تابع درجه دوم:

فرم کلی توابع درجه دو به صورت $y = ax^2 + bx + c$ با شرط $a \neq 0$ می‌باشد.

نمودار هر تابع درجه دو یک سهمی است که با توجه به علامت a شکل تقریبی آن به یکی از صورت‌های زیر است.

الف) اگر $a > 0$ باشد نمودار آن به شکل  می‌باشد. یعنی دهانه‌ی سهمی به سمت بالا باز می‌شود.

ب) اگر $a < 0$ باشد نمودار آن به شکل  می‌باشد. یعنی دهانه‌ی سهمی به سمت پایین باز می‌شود.

رأس سهمی: نقطه‌ای از سهمی درجه ۲ که بیش‌ترین عرض یا کم‌ترین عرض را دارد، رأس سهمی نامیده می‌شود. رأس سهمی را با S نمایش می‌دهند و مختصات آن به صورت زیر است:

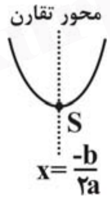
$$S\left|\begin{array}{l} x_S = -\dfrac{b}{2a} \\ y_S = \dfrac{4ac - b^2}{4a} \end{array}\right.$$

تذکر: طول نقطه‌ی رأس سهمی به کمک مشتق به‌دست آمده است.

اگر $\frac{c}{a} < 0$ معادله دارای دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت است پس در دو طرف محور yها به محور xها برخورد می‌کند.

اگر $\frac{c}{a} > 0$ معادله ممکن است ریشه نداشته باشد ولی اگر دارای ریشه باشد حتماً هر دو ریشه متحدالعلامت‌اند.

محور تقارن سهمی: هر سهمی دارای یک محور تقارن عمودی است که از رأس آن می‌گذرد و معادله‌ی آن به صورت $x = x_S = \frac{-b}{2a}$ می‌باشد.



مثال ۱: **کدام‌یک از معادلات زیر ضابطه‌ی نمودار مقابل است؟**

۱) $y=x^2+3x-k^2$ **۲)** $y=-2x^2-6x+k^2$

۳) $y=-x^2+4x-k^2$ **٤)** $y=-x^2+2x+k^2$

گزینه ۴ صحیح است.

مثال ۲: **کدام یک از توابع زیر ماکزیمم و کدام یک مینیمم دارد ؟ مینیمم یا ماکزیمم این توابع چقدر است؟**

الف) $y=2x^2-3x+1$ **ب)** $y=-x^2+4x+2$

الف) این تابع مینیمم دارد ($a>0$) که این مینیمم به ازای $x=\frac{3}{4}$ رخ می‌دهد ومقدار آن برابر است با

$$y=2\left(\frac{3}{4}\right)^2-3\left(\frac{3}{4}\right)+1=\frac{9}{8}-\frac{9}{4}+1=1-\frac{9}{8}=-\frac{1}{8}$$

ب) این تابع ماکزیمم دارد ($a<0$) وماکزیمم آن به ازای $x=2$ رخ می‌دهد و مقدار آن برابر است با :

$$y=-(2)^2+4(2)+2=-4+8+2=6$$

مثال ۳: **تابع** $y=x^2-2mx+3$ **دارای مینیممی است که درنقطه‌ای به طول ۳ رخ می‌دهد،** m **را بدست آورید.**

مثال ۴: **به ازای کدام مقادیر** a **تابع** $y=(a+1)x^2+2ax+1$ **دارای مینیممی برابر** $\frac{1}{2}$ **خواهد بود؟**

$$-\frac{\Delta}{4a}=\frac{1}{2}\Rightarrow-\Delta=2a\Rightarrow 4(a+1)(1)-4a^2=2(a+1)$$

$$\Rightarrow 4a+4-4a^2=2a+2\Rightarrow 4a^2-2a-2=0\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ a=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

هردو جواب بدست آمده قابل قبول هستند ، زیرا تابع باید مینیمم داشته باشد پس $a>-1$ می‌باشد .

مثال ۵ : اگر منحنی $y=(1-m)x^2+x+m-2$ **، از چهار ناحیه محورهای مختصات گذشته و دارای ماکزیمم باشد، آن‌گاه مجموعه مقادیر** m **به کدام صورت است؟**

۱) $m<1$ **۲)** $m>2$ **۳)** $1<m<2$ **٤)** $-1<m<2$

در سهمی $y=ax^2+bx+c$ max : $a<0\Rightarrow 1-m<0\Rightarrow m>1$

شرط عبور از چهار ناحیه : $ac<0\Rightarrow(1-m)(m-2)<0$

$\Rightarrow m>2$

لازم به توضیح است که شرط عبور از هر چهار ناحیه آن است که طول‌های نقاط برخورد مختلف العلامه باشند.یعنی $\frac{c}{a}<0$ $(ac<0)$

معادله‌ی درجه‌ی دوم:

چندجمله‌ای $f(x)=ax^{2}+bx+c$ را با شرط $a\neq 0$ یک چندجمله‌ای درجه ی ۲ می‌نامند. در این چندجمله‌ای مقدار $\Delta=b^{2}-4ac$ را «مبین عبارت» می‌خوانند و با توجه به علامت آن در تعداد و نوع ریشه‌های چندجمله‌ای بحث می‌کنند.
نمودار هر تابع درجه ی ۲ به فرم سهمی قائم است که با توجه به علامت a، تقعر آن رو به بالا یا رو به پایین قرار دارد.

حالت‌های زیر را می‌توان برای ریشه‌های تابع درجه ی دوم بیان کرد:

۱) اگر $\Delta>0$ باشد، تابع دو ریشه با مقادیر $x_{1}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_{2}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ دارد.

۲) اگر $\Delta=0$ باشد، تابع ریشه‌ی مضاعف $x_{1}=x_{2}=-\frac{b}{2a}$ را دارد. در این حالت نمودار تابع بر محور xها مماس است.

۳) اگر $\Delta<0$ باشد، تابع ریشه‌ی حقیقی ندارد. نمودار تابع یا کاملاً بالای محور xها قرار دارد، یا پایین آن.

نکته: یک عبارت درجه دوم زمانی همواره مثبت است که داشته باشیم: $\begin{cases}\Delta<0\\ a>0\end{cases}$

و زمانی همواره منفی است که داشته باشیم: $\begin{cases}\Delta<0\\ a<0\end{cases}$

مثال ۶: به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع $y=(m-1)x^{2}+\sqrt{3}x+m$ همواره در زیر محور xهاست؟

۱) $m<-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}<m<1$ ۳) $1<m<\frac{3}{2}$ ٤) $m>\frac{3}{2}$

گزینه‌ی ۱ صحیح است.

