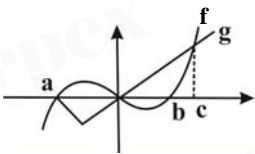
$$\left(\frac{f+g}{g}\right)(1) = \frac{f(1)+g(1)}{g(1)} = \frac{5+1}{1} = 6 \quad \text{و} \quad \left(\frac{f+g}{g}\right)(2) = \frac{f(2)+g(2)}{g(2)} = \frac{0+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1$$

مثال ۸۶: اگر $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ ، آن گاه دامنه‌ی تابع $\frac{g}{f}$ کدام است؟

- (۱) D_g (۲) $D_g - \{1\}$ (۳) $D_g - \{-1, 1\}$ (۴) $D_g - \{-1\}$

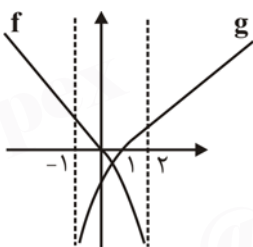
$D_f = R - \{-1\}$ پس داریم:

$$D_{\frac{g}{f}} = (D_g \cap D_f) - \{x | f(x) = 0\} = (D_g \cap (R - \{-1\})) - \{1\} = D_g - \{-1, 1\}$$



مثال ۸۷: اگر نمودار f و g بصورت شکل مقابل باشد، دامنه‌ی $h = \frac{1}{f-g}$ را بیابید.

مثال ۸۸: نمودار توابع $y = f(x)$ و $y = g(x)$ در شکل مقابل رسم شده است. دامنه تابع $\frac{1+f(x)}{g(x)}$ کدام است؟



- (۱) $[-1, 2]$ (۲) $R - \{2\}$ (۳) $(-1, 2) - \{1\}$ (۴) $(-1, 2)$

گزینه ۳ صحیح است.

😊 **مثال ۸۹:** اگر $f(x) = x + \sqrt{x+2}$ و $g(x) = \sqrt{x+2} - x$ ، آن گاه کدام گزینه درست است؟

- (۱) $(f+g)(x) = 2x$
 (۲) $(f-g)(x) = 2\sqrt{x+2}$
 (۳) $x \geq -2, (f \times g)(x) = -x^2 + x + 2$
 (۴) $x \in \mathbb{R}, (f \times g)(x) = -x^2 + x + 2$

$$(f \times g)(x) = (\sqrt{x+2} + x)(\sqrt{x+2} - x) = (x+2) - x^2 = -x^2 + x + 2, D_{f \times g} = D_f \cap D_g = [-2, +\infty)$$

ترکیب دو تابع

(۱) $f(g(x)) = fog(x)$ یعنی در تابع f به جای x ها، $g(x)$ قرار می دهیم.

(۲) $g(f(x)) = gof(x)$ یعنی در تابع g به جای x ها، $f(x)$ را قرار می دهیم.

(۳) دامنه‌ی توابع fog و gof :

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

😊 **مثال ۹۰:** اگر $f = \{(1,2), (2,1), (3,2)\}$ و $g = \{(2,3), (1,5), (3,1)\}$ باشد، تابع $fog + gog$ کدام است؟

- (۱) $\{(2,3), (3,7)\}$ (۲) $\{(1,3), (3,6)\}$ (۳) $\{(2,3), (3,6)\}$ (۴) $\{(3,6), (1,5)\}$

$$f = \{(1,2), (2,1), (3,2)\} \Rightarrow fof = \{(1,1), (2,2), (3,1)\}$$

$$g = \{(2,3), (1,5), (3,1)\} \Rightarrow gog = \{(2,1), (3,5)\}$$

$$D_{fof+gog} = D_{fof} \cap D_{gog} = \{2,3\} \Rightarrow fof + gog = \{(2,3), (3,6)\}$$

😊 **مثال ۹۱:** اگر $f = \{(1,2), (-2,5), (3,1)\}$ و $g(x) = \sqrt{5-x}$ باشد، حاصل $(fo(2f-3g))(1)$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{7}$ (۲) 2 (۳) 5 (۴) 2

$$(fo(2f-3g))(1) = f(2f-3g)(1)$$

$$(2f-3g)(1) = 2f(1) - 3g(1) = 2 \times 2 - 3(\sqrt{5-1}) = 4 - 6 = -2 \Rightarrow (fo(2f-3g))(1) = f(-2) = 5$$

😊 **مثال ۹۲:** اگر $f(x) = \sqrt{\sin \pi x + [\cos 2\pi x]}$ و $g(x) = \frac{1}{x^5 - 3f(x)}$ آن گاه حاصل $gof(0)$ کدام است؟

- (۱) 2 (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

$$gof(0) = g(f(0)) = g(\sqrt{\sin 0 + [\cos 0]}) = g(1) = \frac{1}{1 - 3\sqrt{\sin \pi + [\cos 2\pi]}} = \frac{1}{1 - 3} = -\frac{1}{2}$$

😊 **مثال ۹۳:** عمل یک ماشین در دو مرحله به صورت $x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} 2$ می باشد و $f(x) = g(x) = x - 1$ ، x_0 کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) 2

گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۹۴: اگر تابع $f(x) = x - 1$ با دامنه $[1, 7]$ و تابع $g(x) = 2x + 1$ با دامنه $[2, 5]$ باشند، دامنه تابع $f \circ g$ کدام است؟

- (۱) $[2, 3]$ (۲) $[2, 5]$ (۳) $[0, 5]$ (۴) $[3, 5]$

گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۹۵: اگر $D_f = [-1, 2]$ و $D_g = [-3, 6]$ ، آن گاه دامنه تابع $h(x) = 1 + 3f(x+1) - \frac{1}{3}g(3x)$ کدام است؟

- (۱) $[0, 2]$ (۲) $[-1, 1]$ (۳) $[-1, 12]$ (۴) $[0, 12]$

$$D_f = [-1, 2] \Rightarrow -1 \leq x + 1 \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 1$$

$$D_g = [-3, 6] \Rightarrow -3 \leq 3x \leq 6 \Rightarrow -1 \leq x \leq 2$$

از طرفی جمع تابع با یک عدد و همچنین ضرب آن در یک عدد، تأثیری در دامنه آن ندارد، بنابراین:

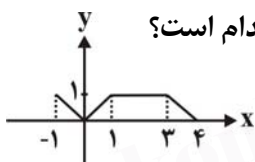
$$D_h = D_f \cap D_g = [-2, 1] \cap [-1, 2] = [-1, 1]$$

مثال ۹۶: اگر $g(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ و $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ ، دامنه $f \circ g$ کدام است؟

- (۱) \mathbb{R} (۲) $(0, 1)$ (۳) $\mathbb{R} - \{0\}$ (۴) $(0, \infty)$

گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۹۷: اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، آن گاه دامنه تابع $g(x) = \frac{f(x-1)}{f(x)}$ کدام است؟



- (۱) $(1, 3)$ (۲) $[0, 5]$

- (۳) $(0, 4)$ (۴) $(0, 2)$

مطابق شکل داده شده $D_f = [-1, 4]$ بنابراین:

$$D_{f(x-1)} = \{x \mid -1 \leq x - 1 \leq 4\} = [0, 5]$$

$$D_g = (D_{f(x-1)} \cap D_f) - \{x \mid f(x) = 0\} = [0, 5] \cap [-1, 4] - \{0, 4\} \Rightarrow D_g = [0, 4] - \{0, 4\} = (0, 4)$$

مثال ۹۸: با فرض $f(x) = \begin{cases} x & \text{گویا} \\ ax & \text{گنگ} \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{گویا} \\ bx & \text{گنگ} \end{cases}$ و $f \circ g(x) = 3$ و $g \circ f(x) = \lambda\sqrt{x}$ باشد، آن گاه مقدار a و b کدام است؟

