دنباله

دنباله یک تابع است که دامنه آن مجموعه‌ای از اعداد طبیعی است.
بنابراین اگر N مجموعه اعداد طبیعی یا زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی و S مجموعه‌ای غیر تهی باشد آن‌گاه تابع $\begin{cases} f: N \to S \\ f(n) = a_n \end{cases}$ یک دنباله نامیده می‌شود.ضابطه دنباله را معمولاً با a_n نشان داده و به آن جمله عمومی دنباله می‌گویند. دامنه‌ی دنباله اعداد طبیعی و برد آن زیر مجموعه‌ای از اعداد حقیقی می‌باشد.

☺**مثال۱:** **جملات دنباله** $f(n) = a_n = \frac{n}{n+۱}$ **را مشخص کنید.**

☺**مثال۲:** **در دنباله‌ی** $۵,۶,۷,۵,۶,۷,۵,۶,۷,...$ **حاصل** $۲a_{۴۰} + a_{۲۳}$ **کدام است؟**

۱) ۱۶　　۲) ۱۱　　۳) ۱۷　　۴) ۲۲

جملات دنباله هر سه جمله یک‌بار تکرار می‌شوند پس داریم:

$$\begin{cases} a_۳, a_۶, \ldots, a_{۳n} = ۷ \\ a_۲, a_۵, \ldots, a_{۳n-۱} = ۶ \Rightarrow \quad a_{۴۰} = a_{۳\times۱۴-۲} = a_{۳n-۲} = ۵, \quad a_{۲۳} = a_{۳\times۸-۱} = a_{۳n-۱} = ۶ \Rightarrow ۲a_{۴۰} + a_{۲۳} = ۲\times۵+۶ = ۱۶ \\ a_۱, a_۴, \ldots, a_{۳n-۲} = ۵ \end{cases}$$

☺**مثال۳:** **اگر جمله** $(۴n-۳)$ **ام یک دنباله به‌صورت** $(۲\sqrt{n+۱}-۳)$ **باشد، جمله بیست و نهم آن کدام است؟**

$$a_{۴n-۳} = ۲\sqrt{n+۱} - ۳$$

$$۴n - ۳ = ۲۹ \Rightarrow ۴n = ۳۲ \Rightarrow n = ۸ \Rightarrow a_{۴(۸)-۳} = ۲\sqrt{۸+۱} - ۳ = ۳ \Rightarrow a_{۲۹} = ۳$$

☺**مثال۴:** **جمله یازدهم دنباله‌ی** $\left\{\frac{۵}{۴}, \frac{۱۰}{۱۲}, \frac{۱۵}{۳۶}, \ldots\right\}$ **کدام است؟**

۱) $\frac{۶۰}{۴\times۳}$　　**۲)** $\frac{۵۵}{۴\times۳^{۱۰}}$　　**۳)** $\frac{۵۵}{۴\times۳^{۱۱}}$　　**۴)** $\frac{۵۰}{۴\times۳^{۱۰}}$

صورت کسرها تشکیل تصاعد حسابی با جمله اول $a_۱ = ۵$ و قدر نسبت $d = ۵$ می‌دهند ⇐

$۵,۱۰,۱۵,...$

$a_n = ۵ + (n-۱)\times۵$

مخرج کسرها تشکیل تصاعد هندسی با جمله اول $a_۱ = ۴$ و قدر نسبت $q = ۳$ می‌دهند ⇐

$۴,۱۲,۳۶,...$

$$a_n = ۴\times(۳)^{n-۱} \Rightarrow a_{۱۱} = \frac{۵+(۱۱-۱)\times۵}{۴\times۳^{۱۰}} = \frac{۵۵}{۴\times۳^{۱۰}}$$

☺**مثال۵:** **دنباله‌ی** $\{۲n^۲ - ۳۷n\}$ **چند جمله‌ی منفی دارد؟**

۱) ۱۸　　۲) ۱۹　　۳) ۲۰　　۴) ۲۳

گزینه ۱ صحیح است.

مثال۶: دنباله‌ی $a_n=\frac{5n-8}{12n-25}$ چند جمله منفی دارد؟

۱) ۱　۲) ۲　۳) صفر　۴) بی‌شمار

$$a_n=\frac{5n-8}{12n-25}<0\Rightarrow\frac{8}{5}<n<\frac{25}{12}\Rightarrow n=2$$

فقط به ازای $n=2$، دنباله a_n منفی می‌باشد. پس ۱ جمله‌ی منفی دارد.

مثال۷: دنباله‌ی $a_n=(-1)^n\frac{3n-4}{2n-19}$ چند جمله‌ی منفی دارد؟ **(آزاد تجربی – ۸۶)**

۱) صفر　۲) ۵　۳) ۳　۴) بی‌شمار

$$\text{زوج } n\Rightarrow a_n=\frac{3n-4}{2n-19}<0\Rightarrow\frac{4}{3}<n<\frac{19}{2}\xrightarrow[\text{زوج } n]{n\in N}n\in\{2,4,6,8\}$$

$$\text{فرد } n\Rightarrow a_n=\frac{4-3n}{2n-19}<0\Rightarrow n>\frac{19}{2}\ \text{یا}\ n<\frac{4}{3}\xrightarrow[\text{فرد } n]{n\in N}n\in\{1,9,11,\ldots\}$$

بنابراین بی شمار جمله منفی دارد.

مثال۸: بزرگ‌ترین جمله دنباله $-n^2+4n+13$ کدام است؟

۱) a_{13}　۲) a_{17}　۳) a_1　۴) a_2

گزینه ۱ صحیح است.

مثال۹: کوچک‌ترین جمله دنباله $a_n=n^3-12n+128$ کدام است؟ **(آزاد تجربی – ۸۰)**

۱) ۱۲۸　۲) ۶۴-　۳) ۲۵۶-　۴) ۱۲۸-

مشتق $(a_n)'=0\quad 3n^2-24n=0\quad n=0\,,\,n=8\Rightarrow a_8=-128$ کم‌ترین جمله

مثال۱۰: دنباله‌ی $a_n=\begin{cases}k^2 & n=2k+1\\ 2k+1 & n=2k\end{cases}$ مقدار (a_8-a_7) کدام است؟

۱) ۰　۲) ۱۸　۳) ۳۶　۴) ۷

$$\left.\begin{array}{l}a_8:8=2k\Rightarrow k=4\Rightarrow a_8=2\times(4)+1=9\\ a_7:7=2k+1\Rightarrow k=3\Rightarrow a_7=3^2=9\end{array}\right\}\Rightarrow 9-9=0$$

مثال۱۱: هرگاه $a_n=\begin{cases}\sqrt{n-1} & n\le 5\\ kn+1 & n>4\end{cases}$ ضابطه یک دنباله باشد، مقدار k چقدر است؟

a_5 روی هر دو ضابطه تعریف شده است و تنها در صورتی این رابطه تابع است که a_5 برابر با یک مقدار باشد.

$$\sqrt{5-1}=5k+1\Rightarrow k=\frac{1}{5}$$

دنباله ثابت: هرگاه در یک دنباله به ازای هر $n \in N$، $a_n = k$ آنگاه دنباله را ثابت می‌نامند یعنی در دنباله ثابت تمامی جمله‌ها برابرند. **k,k,k...**

مثال۱۲: اگر دنباله $\{a_n\}$ دنباله‌ای ثابت باشد و $a_{n+1} = \sqrt{12 - a_n}$، آن‌گاه a_{53} کدام است؟

۱) ۸ ۲) ٦٤ ۳) ۳ ٤) ٤

گزینه ۳ صحیح است.

مثال۱۳: چند تا از دنباله‌های زیر ثابت هستند؟

الف) $\left\{\left[\sin\frac{5\pi}{4}\right]^{n^2+n}\right\}$ ب) $\left\{\sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) - \cos n\pi\right\}$ ج) $\left\{\frac{\sin n\pi}{(-1)^n}\right\}$

د) $\{2^n + (-2)^n\}$ هـ) $\{(-1)^n + \cos^n n\pi\}$

۱) ۵ ۲) ٤ ۳) ۳ ٤) ۲

الف) $\sin\frac{5\pi}{4} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \left[\sin\frac{5\pi}{4}\right]^{n^2+n} = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]^{n^2+n} = (-1)^{n^2+n} = 1 \Rightarrow$ دنباله ثابت است.

ب) $\sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -1, 1, -1, \ldots = (-1)^n$

$\Rightarrow \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) - \cos n\pi = (-1)^n - (-1)^n = 0 \Rightarrow$ دنباله ثابت است.

ج) $\sin n\pi = 0 \Rightarrow \frac{\sin n\pi}{(-1)^n} = \frac{0}{\pm 1} = 0 \Rightarrow$ دنباله ثابت است.

د) $2^n + (-2)^n = \begin{cases} 2 \times 2^n \\ 0 \end{cases} \Rightarrow$ دنباله ثابت نیست.

ه) $(-1)^n + \cos^n(n\pi) = (-1)^n + \left((-1)^n\right)^n = (-1)^n + (-1)^{n^2} = \pm 1 + 1 = \begin{cases} 2 \\ 0 \end{cases} \Rightarrow$ دنباله ثابت نیست.

همگرایی یک دنباله

دنباله‌ی همگرا به دنباله‌ای گفته می‌شود که حاصل حد آن در مثبت بی‌نهایت عدد حقیقی مشخصی باشد.
در غیر این صورت دنباله $\{a_n\}$ را واگرا می‌نامیم.
تذکر : برای محاسبه همگرایی دنباله ها می توانیم از همه نکات حد مانند هم ارزیها وهوپیتال و... استفاده کنیم.

مثال۱۴: دنباله $a_n = \{\sqrt{n^۲ + ۴n} - \sqrt{n^۲ + ۲n}\}$ به کدام عدد همگراست؟ **(آزاد ریاضی - ۷۹)**

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ٤) ۱-

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^۲ + ۴n} - \sqrt{n^۲ + ۲n} = \lim_{n\to\infty} (n + \frac{۴}{۲}) - (n + \frac{۲}{۲}) = n + ۲ - n - ۱ = ۱$$

مثال۱۵: دنباله‌ی $a_n = (\sqrt{n+۱} - \sqrt{n})\sqrt{۴n+۱}$ به کدام عدد همگرا است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ٤) ٤

گزینه ۲ صحیح است.

مثال۱۶: اگر دنباله‌ی $a_n = \sqrt{n^۲ + bn - ۱} - n + ۴$ همگرا به ۶ باشد، b کدام است؟

$$\lim_{n\to\infty} a_n = ۶ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^۲ + bn - ۱} - n + ۴ = ۶ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (n + \frac{b}{۲}) - n + ۴ = ۶ \Rightarrow \frac{b}{۲} + ۴ = ۶ \Rightarrow b = ۴$$

مثال۱۷: دنباله‌ی $a_n = \left\{\sqrt[۳]{۳n + ۸n\sqrt{n} - ۵} - ۲\sqrt{n}\right\}$ به چه عددی هم‌گرا است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ٤) $\frac{۸}{۹}$

با تغییر متغیر $\sqrt{n} = t \Rightarrow n = t^۲$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[۳]{۸n\sqrt{n} + ۳n - ۵} - ۲\sqrt{n} = \lim_{t\to\infty} \sqrt[۳]{۸t^۳ + ۳t^۲ - ۵} - ۲t$$

$$\text{هم‌ارزی} = \sqrt[۳]{۸}\left(t + \frac{۳}{۲۴}\right) - ۲t = ۲t + \frac{۱}{۴} - ۲t = \frac{۱}{۴}$$

مثال۱۸: کدام دنباله واگراست؟ **(آزاد ریاضی - ۷۷)**

۱) $\{\sqrt{n+۱} - \sqrt{n}\}$ ۲) $\{\frac{n^۲ + ۱}{۲n + ۱}\}$

۳) $\{\frac{(-۱)^n + (۱)^n}{n}\}$ ٤) $\{\frac{۲n - ۱}{۳n + ۱}\}$

گزینه(۱): $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+۱} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{\sqrt{n+۱} + \sqrt{n}} = ۰$ همگرااست

گزینه(۲): $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^۲ + ۱}{۲n + ۱} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^۲}{۲n} = +\infty$ واگرااست.

گزینه(۳): $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n+(1)^n}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n+1}{n}=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-1+1}{n}=0 & n=2k+1\\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+1}{n}=0 & n=2k\end{cases}$ همگرا است.

گزینه(۴): $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n-1}{3n+1}=\frac{2}{3}$

مثال۱۹: دنباله $a_n=\{\frac{3n^2}{2-4n}\times\sin\frac{2}{n}\}$ ....

۱) واگرا است. **۲) همگرا به $\frac{3}{4}$ است.** **۳) همگرا به $-\frac{3}{4}$ است.** **٤) همگرا به $-\frac{3}{2}$ است.**

گزینه ۴ صحیح است.