مثال۷: اگر به ازای جمیع مقادیر x نامساوی $(1+m)x^{2}-4x-(1-m)<0$ برقرار باشد، محدوده‌ی m کدام است؟

۱) $m>\sqrt{5}$ ۲) $-1<m<\sqrt{5}$ ۳) $m>1$ ٤) $m<-\sqrt{5}$

$$\begin{cases}1+m<0\Rightarrow m<-1\\ \Delta<0\Rightarrow 16+4(1+m)(1-m)<0\Rightarrow 16+4-4m^{2}<0\\ \quad\Rightarrow m>\sqrt{5},m<-\sqrt{5}\end{cases}$$

با اشتراک گیری داریم: $m<-\sqrt{5}$

مثال۸: به ازای کدام مقادیر k چند جمله‌ای $(1-k)x^{2}+2kx+k+1=0$ به ازای همه مقادیر x مثبت است؟

۱) $[\frac{\sqrt{2}}{2},1]$ ۲) $[-\frac{\sqrt{2}}{2},1]$ ۳) $(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ ٤) $(1,+\infty)$

$$\begin{cases}\Delta \text{یا} \Delta'<0\Rightarrow \Delta'=k^{2}-(1-k^{2})=2k^{2}-1<0\Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}<k<\frac{\sqrt{2}}{2}\\ a>0\Rightarrow 1-k>0\Rightarrow k<1\end{cases}\Rightarrow k\in(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$$

نکته: برای بدست آوردن ریشه‌ی مشترک ابتدا دو معادله را برابر قرار می دهیم.

مثال ۹: ریشه‌ی مشترک معادله‌ی $x^۲+mx+۱=۰,\ x^۲+(m-۴)x+۵=۰$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۳　　۳) -۱　　۴) -۳

$$x^۲+(m-۴)x+۵=x^۲+mx+۱ \Rightarrow x^۲+mx-۴x+۵=x^۲+mx+۱ \Rightarrow x=۱$$

مثال ۱۰: اگر $a>۰$ و دو معادله درجه دوم $x^۲-۳x+a=۰,\ x^۲+x-۳a=۰$ دارای یک جواب مشترک باشد این جواب مشترک کدام است؟

۱) ۳　　۲) ۲　　۳) -۲　　۴) -۳

گزینه‌ی ۲ صحیح است.

نکته: اگر مجموع ضرایب یک معادله درجه دوم صفر باشد $(a+b+c=۰)$ آن گاه یک ریشه معادله برابر ۱ و دیگری برابر $\frac{c}{a}$ است و برعکس اگر یکی از ریشه‌های معادله درجه دوم ۱ باشد آن گاه ریشه دیگری $\frac{c}{a}$ لست. اگر مجموع ضریب‌های جملات کناری در معادله درجه دوم با ضریب جمله وسط برابر باشد $b=a+c$ آن گاه یک ریشه معادله -۱ و دیگری $-\frac{c}{a}$ است و برعکس اگر یک ریشه معادله -۱ باشد آن گاه ریشه دیگری $-\frac{c}{a}$ است.

مثال۱۱: ریشه های معادله $x^۲\sin^۲\alpha+x+\cos^۲\alpha=۰$ را بدست آورید.

مثال۱۲: اگر $x\in N$، آنگاه نامعادله $۳x^۲-۴۱x-۴۴<۰$ چند جواب دارد؟

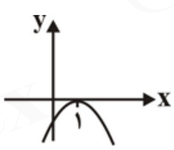
۱) ۱۶　　۲) ۱۵　　۳) ۱۴　　۴) ۱۳

$a+c=b$ پس یکی از ریشه ها -۱ و دیگری $\frac{-c}{a}$ است.

$$\frac{-c}{a}=\frac{۴۴}{۳}=۱۴/۶ \Rightarrow -۱<x<۱۴/۶$$

چون $n\in N$ می باشد، پس جوابها عبارتند از ۱۴,...,۳,۲.بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

مثال۱۳: نمایش هندسی $f(x)=ax^۲+bx+c$ مطابق شکل زیر است، کدام گزینه صحیح است؟



۱) $a>۰$　　۲) $ac<۰$
۳) $a+b+c=۰$　　۴) $b=۲a$

راه اول: یک ریشه این نمودار برابر ۱ است داریم: $a+b+c=۰$

راه دوم: با توجه به شکل تابع max دارد یعنی $a<0$ پس گزینه ی ۱ حذف می شود و اگر $ac<0$ باشد باید $\Delta>0$ باشد یعنی محور x ها را باید در دو نقطه قطع کند پس گزینه ی ۲ حذف و گزینه ی ۴ نیز حذف است زیرا محور تقارن $x=1$ است که نتیجه می دهد $b=-2a$ و نقطه $(1,0)$ یک نقطه منحنی است که داریم: $a+b+c=0$

روابط بین ریشه ها

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$ باشد آن‌گاه داریم:

۱) **مجموع ریشه‌ها** $x_1+x_2=\frac{-b}{a}=S$

۲) **حاصل‌ضرب ریشه‌ها** $x_1 . x_2=\frac{c}{a}=P$

۳) **تفاضل ریشه ها** $|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

۴) $\begin{cases}|\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}|=\sqrt{s-2\sqrt{p}}\\ \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{s+2\sqrt{p}}\end{cases}$

روابط زیر را با استفاده از مجموع ریشه‌ها و حاصل‌ضرب ریشه‌ها بدست می‌آید.

۱) $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=S^2-2P$

۲) $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)\Rightarrow x_1^3+x_2^3=S^3-3PS$

ساختن معادله‌ی درجه‌ی دوم با معلوم بودن ریشه‌های آن:

اگر از معادله‌ی دومی S و P معلوم باشد آن معادله عبارت است از: $x^2-Sx+P=0$

مثال ۱۴: اگر β,α ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-5x+1=0$ باشند حاصل عبارت زیر را بیابید.

الف) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ ب) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$ ج) $\frac{\beta}{\alpha^2}+\frac{\alpha}{\beta^2}$ د) $\alpha^2\beta+\beta^2\alpha$ هـ) $\frac{\alpha}{\beta^2-1}+\frac{\beta}{\alpha^2-1}$

دراین معادله داریم $S=\alpha+\beta=\frac{5}{2}$ و $P=\alpha\beta=\frac{1}{2}$

الف) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{S}{P}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}}=5$

ب) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{S^2-2P}{P}=\frac{(\frac{5}{2})^2-2(\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{25}{4}-1}{\frac{1}{2}}=\frac{21}{2}$

ج) $\frac{\beta}{\alpha^2}+\frac{\alpha}{\beta^2}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2\beta^2}=\frac{S^3-3PS}{P^2}=\frac{\frac{125}{8}-\frac{15}{4}}{\frac{1}{4}}=\frac{125}{2}-15=\frac{95}{2}$

د) $\alpha^2\beta+\beta^2\alpha=\alpha\beta(\alpha+\beta)=\frac{5}{4}$

$$\frac{\alpha}{\beta^2-1}+\frac{\beta}{\alpha^2-1}=\frac{\alpha(\alpha^2-1)+\beta(\beta^2-1)}{(\alpha^2-1)(\beta^2-1)}=\frac{\alpha^3+\beta^3-(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^4-(\alpha^2+\beta^2)+1}=\frac{S^3-3PS-S}{P^4-S^2-2P+1}=\frac{\frac{125}{8}-\frac{15}{4}-\frac{5}{2}}{\frac{1}{16}-\frac{25}{4}-1+1}=\frac{\frac{75}{8}}{\frac{-99}{16}}=-\frac{150}{99}$$

مثال ۱۵: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2-10x+7=0$ باشند، مقدار عبارات زیر را محاسبه کنید.