(۱) $\begin{cases} a = \sqrt{3} \\ b = 12 \end{cases}$ (۲) $\begin{cases} a = 2\sqrt{3} \\ b = 24 \end{cases}$ (۳) $\begin{cases} a = 12 \\ b = \sqrt{3} \end{cases}$ (۴) $\begin{cases} a = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ b = 1 \end{cases}$

گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۹۹: اگر $f(x) = x-1$ و $g(x) = \sqrt{x}$ و $h(x) = x-1$ ، ضابطه‌ی $f \circ g \circ h$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{x}-1$ (۲) $\sqrt{x-1}-1$ (۳) $\sqrt{x+1}-1$ (۴) $\sqrt{x-1}+1$

$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))) = f(g(x-1)) = f(\sqrt{x-1}) = \sqrt{x-1}-1$

مثال ۱۰۰: اگر تابع خطی $y = f(x)$ از نقاط $A(0, -2)$ و $B(3, 0)$ بگذرد، آن گاه تابع $f \circ f(x)$ برابر کدام است؟

(۱) $\frac{4}{9}x - \frac{1}{3}$ (۲) $\frac{5}{2}x - \frac{3}{5}$ (۳) $\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ (۴) $3x + 1$

گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۱۰۱: اگر $f(x) = \sin(\frac{\pi x}{3})$ و $g(x) = \cos 2x$ باشند، معادله $f \circ g(x) = 0$ در بازه $[0, \pi]$ چند ریشه دارد؟

(۱) ۰ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۴

$f(g(x)) = 0 \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{3}g(x)) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{3}g(x) = k\pi \Rightarrow g(x) = 2k$

معادله دو ریشه دارد. $\cos 2x = 2k \xrightarrow[k=0]{\text{فقط}} \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k'\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k'\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\}$

مثال ۱۰۲: اگر f و g توابع با ضابطه $f(x) = x^2 + 2x$ و $g(x) = x^3$ باشند، معادله $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$ چند ریشه دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) \Rightarrow (x^2 + 2x)^3 = x^6 + 2x^3 \Rightarrow (x(x+2))^3 = x^3(x^3 + 2) \Rightarrow x^3(x+2)^3 - x^3(x^3 + 2) = 0 \Rightarrow x^3((x+2)^3 - (x^3 + 2)) = 0 \Rightarrow x^3(x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x^3 - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$

😊 مثال ۱۰۳: اگر $f(x) = \begin{cases} 2 & x \in Q \\ 1 & x \in R - Q \end{cases}$ ، آن گاه ضابطه‌ی $(f \circ f)(x)$ کدام است؟

(۲) $(f \circ f)(x) = 1$

(۱) $(f \circ f)(x) = 2$

(۴) تعریف نشده است.

(۳) $(f \circ f)(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ 2 & x \in R - Q \end{cases}$

$$\begin{cases} x \in Q \Rightarrow f(x) = 2 \Rightarrow f(f(x)) = f(2) = 2 \\ x \in R - Q \Rightarrow f(x) = 1 \Rightarrow f(f(x)) = f(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow (f \circ f)(x) = 2$$

توجه کنید که دامنه‌ی تابع $(f \circ f)(x)$ برابر R می‌باشد.

😊 مثال ۱۰۴: اگر $f(x) = \begin{cases} -1 & x \in Q \\ -\frac{1}{2} & x \notin Q \end{cases}$ و $g(x) = [x]$ باشد آنگاه کدام گزینه همواره صحیح است؟

(۴) $f \circ g(1) = 1$

(۳) $f \circ g(\sqrt{2}) \neq g \circ f(1)$

(۲) $f \circ g(x) = g \circ f(x)$

(۱) $f \circ g(\sqrt{2}) = (1)$

چون $g(x)$ همواره صحیح می‌باشد بنابراین:

(۱) $f(g(x)) = f(\text{عدد صحیح}) = -1$

حال $g(f(x))$ را تشکیل می‌دهیم.

$$\begin{cases} x \in Q \Rightarrow g(f(x)) = g(-1) = [-1] = -1 \\ x \notin Q \Rightarrow g(f(x)) = g(-\frac{1}{2}) = [-\frac{1}{2}] = -1 \end{cases} \xrightarrow{(1), (2)} g(f(x)) = -1 \Rightarrow g(f(x)) = f(g(x))$$

محاسبه $g(x)$ وقتی $f(x)$ و $f(g(x))$ معلوم‌اند:

برای تعیین $g(x)$ وقتی که $f(g(x))$ و $f(x)$ معلوم باشند کافی است $g(x)$ را در $f(x)$ به جای x قرار داده و $f(g(x))$ را تشکیل داده و مساوی $f(g(x))$ داده شده قرار داده و از حل این معادله $g(x)$ را به دست می‌آوریم.

😊 مثال ۱۰۵: اگر $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ ، $f(g(x)) = x^2 + 1$ باشد $g(0)$ کدام است؟

(۴) -2

(۳) 2

(۲) 1

(۱) -1

$$f(g(0)) = \frac{2g(0)+1}{g(0)-1} = 0+1 \Rightarrow g(0) = -2$$

😊 مثال ۱۰۶: اگر $f(x) = \frac{1}{x+3}$ با شرط آن که $f(x) + f(g(x)) = 0$ تابع $g(x)$ کدام است؟

(۴) $g(x) = x + 2$

(۳) $g(x) = \frac{1}{-x-6}$

(۲) $g(x) = \frac{1}{x-3}$

(۱) $g(x) = -x - 6$

$$f(g(x)) + f(x) = \frac{1}{g(x)+3} + \frac{1}{x+3} = 0 \Rightarrow g(x) + 3 = -x - 3 \Rightarrow g(x) = -x - 6$$

محاسبه $f(x)$ وقتی $f(g(x))$ و $g(x)$ معلوم‌اند:

روش اول: $g(x)$ را برابر t اختیار کرده و x را بر حسب t در صورت امکان محاسبه می‌کنیم با قرار دادن آن در عبارت $f(g(x))$ و $f(t)$ محاسبه کرد. سپس با تبدیل t به x $f(x)$ مشخص می‌شود.
روش دوم: در این روش سعی می‌کنیم $f(g(x))$ را بر حسب $g(x)$ مرتب کنیم سپس یک جا $g(x)$ را به x تبدیل می‌کنیم.

مثال ۱۰۷: $f(g(x)) = x^2 + x$ ، $g(x) = \frac{2x-3}{x+1}$ ، $f(x)$ را پیدا کنید.

$$\frac{2x-3}{x+1} = t \Rightarrow x = \frac{t+3}{2-t} \Rightarrow f(t) = \left(\frac{t+3}{2-t}\right)^2 + \left(\frac{t+3}{2-t}\right) \Rightarrow f(x) = \left(\frac{x+3}{2-x}\right)^2 + \left(\frac{x+3}{2-x}\right)$$

مثال ۱۰۸: اگر $g(x) = 3x^2$ و $x \geq 0$ و $fog(x) = 12x^2 - \sqrt{1+9x^2}$ آن گاه $f(1)$ کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

$$fog(x) = f(g(x)) = f(3x^2) = 12x^2 - \sqrt{1+9x^2} \Rightarrow f(3x^2) = 4(3x^2) - \sqrt{1+3(3x^2)} \Rightarrow f(t) = 4t - \sqrt{1+3t} \Rightarrow f(1) = 4 - \sqrt{4} = 4 - 2 = 2$$

مثال ۱۰۹: اگر $f(x) = \frac{x}{2-x}$ و $(gof)(x) = \frac{1}{2}x$ ، ضابطه‌ی تابع g برابر کدام است؟ (خارج از کشور - ۸۴)

۱ (۱) $\frac{x}{x+1}$ ۲ (۲) $\frac{x-1}{x}$ ۳ (۳) $\frac{x}{x-1}$ ۴ (۴) $\frac{x+1}{x}$

با در نظر گرفتن $t = \frac{x}{2-x}$ داریم:

$$\frac{x}{2-x} = t \Rightarrow 2t - xt = x \Rightarrow xt + x = 2t \Rightarrow (t+1)x = 2t \Rightarrow x = \frac{2t}{t+1}$$

$$g\left(\frac{x}{2-x}\right) = \frac{1}{2}x \Rightarrow g(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{2t}{t+1}\right) \Rightarrow g(t) = \frac{t}{t+1} \xrightarrow{t \rightarrow x} g(x) = \frac{x}{x+1}$$

روش دوم: با استفاده از عددگذاری برای پیدا کردن گزینه‌ی صحیح داریم:

$$x=1 \Rightarrow f(1) = 1 \Rightarrow g(f(1)) = g(1) = \frac{1}{2}$$

حال در گزینه‌ها $x=1$ را جایگذاری می‌کنیم که به ترتیب $\frac{1}{2}$ ، 0 ، تعریف نشده و 2 به دست می‌آید. بنابراین گزینه‌ی (۱) پاسخ صحیح است.