مثال۲۰: دنباله $\{\frac{\tan\frac{1}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}\}$ **همگراست به:**

۱) صفر **۲) $\frac{1}{3}$** **۳) $\frac{1}{2}$** **٤) واگراست.**

یادآوری: $u-\tan u\underset{u\to 0}{\sim}-\frac{u^3}{3}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\tan\frac{1}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}=$ همارزی $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3n^3}}{\frac{1}{n^3}}=\frac{1}{3}$

مثال۲۱: اگر دنباله‌ی $\left\{\frac{3n^2+4n-1}{3n+an^2}\right\}$ همگرا به ۳ باشد، a کدام است؟

۱) ۱ **۲) ۴** **۳) $\frac{4}{3}$** **٤) $\frac{3}{4}$**

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n-1}{3n+an^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2}{an^2}=3\Rightarrow\frac{3}{a}=3\Rightarrow a=1$

مثال۲۲: دنباله‌ی $a_n=\frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{2+4+6+\dots+(2n)}$ به چه عددی همگراست؟

۱) $\frac{1}{2}$ **۲) ۲** **۳) ۱** **٤) صفر**

یادآوری:

$1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$

$2+4+6+\dots+2n=n(n+1)$

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n}=1$

مثال۲۳: حد دنباله $a_n=\{\frac{1-2+3-4+5-6+...-2n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{4n^2-1}}\}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{1}{3}$ ٤) ۱

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+3+5+...+2n-1)-(2+4+6+...+2n)}{\sqrt{n^2}+\sqrt{4n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-(n^2+n)}{n+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{3n}=\frac{-1}{3}$$

مثال۲۴: دنباله‌ی $a_n=\left\{\frac{n^{(-1)^n}}{n^2}\right\}$ چه وضعیتی دارد؟

۱) هم‌گرا به ۱ ۲) هم‌گرا به ۲ ۳) هم‌گرا به صفر ٤) واگرا است.

گزینه ۳ صحیح است.

مثال۲۵: دنباله‌ی $a_n=\left\{\frac{\sin n}{\cos n-n}\right\}$ به چه عددی هم‌گرا است؟

۱) صفر ۲) ۱− ۳) ۱ ٤) واگرا است.

گزینه ۱ صحیح است.

مثال۲۶: اگر دنباله $a_n=\left\{\log_2\frac{2an^2+3bn-n^2}{2n+1}\right\}$ هم‌گرا به ۲ باشد، حاصل $2a-6b$ کدام است؟

۱) ۱٦− ۲) ۷− ۳) ۱ ٤) ۱۵−

برای آن‌که دنباله‌ی $\{a_n\}$ هم‌گرا به ۲ باشد باید دنباله‌ی $\left\{\frac{2an^2+3bn-n^2}{2n+1}\right\}$ هم‌گرا به ۴ باشد در نتیجه داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2a-1)n^2+3bn}{2n+1}=4\Rightarrow\begin{cases}2a-1=0\\ \frac{3b}{2}=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ b=\frac{8}{3}\end{cases}\Rightarrow 2a-6b=2\left(\frac{1}{2}\right)-6\left(\frac{8}{3}\right)=1-16=-15$$

مثال۲۷: دنباله $a_n=\frac{\log(8^n+1)}{\log(2^n+1)}$: **(آزاد تجربی – ۸٤)**

۱) همگرا به ٤ است. ۲) همگرا به ۳ است. ۳) همگرا به صفر است. ٤) واگرا است.

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\log(8^n+1)}{\log(2^n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\log 8}{n\log 2}=\frac{3\log 2}{\log 2}=3$$

مثال۲۸: اگر دنباله‌ی $a_n=\frac{n+1}{mn-1}$ همگرا به m باشد مقدار m کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱− ۳) ±1 ٤) ۲

گزینه ۱ صحیح است.

مثال۲۹: دنباله $a_n=\sqrt[n]{5^n+3^{2n}}$ **به چه عددی همگراست؟**

۱) ۵ ۲) ۹ ۳) ۳ ٤) صفر

گزینه ۲ صحیح است.

مثال۳۰: دنباله $a_n=(3^{2n}+2^{4n})^{\frac{1}{n}}$ **همگراست به :**

۱) ۹ ۲) ۱٦ ۳) ۳ ٤) ۵

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(9^n+16^n)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}(16^n)^{\frac{1}{n}}=16$$

مثال۳۱: اگر $a_n=\cos n\pi$ **و** $b_n=\sin(4n+1)\frac{\pi}{4}$ **آن‌گاه چند دنباله زیر همگراست؟**

الف) $\{a_n+b_n\}$ ب) $\{a_n-b_n\}$ ج) $\{a_n\ b_n\}$

۱) سه ۲) دو ۳) یک ٤) صفر

$$\cos n\pi=(-1)^n=\begin{cases}-1 & \text{فرد } n\\ 1 & \text{زوج } n\end{cases}$$

با توجه به جملات دنباله $a_n=\cos n\pi$ داریم $a_n=(-1)^n$ از طرفی چون $b_n=\sin(n\pi+\frac{\pi}{4})$ با توجه به دنباله $b_n=(-1)^n\frac{\sqrt{2}}{2}$ حال داریم:

الف)

$$a_n+b_n=(-1)^n+(-1)^n\frac{\sqrt{2}}{2}=\begin{cases}1+\frac{\sqrt{2}}{2} & \text{زوج } n\\ -1-\frac{\sqrt{2}}{2} & \text{فرد } n\end{cases}$$

پس دنباله $\{a_n+b_n\}$ واگراست.

ب)

$$a_n-b_n=(-1)^n-(-1)^n\frac{\sqrt{2}}{2}=\begin{cases}1-\frac{\sqrt{2}}{2} & \text{زوج } n\\ -1+\frac{\sqrt{2}}{2} & \text{فرد } n\end{cases}$$

پس دنباله $\{a_n-b_n\}$ واگراست.

ج)

$a_n\ b_n=(-1)^n(-1)^n\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ پس دنباله $\{a_n\ b_n\}$ همگرا به $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است.

مثال۳۲: دنباله‌ی $\left\{\frac{2^{3n+2}+8^{n+1}}{2^{3n+1}+8^n}\right\}$ **(آزاد تجربی – ۸۲)**

۱) همگرا به ۲ است. ۲) همگرا به ۸ است.

۳) همگرا به ٤ است. ٤) واگرا است.

گزینه ۳ صحیح است.

☹مثال۳۳: دنباله $a_n=\left\{\dfrac{2^{3n}-3^{2n}+5^n}{2\times 9^n+6\times 8^n}\right\}$ **به چه عددی هم‌گرا است؟**

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ٤) $\frac{1}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}=\lim_{n\to\infty}\frac{8^n-9^n+5^n}{2\times 9^n+6\times 8^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-9^n}{2\times 9^n}=\frac{-1}{2}$$

یادآوری:	$1^a+2^a+\dots+n^a\simeq\dfrac{n^{a+1}}{a+1}$

☹مثال۳۴: حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+2+\dots+n)+(1^2+2^2+\dots+n^2)+\dots+(1^{99}+\dots+n^{99})}{(1+2+\dots+n)^{50}}$ **کدام است؟**

۱) $\frac{2^{50}}{100}$ ۲) $\frac{2}{100}$ ۳) $\frac{100}{2^{50}}$ ٤) $+\infty$

گزینه ۱ صحیح است.

☹مثال۳۵: اگر دنباله‌ی a_n به صورت زیر تعریف شده و هم‌گرا باشد، k کدام است؟

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{2n+1}{3n-1} & \text{زوج } n\\[2mm] \dfrac{5k}{a_{n+1}} & \text{فرد } n\end{cases}$$

۱) $\frac{4}{45}$ ۲) $\frac{3}{4}$

۳) $\frac{9}{48}$ ٤) $\frac{7}{45}$

گزینه ۱ صحیح است.

☹مثال۳۶: اگر دنباله‌ی $a_n=\begin{cases}\dfrac{1-an^b}{n+2} & \text{فرد } n\\[2mm] \dfrac{-nb^2+2}{an+b} & \text{زوج } n\end{cases}$ **همگرا باشد a-b کدام است؟** $(b\geq 1\,,\,a\neq 0)$

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۲- ٤) صفر یا ۲-

گزینه ۴ صحیح است.

نکته: حذف یا اضافه نمودن تعداد متناهی جمله از یک دنباله تاثیری در همگرایی یا واگرایی آن ندارد.

☺**مثال۳۷:** دنباله $a_n=\begin{cases}\sin\frac{n\pi}{۲} & n<۲۰\\ \sin n\pi\cos n\pi & n\ge ۲۰\end{cases}$ به چه عددی همگراست؟

۱) واگراست. ۲) صفر ۳) -۱ ۴) ۱

حد a_n را به ازای $n\ge ۲۰$ حساب می کنیم چون $n\to\infty$ و تعداد متناهی جمله در تعیین حد دنباله تأثیری ندارد.

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(\sin n\pi)(\cos n\pi)=۰\times(\pm۱)=۰$$

☺**مثال۳۸:** دنباله‌های $a_n=\begin{cases}(-۱)^n & n<۱۰۰\\ ۱+\frac{۱}{n} & n\ge ۱۰۰\end{cases}$, $b_n=\begin{cases}\frac{۱}{n} & n<۱۰۰۰\\ \cos n\pi & n\ge ۱۰۰۰\end{cases}$ را در نظر بگیرید. کدام گزینه صحیح است؟

۱) a_n, b_n هر دو همگرا
۲) a_n, b_n هر دو واگرا
۳) a_n همگرا، b_n واگرا
۴) a_n واگرا، b_n همگرا

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(۱+\frac{۱}{n})=۱\Rightarrow \text{همگراست } a_n$$

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\cos n\pi=\lim_{n\to\infty}(-۱)^n=\pm۱\Rightarrow \text{واگراست } b_n$$

☹**مثال۳۹:** اگر دنباله $a_n=(۲n+۱)!$ باشد دنباله $\frac{۵a_{n+۱}+۳n^۲a_n}{۲a_{n+۱}+۴n^۲a_n}$ به کدام عدد همگرا است؟ (آزاد تجربی – ۸۵)

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۲۳}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱۳}{۸}$

گزینه ۳ صحیح است.

همگرایی دنباله $\{c^n\}$

$$\lim_{n\to\infty}c^n=\begin{cases}۰ & |c|<۱\\ ۱ & c=۱\\ \pm۱ & c=-۱\\ \text{واگراست} & |c|>۱\end{cases}$$

☺**مثال۴۰:** دنباله $\left\{\left(\frac{۵n-۳}{۳n+۱}\right)^n\right\}$ به چه عددی هم‌گرا است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) -۱ ۳) صفر ۴) واگرا است.

گزینه ۴ صحیح است.

مثال۴۱: اگر دنباله‌ی $\left\{(\frac{r}{r+۱})^n\right\}$ همگرا باشد، آن‌گاه:

۱) $۰<r\le ۱$　۲) $-۱<r<۱$　۳) $-۱<r\le ۱$　۴) $r>-\frac{۱}{۲}$

برای این‌که دنباله‌ی $\{c^n\}$ همگرا باشد باید $|c|\le ۱$

$$\left|\frac{r}{r+۱}\right|\le ۱\,,\ \frac{r}{r+۱}=۱\ \text{غیر ممکن است.}\ \Rightarrow \left|\frac{r}{r+۱}\right|<۱\Rightarrow |r|<|r+۱|\Rightarrow r^۲<r^۲+۲r+۱\Rightarrow r>-\frac{۱}{۲}$$

مثال۴۲: دنباله‌ی $\left\{\left(\text{Arctg}(\sin\frac{\pi}{۴})\right)^n\right\}$ کدام است؟

۱) ۱　۲) −۱　۳) صفر　۴) واگرا است.

$$\text{Arctg}\left(\sin\frac{\pi}{۴}\right)=\text{Arctg}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)$$

$$\frac{\sqrt{۲}}{۲}<۱\Rightarrow \text{Arctg}\frac{\sqrt{۲}}{۲}<\text{Arctg}\,۱=\frac{\pi}{۴}<۱\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\text{Arctg}\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^n=۰$$

مثال۴۳: اگر دنباله‌ی $\left\{(|x|-۲)^۲\right\}$ همگرا باشد، حدود x کدام است؟

۱) $[۱,۳)$　۲) $[-۳,-۱)\cup(۱,۳]$　۳) $(-\infty,۱)\cup(۱,+\infty)$　۴) $[-۳,۳]$

برای این‌که دنباله همگرا باشد باید $-۱<|x|-۲\le ۱$ باشد.

$$\begin{cases}|x|-۲>-۱\Rightarrow |x|>۱\Rightarrow x>۱\cup x<-۱\\ |x|-۲\le ۱\Rightarrow |x|\le ۳\Rightarrow -۳\le x\le ۳\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}}-۳\le x<-۱\cup ۱<x\le ۳$$

مثال۴۴: به ازای کدام مقادیر x، دنباله $\left\{\left(\frac{x}{۴}\right)^{۲n}\right\}$ هم‌گرا است؟

۱) $[-۱,۱]$　۲) $[-۱,۴]$　۳) $[-۴,۴]$　۴) $(-۱,۱]$

گزینه ۳ صحیح است.

مثال۴۵: اگر دنباله‌ی $\left\{a^{-n}\,۲^n\right\}$ هم‌گرا باشد. حدود a کدام است؟

۲) $-۲<a<۲$　۲) $-۲<a\le ۲$　۳) $a<-۲$ یا $a>۲$　۴) $a<-۲$ یا $a\ge ۲$

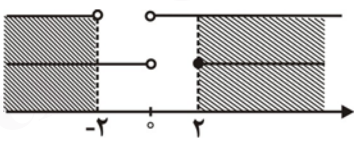
دنباله‌ی $\left\{a^n\right\}$ هنگامی هم‌گراست که: $-۱<a\le ۱$.

