

مثال ۱۶: حاصل ${}^2\log_6 18 \times {}^3\log_6 3$ کدام است؟

(۱) ۱۲

(۲) ۳

(۳) ۶

(۴) ۱۸

گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۱۷: با فرض $\log_{ab}^a = 4$ مقدار $\log_{\frac{\sqrt{a}}{ab}}^{\sqrt{a}}$ چقدر است؟

(۱) $\frac{1}{6}$

(۲) $-\frac{1}{6}$

(۳) $\frac{17}{6}$

(۴) $\frac{17}{17}$

$$\log_{\frac{\sqrt{a}}{ab}}^{\sqrt{a}} = \log_{\frac{\sqrt{a}}{ab}}^{\sqrt{a}} = \log_{\frac{\sqrt{a}}{ab}}^{\sqrt{a}} - \log_{\frac{\sqrt{a}}{ab}}^{\sqrt{a}} = \frac{1}{3} \log_{\frac{\sqrt{a}}{ab}}^a - \frac{1}{2} \log_{\frac{\sqrt{a}}{ab}}^b = \frac{4}{3} - \frac{1}{2} \log_{\frac{\sqrt{a}}{ab}}^b$$

$$1 = \log_{ab}^a = \log_{ab}^a + \log_{ab}^b \Rightarrow 1 = \frac{4}{3} + \log_{ab}^b \Rightarrow \log_{ab}^b = -\frac{2}{3}$$

$$\log_{\frac{\sqrt{a}}{ab}}^{\sqrt{a}} = \frac{4}{3} - \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

بنابراین:

مثال ۱۸: اگر $\log_x^3 a = a$ و $\log_x^5 b = b$ باشد $\log_x^5 a$ کدام است؟

(۱) $\frac{a}{1+a-b}$

(۲) $\frac{b}{1+a-b}$

(۳) $\frac{a}{1-a+b}$

(۴) $\frac{b}{1-a+b}$

گزینه ۴ صحیح است.

مثال ۱۹: با فرض $4a^2 + 9b^2 = 13ab$ مقدار $\log\left(\frac{2a+3b}{5}\right)$ میانگین حسابی کدام عدد زیر است؟

(۱) $\log\left(\frac{a}{3}\right), \log\left(\frac{b}{3}\right)$

(۲) $\frac{\log a + \log b}{3}$

(۳) $2 \log 2a, \log 3b$

(۴) $\log a, \log b$

$$4a^2 + 9b^2 = 13ab \Rightarrow 4a^2 + 9b^2 + 12ab = 25ab \Rightarrow (2a+3b)^2 = 25ab \Rightarrow \left(\frac{2a+3b}{5}\right)^2 = ab \Rightarrow \log\left(\frac{2a+3b}{5}\right) = \frac{1}{2} \log ab$$

$$\Rightarrow 2 \log\left(\frac{2a+3b}{5}\right) = \log a + \log b \Rightarrow \log\left(\frac{2a+3b}{5}\right) = \frac{1}{2} (\log a + \log b)$$

در نتیجه $\log\left(\frac{2a+3b}{5}\right)$ میانگین حسابی $\log a$ و $\log b$ است.

مثال ۲۰: اگر $\log_{\sqrt{y}}^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$ حاصل $\log_{\frac{xy}{x\sqrt{x}}}^{\frac{xy}{x\sqrt{x}}}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{4}$

(۲) $\frac{4}{9}$

(۳) $\frac{9}{4}$

(۴) $\frac{8}{9}$

$$\log_{\sqrt{y}}^{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{y}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{y}} \log_{\sqrt{y}}^{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{y}} \Rightarrow \log_{\sqrt{y}}^{\sqrt{x}} = 1, \log_{\frac{y}{x}}^{\frac{y}{x}} = \log_{\frac{y}{x}}^{\frac{y}{x}} = \frac{3}{\frac{y}{x}} \log_{\frac{y}{x}}^{\frac{y}{x}} = \frac{9}{\frac{y}{x}} \times \frac{1}{\log_{\frac{y}{x}}^{\frac{y}{x}}} = \frac{9}{\frac{y}{x}} \times \frac{1}{\frac{y}{x}} = \frac{9}{\frac{y}{x}}$$

مثال ۲۲: حاصل عبارت $x^{\left(\frac{\text{Log}_{\Delta}^x}{\text{Log}_{\Delta}^x}\right)}$ کدام است؟

Log_x^Δ (۴)

Log_Δ^x (۳)

Log_x^Δ (۲)

Log_Δ^x (۱)

گزینه ۳ صحیح است.