الف) $x_1^2+x_2^2$ ب) $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$ ج) $\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}+\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$

د) $x_1^3+x_2^3$ هـ) $x_1^4+x_2^4$

مثال۱۶: در معادله‌ی $x^{۲}+۵x+۱=۰$ **اگر** α **و** β **ریشه‌های معادله باشند، حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.**

۱) $\alpha^{۲}+\beta^{۲}$

$\alpha\beta=۱ \qquad \alpha+\beta=-۵$

$\alpha^{۲}+\beta^{۲}=S^{۲}-۲P=(-۵)^{۲}-۲(۱)=۲۵-۲ \Rightarrow \alpha^{۲}+\beta^{۲}=۲۳$

۲) $\sqrt[۳]{\frac{\alpha^{۲}}{\beta}}+\sqrt[۳]{\frac{\beta^{۲}}{\alpha}}$

$\sqrt[۳]{\frac{\alpha^{۲}}{\beta}}+\sqrt[۳]{\frac{\beta^{۲}}{\alpha}}=\frac{\sqrt[۳]{\alpha^{۲}}}{\sqrt[۳]{\beta}}+\frac{\sqrt[۳]{\beta^{۲}}}{\sqrt[۳]{\alpha}}=\frac{\alpha+\beta}{\sqrt[۳]{\alpha\beta}}=\frac{S}{\sqrt[۳]{P}}=\frac{-۵}{\sqrt[۳]{۱}}=-۵$

۳) $\alpha^{۳}+\beta^{۳}$

$\alpha^{۳}+\beta^{۳}=(\alpha+\beta)^{۳}-۳\alpha\beta(\alpha+\beta) \Rightarrow \alpha^{۳}+\beta^{۳}=(-۵)^{۳}-۳(۱)(-۵)=-۱۲۵+۱۵=-۱۱۰$

مثال۱۷: معادله درجه دوم $x^{۲}+ax+b=۰$ **دو عدد صحیح متوالی هستند در این صورت کدامیک از روابط زیر درست است؟**

۱) $b^{۲}=۴a+۱$ **۲)** $a^{۲}+۴b=۱$ **۳)** $a^{۲}=۴b-۱$ **٤)** $a^{۲}-۴b=۱$

$x^{۲}+ax+b=۰$

$|x'-x''|=۱ \Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=۱ \Rightarrow a^{۲}-۴b=۱$

مثال ۱۸: مقدار a **چقدر باشد که حاصل ضرب طول های نقاط تقاطع دو منحنی** $y_{۱}=x^{۲}-ax$, $y_{۲}=ax^{۲}+x+۲$ **برابر ۲ گردد؟**

۱) -۲ **۲)** ۲ **۳)** -۱ **٤)** ۱

ابتدا دو منحنی را برابرقرار می دهیم تا نقاط تلاقی بدست آید.

$x^{۲}-ax=ax^{۲}+x+۲ \Rightarrow (a-۱)x^{۲}+(۱+a)x+۲=۰$

حال $p=\frac{c}{a}$ را بدست می آوریم.

$$p=\frac{c}{a}=\frac{۲}{a-۱}=۲\Rightarrow ۲a-۲=۲\Rightarrow ۲a=۴\Rightarrow a=۲$$

مثال۱۹: اگر نسبت ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-x+m=۰$ برابر $\frac{۲}{۳}$ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۶}{۲۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ٤) $\frac{۲}{۵}$

$$\left.\begin{array}{l} x'+x''=-\frac{b}{a}=۱ \\ x'=\frac{۲}{۳}x'' \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{۵}{۳}x''=۱\Rightarrow x''=\frac{۳}{۵},\ x'=\frac{۲}{۵}$$

$$x'x''=m\Rightarrow \frac{۲}{۵}\times\frac{۳}{۵}=m\Rightarrow m=\frac{۶}{۲۵}$$

مثال۲۰: اگر $x_۱$ و $x_۲$ $(x_۱>x_۲)$ ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^۲-x-۱=۰$ باشند، آن‌گاه حاصل $۳x_۱^۲+x_۲^۲$ کدام است؟

۱) $۶+۳\sqrt{۵}$ ۲) $۶-۳\sqrt{۵}$ ۳) $۶-\sqrt{۵}$ ٤) $۶+\sqrt{۵}$

$$۳x_۱^۲+x_۲^۲=۲x_۱^۲+x_۱^۲+۲x_۲^۲-x_۲^۲=۲(x_۱^۲+x_۲^۲)+(x_۱^۲-x_۲^۲)==۲(S^۲-۲P)+\underbrace{(x_۱+x_۲)}_{s}\underbrace{(x_۱-x_۲)}_{\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}}=۲(۱+۲)+(۱)(\frac{\sqrt{۵}}{۱})=۶+\sqrt{۵}$$

مثال۲۱: هرگاه β,α ریشه‌های معادله $x^۲+px+q=۰$ باشند و روابط $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{۳۷}{۶},\ \alpha^۲+\beta^۲=\frac{۳۷}{۹}$ برقرار باشند آن‌گاه حاصل $\frac{p}{q}$ می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) ۳ ۳) $\frac{۷}{۳}$ ۴) $\frac{۷}{۲}$

گزینه‌ی ۴ صحیح است.

مثال۲۲: اگر β,α ریشه‌های معادله $x^۲-۷x+۴=۰$ باشند، حاصل $|\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}|$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۲ ٤) ۳

گزینه‌ی ۲ صحیح است.

مثال۲۳: اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی $(m+۱)x^۲-(m+۴)x+m+۱=۰$ برابر ۲ باشد مجموع مربعات دو ریشه برابر کدام است؟

۱) $\frac{۱۵}{۲}$ ۲) $\frac{۱۵}{۴}$ ۳) $\frac{۱۷}{۲}$ ٤) $\frac{۱۷}{۴}$

$x=۲\Rightarrow ۴(m+۱)-۲(m+۴)+m+۱=۰\Rightarrow m=۱$ ریشه معادله در معادله صدق می کند.

$$\Rightarrow x'^۲+x''^۲=s^۲-۲p=(\frac{۵}{۲})^۲-۲=\frac{۱۷}{۴}$$

مثال۲۴: هرگاه α ,β ریشه‌های معادله $x^{2}-14x+1=0$ باشند حاصل $\alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\alpha}$ کدام است؟

۱) ٤ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ٤) ١٦

$$x^{2}-14x+1=0\Rightarrow\begin{cases}s=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=14\\ p=\alpha\beta=\frac{c}{a}=1\end{cases},\ \alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\alpha}=\sqrt{\alpha\beta}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})$$

$$\alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\alpha}=\sqrt{p}(\sqrt{s+2\sqrt{p}})=\sqrt{1}(\sqrt{14+2\sqrt{1}})=\sqrt{16}=4$$

مثال۲۵: اگر α , β ریشه‌های معادله $6x^{2}-2mx+9=0$ و $\alpha-\beta=2$ مقدار m کدام است؟