مثال ۱۱۰: اگر دامنه‌ی توابع f و g هر کدام R باشد و $f(x+1) = 2+3x$ و $g(x+2) = -5-3x$ ، آن گاه دامنه و برد

$$h(x) = \frac{f(x)+1}{g(x)+2} \text{ کدام است؟}$$

$$\begin{cases} D_h = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \\ R_h = \{1\} \end{cases} \quad (۲)$$

$$\begin{cases} D_h = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty) \\ R_h = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty) \end{cases} \quad (۱)$$

$$\begin{cases} D_h = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \\ R_h = \{-1\} \end{cases} \quad (۴)$$

$$\begin{cases} D_h = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty) \\ R_h = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty) \end{cases} \quad (۳)$$

گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۱۱۱: اگر $f(\sqrt{x} \sin x) = \cos^2 x$ باشد، آن گاه $f(\cos x)$ برابر است با:

- (۱) $\sin^2 x$ (۲) $\cos^2 x$ (۳) $\sqrt{\sin^2 x}$ (۴) $\sqrt{\cos^2 x}$

$$f(\sqrt{x} \sin x) = \cos^2 x \Rightarrow f(\sqrt{x} \sin x) = 1 - \sqrt{x} \sin^2 x = 1 - (\sqrt{x} \sin x)^2 \xrightarrow{\sqrt{x} \sin x = t} f(t) = 1 - t^2 \Rightarrow f(\cos x) = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$$

مثال ۱۱۲: اگر $f(x + \frac{1}{x}) = x^2 - \frac{1}{x^2}$ باشد، $f(x)$ کدام است؟

- (۱) x^2 (۲) $x^2 - 1$ (۳) $x^2 - 2$ (۴) 1

$$f(x + \frac{1}{x}) = x^2 - \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2 \times x \times \frac{1}{x} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow f(t) = t^2 - 2 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2$$

مثال ۱۱۳: اگر $f(\sin x + \cos x) = 4 \cos^2(x - \frac{\pi}{4})$ باشد، $f(x)$ کدام است؟

- (۱) x^2 (۲) $\cos x$ (۳) $\sin x$ (۴) $\sqrt{x^2}$

گزینه ۴ صحیح است.

محاسبه $f(x)$ هنگامی که $a(f(h(x))) + b(f(kx))$ معلوم باشد:

باید تبدیلی صورت گیرد که $h(x)$ و $k(x)$ به یکدیگر تبدیل شود سپس دستگاه حاصل را حل کنیم و $f(x)$ را محاسبه کنیم.

مثال ۱۱۴: اگر $f(-x) + 2f(x) = x^2$ ، $f(x)$ کدام است؟

- (۱) $x^2 + 1$ (۲) $\frac{1}{3}x^2$ (۳) x^2 (۴) $2x^2$

$$-2 \begin{cases} f(-x) + 2f(x) = x^2 \\ f(x) + 2f(-x) = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2f(-x) - 4f(x) = -2x^2 \\ f(x) + 2f(-x) = x^2 \end{cases} \Rightarrow -3f(x) = -x^2 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x^2$$

مثال ۱۱۵: اگر مبدأ مختصات در ضابطه‌ی تابع $f(x)$ صدق کند و $4f(x+2) - f(x) = 8$ ، آن گاه مقدار $f(4)$ کدام است؟

- (۱) $1/5$ (۲) $2/5$ (۳) $3/5$ (۴) $-1/5$

از آنجایی که $f(0) = 0$ ، پس داریم:

$$\begin{aligned} 4f(0+2) - f(0) &= 8 \Rightarrow 4f(2) = 8 \Rightarrow f(2) = 2 \\ x = 2 \Rightarrow 4f(2+2) - f(2) &= 8 \Rightarrow 4f(4) - f(2) = 8 \\ \xrightarrow{f(2)=2} 4f(4) &= 10 \Rightarrow f(4) = \frac{10}{4} = 2.5 \end{aligned}$$

مثال ۱۱۶: به ازای هر $x \neq 0$ ، $4f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ ، چقدر است؟

در رابطه فرض x را به $\frac{1}{x}$ تبدیل سپس $f\left(\frac{1}{x}\right)$ را بین دو معادله حذف می‌کنیم.

$$\begin{cases} 4f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} \\ 4f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} + x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} \\ 16f(x) - 4f\left(\frac{1}{x}\right) = 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \end{cases} \Rightarrow 12f(x) = 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow f(2) = \frac{17}{12}$$

مثال ۱۱۷: f تابعی حقیقی است و به ازای هر x و y داریم $f(x+y) = f(x) + f(y)$ اگر $f(a) = -\Delta k$ و $f(b) = 60$

و $f(3a+2b) = 30$ ، مقدار k کدام است؟

- (۱) 6 (۲) -6 (۳) 9 (۴) -9

$$x = y \Rightarrow f(2x) = 2f(x)$$

$$y = 2x \Rightarrow f(3x) = f(x) + f(2x) = f(x) + 2f(x) = 3f(x)$$

$$f(3a+2b) = f(3a) + f(2b) = 3f(a) + 2f(b) \Rightarrow 30 = -15k + 120 \Rightarrow k = 6$$

مثال ۱۱۸: دو تابع f و g به صورت مجموعه‌ی زوج‌های مرتب بیان شده‌اند. در حالت کلی کدام رابطه ممکن است تابع

نباشد؟ (خارج از کشور - ۸۵)

- (۱) $f \cup g$ (۲) $f \cap g$ (۳) $f - g$ (۴) $f \circ g$

اجتماع دو تابع ممکن است تابع نباشد. مثلاً اجتماع دو تابع $f = \{(0,1)\}$ و $g = \{(0,2)\}$ تابع نیست زیرا $f \cup g = \{(0,1), (0,2)\}$ است که در آن به ازای $x=0$ دو مقدار y به دست آمده است. پس گزینه‌ی (۱) پاسخ است.

حال به بررسی سایر گزینه‌ها می‌پردازیم:

ترکیب دو تابع همواره تابع است (هم $f \circ g$ ، هم $g \circ f$). تمام زیرمجموعه‌های یک تابع نیز الزاماً تابع‌اند، در نتیجه $f \cap g$ که زیرمجموعه‌ی تابع f (و هم‌چنین تابع g) می‌باشد هم بی‌شک تابع است. $f - g$ نیز زیرمجموعه‌ی تابع f است پس الزاماً تابع است.

(توجه کنید که با توجه به گزینه‌های (۱) و (۲) به نظر می‌رسد منظور از $f - g$ عمل تفاضل روی مجموعه‌ها است. اما حتی اگر منظور از $f - g$ یکی از چهار عمل اصلی بین توابع نیز باشد، باز هم جمع، تفریق، ضرب و تقسیم دو تابع الزاماً تابع تولید می‌کند.)