معادلات لگاریتمی

برای حل معادلات لگاریتمی ساده، از تعریف لگاریتم استفاده می‌کنیم. همچنین در حل بسیاری از معادلات لگاریتمی به حالتی می‌رسیم که در طرفین تساوی دو لگاریتم قرار دارد. برای حل این معادلات باید از نکته زیر استفاده کنیم:

نکته: اگر $a > 0$ و $a \neq 1$ باشد آن‌گاه از تساوی $\text{Log}_a^{f(x)} = \text{Log}_a^{g(x)}$ می‌توان تساوی $f(x) = g(x)$ را نتیجه گرفت و بالعکس. ($f(x), g(x) > 0$)

مثال ۲۳: معادلات زیر را حل کنید.

۱) $\text{Log}_{\sqrt{y}}^{(y^x-1)} = \text{Log}_{\sqrt{y}}^{x+5}$

۲) $\text{Log}_{\sqrt{y}}^{(x^y-2)} = \text{Log}_{\sqrt{y}}^x$

۳) $\text{Log}_{\Delta}^{x^2-2x} = \text{Log}_{\Delta}^{-2x}$

۴) $\text{Log}_x^{\Delta} = 2$

مثال ۲۴: معادله‌های زیر را حل کرده و جواب‌های قابل قبول را مشخص کنید.

۱) $\log_{\frac{1}{9}}^{(2x-1)} + \log_{\frac{1}{9}}^{(2x+1)} = 1$

۲) $2 \log_{\sqrt{y}}^x - \log_{\sqrt{y}}^{(x^2+2)} = -1$

۳) $\log_{\sqrt{y}} 2 + \log_{\sqrt{y}} \left(\frac{2x-1}{x+1}\right) = 1$

$$1) \log_{\frac{1}{9}}^{(2x-1)} + \log_{\frac{1}{9}}^{(2x+1)} = 1 \Rightarrow \begin{cases} 2x-1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2} \\ 2x+1 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x > \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \log_{99}^{(2x-1)(2x+1)} = 1 \Rightarrow \log_{99}^{(4x^2-1)} = 1 \Rightarrow 4x^2 - 1 = 99^1$$

$$\Rightarrow 4x^2 = 100 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 & \text{ق ق} \\ x = -5 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۲)

$$\begin{cases} x > 0 & \text{اشتراک} \\ x^2 + 2 > 0 & \Rightarrow x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \log_3^{x^2} - \log_3^{(x^2+2)} = -1 \Rightarrow \log_3^{x^2+2} = -1 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+2} = 3^{-1} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3x^2 = x^2 + 2 \Rightarrow x^2 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 & \text{ق ق} \\ x = -1 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۳)

$$\frac{2x-1}{x+1} > 0 \xrightarrow{\text{اشتراک}} x < -1 \text{ یا } x > \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 1 + \log_3^{x+1} = 2 \Rightarrow \log_3^{x+1} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2x-1}{x+1} = 3^1 \Rightarrow 2x-1 = 3x+3 \Rightarrow x = -4 \text{ ق ق}$$

مثال ۲۵: جواب معادله $\log_{10}(x+4) = \frac{1}{2} \log_{10}(2x+11)$ کدام است؟

- ۱) صفر ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۵

$$\log_{10}(x+4) = \frac{1}{2} \log_{10}(2x+11) \Rightarrow 2 \log_{10}(x+4) = \log_{10}(2x+11) \Rightarrow \log(x+4)^2 = \log(2x+11)$$

$$\Rightarrow x^2 + 8x + 16 = 2x + 11 \Rightarrow x^2 + 6x + 5 = 0 \Rightarrow x = -1, x = -5$$

$x = -1$ قابل قبول است زیرا $x > -4$ با امتحان کردن گزینه‌ها در این تست نیز جواب به سادگی مشخص می‌شود.