۱) $\pm2\sqrt{10}$ ۲) $\pm\sqrt{10}$ ۳) $\pm3\sqrt{10}$ ٤) $\pm4\sqrt{10}$

چون α , β ریشه‌های معادله هستند پس $\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{2m}{6}$ بنابراین:

$$\begin{cases}\alpha-\beta=2\\ \alpha+\beta=\frac{2m}{6}\end{cases}\Rightarrow 2\alpha=2+\frac{2m}{6}\to\alpha=1+\frac{m}{6}$$

ریشه معادله در معادله صدق می‌کند پس داریم:

$$6(1+\frac{m}{6})^{2}-2m(1+\frac{m}{6})+9=0$$

$$\Rightarrow 6(1+\frac{m^2}{36}+\frac{2m}{6})-2m-\frac{2m^{2}}{6}+9=0\Rightarrow 6+\frac{m^{2}}{6}+2m-2m-\frac{2m^{2}}{6}+9=0\Rightarrow 15=\frac{m^{2}}{6}\Rightarrow m=\pm3\sqrt{10}$$

مثال۲۶: در معادله $4x^{2}-16x+m=0$ یکی از ریشه‌ها ۳ واحد از دیگری بزرگ‌تر است. اگر α,β ریشه‌های معادله باشند و $\alpha>\beta$ ، آن‌گاه حاصل $3\alpha+2\beta-m$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{2}$ ۲) $\frac{9}{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ٤) ۷

مثال۲۷: معادله‌ی درجه دوم $x^{2}+ax-3=0$ اگر x_1 و x_2 ریشه‌ها و $\frac{1}{x_2-1}+\frac{1}{x_1-1}=2$، آن‌گاه a کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ٤ ٤) ۲

$$\frac{1}{x_1-1}+\frac{1}{x_2-1}=\frac{x_1+x_2-2}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}=\frac{-a-2}{-3+a+1}=\frac{-a-2}{a-2}=2\Rightarrow 2a-4=-a-2\ \Rightarrow\ 3a=2\ \Rightarrow\ a=\frac{2}{3}$$

مثال ۲۸: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $3x^{2}-x+5=0$ باشند حاصل $\sqrt{x_2^{2}(x_1-5)}$ را بدست آورید.

مثال ۲۹: در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^۲-۳x+۱=۰$، حاصل $\sqrt{x_۱^۲(۳x_۲-۱)}$ چقدر است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۱ ٤) ۲

می‌دانیم $x_۲$ ریشه‌ی معادله است. یعنی در آن صدق می‌کند و در نتیجه:

$$x_۲^۲-۳x_۲+۱=۰ \Rightarrow x_۲^۲=۳x_۲-۱$$

پس به جای $۳x_۲-۱$ در عبارت مورد نظر می‌توانیم $x_۲^۲$ را قرار دهیم.

$$A=\sqrt{x_۱^۲(۳x_۲-۱)}=\sqrt{x_۱^۲x_۲^۲}=|x_۱x_۲|\,,\ x_۱x_۲=\frac{c}{a}=۱\Rightarrow A=۱$$

مثال۳۰: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-۴x+۱=۰$ باشند حاصل $\sqrt{\alpha^۲(۴\beta-۱)}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ٤ ٤) $\sqrt{۲}$

چون α و β ریشه‌های معادله می‌باشند روابط زیر برقرارند:

$$\alpha+\beta=۴\ ,\ \alpha\beta=۱$$

$$\beta^۲-۴\beta+۱=۰ \Rightarrow \beta^۲=۴\beta-۱$$

$$\sqrt{\alpha^۲(۴\beta-۱)}=\sqrt{\alpha^۲\beta^۲}=|\alpha\beta|=|۱|=۱$$

مثال۳۱: اگر رابطه $x_۱+۲x_۲=۵$ بین ریشه‌های معادله $x^۲+(m-۲)x-۱۲=۰$ برقرار باشد m کدام است؟

۱) ۱ یا $\frac{۹}{۲}$ ۲) ۱- یا $\frac{۹}{۲}$ ۳) ۱- یا $-\frac{۹}{۲}$ ٤) ۱ یا $-\frac{۹}{۲}$

$$\begin{cases} x_۱+x_۲=۲-m \\ x_۱+۲x_۲=۵ \\ x_۱\ x_۲=-۱۲ \end{cases} \Rightarrow x_۲=m+۳\ ,\ x_۱=-۲m-۱$$

$$x_۱\ x_۲=-۱۲\Rightarrow (m+۳)(-۲m-۱)=-۱۲\Rightarrow -۲m^۲-۷m-۳=-۱۲\Rightarrow ۲m^۲+۷m-۹=۰\Rightarrow m=۱ \text{ یا } m=-\frac{۹}{۲}$$

مثال۳۲: اگر α,β ریشه‌های معادله $x^۲-۵x+۱=۰$ حاصل $\frac{\alpha^۳-۵\alpha^۲+۴-\beta}{\beta^۲-۳\beta+۲\alpha}$ کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۲}{۹}$ ٤) $\frac{-۱}{۹}$

چون α,β ریشه‌های معادله $۵x^۲-۵x+۱=۰$ باشند داریم:

$$\alpha^۲-۵\alpha+۱=۰\,,\ \beta^۲-۵\beta+۱=۰$$

پس:

$$\beta^۲=۵\beta-۱\,,\ \alpha^۲=۵\alpha-۱\Rightarrow \alpha^۳=۵\alpha^۲-\alpha$$

$$\frac{\alpha^۳-۵\alpha^۲+۴-\beta}{\beta^۲-۳\beta+۲\alpha}=\frac{(۵\alpha^۲-\alpha)-۵\alpha^۲+۴-\beta}{(۵\beta-۱)-۳\beta+۲\alpha}=\frac{۴-(\alpha+\beta)}{۲(\alpha+\beta)-۱}=\frac{۴-۵}{۲(۵)-۱}=\frac{-۱}{۹}$$

مثال۳۳: α , β ریشه‌های معادله $ax^۲+bx+۲=۰$ می‌باشند اگر این ریشه‌ها در دستگاه $\begin{cases}\alpha\beta+۲\beta=۴\\-\beta+۳\alpha\beta=۵\end{cases}$ صدق کنند آن‌گاه مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) ۳ ۳) ۲ ٤) -۲

گزینه‌ی ۴ صحیح است.

مثال۳۴: اگر $\sin\alpha,\cos\alpha$ ریشه‌های معادله $x^۲+۷x-m+۴=۰$, $\sin ۲\alpha=۶$ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) -۲ ٤) -۱

$\sin\alpha.\cos\alpha=\frac{c}{a}=-m+۴$

و از آنجا که $\sin ۲\alpha=۶=۲\sin\alpha.\cos\alpha$ پس $-m+۴=۳$ می باشد و در نتیجه $m=۱$ است.

مثال۳۵: اگر $\tan\alpha,\cot\alpha$ ریشه‌های معادله $x^۲-۳x+m-۴=۰$ باشد آنگاه $\sin ۲\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ٤) $\frac{۱}{۳}$

$\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{۲}{\sin ۲\alpha}$, $\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{-b}{a}=۳\Rightarrow\sin ۲\alpha=\frac{۲}{۳}$

مثال۳۶: اگر $\tan\alpha$, $\tan\beta$ ریشه‌های معادله $x^۲-۲x-۱=۰$ باشند آن‌گاه حاصل $(\tan^۲\alpha-\tan^۲\beta)(\tan^۳\alpha-\tan^۳\beta)$ کدام است؟

۱) ٤٠ ۲) ٨٠ ۳) ٦٠ ٤) ۲٠

گزینه‌ی ۲ صحیح است.