مثال ۱۱۹: اگر $f(x) = x - [x]$ و $g(x) = \frac{1-x}{x}$ ، برد تابع $g \circ f$ کدام بازه است؟ (خارج از کشور - ۸۶)

- (۱) $(0, +\infty)$ (۲) $[-1, +\infty)$ (۳) $(1, +\infty)$ (۴) $[1, +\infty)$

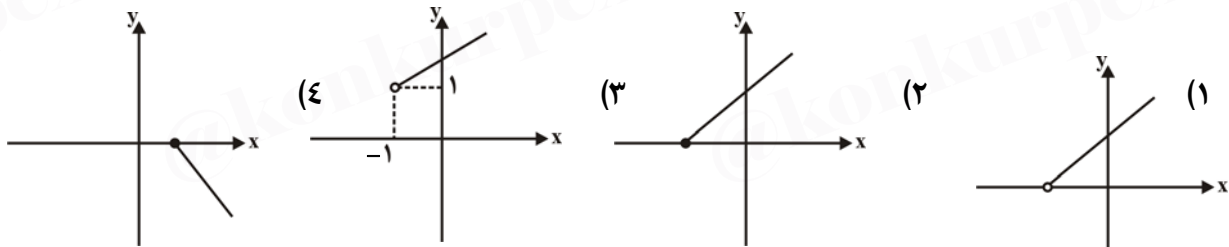
گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۱۲۰: اگر f و g توابعی چند جمله‌ای و $f \circ f \circ f$ از درجه ۸ و g از درجه ۳ باشد، تابع $f \circ g \circ f$ از درجه چند است؟
 ۷ (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴)

نکته: اگر f از درجه n و g از درجه m باشد آن‌گاه $f \circ g$ و $g \circ f$ از درجه $n \times m$ می‌باشند و $f \times g$ از درجه $n+m$ و $f \pm g$ از درجه n یا m می‌باشد.

g از درجه ۳
 $f \circ f \circ f$ از درجه ۸ $\Rightarrow f$ از درجه ۲ $\Rightarrow f \circ g$ از درجه ۴
 $f \circ g \circ f$ از درجه ۱۲ می‌باشد \Rightarrow

مثال ۱۲۱: با فرض $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2}$ نمودار تابع $y = g \circ f(x+2)$ کدام است؟



گزینه ۱ صحیح است.

تابع یک به یک

۱- f تابعی یک به یک است هرگاه هیچ y ایی با دو x متمایز وجود نداشته باشد.

۲- از دید ریاضی f یک به یک است هرگاه $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

۳- از دید نمودار مختصاتی زمانی تابع یک به یک تعریف می شود که هر خط موازی محور x ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

۴- از دید چند ضابطه‌ای‌ها وقتی تابع یک به یک تعریف می شود که دو شرط زیر برقرار باشد:
الف) تک تک ضابطه‌ها یک به یک باشند.

ب) اشتراک برد دوه دو ضابطه‌ها تهی باشد.

😊 **مثال ۱۲۲:** کدام یک از توابع زیر یک به یک است؟

(۴) $y = x^3 + x^2$

(۳) $y = |x|$

(۲) $x \leq 2, y = -x^2 + 2$

(۱) $x \geq 0, y = x^2 - 1$

گزینه ۱ صحیح است.

😊 **مثال ۱۲۳:** اگر رابطه $f = \{(2, 2a-1), (3b^2 - 4a, 1), (2, 2-a), (b\sqrt{2}, 5)\}$ تابعی یک به یک باشد، مقادیر a و b کدام است؟

(۴) $\begin{cases} a = -1 \\ b = \pm\sqrt{2} \end{cases}$

(۳) $\begin{cases} a = 1 \\ b = -\sqrt{2} \end{cases}$

(۲) $\begin{cases} a = 1 \\ b = \sqrt{2} \end{cases}$

(۱) $\begin{cases} a = 1 \\ b = \pm\sqrt{2} \end{cases}$

گزینه ۳ صحیح است.

😊 **مثال ۱۲۴:** کدام یک از تابع‌های زیر یک به یک نمی باشد؟

(۴) $f(x) = x^2 - 6x + 1$

(۳) $f(x) = x + \sqrt{x}$

(۲) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

(۱) $f(x) = 3^x$

$f(x) = x^2 - 6x + 1$ ضابطه‌ی یک سهمی یا تابع درجه‌ی دوم است که هیچ گاه یک به یک نمی باشد.

$f(x) = x^2 - 6x + 1, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 - 6x_1 + 1 = x_2^2 - 6x_2 + 1$

$\Rightarrow (x_1^2 - x_2^2) - 6(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 = 6 - x_2 \end{cases}$

مثال ۱۲۵: اگر f تابعی یک به یک روی R باشد و $f(f(x-1)) = f(2x+3)$ ، آن گاه $f(1)$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۷

f یک به یک است، پس داریم:

$$f(f(x-1)) = f(2x+3) \Rightarrow f(x-1) = 2x+3 \xrightarrow{x=2} f(2-1) = f(1) = 4+3 = 7$$

مثال ۱۲۶: یک به یک بودن تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & , x \leq 0 \\ x^2 - 1 & , x \geq 0 \end{cases}$ را بررسی کنید.

مثال ۱۲۷: به ازای کدام مقدار m تابع $f(x) = \begin{cases} 3x+m & x \leq 2 \\ 2x+5 & x > 2 \end{cases}$ یک به یک است؟

- (۱) $m > 3$ (۲) $m \geq 3$ (۳) $m < 3$ (۴) $m \leq 3$

گزینه ۴ صحیح است.

تابع پوشا:

- ۱- اگر $f: A \rightarrow B$ تعریف شده باشد بطوری که A مجموعه دامنه و B مجموعه هم دامنه باشد تابع پوشاست هرگاه مجموعه مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب تابع f یعنی همان برد برابر با مجموعه هم دامنه باشد.
- ۲- از دید نموداری تابع زمانی پوشاست که هر خط موازی محور x ها نمودار را حداقل در یک نقطه قطع کند.
- ۳- از دید چند ضابطه‌ای‌ها زمانی تابع پوشاست که اجتماع برد تک تک ضابطه‌ها برابر مجموعه هم دامنه شود.
- ۴- تابعی که هم پوشاست و هم یک به یک باشد دو سوئی نامند.

مثال ۱۲۸: تابع $f: A \rightarrow B$ که در آن $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{-3, -2, -1\}$ می‌باشد، به صورت زوج مرتب‌های زیر تعریف شده‌اند.

$f = \{(3, -1), (x, y), (1, -3)\}$ با جای‌گذاری کدام زوج مرتب زیر به جای (x, y) تابع f یک به یک و پوشا می‌گردد؟

- (۱) $(2, -2)$ (۲) $(2, -1)$ (۳) $(1, -1)$ (۴) $(3, -2)$

با توجه به پوشا بودن تابع f باید برد آن با هم دامنه (B) یکی باشد که در این صورت چون فقط عدد (-2) در برد نیست پس مؤلفه دوم را برابر (-2) قرار می‌دهیم. بنابراین مؤلفه اول برای رعایت شرط یک به یک بودن تابع می‌تواند مقدار ۲ را اختیار کند در نتیجه برای زوج مرتب (x, y) حالت $(2, -2)$ قابل قبول خواهد بود.

مثال ۱۲۹: کدام گزینه در مورد تابع $f: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ درست است؟
 $f(x) = |x-1| + \sqrt{x-2}$

- (۱) یک به یک و پوشا است.
 (۲) یک به یک و پوشا نیست.
 (۳) یک به یک نیست و پوشا است.
 (۴) یک به یک است و پوشا نیست.
 گزینه ۴ صحیح است.

مثال ۱۳۰: تابع $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ با ضابطه $g(x) = \begin{cases} -\frac{n}{2} & \text{زوج } n \\ \frac{n-1}{2} & \text{فرد } n \end{cases}$ مفروض است. این تابع در کدام شرایط صدق می کند؟

- (۱) پوششی و یک به یک
 (۲) نه پوششی نه یک به یک
 (۳) پوششی است ولی یک به یک نیست.
 (۴) یک به یک است ولی پوششی نیست.
 گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۱۳۱: تابع $f: (-\infty, +\infty) \rightarrow [35, +\infty)$ چگونه است؟
 $f(x) = 2x^2 + 5$

- (۱) یک به یک و پوشاست.
 (۲) نه یک به یک و نه پوشاست.
 (۳) یک به یک و پوشا نیست.
 (۴) یک به یک نیست ولی پوشاست.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1^2 + 5 = 2x_2^2 + 5 \Rightarrow 2x_1^2 = 2x_2^2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2$$

یک به یک نیست.