داریم: $a^{-n}۲^n=(\frac{۲}{a})^n$

برای این‌که این هم‌گرا باشد، باید داشته باشیم: $-۱<\frac{۲}{a}\le ۱$

$$\begin{cases}\frac{۲}{a}\le ۱\Rightarrow \frac{۲-a}{a}\le ۰\Rightarrow a\ge ۲\ \ \text{یا}\ \ a<۰\\ -۱<\frac{۲}{a}\Rightarrow \frac{۲+a}{a}>۰\Rightarrow a>۰\ \ \text{یا}\ \ a<-۲\end{cases}$$

اشتراک این دو ناحیه، مجموعه‌ی جواب خواهد بود. با استفاده از محور اعداد حقیقی، اشتراک دو ناحیه را پیدا می‌کنیم:



پس مجموعه‌ی جواب $a\ge ۲$ یا $a<-۲$ است.

مثال۴۶: اگر $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{۲x^{۲n}}{۱+x^{۲n}}$ در این صورت $f(\frac{۱}{۳})+f(-۱)+f(۳)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\circ$ ۳) ۳ ۴) ٤

$$f(\frac{۱}{۳})+f(-۱)+f(۳)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{۲\times(\frac{۱}{۳})^{۲n}}{۱+(\frac{۱}{۳})^{۲n}}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{۲\times(-۱)^{۲n}}{۱+(-۱)^{۲n}}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{۲\times(۳)^{۲n}}{۱+(۳)^{۲n}}=\circ+\frac{۲}{۲}+۲=۳$$

مثال۴۷: حد دنباله $U_n=\frac{۱}{۱-[\frac{-۱}{n}]}$ کدام است؟ **(سراسری تجربی – ٧٦)**

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) صفر ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

$$\lim\limits_{n\to\infty}U_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{۱}{۱-[-\frac{۱}{n}]}=\frac{۱}{۱-(-۱)}=\frac{۱}{۲}$$

زیرا وقتی $\circ<-\frac{۱}{n}<-۱$ باشد $[-\frac{۱}{n}]=-۱$ است.

مثال۴۸: حد دنباله‌ی $a_n=\left\{\left[\frac{۱}{n}\right]\left[\frac{(-۱)^n}{n}\right]\right\}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۱- ۴) وجود ندارد.

گزینه ۲ صحیح است.

مثال۴۹: حد دنباله‌ی $a_n=\left[\left[\frac{n}{۳}\right]-\frac{n}{۳}\right]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱- ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) وجود ندارد.

$$\left[\left[\frac{n}{۳}\right]-\frac{n}{۳}\right]=\left[\frac{n}{۳}\right]+\left[-\frac{n}{۳}\right]$$

یادآوری:

$$[x]+[-x]=\begin{cases}\circ & x\in Z\\ -۱ & x\notin Z\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left[\frac{n}{۳}\right]+\left[-\frac{n}{۳}\right]=\begin{cases}\circ & n=۳K\\ -۱ & n\neq ۳K\end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n$$ وجود ندارد.

مثال۵۰: حد دنباله‌ی $a_n=\frac{۳^{[\frac{۱}{n}]}+۳^{[\frac{۲}{n}]}+\dots+۳^{[\frac{n}{n}]}}{۵n-۳}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) صفر ۴) واگراست.

گزینه ۲ صحیح است.

مثال۵۱: دنباله‌ی $a_n = \left\{ n\left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{-\sqrt{3}}{n} \right\rfloor \right\}$ **به چه عددی هم‌گرا است؟**

۱) −۱ ۲) −۲ ۳) ۱ صفر

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\left\{ n\left\lfloor \frac{1}{n}\right\rfloor + \left\lfloor \frac{-\sqrt{3}}{n}\right\rfloor \right\}\right) = n\times(\text{مطلق})0 + \lfloor 0^- \rfloor = 0-1=-1$$

مثال۵۲: دنباله‌ی $a_n = \left\{ \left\lfloor \frac{(-1)^n}{n} \right\rfloor \cos n \right\}$ ...... است.

۱) هم‌گرا به صفر ۲) هم‌گرا به −۱ ۳) هم‌گرا به ۱ ٤) واگرا

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty}\left\lfloor \frac{1}{n}\right\rfloor \cos n = \lfloor 0^+ \rfloor \cos\infty = \underbrace{0}_{\text{مطلق}} \times \cos\infty = 0 & n\ \text{زوج} \\ \lim\limits_{n\to\infty}\left\lfloor -\frac{1}{n}\right\rfloor \cos n = \lfloor 0^- \rfloor \cos\infty = (-1)\cos\infty & n\ \text{فرد} \end{cases} \Rightarrow \text{واگراست}$$

مثال۵۳: دنباله‌های $a_n = \left[\sin\frac{(-1)^n}{n}\right]$ **و** $b_n = \left[\cos\frac{(-1)^n}{n}\right]$ **به ترتیب به چه اعدادی همگرا هستند؟**

۱) صفر و ۱ ۲) −۱ و ۱ ۳) واگرا و صفر ٤) واگرا و واگرا

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left[\sin\frac{(-1)^n}{n}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty}[\sin\frac{1}{n}] = [\sin 0^+] = [0^+] = 0 & n\text{زوج} \\ \lim\limits_{n\to\infty}[\sin\frac{-1}{n}] = [\sin 0^-] = [0^-] = -1 & n\text{فرد} \end{cases} \Rightarrow a_n\ \text{واگراست}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left[\cos\frac{(-1)^n}{n}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty}[\cos\frac{1}{n}] = [\cos 0^+] = [1^-] = 0 & n\text{زوج} \\ \lim\limits_{n\to\infty}[\cos\frac{-1}{n}] = [\cos 0^-] = [1^-] = 0 & n\text{فرد} \end{cases} \Rightarrow b_n\ \text{همگرا به صفر است}$$

مثال۵۴: دنباله $a_n = \left\{ \left\lfloor 3n\sin\frac{2}{n} \right\rfloor + \left\lfloor 2n\tan\frac{1}{n} \right\rfloor \right\}$ **به چه عددی هم‌گرا است؟**

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ٦ ٤) واگرا است.

گزینه ۲ صحیح است.

مثال۵۵: دنباله $a_n = \left\{ \left\lfloor \frac{\cos n\pi + \sin n}{n} \right\rfloor \right\}$ **به چه عددی هم‌گرا است؟**

۱) ۱ ۲) صفر ۳) −۱ ٤) واگرا است.

$$\lim_{n\to\infty}\left\lfloor \frac{\cos n\pi + \sin n}{n} \right\rfloor = \lim_{n\to\infty}\left\lfloor \frac{(-1)^n + \sin n}{n} \right\rfloor = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty}\left\lfloor \frac{-1+\sin n}{n}\right\rfloor = \lim\limits_{n\to\infty}\left\lfloor \frac{-1+-1<K<1}{n}\right\rfloor \\ \lim\limits_{n\to\infty}\left\lfloor \frac{1+\sin n}{n}\right\rfloor = \lim\limits_{n\to\infty}\left\lfloor \frac{+1+-1<K<1}{n}\right\rfloor \end{cases}$$

$$\left\lfloor \frac{-2<K<0}{n} \right\rfloor = \lfloor 0^- \rfloor = -1 \quad n\text{زوج}$$

$$\left\lfloor \frac{0<K<2}{n} \right\rfloor = \lfloor 0^+ \rfloor = 0 \quad n\ \text{فرد}$$

مثال۵۶: دنباله $a_n=[\frac{n-1}{n+1}]+[\frac{2n-1}{n-1}]$ همگرا به کدام عدد است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ٤) صفر

گزینه ۲ صحیح است.

مثال۵۷: دنباله‌ی $a_n=\left[\log\frac{4n+1}{4n-1}\right]$ به چه عددی همگراست؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ٤) واگراست.

$$\lim_{n\to\infty}\left[\log\frac{4n+1}{4n-1}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\log\frac{4n-1+2}{4n-1}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\log 1+\frac{2}{4n-1}\right]=\left[\log(1+0^+)\right]=\left[\log 1^+\right]=\left[0^+\right]=0$$

مثال۵۸ : دنباله‌ی $a_n=\left\{\left[\cos\frac{n\pi+3}{2n+1}\right]\right\}$ به کدام عدد همگرا است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) صفر ٤) $\frac{\pi}{2}$

دنباله $\left\{\frac{n\pi+3}{2n+1}\right\}$ نزولی است و <0 $\left(\frac{n\pi+3}{2n+1}\right)'=\frac{\pi-6}{(2n+1)^2}$ هم‌گرا به $\frac{\pi}{2}$ است.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\pi+3}{2n+1}=\frac{\pi}{2}$$

بنابراین دنباله از بالای خط $y=\frac{\pi}{2}$ به آن مماس می‌گردد.

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left[\cos\frac{n\pi+3}{2n+1}\right]=\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)^+\right]=\left[0^-\right]=-1$$

مثال۵۹: دنباله $a_n=\left\{\left[\cot g\frac{3n\pi-1}{4n+1}\right]\right\}$ به چه عددی همگرا می‌باشد؟

۱) ۱- ۲) ۲- ۳) صفر ٤) $\frac{3}{4}$

گزینه ۱ صحیح است.

مثال۶۰: کدام دنباله واگرا است؟ **(آزاد ریاضی – ۸۱)**

۱) $\left\{\frac{n+\sin n}{n-\sin n}\right\}$ ۲) $\left\{(n^2)^{(-1)^{2n-1}}\right\}$

۳) $\left\{\sin(4n+1)\frac{\pi}{2}\right\}$ ٤) $\left\{[1-\left[\frac{(-1)^n}{n}\right]]\right\}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n+\sin n}{n-\sin n}=1$$

$$\lim_{n\to+\infty}(n^2)^{(-1)^{2n-1}}=\lim_{x\to\infty}(n^2)^{-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sin(4n+1)\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to+\infty}\sin(2n\pi+\frac{\pi}{2})=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

$$\lim_{n\to+\infty}[1-[\frac{(-1)^n}{n}]]=\begin{cases}0 & \text{زوج } n\\ 1 & \text{فرد } n\end{cases}$$ $\Rightarrow$ دنباله‌ی مذکور واگرا است.

قضیه رشد:

$n^n > n! > a^n > n^a > Log_a^n$

مثال۶۱: کدامیک از دنباله های زیر همگراست؟

۱) $\frac{3^n}{n^3}$ ۲) $\frac{(n-2)!}{2n^3}$

۳) $\frac{n^n}{5^n}$ ۴) $\frac{Logn}{n^2}$

گزینه ۴ صحیح است.

مثال۶۲: کدام دنباله به صفر همگراست؟ (آزاد تجربی – ۷۹)

۱) $\{\sqrt{3n+1}-\sqrt{2n-1}\}$ ۲) $\{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\}$ ۳) $\{\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{4n+1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{9n+1}}\}$ ۴) $\{\frac{n^2}{2^n}\}$

(۱) $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{3n+1}-\sqrt{2n-1})=+\infty$

(۲) $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})\cong n+\frac{1}{2}-(n-\frac{1}{2})=1$

(۳) $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{4n+1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{9n+1}}\cong\frac{1+2}{1+3}=\frac{3}{4}$

(۴) $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{2^n}=0$

رشد صورت کسر، ضعیف‌تر از رشد مخرج کسر می‌باشد.

مثال۶۳: دنباله $\{\frac{\log n+n^3-n!}{(n+1)!+n^n}\}$ به کدام عدد همگراست؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) صفر ۴) واگراست.

گزینه ۳ صحیح است.

قضیه فشار (ساندویچ) در دنباله ها:

فرض کنیم $\{a_n\}$، $\{b_n\}$ و $\{c_n\}$ سه دنباله باشند به طوری که از مرتبه‌ای مانند N به بعد $a_n < c_n < b_n$ و $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$ در این صورت $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$.

مثال۶۴: اگر برای هر n طبیعی $a_n > 0$ و $\frac{n}{2} > \frac{4-2a_n}{a_n}$ در این صورت دنباله‌ی $\{a_n\}$ چگونه است؟

۱) همگرا به صفر ۲) همگرا به ۱ ۳) واگرا ۴) بی‌کران

گزینه ۱ صحیح است.

مثال۶۵: دنباله‌ی $\left\{\frac{n\sin n}{1+n^2}\right\}$ به چه عددی همگراست؟

$$-1 < \sin n < 1 \Rightarrow \frac{-n}{n^2+1} < \frac{n\sin n}{n^2+1} < \frac{n}{n^2+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-n}{n^2+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}\right) = 0 \xrightarrow[\text{فشردگی}]{\text{طبق قضیه}} \lim_{n\to\infty}\frac{n\sin n}{n^2+1} = 0$$

راه دوم:

مثال۶۶: حد دنباله‌ی $a_n = \left\{\frac{\sqrt[n]{n!}}{2n^2+1}\right\}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) وجود ندارد.