مثال۳۷: اگر α,β ریشه‌های معادله‌ی $۲x^۲+۳mx-m+۱=۰$ باشند و سه عدد $\alpha,۲,\beta$ تصاعد هندسی تشکیل دهند، m کدام است؟

۱) -۱۲ ۲) -۷ ۳) -۶ ٤) -۴

$۲^۲=\alpha.\beta=\frac{c}{a}\Rightarrow ۴=\frac{-m+۱}{۲}\Rightarrow -m+۱=۸\Rightarrow m=-۷$

مثال۳۸: اگر α,β ریشه‌های معادله درجه دوم $x^۲-(۳m-۱)x+۲m=۰$ باشند و α,m,β سه جمله ی متوالی تصاعد عددی باشند، m کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ٤) -۲

گزینه‌ی ۱ صحیح است.

مثال ۳۹: از دستگاه $\begin{cases} x+xy+y=11 \\ xy^2+x^2y=30 \end{cases}$ جوابهای x کدام است؟

۱) ۱ و ۲ و ۳ و ۵ ۲) ۳ و ٤ ۳) ۱ و ٥ ٤) ٥ و ٦

$$\begin{cases} x+y=s \\ x.y=p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s+p=11 \\ s.p=30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s=5 \\ p=6 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} s=6 \\ p=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-5x+6=0 \Rightarrow x=2,3 \\ x^2-6x+5=0 \Rightarrow x=1,5 \end{cases} \Rightarrow x=\{1,2,3,5\}$$

نکته: در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ موارد زیر را با P, S به راحتی می‌توان به دست آورد:

۱) معادله دارای دو ریشه قرینه باشد: $\xleftarrow{\Delta>0}$ $x'=-x'' \Rightarrow x'+x''=0 \Rightarrow s=-\frac{b}{a}=0 \Rightarrow b=0$

۲) معادله دارای دو ریشه عکس باشد: $\xleftarrow{\Delta>0}$ $x'=\frac{1}{x''} \Rightarrow x'.x''=1 \Rightarrow p=\frac{c}{a}=1 \Rightarrow c=a$

۳) معادله دارای دو ریشه عکس و قرینه باشد: $\xleftarrow{\Delta>0}$ $x'=-\frac{1}{x''} \Rightarrow x'.x''=-1 \Rightarrow p=\frac{c}{a}=-1 \Rightarrow a=-c$

مثال۴۰: مقدار m برای آنکه معادله $mx^2+(m^2-4)x+m-3=0$ دو ریشه قرینه داشته باشند، کدام است؟

۱) -2 ۲) ۲ ۳) ± 2 ٤) هیچ کدام

$$x'=-x'' \Rightarrow x'+x''=0 \Rightarrow \frac{-b}{a}=0 \Rightarrow b=0$$

از طرف دیگر باید دو ریشه موجود باشند یعنی $\Delta>0$ در نتیجه داریم:

$$b^2-4ac>0 \xrightarrow{b=0} -4ac>0 \Rightarrow ac<0$$

$$b=m^2-4 \Rightarrow m=\pm 2\ ,\ a=m\ ,\ c=m-3$$

$$\begin{cases} m=2 \Rightarrow a=2\ ,\ c=-1 & \text{قابل قبول} \\ m=-2 \Rightarrow a=-2\ ,\ c=-5 & \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

مثال۴۱: کدام‌یک از معادلات زیر به ازای جمیع مقادیر k دو ریشه‌ی حقیقی منفی دارد؟ **(آزاد ریاضی – ۷۱)**

۱) $x^2+kx+k^2+1=0$ ۲) $x^2+(k+1)x+k-2=0$

۳) $x^2-(k^2+1)x+k^2=0$ ٤) $x^2+(k^2+3)x+k^2+2=0$

$$\left.\begin{array}{l} \text{هر دو ریشه منفی} \Rightarrow \text{جمع دو ریشه منفی است} \Rightarrow x_1+x_2<0 \Rightarrow \frac{-b}{a}<0 \\ a=1 \text{ : برای کلیه معادلات داده شده} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow -b<0 \Rightarrow b>0$$

پس ضریب x باید همواره مثبت باشد. این خاصیت فقط در گزینه‌ی ۴ دیده می‌شود.

تشکیل معادله درجه دوم:

۱) با معلو م بودن دو ریشه:

در معادله درجه دوم اگر دو ریشه برابر x_1 و x_2 **باشند،داریم:**

$$(x-x_1)(x-x_2)=0 \Rightarrow x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0 \Rightarrow x^2-Sx+p=0$$

مثال ۴۲: معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{1}{6}$ و $-\frac{1}{7}$ **باشند.**

مثال ۴۳: معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\sqrt{2}-1$ و $\sqrt{2}+1$ **باشند.**

مثال۴۴: معادله درجه دومی که ریشه‌های آن $4-\sqrt{4-a}\ ,\ 4+\sqrt{4-a}$ **باشد، کدام است؟**

۱) $x^2-8x+9=0$ ۲) $x^2-ax+8=0$ ۳) $x^2-8x+12+a=0$ ٤) $x^2-ax+16=0$

$$s=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=4-\sqrt{2-a}+4+\sqrt{2-a}=8$$

$$p=\alpha.\beta=\frac{c}{a}=(4-\sqrt{4-a})(4+\sqrt{4-a})=16-4+a=12+a$$

بنابراین معادله مورد نظر $x^2-8x+12+a=0$ می باشد.

مثال۴۵: اگر β,α **دو ریشه‌ی معادله** $x^2-2x-4=0$ **باشد، معادله‌ی درجه دومی که ریشه‌های آن** $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}$ **باشد، کدام است؟**

۱) $x^2+2x-1=0$ ۲) $x^2-4x+2=0$ ۳) $4x^2+2x-1=0$ ٤) $4x^2-x+2=0$

گزینه‌ی ۳ صحیح است.

مثال ۴۶: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^۲-۳x-۱=۰$ باشند، معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که ریشه‌های آن $۲\alpha+۳\beta-۴$ و $۲\beta+۳\alpha-۴$ باشد.

α و β ریشه‌های $x^۲-۳x-۱=۰$ هستند، پس $\alpha\beta=-۱$ و $\alpha+\beta=۳$. اگر $x_۱=۲\alpha+۳\beta-۴$ و $x_۲=۲\beta+۳\alpha-۴$ باشد، داریم:

$$x_۱=۲(\alpha+\beta)+\beta-۴=۲\times۳+\beta-۴=\beta+۲\ ,\ x_۲=\alpha+۲$$

اکنون حاصل‌ضرب و جمع $x_۱$ و $x_۲$ را به‌دست می‌آوریم:

$$S=x_۱+x_۲=(۲+\beta)+(۲+\alpha)=۴+(\alpha+\beta)=۴+۳=۷$$
$$P=x_۱x_۲=(۲+\beta)(۲+\alpha)=۴+۲(\alpha+\beta)+\alpha\beta=۴+۶-۱=۹$$

پس معادله‌ی درجه ی دوم مورد نظر $x^۲-۷x+۹=۰$ می‌باشد.

