☺مثال۱۳۴: اگر جملات دنباله‌ی $a_n=\frac{۲^n}{۲^n+۳}$ در همسایگی به شعاع $\frac{۱}{۲۲}$ از عدد ۱ قرار گیرند، آن‌گاه:

۱) $n\geq ۵$ ۲) $n\geq ۶$ ۳) $n\geq ۷$ ۴) $n\geq ۸$

$$|a_n-۱|<\frac{۱}{۲۲}\Rightarrow\left|\frac{۲^n}{۲^n+۳}-۱\right|=\left|\frac{-۳}{۲^n+۳}\right|<\frac{۱}{۲۲}\Rightarrow\frac{۱}{۲^n+۳}<\frac{۱}{۶۶}\Rightarrow ۶۳<۲^n\Rightarrow n\geq ۶$$

☺مثال۱۳۵: اگر حد دنباله‌ای با جمله‌ی عمومی $a_n=\frac{۳^n-۲}{۳^n}$ برابر L بوده و برای هر $n\geq m$ رابطه‌ی $|a_n-L|<\frac{۱}{۱۲۸}$ برقرار باشد، کم‌ترین مقدار m کدام است؟

۱) ۲۳ ۲) ٤۷ ۳) ٥ ٤) ٦

گزینه ۴ صحیح است.

☺مثال۱۳۶: کمترین مقدار طبیعی M که برای هر $n\geq M$ جملات دنباله‌ی $\left\{\frac{۲^{n+۱}+۱}{۲^n-۱}\right\}$ در همسایگی متقارن با مرکز ۲ و شعاع ۰/۰۰۱ قرار گیرد، کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ٤) ١٤

$$\left|\frac{۲^{n+۱}+۱}{۲^n-۱}-۲\right|<\frac{۱}{۱۰۰۰}\Rightarrow\frac{۳}{۲^n-۱}<\frac{۱}{۱۰۰۰}$$

$۲^n-۱>۳۰۰۰\Rightarrow ۲^n>۳۰۰۱\Rightarrow n$ کمترین مقدار طبیعی $=۱۲$

☺مثال۱۳۷: دنباله‌ی $\{a_n\}$ هم‌گرا به $\sqrt{۲}$ است. بنابراین دنباله‌ی $\{a_n\}$………

۱) بی‌نهایت جمله‌ی گنگ دارد. ۲) بی‌نهایت جمله‌ی بزرگ‌تر از یک دارد.

۳) بی‌نهایت جمله در فاصله‌ی $[۰,\sqrt{۲}]$ دارد. ٤) به تعداد متناهی جمله‌ی بزرگ‌تر از $\sqrt{۲}$ دارد.

$\sqrt{۲}\simeq ۱/۴۲$ و بنا به تعریف حد، برای $\varepsilon=\frac{۴}{۱۰}$، از یک nی به بعد تمام جملات دنباله در نامساوی $|a_n-\sqrt{۲}|<\frac{۴}{۱۰}$ صدق می‌کنند. پس:

$$|a_n-\sqrt{۲}|<\frac{۴}{۱۰}\Rightarrow ۱<\sqrt{۲}-\frac{۴}{۱۰}<a_n<\sqrt{۲}+\frac{۴}{۱۰}$$

بنابراین بی‌نهایت جمله از این دنباله بزرگ‌تر از یک هستند.

☺مثال۱۳۸: جملات دنباله‌ی $\{\frac{۲n-۱}{۳n+۲}\}$ برای مقادیر $n\geq n_۰$ در بازه‌ی $(۰/۶۶,\frac{۲}{۳})$ قرار می‌گیرند. کوچک‌ترین مقدار $n_۰$ کدام است؟ (خارج از کشور–۸٤)