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1\times 2\times 3\times\ldots\times(n-1)\times n} = \sqrt[n]{1}\times\sqrt[n]{2}\times\ldots\times\sqrt[n]{n-1}\times\sqrt[n]{n} \Rightarrow \sqrt[n]{n!} < \sqrt[n]{n}\times\sqrt[n]{n}\times\ldots\times\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{n^n} = n$$

$$\Rightarrow 0 < \sqrt[n]{n!} < n \Rightarrow 0 < \frac{\sqrt[n]{n!}}{2n^2+1} < \frac{n}{2n^2+1} \xrightarrow[\text{فشردگی}]{\text{طبق قضیه}} \lim_{n\to\infty} 0 = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n^2+1} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{2n^2+1} = 0$$

مثال۶۷: دنباله‌ی مثبت $\{a_n\}$ به ازای هر $n\in N$ در نامساوی $\frac{3n^2-1}{3n^2} > \frac{a_n-1}{a_n}$ صدق می‌کند. کدام مورد زیر درست است؟

۱) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ ۲) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}$ ۳) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{9}$ ۴) a_n واگرا است.

گزینه ۴ صحیح است.

😐**مثال ۶۸:** اگر $\{a_n\}$ یک دنباله با جملات مثبت و $\frac{۳-۲a_n}{a_n} > n$ آن‌گاه :

۱) $\{a_n\}$ همگراست. ۲) $\{a_n\}$ واگراست. ۳) $\{a_n\}$ بی‌کران است. ٤) $a_n > \frac{۳}{۲}$

$$\frac{۳-۲a_n}{a_n} > n \Rightarrow \frac{۳}{a_n} > n+۲ \Rightarrow ۰ < a_n < \frac{۳}{n+۲}$$

$\Rightarrow ۰ < \lim\limits_{n\to\infty} a_n < ۰ \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = ۰ \Rightarrow$ همگراست a_n

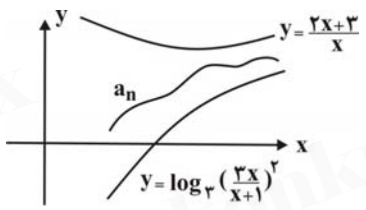
😐**مثال۶۹:** با توجه به نمودار زیر دنباله‌ی $\{a_n\}$ به چه مقداری همگرا است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

٤) نامشخص



$$\log_۳ \left(\frac{۳x}{x+۱}\right)^۲ < a_n < \frac{۲x+۳}{x}$$

$\lim\limits_{x\to\infty} \log_۳\left(\frac{۳x}{x+۱}\right)^۲ = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{۲x+۳}{x} = ۲ \Rightarrow$ همگرا به ۲ است. a_n

یکنوایی دنباله‌ها

دنباله صعودی: دنباله ای که با افزایش شماره جملات آن ، مقدار جملاتش افزایش یابد یا ثابت بماند ، دنباله ای صعودی است . به زبان ریاضی :

اگر برای هر n، $a_{n+1} \geq a_n$ باشد دنباله a_n را صعودی می‌نامیم.

به عنوان مثال دنباله $a_n = \left\{\left[\frac{n}{2}\right]\right\} = 0,1,1,2,2,3,...$ صعودی است.

دنباله نزولی: دنباله ای که با افزایش شماره جملات آن ، مقدار جملاتش کاهش یابد یا ثابت بماند ، دنباله ای نزولی است . به زبان ریاضی :

اگر برای هر n، $a_{n+1} \leq a_n$ باشد دنباله a_n را نزولی می‌نامیم.

به عنوان مثال دنباله $a_n = \left\{\left[\frac{2}{n}\right]\right\} = 2,1,0,0,0,...$ نزولی است.

دنباله یکنوا: دنباله‌ی a_n را یکنوا گوییم هرگاه صعودی یا نزولی باشد.

دنباله اکیداً صعودی: دنباله ای که با افزایش شماره جملات آن ، مقدار جملاتش افزایش یابد ، دنباله ای صعودی است . به زبان ریاضی :

a_n را اکیداً صعودی می‌نامیم هرگاه برای هر n ، $a_{n+1} > a_n$ باشد.

به عنوان مثال دنباله $a_n = \{n^2\} = 1,4,9,16,25,...$ اکیداً صعودی است.

دنباله اکیداً نزولی: دنباله ای که با افزایش شماره جملات آن ، مقدار جملاتش کاهش یابد، دنباله ای نزولی است . به زبان ریاضی :

دنباله a_n را اکیداً نزولی می‌نامیم هرگاه برای هر n ، $a_{n+1} < a_n$ باشد.

به عنوان مثال دنباله $a_n = \left\{\frac{1}{n}\right\} = 1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...$ صعودی است.

دنباله اکیداً یکنوا: دنباله a_n را اکیداً یکنوا می‌نامیم هرگاه یا اکیداً نزولی باشد یا اکیداً صعودی باشد.

نکته : هر دنباله که صعودی یا نزولی نباشد را نوسانی می‌نامیم.

نکته : دنباله ثابت هم صعودی است و هم نزولی

☺**مثال۷۰:** کدام یک از دنباله‌های زیر نزولی است؟

۱) $\left\{\frac{3^n}{n!}\right\}$ ۲) $\left\{\frac{n!}{3^n}\right\}$ ۳) $\left\{\frac{n^3}{n^3+1}\right\}$ ٤) $\left\{\frac{1}{n!}\right\}$

$\frac{1}{n!} < \frac{1}{(n+1)!}$ بنابراین $\left\{\frac{1}{n!}\right\}$ دنباله نزولی است.

☹**مثال۷۱:** اگر $a_{n+1} = a_n^2 + 3a_n + 3$ آن گاه a_n :

۱) صعودی است. ۲) نزولی است. ۳) غیر یکنواست. ٤) ثابت است.

گزینه ۱ صحیح است.

تشخیص یکنوایی:

۱) اگر $a_n > 0$ باشد $\Leftarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow a_n & \text{اکیداً صعودی} \\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \Rightarrow a_n & \text{صعودی} \\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow a_n & \text{اکیداً نزولی} \\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \Rightarrow a_n & \text{نزولی} \end{cases}$$

۲)

الف) اگر a_n, b_n هر دو صعودی ویا هر دو نزولی باشند، ترکیب آن‌ها صعودی است.

ب) اگر a_n, b_n یکی صعودی و دیگری نزولی باشد ترکیب آن‌ها نزولی است.

ج) در ترکیب چند دنباله به صورت دو به دو عمل می‌کنیم.

۳) دنباله $\{f(n)\}$ را در نظر می گیریم، اگر به ازای $x \geq 1$ تابع f مشتق‌پذیر باشد، و جوابهای معادله $f'(x) = 0$ بی‌پایان نباشد داریم:

الف) اگر $f'(x) \geq 0$ در این صورت دنباله $\{f(x)\}$ صعودی است.

ب) اگر $f'(x) \leq 0$ در این صورت دنباله $\{f(x)\}$ نزولی است.

۴) عدد گذاری

قضیه: دنباله $\{a_n\}$ مفروض است هرگاه به ازای هر $n \in N$، $a_n > 0$ و دنباله $\{a_n\}$ صعودی (یا نزولی) باشد آنگاه دنباله $\{b_n\} = \{\dfrac{1}{a_n}\}$ نیز مثبت و نزولی (یا صعودی) است. اگر $a_n < 0$ نیز قضیه برقرار است.

قضیه: اگر $\{a_n\}$ دنباله صعودی(نزولی) باشد آنگاه دنباله $\{-a_n\}$ نزولی (صعودی) است.

قضیه: اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله باشند که هر دو صعودی (یا هر دو نزولی) باشند آنگاه $\{a_n + b_n\}$ نیز صعودی (یا نزولی) است.

☺مثال۷۲: یکنوایی دنباله های زیر را بررسی کنید.

۱) $a_n = \{\dfrac{2}{n+3}\}$ ۲) $a_n = \{\dfrac{n+1}{n}\}$ ۳) $a_n = \{\dfrac{n^2+1}{n^2+3}\}$ ۴) $a_n = \{(-1)^{n^2}\}$

۵) $a_n = \{\cos n\pi\}$ ۶) $a_n = \{\sin n\pi\}$ ۷) $a_n = \{\sin \dfrac{n\pi}{2}\}$ ۸) $a_n = \{\cos \dfrac{n\pi}{2}\}$

☺**مثال۷۳:** دنباله $a_n=\{\frac{n!}{2^n}\}$ دنباله ای است:

۱) صعودی **۲) اکیداً صعودی** **۳) نزولی** **٤) اکیداً نزولی**

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}}{\frac{n!}{2^n}}=\frac{n+1}{2}\geq 1\Rightarrow$$ a_n صعودی است.

☹**مثال۷۴:** حداقل چند جمله ابتدایی از دنباله‌ی $\{\frac{3^{4n+1}}{(n+4)!}\}$ را حذف کنیم تا دنباله حاصل اکیداً نزولی گردد؟

☺**مثال۷۵:** دنباله‌ی $\left\{\frac{(-1)^n}{n+1}\right\}$:

۱) صعودی و همگرا به صفر است. **۲) نزولی و همگرا به صفر است.**

۳) غیر یکنوا و همگرا به صفر است. **٤) غیر یکنوا و واگراست.**

گزینه ۳ صحیح است.

☹**مثال۷۶:** کدام گزینه در مورد رفتار دنباله‌های $a_n=0/0n$ و $b_n=(\sqrt{2}-1)^{-n}$ درست است؟

۱) هر دو نزولی هستند. **۲) $\{a_n\}$ صعودی و $\{b_n\}$ نزولی است.**

۳) $\{b_n\}$ صعودی است و $\{a_n\}$ یکنوا نیست. **٤) $\{a_n\}$ نزولی و $\{b_n\}$ صعودی است.**

توجه کنید $a_1=\frac{1}{100}<a_2=\frac{2}{100}$ اما $a_9=\frac{9}{100}>a_{10}=\frac{10}{1000}=\frac{1}{100}$ بنابراین دنباله یکنوا نیست.

امّا $b_n=\frac{1}{(\sqrt{2}-1)^n}=(\frac{1}{\sqrt{2}-1})^n=(\sqrt{2}+1)^n$ (توجه کنید که $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=1$) که چون $\sqrt{2}+1>1$ پس $(\sqrt{2}+1)^n<(\sqrt{2}+1)^{n+1}$ و در نتیجه دنباله‌ی b_n صعودی است.

☹**مثال۷۷: دنباله** $a_n=\begin{cases}\dfrac{n+۱}{n} & n<۱۰\\ \dfrac{۱}{n} & n\geq ۱۰\end{cases}$ **چه وضعیتی دارد؟**

۱) صعودی **۲) نزولی** **۳) غیر یکنوا** **٤) هم صعودی و هم نزولی**

گزینه ۲ صحیح است.

☺☹**مثال۷۸بالهی** $a_n=\begin{cases}\dfrac{(n-۱)^۲}{۳^n} & n\neq ۱,۳\\ ۱ & n=۱\\ k & n=۳\end{cases}$ **مفروض است.** k **چقدر باشد تا** a_n **نزولی باشد؟**

۱) $\frac{۱}{۹}$ **۲) ۱** **۳)** $\frac{۱}{۱۰}$ **٤) هیچ مقدار k**

گزینه ۱ صحیح است.

☹**مثال۷۹: کدام گزینه درباره دنباله** $a_n=\sqrt{n^۲-۳}-n$ **درست است؟** $(n\geq ۲)$

۱) صعودی و واگرا **۲) نزولی و همگرا** **۳) نزولی و واگرا** **٤)صعودی و همگرا**

$$a_n=\frac{\sqrt{n^۲-۳}-n}{\sqrt{n^۲-۳}+n}(\sqrt{n^۲-۳}+n)=\frac{-۳}{\sqrt{n^۲-۳}+n}$$

دنباله $\sqrt{n^۲-۳}+n$ صعودی است پس $\frac{۳}{\sqrt{n^۲-۳}+n}$ نزولی خواهد بود و بنابراین $\frac{-۳}{\sqrt{n^۲-۳}+n}$ صعودی است و حد آن برابر صفر می‌باشد پس همگراست.

☹**مثال۸۰: کدام گزینه در مورد دنباله‌ی** $a_n=\dfrac{n\left[\frac{-۱}{n}\right]}{n+۱}$ **درست است؟**

۱) صعودی و هم‌گراست. **۲) نزولی و هم‌گراست.**

۳) هم‌گراست اما یکنوا نیست. **٤) واگراست.**

به ازای هر مقدار طبیعی n داریم $\left[-\frac{۱}{n}\right]=-۱$. بنابراین دنباله‌ی $a_n=\frac{-n}{n+۱}$ نزولی و هم‌گرا به ۱- است.

مثال۸۱: دنباله $\{(-1)^n \cos n\pi\}$ چه وضعیتی دارد؟

۱) هم صعودی و هم نزولی ۲) نه صعودی و نه نزولی ۳) صعودی ٤) نزولی

گزینه ۱ صحیح است.

مثال۸۲: دنبالهی $\left[\frac{1}{n+1}\right]$ چگونه است؟

۱) صعودی ۲) نزولی

۳) غیر یکنوا ٤) هم صعودی و هم نزولی

گزینه ۴ صحیح است.

مثال۸۳: دنبالهی $(1-\frac{1}{n})(1-\frac{1}{n+1})$ چگونه است؟

۱) صعودی ۲) نزولی

۳) صعودی و نزولی ٤) نه صعودی و نه نزولی

اگر دنبالههای a_n, b_n هر دو مثبت و صعودی باشند در این صورت دنبالهی $a_n b_n$ نیز صعودی است.