۲) تشکیل معادله درجه دومی که بین هر یک از ریشه‌های آن و ریشه‌های معادله درجه دوم مفروض رابطه خاصی برقرار باشد:
اگر x ریشه‌ی معادله درجه دوم و y ریشه‌ی درجه دوم جدید باشد ، x را بر حسب y بدست می آوریم و در معادله جایگذاری می‌کنیم، معادله‌ی درجه دوم بدست می آمده جواب می باشد.

مثال۴۷: معادله‌ی درجه دومی که ریشه‌هایش به ترتیب ۹ برابر ریشه‌های معادله $x^۲+x-۳=۰$ باشد، کدام است؟ **(سراسری تجربی – ۷۰)**

۱) $x^۲+۹x-۲۴۳=۰$ ۲) $x^۲+۹x-۲۷=۰$ ۳) $x^۲+۱۸x-۲۴۳=۰$ ٤) $x^۲+۱۸x-۲۷=۰$

گزینه‌ی ۱ صحیح است.

مثال۴۸: معادله $x^۲-۲x-۱=۰$ مفروض است، معادله درجه دوم جدیدی که ریشه‌هایش از نصف ریشه‌های این معادله ۲ واحد کمتر باشد، کدام است؟

۱) $x^۲-۲۲x+۷=۰$ ۲) $۴x^۲-۷x+۱۲=۰$ ۳) $x^۲-۷x+۱۲=۰$ ٤) $۴x^۲+۱۲x+۷=۰$

$$y=\frac{x}{۲}-۲\Rightarrow y+۲=\frac{x}{۲}\Rightarrow ۲y+۴=x$$
$$\Rightarrow(۲y+۴)^۲-۲(۲y+۴)-۱=۰\Rightarrow$$
$$۴y^۲+۱۶+۱۶y-۴y-۸-۱=۰\Rightarrow ۴y^۲+۱۲y+۷=۰$$

مثال۴۹: اگر ریشه‌های معادله $x^۲+ax-a^۲=۰$ برابر $x_۱$ و $x_۲$ باشد، $x_۲+۱\ ,\ x_۱+۱$ ریشه‌های کدام معادله است؟ **(سراسری ریاضی – ۷۹)**

۱) $x^۲+(a-۲)x+a^۲+a-۱=۰$ ۲) $x^۲+(a+۲)x-a^۲-a-۱=۰$
۳) $x^۲+(a-۲)x-a^۲-a+۱=۰$ ٤) $x^۲+(a+۲)x+a^۲+a-۱=۰$

اگر ریشه‌های معادله‌ی جدید را $y_۱$ و $y_۲$ بنامیم داریم: $y=x+۱$
کافیست مقدار $x=y-۱$ را در معادله‌ی مفروض قرار دهیم تا نتیجه بدست آید پس داریم:

$$(y-۱)^۲+a(y-۱)-a^۲=۰$$

با مرتب کردن معادله‌ی درجه دوم مطلوب چنین خواهد شد:

$$y^۲+(a-۲)y-a^۲-a+۱=۰$$

مثال۵۰: معادله درجه دومی که ریشه‌هایش از نصف ریشه‌های معادله $2x^2-x+1=0$ یک واحد کمتر باشد کدام است؟

۱) $8y^2+14y-7=0$ ۲) $4y^2-6y+3=0$ ۳) $8y^2+14y+7=0$ ۴) $4y^2+6y+3=0$

$$y=\frac{a}{2}-1\Rightarrow y+1=\frac{x}{2}\Rightarrow 2y+2=x$$
$$\Rightarrow 2(2y+2)^2-(2y+2)+1=0\Rightarrow 8y^2+8+16y-2y-2+1=0\Rightarrow 8y^2+14y+7=0$$

مثال۵۱: اگر ریشه‌های معادله $(m-4)x^2+x-3m=0$ عکس ریشه‌های معادله $(m-2)x^2-x+4-m=0$ باشد، m کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) -2 ۳) -1 ۴) 3

$$y=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{1}{y}\Rightarrow (m-4)\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y}-3m=0$$

معادله را در $-y^2$ ضرب می‌کنیم.

$$3my^2-y+4-m=0$$

و چون با معادله دوم برابر است. داریم:

$$m-2=3m\Rightarrow 2m=-2\Rightarrow m=-1$$

مثال۵۲: به ازای چه مقدار m یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^2+(5m+4)x+(5m+4)=0$ پنج برابر ریشه‌ی دیگر است؟ $(5m+4\neq 0)$

۱) $\frac{16}{25}$ ۲) $\frac{25}{16}$ ۳) $\frac{15}{16}$ ۴) $\frac{16}{15}$

با فرض $x_2=5x_1$ داریم:

$$P=x_1x_2=5m+4=5x_1^2\ ,\ S=x_1+x_2=-(5m+4)=6x_1$$
$$5m+4=(-\frac{5m+4}{6})^2\times 5\Rightarrow 36(5m+4)=5(5m+4)^2\Rightarrow 36=5(5m+4)\Rightarrow m=\frac{16}{25}$$

مثال ۵۳: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2-9x+7=0$ باشند:

الف) معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که ریشه‌های آن معکوس α و β باشند.

ب) معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که ریشه‌های آن مجذور α و β باشند.

ج) معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{1}{\alpha+1}$ و $\frac{1}{\beta+1}$ باشند.

طبق روابط بین ریشه‌ها داریم: $\alpha\beta=7$ و $\alpha+\beta=9$

الف) راه حل اول:

$$x_1=\frac{1}{\alpha}\ ,\ x_2=\frac{1}{\beta}\Rightarrow P=x_1x_2=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{7}\ ,\ S=x_1+x_2=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{9}{7}$$

معادله‌ی مورد نظر $x^2-\frac{9}{7}x+\frac{1}{7}=0$ می‌شود. (یا معادل آن $7x^2-9x+1=0$)

راه دوم: با فرض $x_1=\frac{1}{\alpha}$ به‌دست می‌آید $\alpha=\frac{1}{x_1}$ و می‌دانیم α در معادله صدق می‌کند. پس:

$$\alpha^2-9\alpha+7=0\Rightarrow (\frac{1}{x_1})^2-9(\frac{1}{x_1})+7=0\Rightarrow \frac{1-9x_1+7x_1^2}{x_1^2}=0\Rightarrow 7x_1^2-9x_1+1=0$$

واضح است که همین نتیجه را برای x_2 نیز می‌توان بیان کرد. پس x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $7x^2-9x+1=0$ هستند.

ب)

$$x_1=\alpha^2\ ,\ x_2=\beta^2 \Rightarrow P=x_1x_2=(\alpha\beta)^2=49\ ,\ S=x_1+x_2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=81-14=67$$

پس معادله مورد نظر $x^2-67x+49=0$ می‌شود.