از آنجا که $f(x)$ یک تابع نمایشی بوده و پایه آن مثبت (۲) می باشد. لذا کمترین مقدار آن زمانی است که توان آن کمترین مقدار را داشته باشد. اما از آنجا که توان مقداری بزرگتر یا مساوی ۵ است لذا کمترین مقدار آن ۵ بوده و کمترین مقدار $f(x)$ ، ۳۵ یعنی ۳۲ می باشد. بدیهی است با افزایش توان، مقدار $f(x)$ نیز افزایش یافته و به سمت $+\infty$ می رود پس $32 \leq f(x) < +\infty$ و لذا کل برد تعریف شده برای تابع پوشش داده می شود و در نتیجه f پوششی است.

مثال ۱۳۲: تابع $f(x) = \frac{1}{[x-1]}$ از نظر پوشا بودن چگونه است؟ $R \rightarrow Z - \{0\}$

$$f(x) = \frac{1}{[x-1]} = \frac{1}{[x]-1} = y \Rightarrow y[x]-y=1 \Rightarrow [x] = \frac{y+1}{y}, y \neq 0 \Rightarrow [x] = 1 + \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{1}{y} \in Z \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ y \notin Z, y = \frac{1}{t} (t \in Z) \end{cases}$$

پس مقادیر اختیار شده توسط y یا برابر ۱ بوده و یا متعلق به Z نیستند. پس تابع f پوشا نیست.

مثال ۱۳۳: تابع $f(x) = \sin x + \sqrt{5} \cos x$ از نظر پوشا بودن بررسی کنید. $R \rightarrow [0, \sqrt{5}]$

تابع معکوس

هرگاه f تابعی یک به یک باشد در صورتی که جای x و y را عوض کنیم تابع جدیدی بدست می‌آید که آن را معکوس تابع f گویند و با نماد f^{-1} نشان می‌دهند.

برای بدست آوردن ضابطه معکوس تابع کفایت x را بر حسب y پیدا کنیم.

نکات مربوط به تابع معکوس:

$$1- (a, b) \in f \Leftrightarrow (b, a) \in f^{-1}$$

$$2- y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

$$3- f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = x$$

$$4- f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x$$

$$5- D_f = R_{f^{-1}}, R_f = D_{f^{-1}}$$

۶- نمودار تابع f^{-1} همان نمودار f است که نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه شده است.

۷- اگر f تابعی صعودی یا اکیداً صعودی باشد، f^{-1} نیز صعودی یا اکیداً صعودی است.

۸- اگر f تابعی نزولی یا اکیداً نزولی باشد، f^{-1} نیز نزولی یا اکیداً نزولی است.

$$9- (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} \quad (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

۱۰- در تابع هموگرافیک $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ در صورتی که $a+d=0$ باشد، آن گاه $f^{-1}(x) = f(x)$

۱۱- اگر $f(x)$ تابعی فرد باشد، تابع معکوس نیز در صورت وجود، فرد است.

۱۲- نقاط تقاطع تابع $f(x)$ و تابع معکوس معمولاً روی خط $y=x$ قرار می‌گیرد، پس برای یافتن نقاط تقاطع f و f^{-1} راحت‌تر آن است که $f(x)$ را با $y=x$ قطع دهیم.

۱۳- در صورتی که $f \circ g(x) = g \circ f(x)$ باشد، f و g معکوس یکدیگر می‌باشند.

۱۴- هرگاه $f' > 0$ یا $f' \geq 0$ ، $f' < 0$ یا $f' \leq 0$ تابع یکنوا و یک به یک است در نتیجه معکوس پذیر است.

مثال ۱۳۴: اگر $f(x) = 3x + \sin(x-2)$ باشد، حاصل $f(2) + f^{-1}(6)$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

گزینه ۴ صحیح است.

مثال ۱۳۵: اگر $g(x) = f(3f(x^3))$ و $f(8) = 2, f(6) = 1$ وارون پذیر باشد $g^{-1}(1)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۸ (۴) ۳۶

$$x=2 \Rightarrow g(2) = f(3f(2^3)) = f(6) \Rightarrow g(2) = 1 \Rightarrow g^{-1}(1) = 2$$

مثال ۱۳۶: در تابع $y = x^3 + x + 1$ اگر A محل برخورد f^{-1} با محور x ها و A' متناظر A روی f باشد طول AA' کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$A \in f^{-1} \Rightarrow (a, 0) \in f^{-1} \Rightarrow (0, a) \in f \Rightarrow a = 0 + 0 + 1 = 1 \Rightarrow A(1, 0) \in f^{-1}, A'(0, 1) \in f \Rightarrow AA' = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

مثال ۱۳۷: تابع f با ضابطه $x < 2$ و $f(x) = x^2 + Ax + 3$ دارای وارون است اگر $f^{-1}(8) = -1$ آنگاه $f^{-1}(\frac{5}{2})$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) -۱

گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۱۳۸: اگر $f = \{(1, 2), (-1, 0), (-2, 3)\}$ و $g = \{(-2, 1), (1, 0)\}$ باشند، حاصل $g^{-1} \circ f(-1) + f \circ g^{-1}(1)$ کدام است؟

- (۱) تعریف نشده (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲

$$g^{-1} \circ f(-1) + f \circ g^{-1}(1) = g^{-1}(0) + f(-2) = 1 + 3 = 4$$

مثال ۱۳۹: اگر $f(x) = ax^3 + b$ مفروض باشد و نمودارهای f و f^{-1} در نقطه $A(1, 0)$ متقاطع باشند $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) صفر (۴) ۲

$$f(x) = ax^3 + b \quad (1, 0) \in f, f^{-1} \Rightarrow \begin{cases} (1, 0) \in f \Rightarrow a + b = 0 \\ (1, 0) \in f^{-1} \Rightarrow (0, 1) \in f \Rightarrow b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -1 \Rightarrow 2a - b = -3$$

مثال ۱۴۰: اگر $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+3}}$ آن گاه $f^{-1}(1) + f^{-1}(-\sqrt{3})$ برابر کدام است؟

۱ (۴)

-۳ (۳)

-۲ (۲)

۲ (۱)

گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۱۴۱: اگر $f(x) = \frac{x}{x+2}$ و معکوس پذیر باشد، آن گاه حاصل ضرب ریشه‌های معادله $f(x) - f^{-1}(x) = 0$ کدام است؟

۰ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

-۵ (۱)

$$y = \frac{x}{x+2} \Rightarrow xy + 2y = x \Rightarrow x = \frac{2y}{1-y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x}{1-x}$$

$$f(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow \frac{x}{x+2} = \frac{2x}{1-x} \Rightarrow x(1-x) = 2x(x+2) \Rightarrow x(1-x-2x-4) = 0 \Rightarrow x(-3-3x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -1 \Rightarrow x_1 x_2 = 0$$

مثال ۱۴۲: اگر $f = \{(x, y) | x \in \mathbb{N}, y = 3x - 1, x \leq 20\}$ در این صورت $(f \circ f^{-1}) \cap (f^{-1} \circ f)$ مجموعه چند عضوی است؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۰ (۱)

گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۱۴۳: دامنه‌ی تابع معکوس $y = \sqrt{3 - \sqrt{x-1}}$ کدام است؟

$[1, +\infty)$ (۴)

$[0, \sqrt{3}]$ (۳)

$[1, 10]$ (۲)

$[0, 2]$ (۱)

گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۱۴۴: تابع وارون تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}$ کدام است؟