مثال۸۴: اگر $\{a_n\}$ یک دنبالهی صعودی باشد کدام یک از دنبالههای زیر صعودیاند؟

۱) $\left\{\frac{na_n-1}{\sqrt{n}}\right\}$ ۲) $\left\{\frac{1}{a_n^2+1}\right\}$ ۳) $\left\{a_n+\frac{1}{n}\right\}$ ٤) $\left\{(a_n)^n\right\}$

اگر a_n صعودی باشد. $(a_n)^n$ نیز صعودی است.

مثال۸۵: دنبالههای $a_n=\begin{cases}\frac{1}{n} & \text{زوج } n\\ n & \text{فرد } n\end{cases}$ و $b_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$ مفروضند. دنبالهی $\{a_n b_n\}$:

۱) همگرا و کراندار ۲) واگرا و غیر یکنوا ۳) همگرا و یکنوا ٤) همگرا و غیر یکنوا

گزینه ۴ صحیح است.

مثال۸۶: هر گاه دنباله $\{\cos(n\pi)a^n\}$ نزولی باشد حدود a کدام است؟

۱) $a \le 0$ ۲) $-1 \le a \le 0$ ۳) $a \ge 0$ ٤) $1 \ge a \ge 0$

نکته: دنباله $\{c^n\}$ وقتی $0<c<1$ است همواره نزولی است.

$$\cos n\pi a^n = (-1)^n a^n = (-a)^n \xrightarrow[\text{باشد}]{\text{نزولی}} 0 \le -a \le 1 \Rightarrow -1 \le a \le 0$$

مثال۸۷: حداقل با حذف چند جمله از دنباله‌ی $\{2n^2-17n\}$ دنباله اکیداً صعودی حاصل می‌شود؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ٤ ٤) ٥

گزینه ۲ صحیح است.

مثال۸۸: کدام یک از دنباله‌های زیر ، نزولی و همگرا می‌باشد؟

۱) $\left\{\frac{n+8}{n+1}\right\}$ ۲) $\{1-2^n\}$ ۳) $\left\{\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right\}$ ٤) $\{n-n^2\}$

گزینه‌ی (۱): $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+8}{n+1}=1$ همگراست $\frac{\frac{n+9}{n+2}}{\frac{n+8}{n+1}}=\frac{n^2+10n+9}{n^2+10n+16}<1\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ نزولی

گزینه‌ی (۲): $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-2^n)=-\infty$ واگراست

گزینه‌ی (۳): $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$ همگراست و $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\Rightarrow f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}>0$ صعودی

گزینه‌ی (۴): $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-n^2)=-\infty$ واگراست

مثال۸۹: بزرگترین جمله دنباله $a_n=\text{Arc}\cot(2x^2+3x-6)$ کدامست؟

۱) صفر ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{3\pi}{4}$ ٤) $-\frac{3\pi}{4}$

دنباله $2n^2+3n-6$ صعودی است

$((2n^2+3n-6)'=4n+3>0)$ و $\text{Arc}\cot x$ نزولی است پس $\text{Arc}\cot(2n^2+3n-6)$ نزولی است پس بزرگترین جمله آن اولین جمله آن است.

$$n=1\Rightarrow \text{Arc}\cot(2+3-6)=\text{Arc}\cot(-1)=\frac{3\pi}{4}$$

بررسی یکنوایی دنباله هموگرافیک

در دنباله هموگرافیک به فرم $a_n=\frac{an+b}{cn+d}$

۱) اگر $-\frac{d}{c}>1$ باشد دنباله نه صعودی است و نه نزولی

۲) اگر $-\frac{d}{c}<1 \Leftarrow \begin{cases} ad-bc>0 \Leftarrow \text{دنباله اکیداً صعودی} \\ ad-bc<0 \Leftarrow \text{دنباله اکیداً نزولی است.}\end{cases}$

مثال۹۰: دنباله $a_n=\frac{3-kn}{n+k-4}$ به ازای چه مقادیری از k نزولی اکید است؟

۱) $k<1$ ۲) $k>3$ ۳) $|k-2|>1$ ٤) $|k-2|<1$

$$a_n=\frac{-kn+۳}{n+k-۴}\Rightarrow ad-bc<۰\Rightarrow -k(k-۴)-۳<۰$$

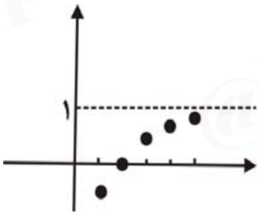
$$-k^۲+۴k-۳<۰$$

$$(۱)\,k>۳ \text{ یا } \Rightarrow k<۱$$

$$-\frac{d}{c}<۱\Rightarrow n=۴-k\Rightarrow ۴-k<۱\Rightarrow k>۳\quad(۲)$$ (شرط نداشتن مجانب قائم)

$$(۱),(۲)\ \Rightarrow k>۳$$

مثال۹۱: شکل مقابل مربوط به دنباله $a_n=\frac{n+c}{bn+k}$ **می‌باشد ، حدود** k **چیست؟**



۱) $-۱<k<۰$ ۲) $k>-۱$

۳) $k>-۲$ ٤) $-۲<k<-۱$

$$a_n=\frac{n+c}{bn+k}\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n=۱\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{n+c}{bn+k}=\frac{۱}{b}=۱\Rightarrow b=۱,\ a_۲=۰\Rightarrow a_۲=\frac{۲+c}{bn+k}=۰\Rightarrow c=-۲$$

$$a_n=\frac{n-۲}{n+k}\xrightarrow{\text{دنباله صعودی است}}$$

$$f(x)=\frac{x-۲}{x+k}\Rightarrow f'(x)=\frac{k+۲}{(x+k)^۲}>۰\Rightarrow k+۲>۰\Rightarrow k>-۲$$

مثال۹۲: دنباله $\{\operatorname{Arc}\cot(\log_{\frac{۱}{۲}}(\frac{۳n-۱}{n+۷}))\}$ **دنباله‌ای است:**

۱) غیریکنوا ۲) اکیداً نزولی ۳) اکیداً صعودی ٤) هم صعودی و هم نزولی

$$(\frac{۳n-۱}{n+۷})'=\frac{۲۲}{(n+۷)^۲}>۰,\ -۷<۱\Rightarrow$$ دنباله‌ای اکیداً صعودی است

$\log_{\frac{۱}{۲}}^{x}$ اکیداً نزولی است. $\Rightarrow \log_{\frac{۱}{۲}}^{\frac{۳n-۱}{n+۷}}$ اکیداً نزولی است.

و $\operatorname{Arc}\cot x$ اکیداً نزولی است $\Leftarrow$ $\operatorname{Arc}\cot\log\frac{۳x-۱}{x+۷}$ اکیداً صعودی است.

مثال۹۳: چه تعداد از دنباله‌های $\{\frac{۲n+۴}{۲n-۷}\},\{\frac{۳n+۲}{۴n+۲}\},\{\frac{\cos n\pi}{n}\}$ **یکنواست؟**

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ٤) ۳

$$a_n=\frac{۲n+۴}{۲n-۷},\ ۲n-۷=۰\Rightarrow n=\frac{۷}{۲}>۱\Rightarrow$$ دنباله یکنوا نیست.

$$b_n=(\frac{۳n+۲}{۴n+۲})'=\frac{۶-۸}{(۴n+۲)^۲}<۰,\ ۴n+۲=۰\Rightarrow\ n=-\frac{۱}{۲}<۱\Rightarrow$$ دنباله اکیداً نزولی است.

$$c_n=\frac{\cos n\pi}{n}=\frac{(-۱)^n}{n}$$

$$c_۱=-۱,c_۲=\frac{۱}{۲},c_۳=-\frac{۱}{۳},\dots$$ در نتیجه c_n یکنوا نیست.

۱) دنباله از بالا کران‌دار:

دنباله از بالا کران‌دار است. $\forall n \in N , \exists M , a_n \le M \Rightarrow$

۲) دنباله از پایین کران‌دار:

دنباله از پایین کران‌دار است. $\forall n \in N , \exists m, a_n \ge m \Rightarrow$

۳) دنباله کران‌دار: دنباله‌ای که هم از بالا و هم از پایین کران‌دار باشد.

$\forall n \in N, \exists k > ۰ ; |a_n| \le k$

قضیه: هر دنباله همگرا کران‌دار است ولی عکس آن درست نیست.

نکته: هر دنباله یکنوای کران‌دار ، همگراست.

نکته: دنباله صعودی از بالا کران‌دار، و همچنین دنباله نزولی و از پایین کران‌دار همگراست.

نکته: اگر a_n یکنوا و واگرا باشد حتماً بیکران است.

☹**مثال۹۴: کدام دنباله زیر کران‌دار و واگراست؟**

۱) $\left\{\frac{\sin n}{n+۱}\right\}$ ۲) $\left\{n^۲ - \frac{۱}{n^۲}\right\}$ ۳) $\left\{\frac{(-۱)^n}{۲n+۱}\right\}$ ٤) $\{۲+\cos n\pi\}$

گزینه ۴ صحیح است.

☹**مثال۹۵: بزرگترین کران پائین، کوچکترین کران بالا و حد همگرایی دنباله $\left\{\left[۳+\frac{۳}{۳-n^۲}\right]\right\}$ به ترتیب عبارت است از:**

۱) ۰ و ۲ و ٤ ۲) ۰ و ٤ و۲ ۳) ٤ و ۰ و ۲ ٤) هیچکدام

$\left\{\left[۳+\frac{۳}{۳-n^۲}\right]\right\} = ۴,۰,۲,۲,۲,...$

۴= کوچکترین کران بالا

۰ = بزرگترین کران پائین

۲ = حد همگرایی

☺**مثال۹۶: دنباله $\left\{\operatorname{Cos}\frac{n\pi}{۲}\right\}$ مفروض است. این دنباله:**

۱) کراندار است ولی همگرا نیست. ۲) کراندار و همگراست.

۳) کراندار نیست ولی همگراست. ٤) کراندار نیست، همگرا نیست.

دنباله کراندار است: $|\operatorname{Cos}\frac{n\pi}{۲}| \le ۱$

ولی جمله‌های دنباله عبارتند از: $۰,-۱,۰,۱,۰,-۱,۰,۱,...$ که همگرا نمی‌باشد.

☹مثال۹۷: دنباله $\left\{(1+\frac{1}{n})\cos\frac{n\pi}{2}\right\}$ مفروض است کدام همواره درست است؟ $(n \geq 1)$

۱) همگرا به صفر است.
۲) همگرا به ۱ است.
۳) کراندار نمی‌باشد.
٤) کراندار است اما همگرا نمی باشد.

☹مثال۹۸: کدام دنباله زیر کران بالا و پایین ندارد؟

۱) $\left\{\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$
۲) $\left\{\sin\frac{1}{n}\right\}$
۳) $\left\{3^n\right\}$
٤) $\left\{n^2(-1)^n\right\}$

۱) $\sin\frac{n\pi}{2} = 1, 0, -1, \ldots$ کران‌دار است

۲) $\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{n} = \sin 0 = 0$ همگراست $\Leftarrow$ کران‌دار است.

۳) $\lim 3^n = +\infty$

جملات این دنباله مثبت هستند پس از پایین کران‌دار است یعنی فقط کران بالا ندارد.

۴) $\lim_{n\to\infty} n^2(-1)^n = \lim \begin{cases} n^2 = +\infty & \text{زوج } n \\ -n^2 = -\infty & \text{فرد } n \end{cases}$

از بالا و پایین بیکران است.

☺مثال۹۹: دنباله‌ی $\left\{\frac{n^3}{n^2+1}\right\}$ چگونه است؟

۱) فقط از بالا کران‌دار است.
۲) فقط از پایین کران‌دار است.
۳) کران‌دار است.
٤) از بالا و پایین کران دار نیست.

گزینه ۲ صحیح است.

☹مثال۱۰۰: کدام دنباله صعودی و کراندار است؟ (سراسری تجربی - ۷۷)

۱) $U_n = \frac{n^2+1}{n+2}$
۲) $U_n = \frac{n^2+2}{n^2+1}$
۳) $U_n = \cos\frac{\pi}{n}$
٤) $U_n = \cos\frac{n\pi}{2}$

مثال۱۰۱: کدام یک از دنباله های زیر کران دار است؟

۱) $\{(-1)^n \cos n\pi\}$ ۲) $\{\frac{2n^2-1}{n+1}\}$ ۳) $\{\frac{n}{2\sqrt{n+1}}\}$ ۴) $\{\frac{4^n}{2^n+3^n}\}$

۱) $(-1)^n \cos n\pi = (-1)^n(-1)^n = (-1)^{2n} = 1$

دنباله ثابت است و همگرا به ۱ می باشد ⇐ کران دار است.

۲) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-1}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} 2n = \infty$ بیکران است

۳) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2\sqrt{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2\sqrt{n}} = \infty$ بیکران است.

۴) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^n}{2^n+3^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^n}{3^n} = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{4}{3})^n = \infty$ بیکران است.