مثال ۲۶: اگر $\log_{16}^x + \log_4^x + \log_2^x = 7$ باشد، مقدار $\log_{\sqrt{x}}^2$ برابر چیست؟

- ۱) ۲ ۲) -۲ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

می‌دانیم: $\log_b^a = \frac{\log a}{\log b}$ بنابراین:

$$\log_{16}^x + \log_4^x + \log_2^x = 7 \Rightarrow \frac{\log x}{\log 16} + \frac{\log x}{\log 4} + \frac{\log x}{\log 2} = 7 \Rightarrow$$

$$\frac{\log x}{4 \log 2} + \frac{\log x}{2 \log 2} + \frac{\log x}{\log 2} = 7 \Rightarrow \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1\right) \frac{\log x}{\log 2} = 7 \Rightarrow$$

$$\frac{\log x}{\log 2} = 4$$

حال مقدار مطلوب سؤال را نیز بر حسب عبارت فوق بازنویسی می‌کنیم:

$$\log_{\sqrt{x}}^2 = \frac{\log 2}{\log \sqrt{x}} = \frac{\log 2}{\frac{1}{2} \log x} = 2 \times \frac{\log 2}{\log x} = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

مثال ۲۷: اگر $\log_{x-1}^4 + \log_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} = 0$ باشد آن گاه حاصل $\log_{\sqrt{3}}^x$ کدام است؟

- ۱) صفر ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) ۲

گزینه ۴ صحیح است.

مثال ۲۸: معادله‌ی $\log_{10}(2x+1) + \log_{10}(x-2) = 1 + 2\log_{10} 5$ چند جواب دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

$$\log(2x+1)(x-2) = \log 10 + \log 25 = \log 250$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 250 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 252 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4 \times 252}}{4}$$

که فقط جواب مثبت قابل قبول است.

مثال ۳۰: حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی $\log_2^x \log_2\left(\frac{x}{4}\right) = 3$ کدام است؟

- (۱) ۳۲ (۲) ۴ (۳) -۳۲ (۴) -۴

$$\log_2\left(\frac{x}{4}\right) = \log_2^x - \log_2^4 = \log_2^x - 2$$

$$\log_2^x = t \Rightarrow t(t-2) = 3 \Rightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Rightarrow t = 3, t = -1 \Rightarrow \log_2^x = 3 \Rightarrow x = 8, \log_2^x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

مثال ۳۱: معادله‌ی $x^{\log_3^x} = 81$ چند ریشه دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۴

$$x^{\log_3^x} = 81 \Rightarrow \log_3^x \log_3^{\log_3^x} = \log_3^81 \Rightarrow (\log_3^x)^2 = 4 \Rightarrow \log_3^x = \pm 2$$

$$x = 3^{\pm 2} \Rightarrow x = 9 \text{ یا } \frac{1}{9}$$

مثال ۳۲: از معادله‌ی $\log(4x^2 + x + 1) - \log(x+1) = \log 30 - \log 10$ مقدار $\log^x \sqrt{10}$ چقدر است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) صفر (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

$$\log \frac{4x^2 + x + 1}{x+1} = \log \frac{30}{10} = \log 3 \Rightarrow \frac{4x^2 + x + 1}{x+1} = 3$$

$$\Rightarrow 4x^2 + x + 1 = 3x + 3 \Rightarrow 4x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ x'' = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

$$\Rightarrow \log^x \sqrt{10} = \log^1 \sqrt{10} = 0$$

(برای محاسبه‌ی $\log^x \sqrt{10}$ باید $x > 0$ باشد)

مثال ۳۳: معادله‌ی $5^{\log x} + x^{\log 5} = 10$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) صفر (۴) بی‌شمار

$$5^{\log x} + x^{\log 5} = 10 \Rightarrow 5^{\log x} + 5^{\log x} = 2 \times 5^{\log x} = 10 \Rightarrow 5^{\log x} = 5 \Rightarrow \log x = 1 \Rightarrow x = 10$$

مثال ۳۴: حاصل ضرب ریشه‌های معادله $\log_{\sqrt{\Delta}}^x + \log_{\sqrt{\Delta}}^{12\Delta} = 7 \log_x^{\Delta}$ برابر است با:

- (۱) 4^6 (۲) 4^{-6} (۳) 4^{-7} (۴) 4^{-3}

$$\log_b^a = \frac{1}{\log_a b} \Rightarrow \log_{\sqrt{\Delta}}^x = \frac{1}{\log_x \sqrt{\Delta}}, \log_{\sqrt{\Delta}}^x = A$$

$$\text{از طرفی} = \log_{\sqrt{\Delta}}^{12\Delta} = \log_{\sqrt{\Delta}}^{\Delta^2} = 2 \log_{\sqrt{\Delta}}^{\Delta} = 6 \log_{\sqrt{\Delta}}^{\Delta} = 6$$

$$A + 6 = \frac{7}{A} \Rightarrow A^2 + 6A - 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 1 = \log_{\sqrt{\Delta}}^x \Rightarrow x = \Delta \\ A = -7 = \log_{\sqrt{\Delta}}^x \Rightarrow x = \frac{1}{\Delta^7} \Rightarrow 4 \times \frac{1}{4^7} = \frac{1}{4^6} \end{cases}$$

مثال ۳۵: اگر $\log_{x^2}^{x^4} + 7 \log^x = 56$ باشد، مقدار x کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۰۰ (۳) $\sqrt{10}$ (۴) 10^2

گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۳۶: ریشه‌ی معادله $3 \log_3^x + x \log_3^x = 6$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۹ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$3 \log_3^x + x \log_3^x = 6 \Rightarrow x \log_3^x + x \log_3^x = 6 \Rightarrow x \log_3^x = 3 \Rightarrow x^{\log_3^x} = 3 \Rightarrow x^{\frac{1}{2}} = 3 \Rightarrow x = 9$$

مثال ۳۷: اگر $\log_y x \cdot \log_{y^2}^y = 4$ باشد $\log_{y^2}^{\sqrt{x}}$ چه قدر است؟ (آزاد تجربی - ۸۶)

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) $\frac{4}{y}$ (۴) $\frac{y}{4}$

$$\log_y^x \times \log_{y^2}^y = 4 \Rightarrow \log_y^x \times \frac{2}{y} = 4 \Rightarrow \log_y^x = 2y$$

$$\log_{y^2}^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \log_y^x = \frac{1}{2} \times 2y = y$$

مثال ۳۸: اگر α, β ریشه‌های معادله $3 \log_{\sqrt{\alpha}}^x - \log_{\sqrt{\alpha}}^2 = 4$ باشند $\log_{\alpha}(\frac{\alpha}{\beta})$ کدام است؟ ($\alpha > \beta$)

- (۱) ۲ (۲) $\frac{4}{9}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$

$$3 \log_{\sqrt{\alpha}}^x - \log_{\sqrt{\alpha}}^2 = 4 \Rightarrow 6 \log_{\alpha}^x - 2 \log_{\alpha}^2 = 4$$

$$\Rightarrow 3 \log_{\alpha}^x - \frac{1}{\log_{\alpha}^2} = 2, \quad \log_{\alpha}^x = t$$

$$\Rightarrow 3t - \frac{1}{t} = 2 \Rightarrow 3t^2 - 2t - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_3^x = 1 \Rightarrow x=2 \Rightarrow \alpha=2 \\ \log_3^x = -\frac{1}{3} \Rightarrow x=2^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow \beta=2^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{2}{2^{-\frac{1}{3}}} = 2^{\frac{4}{3}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \log_8 \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \log_{2^3} 2^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$$

مثال ۳۹: از معادله $\log(x^3+1) - \frac{1}{2}\log(x^2+2x+1) = \log 6 - \log 2$ مقدار \log_6^x کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

$$\log(x^3+1) - \frac{1}{2}\log(x^2+2x+1) = \log \frac{6}{2} \Rightarrow \log(x^3+1) - \log(x+1)^{\frac{1}{2}} = \log \frac{6}{2} \Rightarrow \log(x^3+1) - \log(x+1) = \log 3$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{x^3+1}{x+1}\right) = \log 3 \Rightarrow \frac{x^3+1}{x+1} = 3 \Rightarrow \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1} = 3 \Rightarrow x^2-x+1=3 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \text{ ق ق} \\ x=2 \text{ ق ق} \end{cases}$$

$$\log_6^x = \log_{2^3} 2^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{3} \log_2 2^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{3}$$

مثال ۴۰: در معادله $\frac{1}{5-4\log x} + \frac{4}{1+\log x} = 3$ کدام است؟

- (۱) یکی از ریشه‌ها دو برابر زیشه دیگر است. (۲) یکی از ریشه‌ها دو واحد بیش‌تر از ریشه دیگر است.
 (۳) یکی از ریشه‌ها قرینه ریشه دیگر است. (۴) یکی از ریشه‌ها مربع ریشه دیگر است.