(۱) $y = x^3 - 1$

(۲) $y = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$

(۳) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 3x + 2} - 1$

(۴) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 3x - 2} + 1$

$y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}$

$y - 1 = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 3x} \Rightarrow (y - 1)^3 = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + 1 \Rightarrow (y - 1)^3 - 1 = (x - 1)^3 \Rightarrow x - 1 = \sqrt[3]{(y - 1)^3 - 1}$

$\Rightarrow x = \sqrt[3]{(y - 1)^3 - 1} + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{(x - 1)^3 - 1} + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 3x - 2} + 1$

مثال ۱۴۵: ضابطه‌ی تابع معکوس تابع $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})$ کدام است؟ ($x > 1$)

(۱) $x + \sqrt{x^2 + 1}$

(۲) $x - \sqrt{x^2 + 1}$

(۳) $x + \sqrt{x^2 - 1}$

(۴) $x - \sqrt{x^2 - 1}$

برای پیدا کردن ضابطه‌ی تابع وارون، ابتدا x را بر حسب y پیدا می‌کنیم و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.
روش اول:

با توجه به ضابطه‌ی تابع $x > 1$ و $y = f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})$ می‌توانیم ضابطه‌ی تابع معکوس تابع f را به صورت زیر به دست آوریم:

$y = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x}) \Rightarrow 2y = \frac{x^2 + 1}{x} \Rightarrow x^2 - 2yx + 1 = 0$

$\Rightarrow x = y \pm \sqrt{y^2 - 1} \Rightarrow f^{-1}(x) = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$

حال با توجه به این که دامنه‌ی تابع f بازه‌ی $(1, +\infty)$ است و به ازای $x > 1$ داریم $x + \frac{1}{x} > 2$ و $\frac{1}{2}(x + \frac{1}{x}) > 1$ پس دامنه‌ی تابع f^{-1} بازه‌ی

$(1, +\infty)$ و برد تابع $f^{-1}(x)$ بازه‌ی $(1, +\infty)$ است. (دامنه‌ی f^{-1} برابر برد f است) بنابراین از بین دو ضابطه‌ی $f^{-1}(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$ و

$f^{-1}(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$ باید آن را انتخاب کنیم که حاصلی بزرگ‌تر از ۱ داشته باشد و از آن جا که همواره $x + \sqrt{x^2 - 1} > 1$ پس ضابطه‌ی

$f^{-1}(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$ قابل قبول است.

روش دوم:

با توجه به این که اگر $f(a) = b$ باشد $f^{-1}(b) = a$ است کافی است با انتخاب یک عدد برای x مقدار y را در تابع پیدا کنیم و مختصات نقطه‌ی متناظر

با آن را در هر کدام از گزینه‌ها بررسی کنیم، در تابع $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})$ با انتخاب $x = 2$ داریم $y = \frac{1}{2}(2 + \frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$ حال مختصات نقطه‌ی $(\frac{5}{4}, 2)$ را در

گزینه‌ها بررسی می‌کنیم:

(۱) گزینه‌ی $y = x + \sqrt{x^2 + 1}$ $2 \neq \frac{5}{4} + \sqrt{\frac{25}{16} + 1}$

(۳) گزینه‌ی $y = x + \sqrt{x^2 - 1}$ $2 = \frac{5}{4} + \sqrt{\frac{25}{16} - 1}$

(۲) گزینه‌ی $y = x - \sqrt{x^2 + 1}$ $2 \neq \frac{5}{4} - \sqrt{\frac{25}{16} + 1}$

(۴) گزینه‌ی $y = x - \sqrt{x^2 - 1}$ $2 \neq \frac{5}{4} - \sqrt{\frac{25}{16} - 1}$

مثال ۱۴۶: اگر f تابع یک به یک باشد، معکوس تابع $h(x) = f^{-1}(\frac{x+1}{x})$ کدام است؟

(۱) $\frac{f(x)}{1-f(x)}$

(۲) $\frac{1}{f(x)-1}$

(۳) $f(\frac{1}{x-1})$

(۴) $f(\frac{x}{1-x})$

گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۱۴۷: اگر $f^{-1}(x)$ تابع وارون تابع $f(x)$ باشد ضابطه‌ی تابع وارون تابع $g(x) = \frac{2f(x)}{1+f(x)}$ کدام است؟

$$g^{-1}(x) = f^{-1}\left(\frac{x}{2-x}\right) \quad (۱) \quad g^{-1}(x) = f^{-1}\left(\frac{x}{2+x}\right) \quad (۲) \quad g^{-1}(x) = \frac{f^{-1}(x)}{2-f^{-1}(x)} \quad (۳) \quad g^{-1}(x) = f^{-1}\left(\frac{x}{2-x}\right) \quad (۴)$$

$$g(x) = y \Rightarrow x = g^{-1}(y)$$

$$y + yf(x) = 2f(x) \Rightarrow f(x) = \frac{y}{2-y} \Rightarrow f^{-1}\left(\frac{y}{2-y}\right) = x \Rightarrow g^{-1}(y) = f^{-1}\left(\frac{y}{2-y}\right) \Rightarrow g^{-1}(x) = f^{-1}\left(\frac{x}{2-x}\right)$$

مثال ۱۴۸: نمودار تابع $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$ با نمودار تابع f^{-1} :

(۱) در دو نقطه‌ی متمایز تلاقی دارند.

(۳) در یک نقطه مماس شوند

(۲) تلاقی ندارند

(۴) در ۴ نقطه تلاقی دارند.

تابع را با $y = x$ قطع می‌دهیم.

$$\frac{x-1}{x+3} = x \Rightarrow x-1 = x^2 + 3x \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$$

در $x = -1$ بر هم مماس می‌شوند.

مثال ۱۴۹: ضابطه تابع معکوس تابع $f(x) = \begin{cases} 1-2x^2 & x \geq 0 \\ 3-\frac{x}{2} & x < 0 \end{cases}$ کدام است؟

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-x}{2}} & x \leq 1 \\ 6-2x & x > 3 \end{cases} \quad (۲)$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-x}{2}} & x \leq 1 \\ 6-2x & x > 3 \end{cases} \quad (۴)$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-x}{2}} & x \geq 0 \\ 6-2x & x < 0 \end{cases} \quad (۱)$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{1-x}{2}} & x \geq 0 \\ 6-2x & x < 0 \end{cases} \quad (۳)$$

گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۱۵۰: اگر g وارون پذیر و $f(x) = \sqrt[3]{2+g^{-1}(x^5)}$ با شرط آن که $g^{-1}(32) = 6$ باشد، آن گاه حاصل $f^{-1}(2)$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۲

اگر $f^{-1}(2) = \alpha$ باشد، داریم $f(\alpha) = 2$ با توجه به رابطه $f(x) = \sqrt[3]{2+g^{-1}(x^5)}$ داریم:

$$f(\alpha) = \sqrt[3]{2+g^{-1}(\alpha^5)} = 2 \xrightarrow{\text{به توان ۳}} 2+g^{-1}(\alpha^5) = 8 \Rightarrow \begin{cases} g^{-1}(\alpha^5) = 6 \\ g^{-1}(32) = 6 \end{cases} \Rightarrow g^{-1}(\alpha^5) = g^{-1}(32)$$

چون g وارون پذیر است لذا یک به یک هست داریم:

$$\alpha^5 = 32 \Rightarrow \alpha = 2 \Rightarrow f^{-1}(2) = 2$$

مثال ۱۵۱: اگر تابع $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - mx + 1}$ معکوس پذیر باشد آن گاه منحنی معکوس آن از کدام نقطه می گذرد؟

- (۱) (۲, ۳) (۲) (۲, -۱) (۳) $(-1, \frac{1}{2})$ (۴) (۳, ۲)

چون $f(0) = f(1) = 0$ بنابراین تابع نمی تواند معکوس پذیر باشد زیرا خط $y = 0$ تابع را در ۲ نقطه قطع می کند. مگر این که $x = 0$ یا $x = 1$ ریشه مخرج باشند. چون در مخرج عدد ثابت ۱ وجود دارد پس $x = 0$ ریشه مخرج نیست. بنابراین باید $x = 1$ ریشه مخرج باشد.