مثال۱۰۲: دنباله $\{-\sqrt{n+1}\}$ چگونه است؟

۱) از بالا و پایین کران دار است.   **۲) فقط از پایین کران دار است.**

۳) نه از بالا و نه از پایین کران دار است.   **۴) فقط از بالا کران دار است.**

جملات دنباله منفی هستند و دنباله از بالا کران دار است.

$\lim\limits_{n\to\infty}(-\sqrt{n+1}) = -\infty$

مثال۱۰۳: کدام دنباله فقط از پایین کران‌دار است؟ **(آزاد تجربی – ۷۹)**

۱) $u_n = \frac{n+3}{n^2+1}$ ۲) $u_n = (-1)^n$ ۳) $u_n = \frac{1}{n}$ ۴) $u_n = \frac{n^2+1}{n+3}$

دنباله‌ای فقط از پایین کران‌دار است و کران بالا ندارد که: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

گزینه(۱): $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+3}{n^2+1} = 0 \Rightarrow$ دنباله همگراست $\Rightarrow$ دنباله کران داراست

گزینه(۲): $u_n = (-1)^n \Rightarrow |u_n| \le 1 \Rightarrow$ کران‌داراست.

گزینه(۳): $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \Rightarrow$ دنباله همگراست $\Rightarrow$ دنباله کراندار است.

گزینه(۴): $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2+1}{n+3} = \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty \Rightarrow$ دنباله کراندار نیست.

مثال۱۰۴: کوچکترین کران بالای اعضای دنباله $\{\frac{2n-5}{n-3}\}$ کدامست؟

۱) ۱   ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۳   ۴) $\frac{5}{2}$

گزینه ۳ صحیح است.

مثال۱۰۵: دنباله $a_n = \{۱+\frac{(-۲)^n}{n}\}$ چگونه است؟

۱) کران‌دار ـ یکنوا ـ همگرا
۲) غیریکنوا ـ بیکران ـ واگرا
۳) غیریکنوا ـ کران‌دار ـ واگرا
۴) غیریکنوا ـ کران‌دار ـ واگرا

بیکران و واگرا $\lim\limits_{n\to\infty} = ۱ \pm \infty = \pm\infty$

$$a_۱ = -۱,\quad a_۲ = ۳,\quad a_۳ = -\frac{۵}{۳},\quad \vdots \Rightarrow$$

دنباله غیریکنواست.

مثال۱۰۶: کدام دنباله فقط از پایین کران‌دار است؟

۱) $a_n = \{\frac{۳^{n-۲}+(-۱)^n}{۳^n}\}$
۲) $b_n = \{\frac{۲n-۱}{n^۲+۱}\}$
۳) $c_n = \{\sqrt{n^۲+۱}-n\}$
۴) $d_n = \{\frac{۳n^۲}{n+۴}\}$

$$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim \frac{۳^{n-۲}}{۳^n} + \frac{(-۱)^n}{۳^n} = \frac{۱}{۹} + ۰ = \frac{۱}{۹}$$

همگراست پس از بالا و پایین کران‌دار است.

$$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{۲n-۱}{n^۲+۱} = ۰$$

همگراست پس از بالا و پایین کران‌دار است.

$$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim \frac{n^۲+۱-n^۲}{\sqrt{n^۲+۱}+n} = \lim \frac{۱}{\sqrt{n^۲+۱}+n} = ۰$$

همگراست پس از بالا و پایین کران‌دار است.

$$\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{۳n^۲}{n+۴} = +\infty$$

جملات دنباله مثبت هستند پس فقط از پایین کران‌دار است.

مثال۱۰۷: اگر $U_n = ۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\dots+\frac{۱}{۲^n}$، آن‌گاه دنباله با جمله عمومی U_n چگونه است؟ (آزاد ریاضی – ۸۱)

۱) کراندار – صعودی
۲) کراندار – نزولی
۳) بی‌کران – صعودی
۴) بی‌کران – نزولی

$U_{n+۱} > U_n \Rightarrow$ صعودی

دنباله همگراست پس کراندار است. $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \frac{۱}{۱-\frac{۱}{۲}} = ۲$ مجموع جملات یک تصاعد هندسی است.

مثال ۱۰۸: دنباله‌ی $a_n = [\frac{\sin n}{n+\cos n}]$: (سراسری ریاضی – ۸۳)

۱) واگرا و کراندار است.
۲) همگرا و کراندار است.
۳) واگرا و بیکران است.
۴) همگرا و بیکران است.

با توجه به محدودیت a_n، دنباله کراندار است.

بنابراین دنباله ی فوق واگرا است. $-1 \le \sin n \le 1 \Rightarrow \frac{-1}{n+\cos n} \le \frac{\sin n}{n+\cos n} \le \frac{1}{n+\cos n} \Rightarrow [\frac{\sin n}{n+\cos n}] = \begin{cases} -1 \\ 0 \end{cases}$

مثال۱۰۹: دنباله $a_n = \{\frac{(-1)^n}{n}\}$:

۱) کراندار و صعودی است. ۲) کراندار و نزولی است. ۳) کراندار نیست. ٤) کراندار است.

چون دنباله متناوب است نه صعودی نه نزولی است.

چون همگرا است پس کراندار است.

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \frac{\pm 1}{\infty} = 0$$

مثال۱۱۰: کدام دنباله‌ی زیر، از بالا کران‌دار است ولی از پایین کران‌دار نیست؟ (سراسری تجربی – ۸٦)

۱) $U_n = \log\frac{1}{n}$ **۲)** $U_n = \sin\frac{\pi}{n}$ **۳)** $U_n = \cot g\frac{\pi}{n}$ **٤)** $U_n = \cos\frac{n\pi}{n}$

$$U_n = \log\frac{1}{n} = -\log n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} U_n = -\infty$$

مثال۱۱۱: اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ **نزولی باشد دنباله‌ی** $\{a_{n+1} - a_n\}$:

۱) نزولی است. ۲) کران بالا دارد. ۳) کران پایین دارد. ٤)صعودی است.

کران بالا دارد $a_n \Rightarrow a_{n+1} < a_n \Rightarrow a_{n+1} - a_n \le 0$ نزولی است.

مثال۱۱۲: دنباله‌ی $\left\{\frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\ldots\times2n}\right\}$ **در چند تا از گزاره‌های زیر صدق می‌کند؟**

الف) صعودی ب) نزولی ج) کران‌داراز پایین د) همگرا

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ٤) ٤

(I) از پایین کراندار است. $\left\{\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{2n-1}{2n}\right\} = a_n \Rightarrow a_n > 0 \Rightarrow$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{\cancel{1\times3\times5\times\cdots\times}(2n+1)}{\cancel{2\times4\times6\times\cdots\times}(2n+2)}}{\frac{\cancel{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}}{\cancel{2\times4\times6\times\cdots\times(2n)}}} = \frac{(2n+1)(2n)}{(2n+2)(2n-1)} = \frac{4n^2+2n}{4n^2+2n-2} > 1$$ (II) صعودی $\xrightarrow{I\,,\,II}$ دنباله همگراست

مثال۱۱۳: جمله‌ی n ام دنباله‌ی $\{a_n\}$ **به صورت** $a_n = \frac{2\times5\times8\times\cdots\times(3n-1)}{5\times9\times13\times\cdots\times(4n+1)}$ **تعریف شده است. کدام گزینه در مورد رفتار این دنباله درست است؟**

۱) صعودی بی‌کران است. ۲) صعودی و کراندار است.

۳) نزولی بی‌کران است. ٤) نزولی و کراندار است.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2\times5\times\ldots\times(3n-1)(3n+2)}{5\times9\times\ldots\times(4n+1)(4n+5)}}{\frac{2\times5\times\ldots\times(3n-1)}{5\times9\times\ldots\times(4n+1)}} = \frac{3n+2}{4n+5} < 1 \Rightarrow a_{n+1} < a_n$$

بنابراین دنباله نزولی است و چون از پایین به صفر کراندار می‌باشد (جملات دنباله مثبت هستند) پس دنباله کراندار نیز می‌باشد.

رابطهٔ بازگشتی:

یک رابطه بازگشتی برای دنباله $\{a_n\}$ یک معادله است که هر جمله a_k را برحسب تعداد متناهی از جمله‌های قبلی بیان می‌کند یعنی a_k را برحسب جمله‌های $a_{k-1}, a_{k-2}, \ldots, a_{k-i}$ که i ثابت است بیان می‌کند شرایط اولیه برای هر رابطه بازگشتی مقادیر $a_1, a_2, \ldots, a_n$ که معلوم هستند داده می‌شود.

مثال۱۱۴: هرگاه $a_1 = 0$، $\forall n \geq 2$ داشته باشیم $a_n = 3a_{n-1} + 2$ آنگاه a_6 کدام است؟

۱) ۲۴۱ ۲) ۲۴۲ ۳) ۲۳۹ ۴) ۲۴۳

گزینه ۲ صحیح است.

مثال۱۱۵: در رابطه بازگشتی $a_1 = \frac{3}{2}$, $a_0 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} - \frac{1}{4}a_n$ مقدار a_8 کدام است؟

۱) $\frac{15}{216}$ ۲) $\frac{19}{216}$ ۳) $\frac{15}{256}$ ۴) $\frac{17}{256}$

گزینه ۴ صحیح است.

جملات دنباله عبارتند از: $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{8}, \frac{9}{16}, \ldots$

یعنی جمله عمومی به شکل $a_n = \frac{2n+1}{2^n}$ است پس $a_8 = \frac{17}{256}$

مثال۱۱۶: در دنباله $\{2^{n+1} - 3\}$، a_{n+1} کدام است؟

۱) $4a_n + 3$ ۲) $4a_n - 3$ ۳) $2a_n - 3$ ۴) $2a_n + 3$

گزینه ۴ صحیح است.

$$a_n = 2^{n+1} - 3 \Rightarrow a_{n+1} = 2^{n+2} - 3$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = 2(2^{n+1}) - 3 \Rightarrow a_{n+1} = 2(2^{n+1} - 3 + 3) - 3 \Rightarrow a_{n+1} = 2(a_n + 3) - 3 \Rightarrow a_{n+1} = 2a_n + 3$$

مثال۱۱۷: در دنبالهٔ بازگشتی $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{5} , \quad n \geq 1 \end{cases}$ جملهٔ عمومی دنباله کدام است؟

۱) $0 < a < 7$ ۲) 2×5^{-n} ۳) 20×5^{-n} ۴) 1×5^{-n}

گزینه ۱ صحیح است.

مثال۱۱۸: اگر جملهٔ عمومی یک دنباله به صورت $b_n=\frac{۲^n}{n!}$ باشد، شکل بازگشتی دنباله کدام است؟

۱) $\begin{cases} b_۱=۲ \\ b_{n+۱}=\frac{۲}{n}b_n \quad n\geq ۱ \end{cases}$

۲) $\begin{cases} b_۱=۲ \\ b_{n+۱}=\frac{۲}{n+۱}b_n \quad n\geq ۱ \end{cases}$

۳) $\begin{cases} b_۱=۲ \\ b_۲=۲ \\ b_{n+۲}=\frac{۴}{n+۲}b_n \quad n\geq ۱ \end{cases}$

۴) $\begin{cases} b_۱=۲ \\ b_۲=۲ \\ b_{n+۲}=\frac{۴}{n^۲+n} \quad n\geq ۱ \end{cases}$

گزینه ۲ صحیح است.

$b_۱=۲$

$b_۲=\frac{۲^۲}{۲!}=\frac{۲}{۲}\times b_۱$

$b_۳=\frac{۲^۳}{۳!}=\frac{۲}{۳}\times b_۲$

$b_{n+۱}=\frac{۲^{n+۱}}{(n+۱)!}=\frac{۲^n}{n!}\times\frac{۲}{n+۱} \qquad n\geq ۱$

تعیین همگرائی و واگرائی دنباله‌های بازگشتی:

اگر بدانیم (در مساله فرض شده باشد یا خودمان ثابت کنیم) دنباله بازگشتی همگراست برای تعیین نقطه همگرایی آن (مقدار حد و دنباله) از نکته ساده و مهم زیر استفاده می‌کنیم:

حد دنباله همگرا، $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+k}$ و به طور خاص $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+۱}$

مثال۱۱۹: حد دنباله بازگشتی زیر را بدست آورید.

۱) $a_{n+۱}=\frac{۳(a_n+۲)}{۵}, a_۱=۱$

۲) $a_{n+۱}=\frac{a_n}{۳+a_n} \ , \ a_۱=۲$

از طرفین تساوی حد می‌گیریم:

۱) $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+۱}=\frac{۳(\lim a_n+۲)}{۵}\Rightarrow L=\frac{۳(L+۲)}{۵}\Rightarrow ۵L=۳L+۶\Rightarrow L=۳$

۲) $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+۱}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{۳+\lim\limits_{n\to\infty}a_n}\Rightarrow L=\frac{L}{۳+L}\Rightarrow ۳L+L^۲=L\Rightarrow \begin{cases} L=۰ \\ L=-۲ \end{cases}$

چون $a_۱$ مثبت است با توجه به ضابطه بازگشتی $a_۲$ هم مثبت است و به همین ترتیب $a_n>۰$ بنابراین $L\geq ۰$ و جواب مسئله $L=۰$ است.