راه دوم:

$$\left.\begin{array}{l} x_1=\alpha^2 \Rightarrow \alpha=\sqrt{x_1} \\ \alpha^2-9\alpha+7=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1-9\sqrt{x_1}+7=0 \Rightarrow 9\sqrt{x_1}=x_1+7 \Rightarrow 81x_1=x_1^2+49+14x \Rightarrow x_1^2-67x_1+49=0$$

ج)

$$x_1=\frac{1}{\alpha+1}\ ,\ x_2=\frac{1}{\beta+1} \Rightarrow \begin{cases} P=x_1x_2=\dfrac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)}=\dfrac{1}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1}=\dfrac{1}{7+9+1}=\dfrac{1}{17} \\ S=x_1+x_2=\dfrac{\alpha+1+\beta+1}{(\alpha+1)(\beta+1)}=(\alpha+\beta+2)\dfrac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)}=(9+2)\dfrac{1}{17}=\dfrac{11}{17} \end{cases}$$

پس معادله‌ی مورد نظر $x^2-\frac{11}{17}x+\frac{1}{17}$ یا معادل آن $17x^2-11x+1=0$ می‌شود.

راه دوم:

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{\alpha+1} \Rightarrow \alpha=\dfrac{1}{x}-1 \\ \alpha^2-9\alpha+7=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (\frac{1}{x}-1)^2-9(\frac{1}{x}-1)+7=0 \Rightarrow \frac{1}{x^2}-\frac{11}{x}+17=0 \Rightarrow 17x^2-11x+1=0$$

حالات خاص:

هر گاه معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ مفروض باشد و بخواهیم که معادله ای تشکیل دهیم که :

(۱) ریشه هایش قرینه ریشه های معادله فوق باشد از تبدیل $x\to -x$ استفاده می کنیم :

$$x\to -x \Rightarrow a(-x)^2+b(-x)+c=0$$

$$ax^2-bx+c=0$$

یا کافیست به جای $-b,b$ قرار دهیم (علامت b را عوض کنیم)

(۲) ریشه هایش عکس ریشه های معادله فوق باشد از تبدیل $x\to\frac{1}{x}$ استفاده می کنیم.

$$x\to\frac{1}{x} \Rightarrow a(\frac{1}{x})^2+b(\frac{1}{x})+c=0$$

$$cx^2+bx+a=0$$

یا کافیست جای c,a معادله داده شده را عوض کنیم.

(۳) ریشه هایش عکس و قرینه ریشه های معادله فوق باشد از تبدیل $x\to -\frac{1}{x}$ استفاده می کنیم.

$$x\to -\frac{1}{x} \Rightarrow cx^2-bx+a=0$$

یا کافیست جای c,a را عوض کرده و علامت b را نیز تغییر دهیم.

(٤) ریشه هایش k برابر ریشه های معادله فوق باشد از تبدیل $x\to\frac{x}{k}$ استفاده می کنیم.

$$x\to\frac{x}{k} \Rightarrow ax^2+kbx+k^2c=0$$

یا کافیست b را در c,k را در k^2 ضرب کنیم.

مسائلی که حل آن‌ها منجر به تشکیل معادله‌ی درجه دوم می‌شود:

مثال ۵۴: عددی پیدا کنید که اگر عدد ۱۱۹ را از مربع آن کم کنیم حاصل مساوی ده برابر تفاضل عدد ۸ از آن عدد می‌شود.

اگر این عدد را x فرض کنیم داریم:

$$x^۲-۱۱۹=۱۰(x-۸)\Rightarrow x^۲-۱۰-۳۹=۰\Rightarrow (x+۳)(x-۱۳)=۰\Rightarrow \begin{cases}x=-۳\\ x=۱۳\end{cases}$$

هر دو جواب فوق قابل قبول هستند.

مثال ۵۵: سن پدری ۵ برابر سن پسرش است و مجموع مربعات سن آن‌ها ۲۱۰۶ است سن هر یک را بیابید.

اگر سن پدر را x و سن پسرش را y فرض کنیم داریم:

$$\begin{cases}x=۵y\\ x^۲+y^۲=۲۱۰۶\Rightarrow (۵y)^۲+y^۲=۲۱۰۶\Rightarrow ۶y^۲=۴۸۶\Rightarrow y^۲=۸۱\Rightarrow y=۹\Rightarrow x=۴۵\end{cases}$$

پس سن پدر ۴۵ و سن پسر ۹ می‌باشد.

مثال ۵۶: مجموع معکوس‌های دو عدد صحیح متوالی برابر $\frac{۱۵}{۵۶}$ است آن دو عدد را پیدا کنید.

این دو عدد را k و $k+۱$ فرض می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{k}+\frac{۱}{k+۱}=\frac{۱۵}{۵۶}$$

$$۵۶(k+۱)+۵۶k=۱۵(k)(k+۱)\Rightarrow ۱۱۲k+۵۶=۱۵k^۲+۱۵k\Rightarrow ۱۵k^۲-۹۷k-۵۶=۰\Rightarrow (k-۷)(۱۵k+۸)=۰\Rightarrow \begin{cases}k=۷\\ k=-\frac{۸}{۱۵} & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

بنابراین، این دو عدد ۷ و ۸ می‌باشند.

مثال ۵۷: محیط مستطیلی ۵۰۰ متر و مساحت آن ۱۵۶۰۰ متر مربع است. طول و عرض آن را بدست آورید.

اگر طول و عرض این مستطیل را به ترتیب x و y بنامیم خواهیم داشت:

$$\begin{cases}۲(x+y)=۵۰۰\Rightarrow x+y=۲۵۰\\ xy=۱۵۶۰۰\end{cases}$$

حال کافی است معادله‌ی درجه دومی تشکیل دهیم که مجموع ریشه‌هایش ۲۵۰ و حاصل‌ضرب آن‌ها ۱۵۶۰۰ باشد بنابراین:

$$\begin{cases}S=۲۵۰\\ P=۱۵۶۰۰\end{cases}$$

معادله مورد نظر: $x^۲-۲۵۰x+۱۵۶۰۰=۰\Rightarrow (x-۱۲۰)(x-۱۳۰)=۰\Rightarrow \begin{cases}x_۱=۱۲۰\\ x_۲=۱۳۰\end{cases}$

پس طول این مستطیل ۱۳۰ و عرض آن ۱۲۰ می‌باشد.

مثال ۵۸: عددی دو رقمی پیدا کنید که اگر در رقم سمت چپ خود ضرب شود حاصل‌ضرب مساوی ۲۸۰ و اگر مجموع ارقامش در رقم سمت چپ ضرب شود حاصل‌ضرب برابر ۵۵ می‌شود.

اگر عدد را به صورت $\overline{ab}$ فرض کنیم (a و b رقم می‌باشند به طوری که $a\neq ۰$) خواهیم داشت:

$$\begin{cases}(\overline{ab})a=۲۸۰\\ (a+b)a=۵۵\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}(۱۰a+b)a=۲۸۰\\ (a+b)a=۵۵\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}۱۰a^۲+ab=۲۸۰\\ a^۲+ab=۵۵\end{cases}\Rightarrow ۹a^۲=۲۲۵\Rightarrow a^۲=۲۵\Rightarrow a=۵$$

حال با جای‌گذاری a در یکی از معادله‌ها خواهیم داشت: $(۵+b)۵=۵۵\Rightarrow ۵+b=۴۴\Rightarrow b=۶$

پس عدد دو رقمی $\overline{ab}$ همان عدد ۵۶ است.