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} \Rightarrow f(x) = \frac{x(x-1)}{(x-1)^2} \Rightarrow f(x) = \frac{x}{x-1}$$

جای x و y را در گزینه ها عوض کرده و در معادله قرار می دهیم بنابراین نقطه $(-1, \frac{1}{2})$ قابل قبول می باشد.

مثال ۱۵۲: معکوس تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}$ کدام است؟

- (۱) $f^{-1}(x) = \log_2(\frac{1+x}{1-x})$ (۲) $f^{-1}(x) = \log_2(\frac{1-x}{1+x})$ (۳) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \log_2(\frac{1+x}{1-x})$ (۴) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \log_2(\frac{1-x}{1+x})$

$$y = \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}} \Rightarrow y = \frac{2^{2x} - 1}{2^{2x} + 1} \Rightarrow 2^{2x}y + y = 2^{2x} - 1 \Rightarrow y + 1 = 2^{2x}(1 - y) \Rightarrow 2^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \Rightarrow 2x = \log_2(\frac{1+y}{1-y})$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \log_2(\frac{1+y}{1-y}) \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \log_2(\frac{1+x}{1-x})$$

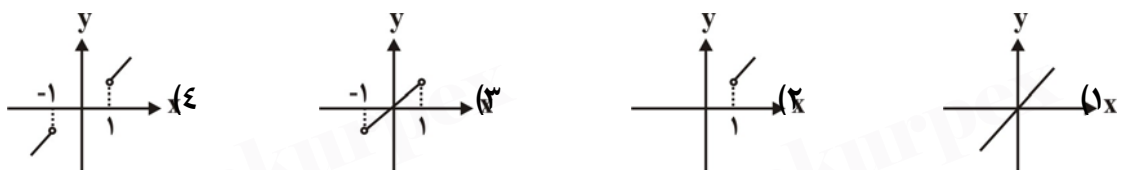
مثال ۱۵۳: اگر معکوس تابع $f(x) = \frac{ax}{bx+c}$ به صورت $f^{-1}(x) = \frac{4x}{2-x}$ باشد، آن گاه $a+b+c$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۱۰ (۴) ۶

می دانیم که $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$ ، در نتیجه داریم:

$$y = \frac{4x}{2-x} \Rightarrow 2y - xy = 4x \Rightarrow x(y+4) = 2y \Rightarrow x = \frac{2y}{y+4} \Rightarrow y = f(x) = \frac{2x}{x+4} \Rightarrow a+b+c = 2+1+4 = 7$$

مثال ۱۵۴: اگر داشته باشیم $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ در این صورت نمودار تابع $f \circ f^{-1}(x)$ کدام است؟



به ازای هر $x \in D_{f^{-1}}$ داریم: $fof^{-1}(x) = x$

بنابراین $fof^{-1}(x)$ تابع همانی با دامنه $D_{f^{-1}} = R_f$ است. پس برد f را می‌یابیم:

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow y^2 = \frac{x^2}{x^2+1} \Rightarrow x^2 y^2 + y^2 = x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{y^2}{1-y^2} \geq 0 \Rightarrow 1-y^2 > 0 \Rightarrow -1 < y < 1 \Rightarrow R_f = (-1, 1)$$

تابع زوج و فرد:

۱- تابع زوج می‌باشد هرگاه دو شرط زیر را دارا باشد:
الف) دامنه تابع متقارن باشد یعنی:

$$\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$$

$$f(-x) = f(x) \quad (\text{ب})$$

۲- تابع فرد می‌باشد هرگاه دو شرط زیر را دارا باشد:
الف) دامنه آن متقارن باشد یعنی

$$\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$$

$$f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(-x) + f(x) = 0 \quad (\text{ب})$$

نکات مهم توابع زوج و فرد:

۱- تابع ثابت $f(x) = c$ ($c \neq 0$) همواره زوج است.

۲- تابع صفر هم زوج و هم فرد است.

۳- تابع زوج نسبت به محور عرض‌ها متقارن است.

۴- تابع فرد نسبت به مبدأ مختصات متقارن است.

۵- اگر f تابعی نه زوج و نه فرد باشد اما دامنه آن متقارن باشد می‌توان آن را بصورت مجموعی از دو تابع فرد و زوج نوشت.

$$y = \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\text{زوج}} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\text{فرد}}$$

۶- تابع $y = |x-a| + |x-b|$ زوج است اگر $a+b=0$

۷- تابع $y = |x-a| - |x-b|$ فرد است اگر $a+b=0$

۸- اگر f تابعی فرد و $0 \in D_f$ آن گاه $f(0) = 0$

۹- اگر f تابعی زوج باشد مشتق مراتب فرد آن فرد است.

۱۰- اگر f تابعی فرد باشد، مشتق مراتب فرد آن زوج است.

😊 مثال ۱۵۵: تابع $f(x) = x \sin x + 1$ چگونه است؟

(۴) هیچکدام

(۳) نه فرد است و نه زوج

(۲) زوج است.

(۱) فرد است.

گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۱۵۶: کدامیک از توابع زیر فرد است؟

۴) $t(x) = \sin x \cos x$

۳) $h(x) = \frac{\tan x}{\cot x}$

۲) $g(x) = x^{2n}$

۱) $h(x) = \cos x$

زوج $\Rightarrow f(x) = f(-x) \Rightarrow \cos x = \cos(-x)$

زوج $\Rightarrow g(x) = g(-x) \Rightarrow x^{2n} = (-x)^{2n}$

زوج $\Rightarrow t(x) = t(-x) \Rightarrow \frac{\tan x}{\cot x} = \frac{\tan(-x)}{\cot(-x)}$

فرد $\Rightarrow t(-x) = -t(x) \Rightarrow \sin(-x)\cos(-x) = -\sin(x)\cos(x)$

مثال ۱۵۷: تابع $f(x) = \log(\sqrt{x^2+1}-x)$ چگونه است؟

۴) هیچکدام

۳) نه زوج و نه فرد

۲) فرد

۱) زوج

گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۱۵۸: اگر f تابعی فرد با دامنه \mathbb{R} باشد و $g(x) = f(f(-x))$ آن گاه $\frac{g(-2)}{g(2)}$ کدام است؟

۴) -۱

۳) ۱

۲) $-f(2)$

۱) $f(2)$

$g(x) = f(f(x)) = f(-f(x)) = -f(f(x))$

$g(2) = -f(f(2))$, $g(-2) = -f(f(-2)) = -f(-f(2)) = f(f(2)) \Rightarrow \frac{g(-2)}{g(2)} = \frac{f(f(2))}{-f(f(2))} = -1$

مثال ۱۵۹: تابع $f(x) = \cot \pi(x - [x])$

۴) نه زوج و نه فرد است.

۳) هم زوج و هم فرد است.

۲) فرد است.

۱) زوج است.

گزینه ۲ صحیح است.

😊 مثال ۱۶۰: f تابعی است فرد که از نقطه $A \left(\frac{5}{3} \right)$ می‌گذرد. $f(\delta - x) = f(x)$ در آنصورت $f(10)$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۵ (۴) -۵

$$f(\delta - x) = f(x) \xrightarrow{x=10} f(-5) = f(10) \xrightarrow{\text{فرد}} -f(5) = f(10) \Rightarrow f(10) = -3$$

😊 مثال ۱۶۱: اگر f تابعی فرد باشد $g(x) = f(-f(\tan x))$ چگونه است؟

- (۱) زوج است. (۲) فرد است. (۳) هم زوج و هم فرد است. (۴) نه زوج و نه فرد است.
گزینه ۲ صحیح است.