مثال۱۲۰: اگر $n \geq ۱$ ، $a_{n+1} = \frac{۲(a_{n+1})}{a_n + ۳}$ ، $a_1 = ۱$ **و دنباله** $\{a_n\}$ **همگرا باشد به کدام یک از اعداد زیر همگراست؟**

۱) ۱ **۲) ۲** **۳) ۱-** **۴) ٤**

گزینه ۲ صحیح است.

فرض می‌کنیم $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ در این صورت $\lim a_{n+1} = \frac{۲(۲\lim_{n\to\infty} a_{n+1})}{\lim_{n\to\infty} a_n + ۳}$ یا به عبارت دیگر $L = \frac{۲(۲L+۱)}{L+۳}$ در نتیجه

$L = -۱$ یا $L = ۲$ چون تمام جملات دنباله مثبت است بنابراین $L = ۲$ قبول است.

مثال۱۲۱: دنباله $\{u_n\}$ **به صورت** $u_{n+1} = \sqrt{۱ + u_n}$ **و** $u_1 = ۱$ **تعریف شده است در این صورت** $\lim_{n\to\infty} u_n$ **برابر است با:**

۱) $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ **۲)** $\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$ **۳)** $\frac{۵}{۲}$ **۴) وجود ندارد.**

گزینه ۱ صحیح است.

مثال۱۲۲: دنباله $\{a_n\}$ **بصورت** $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ **و** $a_1 = a_2 = ۱$ **تعریف شده است، با فرض** $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ **کدام درست است؟**

۱) $L = \frac{۱}{۲}$ **۲)** $L = \frac{۱+\sqrt{۳}}{۲}$ **۳)** $L = \frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$ **٤)** $L = \frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$

می‌دانیم $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ پس:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} - ۱\right)$$

بنابراین $L = \frac{۱}{L} - ۱$ در نتیجه $L^۲ + L - ۱ = ۰$ که از حل این معادله $L = \frac{-۱ \pm \sqrt{۵}}{۲}$ بدست می‌آید که $L = \frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$ قابل قبول است.

مثال۱۲۳: در دنباله همگرای $\{a_n\}$ **به صورت** $a_n = \underbrace{\sqrt{۲\sqrt{۲\sqrt{۲ \ldots \sqrt{۲}}}}}_{n \text{ بار}}$**، این دنباله:**

۱) همگرا به ٤ است. **۲) همگرا به صفر است.**

۳) همگرا به ۲ است. **٤) همگرا به** $(\sqrt{۲})$ **است.**

گزینه ۳ صحیح است.

☹مثال۱۲۴: اگر دنباله $\{a_n\}$ همگرا به L باشد دنباله $\left\{\frac{2a_{n-1}+a_{2n}}{a_{2n}+a_{2n-1}}\right\}$ همگراست به

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) $\frac{3}{2}$ ٤) واگراست.

حل : $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = L \Rightarrow \left\{\frac{2L+L}{L+L}\right\} = \frac{3L}{2L} = \frac{3}{2}$

☹مثال۱۲۵: وضعیت همگرایی دنباله $a_{n+1} = \frac{a_n}{n}$ را تعیین کنید.

ابتدا قانون بازگشتی را به قانون صریح برحسب n تبدیل می‌کنیم:

$$a_2 = \frac{a_1}{1} = a_1 \qquad a_3 = \frac{a_2}{2} = \frac{a_1}{2} \qquad a_4 = \frac{a_3}{3} = \frac{\frac{a_1}{2}}{3} = \frac{a_1}{2\times3} = \frac{a_1}{3!} \qquad a_5 = \frac{a_4}{4} = \frac{a_1}{2\times3\times4} = \frac{a_1}{4!}$$

با توجه به جملات دنباله می‌توانیم حدس بزنیم که $a_n = \frac{a_1}{(n-1)!}$ بنابراین $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ و در نتیجه دنباله a_n همگراست.

نکته: اگر از طرفین معادله حد بگیریم و L را جایگزین کنیم و معادله برحسب L دارای جواب نباشد، دنباله واگراست ولی عکس آن درست نیست.

☹مثال۱۲۶: حد دنباله بازگشتی زیر را بدست آورید.

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_n} \quad , \quad a_1 = 2$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}) = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} \Rightarrow L = \frac{1}{L} \Rightarrow L^2 = 1 \Rightarrow L = 1$$

با اینکه برای L جواب بدست آمده است دنباله واگراست.

☹مثال۱۲۷: دنبالۀ $a_1 = a$ و $a_2 = b$ و $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ همگراست به:

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۱- ٤) واگراست.

گزینه ۴ صحیح است.

تعریف همگرایی

دنباله $\{a_n\}$ را به عدد حقیقی L همگرا گوییم هرگاه برای هر همسایگی متقارن L به شعاع دلخواه عدد طبیعی مانند M یافت شود که تمام جملات دنباله از شماره‌ی M به بعد درون این همسایگی جای گیرند. به زبان ریاضی a_n را به L همگرا گوییم هرگاه:

$\forall \varepsilon > 0 , \exists M > 0 , n \geq M \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$

مشاهده می‌شود که عبارت بالا در واقع تعریف حد دنباله a_n است زمانی که n به سمت $+\infty$ میل می‌کند پس بطور کلی:

$\{a_n\}$ همگرا به L است هرگاه $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = L$ باشد.

L عددی متناهی و حقیقی است.

مثال۱۲۸: در دنباله $a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+2}$ ، اگر به ازای هر n که $n \geq N$ ، فاصله‌ی جمله‌های دنباله تا حد آن کمتر از $\frac{1}{10}$ باشد، آن‌گاه کمترین مقدار N کدام است؟

۱) ۳۲۴ ۲) ۱۸ ۳) ۳۳۰ ۴) ۳۲۵

$$\left|\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+2} - 1\right| < \frac{1}{10} \Rightarrow \left|\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}+2}\right| < \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{n}+2} < \frac{1}{10} \Rightarrow \sqrt{n}+2 > 20 \Rightarrow \sqrt{n} > 18 \Rightarrow n > 324 \Rightarrow N \geq 325$$

مثال ۱۲۹: دنباله‌ی $a_n = \frac{n^3+188}{n^3+200}$ مفروض است. اگر $n > 10$ کوچک‌ترین بازه‌ی شامل این جمله‌ها کدام بازه‌ی زیر می‌تواند باشد؟

۱) $(0 , 1)$ ۲) $(0/99 , 1)$ ۳) $(0 , 1/01)$ ۴) $(0 , 1/1)$

گزینه ۲ صحیح است.

مثال۱۳۰: دنباله‌ی $a_n = \frac{n^2}{n^2+100}$ مفروض است ، اگر فاصله‌ی جمله‌های دنباله تا حد آن کمتر از $\frac{1}{10}$ باشد ، کوچک‌ترین جمله‌ی دنباله‌ی با این ویژگی ، جمله چندم است؟

۱) ۲۹ ۲) ۳۰ ۳) ۳۱ ۴) ۳۲

$$\left|\frac{n^2}{n^2+100} - 1\right| = \frac{100}{n^2+100} < \frac{1}{10} \Rightarrow n^2+100 > 1000 \Rightarrow n^2 > 900 \Rightarrow n > 30 \Rightarrow n \geq 31$$

جمله ۳۱ ام به بعد چنین است.

مثال۱۳۱: با استفاده از تعریف همگرایی برای دنباله‌ی با جمله‌ی عمومی $a_n = ۰/۹^n$ کدام استلزام زیر درست است؟

۱) $n < \log_{/۹} \varepsilon \Rightarrow (۰/۹)^n < \varepsilon$

۲) $n > \log_{/۹} \varepsilon \Rightarrow (۰/۹)^n < \varepsilon$

۳) $n > \log_{\varepsilon} ۰/۹ \Rightarrow |(۰/۹)^n - ۱| < \varepsilon$

۴) $n > \log_{\varepsilon} ۰/۹ \Rightarrow (۰/۹)^n < \varepsilon$

گزینه ۲ صحیح است.

مثال۱۳۲: نخستین جمله از دنباله‌ی $\{a_n\}$ با ضابطه‌ی $a_n = \begin{cases} \frac{n-۱}{۲n+۱} & \text{فرد } n \\ \frac{۲n+۱}{۴n-۳} & \text{زوج } n \end{cases}$ که از آن جمله به بعد تمامی جملات دنباله در همسایگی به مرکز $\frac{۱}{۲}$ و شعاع $\frac{۱}{۵۰}$ واقع هستند ، کدام جمله می‌باشد؟

۱) ۳۹ ۲) ۳۸ ۳) ۴۰ ۴) ۳۴

گزینه ۲ صحیح است.

مثال۱۳۳: اگر به ازای $n \ge m$، دنباله‌ی $\left\{\frac{\sqrt{۲}\cos n\pi}{n+۱}\right\}$ در همسایگی مقدار همگرایی خود به شعاع $\frac{۱}{۱۰۰}$ قرار گیرد، (با فرض $\sqrt{۲} \simeq ۱/۴۱۴$) حداقل مقدار برای m کدام است؟

۱) ۱۴۰ ۲) ۱۴۱ ۳) ۱۳۹ ۴) ۱۴۲

ابتدا باید ببینیم این دنباله به چه عددی همگراست.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{۲}\cos n\pi}{n+۱} = \frac{\pm\sqrt{۲}}{\infty} = ۰$$

$$\left|\frac{\sqrt{۲}\cos n\pi}{n+۱} - ۰\right| < \frac{۱}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}\,|\cos n\pi|}{n+۱} < \frac{۱}{۱۰۰}$$

مقدار $\cos n\pi$ به ازای n های زوج ۱ و برای n های فرد ۱- است، پس به ازای تمام n ها داریم: $|\cos n\pi| = ۱$. در نتیجه داریم:

$$\frac{\sqrt{۲}}{n+۱} < \frac{۱}{۱۰۰} \Rightarrow n+۱ > ۱۰۰\sqrt{۲} \simeq ۱۴۱/۴ \Rightarrow n > ۱۴۰/۴$$

بنابراین با توجه به این‌که $m \in \mathbb{N}$ است m موردنظر برابر ۱۴۱ است.

مثال۱۳۴: اگر جملات دنباله‌ی $a_n=\frac{2^n}{2^n+3}$ در همسایگی به شعاع $\frac{1}{22}$ از عدد ۱ قرار گیرند، آن‌گاه:

۱) $n\geq 5$ ۲) $n\geq 6$ ۳) $n\geq 7$ ۴) $n\geq 8$

$$|a_n-1|<\frac{1}{22}\Rightarrow\left|\frac{2^n}{2^n+3}-1\right|=\left|\frac{-3}{2^n+3}\right|<\frac{1}{22}\Rightarrow\frac{1}{2^n+3}<\frac{1}{66}\Rightarrow 63<2^n\Rightarrow n\geq 6$$

مثال۱۳۵: اگر حد دنباله‌ای با جمله‌ی عمومی $a_n=\frac{3^n-2}{3^n}$ برابر L بوده و برای هر $n\geq m$ رابطه‌ی $|a_n-L|<\frac{1}{128}$ برقرار باشد، کم‌ترین مقدار m کدام است؟

۱) ۲۳ ۲) ۴۷ ۳) ۵ ۴) ۶

گزینه ۴ صحیح است.

مثال۱۳۶: کمترین مقدار طبیعی M که برای هر $n\geq M$ جملات دنباله‌ی $\left\{\frac{2^{n+1}+1}{2^n-1}\right\}$ در همسایگی متقارن با مرکز ۲ و شعاع ۰/۰۰۱ قرار گیرد، کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

$$\left|\frac{2^{n+1}+1}{2^n-1}-2\right|<\frac{1}{1000}\Rightarrow\frac{3}{2^n-1}<\frac{1}{1000}$$

$2^n-1>3000\Rightarrow 2^n>3001\Rightarrow n$ کمترین مقدار طبیعی $=12$

مثال۱۳۷: دنباله‌ی $\{a_n\}$ هم‌گرا به $\sqrt{2}$ است. بنابراین دنباله‌ی $\{a_n\}$.........

۱) بی‌نهایت جمله‌ی گنگ دارد. ۲) بی‌نهایت جمله‌ی بزرگ‌تر از یک دارد.

۳) بی‌نهایت جمله در فاصله‌ی $[0,\sqrt{2}]$ دارد. ۴) به تعداد متناهی جمله‌ی بزرگ‌تر از $\sqrt{2}$ دارد.

$\sqrt{2}\simeq 1/42$ و بنا به تعریف حد، برای $\varepsilon=\frac{4}{10}$، از یک nی به بعد تمام جملات دنباله در نامساوی $|a_n-\sqrt{2}|<\frac{4}{10}$ صدق می‌کنند. پس:

$$|a_n-\sqrt{2}|<\frac{4}{10}\Rightarrow 1<\sqrt{2}-\frac{4}{10}<a_n<\sqrt{2}+\frac{4}{10}$$

بنابراین بی‌نهایت جمله از این دنباله بزرگ‌تر از یک هستند.