۱) ۱۱٦ ۲) ۱۱۷ ۳) ۱۱۸ ٤) ۱۱۹

از آن‌جا که دنباله‌ی داده شده همگرا به $\frac{۲}{۳}$ می‌باشد و از طرفی دنباله‌ای صعودی است، لذا مشخص است که برای مقادیر $n\geq n_۰$ جملات از مقدار a_n به سوی $L=\frac{۲}{۳}$ رشد می‌کنند. در نتیجه برای به دست آوردن مقدار $n_۰$ کافی است در تعریف ریاضی حد دنباله قرار دهیم $\varepsilon=\frac{۲}{۳}-۰/۶۶=\frac{۲}{۳۰۰}$. پس داریم:

$$\forall \varepsilon>0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \ni n \geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{2n-1}{3n+2}-\frac{2}{3}\right|<\frac{2}{300} \Rightarrow \left|\frac{\cancel{6n}-3-\cancel{6n}-4}{3(3n+2)}\right|<\frac{2}{300} \Rightarrow \frac{7}{3(3n+2)}<\frac{2}{300} \Rightarrow \frac{3n+2}{7}>50 \Rightarrow$$

$$3n+2>350 \Rightarrow 3n>348 \Rightarrow n>116 \Rightarrow n \geq 117$$

روش دوم: بدون استفاده از تعریف ریاضی حد دنباله، می‌توانیم با حل نامعادله‌ی $a_n>\frac{66}{100}$ نیز به پاسخ صحیح تست برسیم:

$$a_n \in (0/66, \frac{2}{3}) \Rightarrow \frac{66}{100}<a_n<\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2n-1}{3n+2}>\frac{66}{100} \Rightarrow$$

$$\frac{2n-1}{3n+2}-\frac{33}{50}>0 \Rightarrow \frac{100n-50-99n-66}{50(3n+2)}>0 \Rightarrow \frac{n-116}{50(3n+2)}>0 \Rightarrow \xrightarrow{50(3n+2)>0} n-116>0 \Rightarrow n>116 \Rightarrow n \geq 117$$

مثال ۱۳۹: برای مقادیر $n>31$، جملات دنباله‌ی $\{\frac{n-2}{4n}\}$ در کدام بازه است؟ (خارج از کشور-۸۶)

۱) $\left(\frac{1}{4}, \frac{17}{64}\right]$ ۲) $\left[\frac{15}{64}, \frac{17}{64}\right]$ ۳) $\left[\frac{15}{64}, \frac{1}{4}\right)$ ٤) $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$

ابتدا ضابطه‌ی دنباله‌ی داده شده را ساده می‌کنیم. داریم:

$$a_n=\frac{n-2}{4n}=\frac{n}{4n}-\frac{2}{4n} \Rightarrow a_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{2n}$$

حال با در نظر گرفتن $n>31$ یا به طور دقیق‌تر $n \geq 32$،به ساختن جمله‌ی عمومی دنباله اقدام می‌کنیم:

$$n \geq 32 \Rightarrow 2n \geq 64 \Rightarrow 0<\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{64} \Rightarrow 0>-\frac{1}{2n} \geq -\frac{1}{64} \Rightarrow \frac{1}{4}>\frac{1}{4}-\frac{1}{2n} \geq \frac{1}{4}-\frac{1}{64} \Rightarrow \frac{15}{64} \leq a_n<\frac{1}{4}$$

روش دوم: در دنباله‌های هموگرافیک به فرم کلی $\{\frac{an+b}{cn+d}\}$ اگر ریشه‌ی مخرج کوچک‌تر از عدد یک باشد $(n=\frac{-d}{c}<1)$، آن‌گاه قطعا دنباله‌ی مذکور یکنواست (اکیدا یکنوا) و داریم:

الف) اگر $ad-bc>0$، آن‌گاه دنباله اکیدا صعودی است.

ب) اگر $ad-bc<0$، آن‌گاه دنباله اکیدا نزولی است.

با توجه به مطلب فوق دنباله‌ی $\{\frac{n-2}{4n}\}$ اکیدا صعودی $(ad-bc=0+8>0)$ و همگرا به $\frac{1}{4}$ می‌باشد و در نتیجه برای $n \geq 32$ داریم:

$$a_{32} \leq a_n<\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{15}{64} \leq a_n<\frac{1}{4}$$

قضیه حد و دنباله:

شرط لازم و کافی برای آن‌که $\lim_{x\to a} f(x)=L$ ، آن است که بازای هر دنباله $\{a_n\}$ که $\forall n\in N: a_n\neq a, a_n\in D_f$ (یعنی a_n دنباله ثابت **a** نباشد) و $\lim_{n\to\infty} a_n=a$ (یعنی دنباله‌ی $\{a_n\}$ به **a**همگرا باشد) داشته باشیم $\lim_{n\to\infty} f(a_n)=L$. (یعنی دنباله $\{f(a_n)\}$ به **L**همگرا باشد)

توجه: اگر تنها تعداد متناهی از جملات دنباله a_n با **a**برابر باشد، باز شرایط نکته فوق برقرار است.