😊 مثال ۱۶۲: اگر $f(x)$ یک تابع فرد و مخالف صفر با دامنه \mathbb{R} و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}} - \frac{1}{\sqrt{f(-x)}}$ حاصل $g(1) + g(-1)$ کدام است؟

- (۱) $2g(1)$ (۲) $2g(-1)$ (۳) $g(0)$ (۴) $g(2)$

$$g(-x) = \frac{1}{\sqrt{f(-x)}} - \frac{1}{\sqrt{f(-(-x))}} \Rightarrow g(-x) = \frac{1}{\sqrt{f(-x)}} - \frac{1}{\sqrt{f(x)}} \Rightarrow g(-x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}} - \frac{1}{\sqrt{f(-x)}} = -g(x)$$

پس با توجه به $g(-x) = -g(x)$

$$g(1) + g(-1) = g(1) + (-g(1)) = 0$$

می‌دانیم تابع فرد در نقطه به طول $x=0$ یا تعریف نشده است و یا مقدارش در این نقطه برابر صفر می‌باشد. و چون دامنه $f(x)$ برابر \mathbb{R} است، پس دامنه تابع $g(x)$ نیز برابر \mathbb{R} بوده و داریم:

$$g(0) = 0 \Rightarrow g(1) + g(-1) = g(0)$$

😊😊 مثال ۱۶۳: فرض کنید $f(x) = [x] + [-x]$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \left[\frac{1}{\sqrt{x}} \right]$ در این صورت کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد تابع fog درست است؟

- (۱) هم زوج است و هم فرد. (۲) نه زوج است و نه فرد. (۳) زوج است. (۴) فرد است.

$$g(x) \notin \mathbb{Z} \Rightarrow f(g(x)) = -1$$
 زوج است.

😊 مثال ۱۶۴: اگر $f = \{(0, x), (y, 5), (2, z)\}$ تابعی فرد باشد، آن‌گاه $x + y + z$ کدام است؟

- (۱) -۵ (۲) ۴ (۳) -۷ (۴) ۶

گزینه ۳ صحیح است.

⊗ مثال ۱۶۵: تابع $f(x) = \begin{cases} ax - 2 & x > 0 \\ b & x = 0 \\ 3x + c & x < 0 \end{cases}$ تابعی زوج است. کدام گزینه درست است؟

- (۱) $a < 0$ و $c < 0$ و b دلخواه
 (۲) $a < 0$ و $c > 0$ و $b = 0$
 (۳) $a > 0$ و $c < 0$ و $b = 0$
 (۴) $a > 0$ و $c > 0$ و b دلخواه

⊗ مثال ۱۶۶: تابع $f(x) = \left[\frac{a+3x}{1+x} \right] + \left[\frac{2x}{1-x} \right]$ در $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ زوج است. a کدام یک از مقادیر می تواند باشد؟

- (۱) $a = 5$
 (۲) $a = 6$
 (۳) $a = \frac{3}{2}$
 (۴) $a = \frac{2}{3}$

گزینه ۱ صحیح است.

⊗ مثال ۱۶۷: اگر $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 2x - 5}{x^2 - 1}$ و $f(x) = (g+h)(x)$ و g تابعی زوج و h تابعی فرد باشد، $h(-2)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{3}$
 (۲) $-\frac{7}{3}$
 (۳) 4
 (۴) -4

$$f(x) = \frac{3x^2 - 5}{x^2 - 1} + \frac{x^3 + 2x}{x^2 - 1} \Rightarrow f(x) = g(x) + h(x) \xrightarrow{\text{فرد } h(x)} h(x) = \frac{x^3 + 2x}{x^2 - 1} \Rightarrow h(-2) = -4$$

⊗ مثال ۱۶۸: کدام گزینه در مورد تابع $f(x) = \begin{cases} 3 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \\ 3 & \end{cases}$ درست است؟

- (۱) فرد است.
 (۲) زوج است.
 (۳) هم فرد و هم زوج است.
 (۴) نه فرد و نه زوج است.
 گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۱۶۹: کدام همواره درست است؟

- (۱) جمع دو تابع فرد که $D_f \cap D_g \neq \emptyset$ ممکن است فرد نباشد.
- (۲) اگر $f+g$ و $f-g$ دو تابع فرد باشند، حتماً f و g نیز فرد هستند.
- (۳) اگر $f+g$ و $f-g$ دو تابع زوج باشند، آن گاه f و g در $D_f \cap D_g$ به شرط غیر تهی زوج است.
- (۴) اگر f, g و $\frac{1}{g}$ هر دو زوج باشند، آن گاه f زوج است.

$$f = \{(-1, 1), (-2, 3), (2, -3), (1, -1), (3, 1)\}$$

$$g = \{(-1, 4), (-2, 3), (2, -3), (1, -4), (-3, -1)\}$$

f و g هیچ کدام فرد نیستند. در صورتی که: $f+g$ و $f-g$ هر دو فرد هستند. اما اگر تابع‌های f و g در $D_f \cap D_g$ در نظر گرفته شوند فرد هستند. در مورد توابع زوج نیز چنین است.

$$f+g = \{(-1, 5), (1, -5), (-2, 6), (2, -6)\}$$

$$f-g = \{(-1, -3), (1, 3), (-2, 0), (2, 0)\}$$

$$f(-x) = \frac{1}{2}(f+g)(-x) + \frac{1}{2}(f-g)(-x) = \frac{1}{2}(f+g)(x) + \frac{1}{2}(f-g)(x) = f(x), x \in D_f \cap D_g$$

به شرطی که $x \in D_f \cap D_g$ باشد، روابط فوق درست‌اند.

مثال ۱۷۰: اگر تابع $f = \{(2m-1, a^2 + \frac{1}{2}), (a+m, m^2 - 3m+2)\}$ تابعی زوج و یک به یک باشد، کدام است؟

$$(1) \quad (2) \quad (3) \quad (4)$$

تابع ناتهی f فقط در صورتی می‌تواند هم زوج و هم یک به یک باشد که $D_f = \{0\}$ شود، یعنی f فقط شامل نقاطی روی محور y ها باشد.

$$2m-1 = a+m = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}, a = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{m}{a} = -1$$

مثال ۱۷۱: تابع $f(x) = \log(3x-6)$ چگونه است؟

- (۱) یک به یک است ولی زوج نیست.
- (۲) یک به یک است و فرد
- (۳) یک به یک است و زوج
- (۴) نه یک به یک است و نه فرد و نه زوج

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \log 3x_1 - 6 = \log 3x_2 - 6 \Rightarrow 3x_1 - 6 = 3x_2 - 6 \Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow \text{یک به یک است.}$$

اما f نه فرد و نه زوج است چرا که شرط اول تابع زوج و فرد را دارا نمی‌باشد.
برقرار نیست. $(\forall x \in D_f \rightarrow -x \in D_f)$

مثال ۱۷۲: تابع $f(x) = \frac{x}{|x|}$ چگونه است؟

- (۱) یک به یک و زوج است.
- (۲) یک به یک و فرد است.
- (۳) یک به یک نیست و فرد است.
- (۴) یک به یک نیست و زوج است.

گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۱۷۳: تابع $f(x) = a^{\sin x - 2}$ ($a > 0$) چگونه است؟

(۱) یک به یک است و فرد (۲) یک به یک است و زوج است.
(۳) یک به یک نیست و فرد است. (۴) نه یک به یک و نه زوج و نه فرد است.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow a^{\sin x_1 - 2} = a^{\sin x_2 - 2} \Rightarrow \sin x_1 - 2 = \sin x_2 - 2 \Rightarrow \sin x_1 = \sin x_2 \Rightarrow x_1 \neq x_2$$

همیشه برقرار نیست. پس یک به یک نمی‌باشد.

$$f(-x) = a^{\sin(-x) - 2} = a^{-\sin x - 2}$$

نه فرد است و نه زوج است.

مثال ۱۷۴: تابع $f(x) = \frac{x}{|x|}$ چگونه است؟

(۱) پوشاست و زوج است. (۲) پوشاست و فرد است. (۳) پوشا نیست و فرد است. (۴) پوشا نیست و زوج است.
گزینه ۳ صحیح است.