مثال۱۳۸: جملات دنباله‌ی $\{\frac{2n-1}{3n+2}\}$ برای مقادیر $n\geq n_\circ$ در بازه‌ی $(0/66,\frac{2}{3})$ قرار می‌گیرند. کوچک‌ترین مقدار $n_\circ$ کدام است؟ (خارج از کشور-۸۴)

۱) ۱۱۶ ۲) ۱۱۷ ۳) ۱۱۸ ۴) ۱۱۹

از آن‌جا که دنباله‌ی داده شده همگرا به $\frac{2}{3}$ می‌باشد و از طرفی دنباله‌ای صعودی است، لذا مشخص است که برای مقادیر $n\geq n_\circ$ جملات از مقدار $a_{n_\circ}$ به سوی $L=\frac{2}{3}$ رشد می‌کنند. در نتیجه برای به دست آوردن مقدار $n_\circ$ کافی است در تعریف ریاضی حد دنباله قرار دهیم $\varepsilon=\frac{2}{3}-0/66=\frac{2}{300}$. پس داریم:

$$\forall \varepsilon>0,\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni n\geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{2n-1}{3n+2}-\frac{2}{3}\right|<\frac{2}{300}\Rightarrow \left|\frac{\cancel{6n}-3-\cancel{6n}-4}{3(3n+2)}\right|<\frac{2}{300}\Rightarrow \frac{7}{3(3n+2)}<\frac{2}{300}\Rightarrow \frac{3n+2}{7}>50\Rightarrow$$

$$3n+2>350\Rightarrow 3n>348\Rightarrow n>116\Rightarrow n\geq 117$$

روش دوم: بدون استفاده از تعریف ریاضی حد دنباله، می‌توانیم با حل نامعادله‌ی $a_n>\frac{66}{100}$ نیز به پاسخ صحیح تست برسیم:

$$a_n\in(0/66,\frac{2}{3})\Rightarrow \frac{66}{100}<a_n<\frac{2}{3}\Rightarrow \frac{2n-1}{3n+2}>\frac{66}{100}\Rightarrow$$

$$\frac{2n-1}{3n+2}-\frac{33}{50}>0\Rightarrow \frac{100n-50-99n-66}{50(3n+2)}>0\Rightarrow \frac{n-116}{50(3n+2)}>0\Rightarrow \xrightarrow{50(3n+2)>0} n-116>0\Rightarrow n>116\Rightarrow n\geq 117$$

مثال ۱۳۹: برای مقادیر $n>31$، جملات دنباله‌ی $\{\frac{n-2}{4n}\}$ در کدام بازه است؟ (خارج از کشور-۸٦)

۱) $\left(\frac{1}{4},\frac{17}{64}\right]$ ۲) $\left[\frac{15}{64},\frac{17}{64}\right]$ ۳) $\left[\frac{15}{64},\frac{1}{4}\right)$ ٤) $(\frac{1}{8},\frac{1}{4})$

ابتدا ضابطه‌ی دنباله‌ی داده شده را ساده می‌کنیم. داریم:

$$a_n=\frac{n-2}{4n}=\frac{n}{4n}-\frac{2}{4n}\Rightarrow a_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{2n}$$

حال با در نظر گرفتن $n>31$ یا به طور دقیق‌تر $n\geq 32$،به ساختن جمله‌ی عمومی دنباله اقدام می‌کنیم:

$$n\geq 32\Rightarrow 2n\geq 64\Rightarrow 0<\frac{1}{2n}\leq\frac{1}{64}\Rightarrow 0>-\frac{1}{2n}\geq-\frac{1}{64}\Rightarrow \frac{1}{4}>\frac{1}{4}-\frac{1}{2n}\geq\frac{1}{4}-\frac{1}{64}\Rightarrow \frac{15}{64}\leq a_n<\frac{1}{4}$$

روش دوم: در دنباله‌های هموگرافیک به فرم کلی $\{\frac{an+b}{cn+d}\}$ اگر ریشه‌ی مخرج کوچک‌تر از عدد یک باشد $(n=\frac{-d}{c}<1)$، آن‌گاه قطعا دنباله‌ی مذکور یکنواست (اکیدا یکنوا) و داریم:

الف) اگر $ad-bc>0$، آن‌گاه دنباله اکیدا صعودی است.

ب) اگر $ad-bc<0$، آن‌گاه دنباله اکیدا نزولی است.

با توجه به مطلب فوق دنباله‌ی $\{\frac{n-2}{4n}\}$ اکیدا صعودی $(ad-bc=0+8>0)$ و همگرا به $\frac{1}{4}$ می‌باشد و در نتیجه برای $n\geq 32$ داریم:

$$a_{32}\leq a_n<\frac{1}{4}\Rightarrow \frac{15}{64}\leq a_n<\frac{1}{4}$$

قضیه حد و دنباله:

شرط لازم و کافی برای آن‌که $\lim_{x\to a} f(x)=L$، آن است که بازای هر دنباله $\{a_n\}$ که $\forall n\in N: a_n\neq a, a_n\in D_f$ (یعنی a_n دنباله ثابت a نباشد) و $\lim_{n\to\infty} a_n=a$ (یعنی دنباله‌ی $\{a_n\}$ به aهمگرا باشد) داشته باشیم $\lim_{n\to\infty} f(a_n)=L$. (یعنی دنباله $\{f(a_n)\}$ به Lهمگرا باشد)

توجه: اگر تنها تعداد متناهی از جملات دنباله a_n با aبرابر باشد، باز شرایط نکته فوق برقرار است.

مثال۱۴۰: تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۴x & x\neq ۱ \\ ۳ & x=۱ \end{cases}$ مفروض است. مطلوبست $\lim_{x\to ۱} f(x)$

اثبات عدم وجود حد با استفاده از دنباله‌ها:

اگر y=f(x) در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد و دو دنباله غیر ثابت $\{a_n\},\{b_n\}$ در دامنه f به a همگرا و به ازای هر n، $a_n\neq a, b_n\neq a$ و دنباله‌های $\{f(a_n)\},\{f(b_n)\}$ به دو عدد متمایز $L_۱,L_۲$ همگرا باشند، آنگاه $\lim_{x\to a} f(x)$ وجود ندارد.

مثال۱۴۱: نشان دهید تابع $f(x)=[x]$ در $x=۱$ حد ندارد.

مثال۱۴۲: قبلاً به کمک تعریف حد ثابت کردیم تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} ۰ & x\in Q \\ ۱ & x\in R-Q \end{cases}$ در هیچ نقطه‌ی a حد ندارد.

اکنون می‌توانیم با انتخاب دو دنباله‌ی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ که $\begin{cases} a_n\to a \\ a_n\neq a \end{cases}$ و $\begin{cases} b_n\to a \\ b_n\neq a \end{cases}$ و $a_n\in Q$ و $b_n\in R-Q$ نشان دهیم تابع در هیچ نقطه از a از اعداد حقیقی حد ندارد.

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n)=\lim_{n\to+\infty}(۰)=۰,\quad \lim_{n\to+\infty} f(b_n)=\lim_{n\to+\infty}(۱)=۱$$

بنابراین $\{f(a_n)\}$ و $\{f(b_n)\}$ به دو عدد متمایز همگرا شده‌اند در نتیجه تابع در هیچ نقطه‌ی a حد ندارد.

😐**مثال۱۴۳:** f تابعی است که روی اعداد حقیقی تعریف شده است و $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2$ و $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1$ کدام دنباله واگرا است؟

۱) $\left\{f\left(\frac{n}{n+1}\right)\right\}$ ۲) $\left\{f\left(1+\frac{2}{n}\right)\right\}$ ۳) $\left\{f\left(\frac{n-(-1)^n}{n}\right)\right\}$ ٤) $\left\{f(\cos\frac{1}{n})\right\}$

گزینه ۳ صحیح است.

😐**مثال۱۴۴:** در تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x<0 \\ 0 & x>0 \end{cases}$ کدام دو دنباله نشان می‌دهند که تابع در $x=0$ حد ندارد؟

۱) $\left\{\frac{1}{n}\right\}, \left\{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right\}$ ۲) $\left\{\frac{1}{n}\right\}, \left\{\frac{-\sqrt{2}}{n}\right\}$ ۳) $\left\{\frac{-1}{n+3}\right\}, \left\{\frac{-2}{n+4}\right\}$ ٤) $\left\{n^2\right\}, \left\{\sqrt{n}\right\}$

😐**مثال۱۴۵:** با کدام دنباله می‌توان نشان داد که تابع $f(x)=\cos\frac{\pi}{x}$ در $x=0$ حد ندارد؟

۱) $\frac{1}{2^n}$ ۲) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

۳) $\left\{\frac{1}{2n-1}\right\}$ ٤) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$

گزینه ۲ صحیح است.

😐**مثال۱۴۶:** برای اثبات عدم وجود حد کدام تابع در صفر نمی‌توان از دو دنبالهٔ $\left\{\frac{1}{2n}\right\}$ و $\left\{\frac{1}{2n+1}\right\}$ استفاده کرد؟

۱) $\sin\frac{1}{x}$ ۲) $\sin\frac{\pi}{x}$ ۳) $\sin\frac{1}{2x}$ ٤) $\sin\frac{\pi}{2x}$

گزینه ۲ صحیح است.

😐**مثال۱۴۷:** برای اثبات عدم وجود حد تابع $f(x)=\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]$ در $x=0$ انتخاب کدام دو دنباله‌ی زیر مناسب است؟

۱) $\left\{\frac{1}{n}\right\}, \left\{\frac{-1}{n}\right\}$ ۲) $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}, \left\{\frac{1}{n^3}\right\}$ ۳) $\left\{\frac{1}{n+0/1}\right\}, \left\{\frac{1}{n+0/2}\right\}$ ٤) $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}, \left\{\frac{1}{n+1}\right\}$

گزینه ۳ صحیح است.

☹مثال۱۴۸: برای اثبات عدم وجود حد تابع $f(x)=\left[x\left[\frac{1}{x}\right]\right]$ در نقطه‌ی $x=0$ کدام دنباله مناسب است؟

۱) $\begin{cases}\left\{\frac{1}{n}\right\}\\ \left\{\frac{3}{1-2n}\right\}\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}\left\{\frac{1}{n}\right\}\\ \left\{\frac{2}{2n+1}\right\}\end{cases}$ ۳) $\begin{cases}\left\{\frac{1}{n}\right\}\\ \left\{\frac{-1}{n}\right\}\end{cases}$ ٤) $\begin{cases}\left\{-\frac{1}{n}\right\}\\ \left\{\frac{2}{1-2n}\right\}\end{cases}$

☹مثال ۱۴۹: در اثبات عدم وجود حد تابع $f(x)=\begin{cases}1 & x\in Q\\ 0 & x\notin Q\end{cases}$ از دنباله‌ی $a_n=\frac{n+2}{2n}$ و b_n استفاده کردیم. b_n کدام است؟

۱) $\frac{n-2}{2n}$ ۲) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{n}$ ۳) $1+\frac{1}{n}$ ٤) $1+\frac{\sqrt{2}}{n}$

گزینه ۲ صحیح است.

☹مثال۱۵۰: دنباله‌های $\begin{cases}a_n=\frac{[\pi n]}{n}\\ b_n=\pi+\frac{1}{n}\end{cases}$ برای اثبات عدم وجود حد کدام‌یک از توابع $f(x)=\begin{cases}1 & x\in Q\\ 0 & x\in Q'\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}1 & x<\pi\\ 0 & x>\pi\end{cases}$ در نقطه $x=\pi$ مناسب می‌باشند؟

۱) فقط f ۲) فقط g ۳) f و g ٤) نه f و نه g

$$\begin{cases}f(a_n)=f\left(\frac{[\pi n]}{n}\right)=1\\ f(b_n)=f\left(\pi+\frac{1}{n}\right)=0\end{cases},\quad \begin{cases}g\left(\frac{[\pi n]}{n}\right)=g(\pi^-)=1\\ g\left(\pi+\frac{1}{n}\right)=(\pi^+)=0\end{cases}$$

☹☹مثال۱۵۱: تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{\sin^3\frac{1}{x^2}}{x^2}$ مفروض است ثابت کنید $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ وجود ندارد.

دو دنباله‌ی $a_n=\sqrt{\frac{2}{\pi(1+4n)}}$ و $b_n=\frac{1}{\sqrt{n\pi}}$ را در نظر می‌گیریم، واضح است که به ازای هر n، $a_n\neq 0$ و $b_n\neq 0$ و $a_n\to 0$ و $b_n\to 0$ و هر دو در دامنه‌ی f می‌باشند، اما

$$f(a_n)=\frac{\sin^3\frac{\pi(4n+1)}{2}}{\frac{2}{\pi(1+4n)}}=\frac{\pi(1+4n)}{2}\sin^3\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}(1+4n)$$

$$f(b_n)=\frac{\sin^3 n\pi}{\frac{1}{n\pi}}=n\pi\sin^3 n\pi=0$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(a_n)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(b_n)=0$ ، پس تابع در صفر حد ندارد.

مثال۱۵۲: اگر بخواهیم برای هر دنباله $\{a_n\}$ **که** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ **داشته باشیم** $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=L$ **آن گاه:**

۱) $\forall\varepsilon\,\exists N \ni 0<|x-a|<N \Rightarrow |f(a_n)-L|<\varepsilon$

۲) $\forall\varepsilon\exists N \ni 0<|x|<N \Rightarrow |f(a_n)-L|<\varepsilon$

۳) $\forall\varepsilon<0\ \exists\delta>0 \ni 0<|x|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

٤) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 \ni 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

$$\lim_{x\to\alpha} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 \ni 0<|x-\alpha|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$