مثال۱۴۰: تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x^2+4x & x\neq 1 \\ 3 & x=1\end{cases}$ مفروض است. مطلوبست $\lim_{x\to 1} f(x)$

اثبات عدم وجود حد با استفاده از دنباله‌ها:

اگر **y=f(x)** در یک همسایگی محذوف **a** تعریف شده باشد و دو دنباله غیر ثابت $\{a_n\},\{b_n\}$ در دامنه **f** به **a** همگرا و به ازای هر n ، $b_n\neq a, a_n\neq a$ و دنباله‌های $\{f(a_n)\},\{f(b_n)\}$ به دو عدد متمایز L_1,L_2 همگرا باشند، آنگاه $\lim_{x\to a} f(x)$ وجود ندارد.

مثال۱۴۱: نشان دهید تابع $f(x)=[x]$ در $x=1$ حد ندارد.

مثال۱۴۲: قبلاً به کمک تعریف حد ثابت کردیم تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} 0 & x\in Q \\ 1 & x\in R-Q\end{cases}$ در هیچ نقطه‌ی a حد ندارد.

اکنون می‌توانیم با انتخاب دو دنباله‌ی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ که $\begin{cases} a_n\to a \\ a_n\neq a\end{cases}$ و $\begin{cases} b_n\to a \\ b_n\neq a\end{cases}$ و $a_n\in Q$ و $b_n\in R-Q$ نشان دهیم تابع در هیچ نقطه از a از اعداد حقیقی حد ندارد.

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n)=\lim_{n\to+\infty}(0)=0\ ,\quad \lim_{n\to+\infty} f(b_n)=\lim_{n\to+\infty}(1)=1$$

بنابراین $\{f(a_n)\}$ و $\{f(b_n)\}$ به دو عدد متمایز همگرا شده‌اند در نتیجه تابع در هیچ نقطه‌ی a حد ندارد.

مثال۱۴۳: f تابعی است که روی اعداد حقیقی تعریف شده است و $\lim_{x\to 1^+} f(x)=2$ و $\lim_{x\to 1^-} f(x)=1$ کدام دنباله واگرا است؟

۱) $\left\{f\left(\frac{n}{n+1}\right)\right\}$ ۲) $\left\{f\left(1+\frac{2}{n}\right)\right\}$ ۳) $\left\{f\left(\frac{n-(-1)^n}{n}\right)\right\}$ ٤) $\left\{f(\cos\frac{1}{n})\right\}$

گزینه ۳ صحیح است.

مثال۱۴۴: در تابع $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & x<0\\ 0 & x>0\end{cases}$ کدام دو دنباله نشان می‌دهند که تابع در $x=0$ حد ندارد؟

۱) $\left\{\frac{1}{n}\right\},\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right\}$ ۲) $\left\{\frac{1}{n}\right\},\left\{\frac{-\sqrt{2}}{n}\right\}$ ۳) $\left\{\frac{-1}{n+3}\right\},\left\{\frac{-2}{n+4}\right\}$ ٤) $\left\{n^2\right\}, \left\{\sqrt{n}\right\}$

مثال۱۴۵: با کدام دنباله می‌توان نشان داد که تابع $f(x)=\cos\frac{\pi}{x}$ در $x=0$ حد ندارد؟

۱) $\frac{1}{2^n}$ ۲) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

۳) $\left\{\frac{1}{2n-1}\right\}$ ٤) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$

گزینه ۲ صحیح است.

مثال۱۴۶: برای اثبات عدم وجود حد کدام تابع در صفر نمی‌توان از دو دنبالهٔ $\left\{\frac{1}{2n}\right\}$ و $\left\{\frac{1}{2n+1}\right\}$ استفاده کرد؟

۱) $\sin\frac{1}{x}$ ۲) $\sin\frac{\pi}{x}$ ۳) $\sin\frac{1}{2x}$ ٤) $\sin\frac{\pi}{2x}$

گزینه ۲ صحیح است.