معادلات قابل تبدیل به معادله درجه دو

برخی معادلات ظاهراً درجه دوم نیستند اما با یک تغییر متغیر مناسب می‌توان آن‌ها را به یک معادله درجه دو تبدیل کرد. از این طریق می‌توان معادلات درجات بالاتر و یا معادلات به ظاهر پیچیده را به سادگی حل کرد.

مثال ۵۹: معادله‌ی $x^4-3x^2+2=0$ را حل کنید.

همان طور که مشاهده می‌کنید این معادله یک معادله‌ی درجه چهارم است که حل آن به راحتی ممکن نیست. اما تغیر متغیر $a=x^2$ خواهیم داشت:

$$(x^2)^2-3x^2+2=0 \Rightarrow a^2-3a+2=0$$

ملاحظه می‌کنید که با یک تغییر متغیر مناسب معادله‌ی فوق به یک معادله‌ی درجه دو تبدیل شد که حل آن بسیار ساده است.

$$a^2-3a+2=0 \Rightarrow (a-1)(a-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=2 \end{cases}$$

حال به جای a، x^2 را می‌گذاریم:

$$\begin{cases} x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \\ x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2} \end{cases}$$

پس معادله‌ی فوق دارای ۴ جواب است.

مثال ۶۰: معادله‌ی $(x^2+x+1)^2-3(x^2+x+1)+2=0$ دارای:

۱) چهار ریشه‌ی حقیقی است.
۲) دو ریشه‌ی حقیقی است.
۳) دو ریشه ی مضاعف دارد.
٤) چهار ریشه‌ی غیرحقیقی است. (موهومی)

گزینه‌ی ۱ صحیح است.

مثال ۶۱: معادله‌ی $5(\frac{2x^2}{3}+1)^2-4(\frac{2x^2}{3}+1)-9=0$ را حل کنید.

با تغییر متغیر $a=\frac{2x^2}{3}+1$ خواهیم داشت:

$$5a^2-4a-9=0 \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ a=\frac{9}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2x^2}{3}+1=-1 \Rightarrow x^2=-3 \Rightarrow \text{جواب ندارد} \\ \frac{2x^2}{3}+1=\frac{9}{5} \Rightarrow \frac{2x^2}{3}=\frac{4}{5} \Rightarrow x^2=\frac{6}{5} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{6}{5}} \end{cases}$$

پس معادله‌ی فوق دارای دو جواب است.

مثال ۶۲: معادله‌ی $4x^2-8x=\frac{-9}{x^2-2x+2}+4$ چند جواب دارد؟

با تغییر متغیر $a = x^{۲} - ۲x$ خواهیم داشت:

$$۴(x^{۲} - ۲x) = \frac{-۹}{(x^{۲} - ۲x) + ۲} + ۴ \Rightarrow ۴a = \frac{-۹}{a + ۲} + ۴$$

حال طرفین را در $(a + ۲)$ ضرب می‌کنیم:

$$۴a(a + ۲) = -۹ + ۴(a + ۲) \Rightarrow ۴a^{۲} + ۸a = -۹ + ۴a + ۸ \Rightarrow ۴a^{۲} + ۴a + ۱ = ۰ \Rightarrow (۲a + ۱)^{۲} = ۰ \Rightarrow a = -\frac{۱}{۲}$$

حال به جای a، $x^{۲} - ۲x$ را جای گذاری می‌کنیم:

$$x^{۲} - ۲x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲x^{۲} - ۴x + ۱ = ۰$$

دلتای معادله‌ی فوق مثبت است $(\Delta > ۰)$ پس این معادله دو جواب دارد.

مثال ۶۳: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x + ۳\sqrt{x - ۱} = ۵$ ب) $۲x^{۲} - ۷x = ۵\sqrt{۲x^{۲} - ۷x + ۹} - ۱۵$

ج) $\log_{۲}^{x} + \log_{x}^{۲} = ۲$ د) $۴^{x+۱} - ۳ \times ۲^{x} = ۱$

الف) با فرض $a = \sqrt{x - ۱}$ داریم:

$$x + ۳\sqrt{x - ۱} = ۵ \Rightarrow (x - ۱) + ۳\sqrt{x - ۱} - ۴ = ۰ \Rightarrow a^{۲} + ۳a - ۴ = ۰ \Rightarrow (a - ۱)(a + ۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۱ \Rightarrow \sqrt{x - ۱} = ۱ \Rightarrow x = ۲ \\ a = -۴ \Rightarrow \sqrt{x - ۱} = -۴ \Rightarrow \text{ریشه ندارد} \end{cases}$$

پس این معادله تنها یک جواب دارد.

ب) با تغییر متغیر $a = \sqrt{۲x^{۲} - ۷x + ۹}$ خواهیم داشت:

$$(۲x^{۲} - ۷x + ۹) - ۵\sqrt{۲x^{۲} - ۷x + ۹} + ۶ = ۰ \Rightarrow a^{۲} - ۵a + ۶ = ۰ \Rightarrow (a - ۲)(a - ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۲ \\ a = ۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = ۲ \Rightarrow \sqrt{۲x^{۲} - ۷x + ۹} = ۲ \Rightarrow ۲x^{۲} - ۷x + ۹ = ۴ \Rightarrow ۲x^{۲} - ۷x + ۵ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = \frac{۵}{۲} \end{cases} \\ a = ۳ \Rightarrow \sqrt{۲x^{۲} - ۷a + ۹} = ۳ \Rightarrow ۲x^{۲} - ۷x + ۹ = ۹ \Rightarrow ۲x^{۲} - ۷x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = \frac{۷}{۲} \end{cases} \end{cases}$$

پس این معادله دارای ۴ جواب است.

ج) می‌دانیم $\log_{b}^{a} = \frac{۱}{\log_{a}^{b}}$ بنابراین:

$$\log_{۲}^{x} + \log_{x}^{۲} = ۲ \Rightarrow \log_{۲}^{x} + \frac{۱}{\log_{۲}^{x}} = ۲$$

حال با تغییر متغیر $a = \log_{۲}^{x}$ داریم:

$$a + \frac{۱}{a} = ۲ \Rightarrow a^{۲} + ۱ = ۲a \Rightarrow a^{۲} - ۲a + ۱ = ۰ \Rightarrow (a - ۱)^{۲} = ۰ \Rightarrow a = ۱ \Rightarrow \log_{۲}^{x} = ۱ \Rightarrow x = ۲$$

د) با فرض $a = ۲^{x}$ داریم:

$$۴^{x+۱} - ۳ \times ۲^{x} - ۱ = ۰ \Rightarrow ۴ \times (۲^{x})^{۲} - ۳ \times (۲^{x}) - ۱ = ۰ \Rightarrow ۴a^{۲} - ۳a - ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۱ \Rightarrow ۲^{x} = ۱ \Rightarrow ۲^{x} = ۲^{۰} \Rightarrow x = ۰ \\ a = -\frac{۱}{۴} \Rightarrow ۲^{x} = -\frac{۱}{۴} \Rightarrow \text{ریشه ندارد} \end{cases}$$

پس معادله‌ی فوق فقط یک جواب دارد.