مثال۱۴۷: برای اثبات عدم وجود حد تابع $f(x)=\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]$ در $x=0$ انتخاب کدام دو دنباله‌ی زیر مناسب است؟

۱) $\left\{\frac{1}{n}\right\},\left\{\frac{-1}{n}\right\}$ ۲) $\left\{\frac{1}{n^2}\right\},\left\{\frac{1}{n^3}\right\}$ ۳) $\left\{\frac{1}{n+0/1}\right\},\left\{\frac{1}{n+0/2}\right\}$ ٤) $\left\{\frac{1}{2^n}\right\},\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$

گزینه ۳ صحیح است.

مثال۱۴۸: برای اثبات عدم وجود حد تابع $f(x)=\left[x\left[\frac{1}{x}\right]\right]$ در نقطه‌ی $x=0$ کدام دنباله مناسب است؟

۱) $\begin{cases}\{\frac{1}{n}\}\\ \{\frac{3}{1-2n}\}\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}\{\frac{1}{n}\}\\ \{\frac{2}{2n+1}\}\end{cases}$ ۳) $\begin{cases}\{\frac{1}{n}\}\\ \{\frac{-1}{n}\}\end{cases}$ ۴) $\begin{cases}\{-\frac{1}{n}\}\\ \{\frac{2}{1-2n}\}\end{cases}$

مثال۱۴۹: در اثبات عدم وجود حد تابع $f(x)=\begin{cases}1 & x\in Q\\ 0 & x\notin Q\end{cases}$ از دنباله‌ی $a_n=\frac{n+2}{2n}$ و b_n استفاده کردیم. b_n کدام است؟

۱) $\frac{n-2}{2n}$ ۲) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{n}$ ۳) $1+\frac{1}{n}$ ۴) $1+\frac{\sqrt{2}}{n}$

گزینه ۲ صحیح است.

مثال۱۵۰: دنباله‌های $\begin{cases}a_n=\frac{[\pi n]}{n}\\ b_n=\pi+\frac{1}{n}\end{cases}$ برای اثبات عدم وجود حد کدام‌یک از توابع $f(x)=\begin{cases}1 & x\in Q\\ 0 & x\in Q'\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}1 & x<\pi\\ 0 & x>\pi\end{cases}$ در نقطه $x=\pi$ مناسب می‌باشند؟

۱) فقط f ۲) فقط g ۳) f و g ۴) نه f و نه g

$$\begin{cases}f(a_n)=f\left(\frac{[\pi n]}{n}\right)=1\\ f(b_n)=f\left(\pi+\frac{1}{n}\right)=0\end{cases},\quad \begin{cases}g\left(\frac{[\pi n]}{n}\right)=g(\pi^-)=1\\ g\left(\pi+\frac{1}{n}\right)=(\pi^+)=0\end{cases}$$

مثال۱۵۱: تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{\sin^3\frac{1}{x^2}}{x^2}$ مفروض است ثابت کنید $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ وجود ندارد.

دو دنباله‌ی $a_n=\sqrt{\frac{2}{\pi(1+4n)}}$ و $b_n=\frac{1}{\sqrt{n\pi}}$ را در نظر می‌گیریم، واضح است که به ازای هر n، $a_n\neq 0$ و $b_n\neq 0$ و $a_n\to 0$ و $b_n\to 0$ و هر دو در دامنه‌ی f می‌باشند، اما

$$f(a_n)=\frac{\sin^3\frac{\pi(4n+1)}{2}}{\frac{2}{\pi(1+4n)}}=\frac{\pi(1+4n)}{2}\sin^3(2n\pi+\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}(1+4n)$$

$$f(b_n)=\frac{\sin^{۳} n\pi}{\frac{۱}{n\pi}}=n\pi\sin^{۳} n\pi=\circ$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(a_n)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(b_n)=\circ$ ، پس تابع در صفر حد ندارد.

مثال۱۵۲: اگر بخواهیم برای هر دنباله $\{a_n\}$ که $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ داشته باشیم $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=L$ آن گاه:

۱) $\forall\varepsilon\,\exists N \ni \cdot<|x-a|<N \Rightarrow |f(a_n)-L|<\varepsilon$

۲) $\forall\varepsilon\exists N \ni \cdot < |x| < N \Rightarrow |f(a_n)-L| < \varepsilon$

۳) $\forall\varepsilon<\cdot\ \exists\delta>\cdot \ni \cdot<|x|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

٤) $\forall\varepsilon>\cdot\ \exists\delta>\cdot \ni \cdot<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

$$\lim_{x\to\alpha} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>\cdot\ \exists\delta>\cdot \ni \cdot<|x-\alpha|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$