فرض کنیم $\log x = t$ بنابراین داریم:

$$\frac{1}{5-4t} + \frac{4}{1+t} = 3$$

$$1+t+4(5-4t) = 3(1+t)(5-4t) \Rightarrow 1+t+20-16t = 15+15t-12t-12t^2 \Rightarrow 12t^2-18t+6=0 \Rightarrow 2t^2-3t+1=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=\frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{t=\log x} \begin{cases} \log x = 1 \Rightarrow x = 10 \\ \log x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt{10} \end{cases}$$

بنابراین یکی از ریشه‌ها، مربع ریشه دیگر است.

مثال ۴۲: اگر $\log(3x-2) = \begin{vmatrix} \log 5 & \log 2 \\ \log 2 & \log 5 \end{vmatrix}$ آن‌گاه مجموع ارقام x کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۹ (۳) ۱۱ (۴) ۱۳

گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۴۳: معادله $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x^2-2x} = \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۰

$$\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x^2 - 2x} = \sin\left(\frac{12\pi - \pi}{6}\right) \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x^2 - 2x} = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x^2 - 2x} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x^2 - 2x} = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 - 2x} = \sqrt{3} \Rightarrow x^2 - 2x = 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

دو جواب بدست آمده مورد قبول است (صدق در معادله)

مثال ۴۶: اگر $\log_{\sqrt{2}}^{\sin(1.0^\circ)} = \alpha$ مقدار $\log_{\sqrt{2}}^{\left(\frac{\sin 20^\circ + \sin 40^\circ}{\sin 20^\circ}\right)}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۶۲)

(۱) $-1 - \alpha$ (۲) $-1 + \alpha$ (۳) $1 - \alpha$ (۴) $1 + \alpha$

$$\frac{\sin 20^\circ + \sin 40^\circ}{\sin 20^\circ} = \log_{\sqrt{2}} \left(\frac{2 \sin \frac{20^\circ + 40^\circ}{2} \times \cos \frac{20^\circ - 40^\circ}{2}}{\sin 20^\circ} \right) = \log_{\sqrt{2}} \frac{2 \sin 30^\circ \times \cos(-10^\circ)}{\sin 20^\circ} = \log_{\sqrt{2}} \frac{2 \sin 30^\circ \times \cos 10^\circ}{\sin 20^\circ} =$$

$$\log_{\sqrt{2}} \frac{\sin 20^\circ}{\sin 10^\circ} = \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{\sin 10^\circ} = \log_{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sin 10^\circ} \right) = -\log_{\sqrt{2}} \sin 10^\circ = -\log_{\sqrt{2}} - \log_{\sqrt{2}} \sin 10^\circ = -1 - \alpha$$

یادآوری:

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

مثال ۴۷: دستگاه لگاریتمی روبه‌رو را حل کنید.

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{2}} x + \log_{\sqrt{2}} y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

مثال ۴۸: در دستگاه $\begin{cases} y + \log x = 1 \\ x^y = 0.1 \end{cases}$ مقدار y کدام است؟

(۱) ۲ یا -۱ (۲) ۱ یا -۲ (۳) صفر یا ۵ (۴) ۵ یا -۲

$$x^y = 0.1 \Rightarrow \log x^y = \log 0.1 \Rightarrow y \log x = -1$$

$$\log x = -\frac{1}{y} \Rightarrow y + \log x = 1 \Rightarrow y - \frac{1}{y} = 1$$

$$\Rightarrow y^2 - y - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

نامعادلات لگاریتمی

در نامعادلات لگاریتمی با استفاده از قوانین لگاریتم سعی می‌کنیم نامعادله را به مقایسه دو لگاریتم با مبنای برابر تبدیل کنیم سپس از نکته‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{Log}_a^x > \text{Log}_a^y \Rightarrow \begin{cases} \text{اگر } 0 < a < 1 \Rightarrow x < y \\ \text{اگر } a > 1 \Rightarrow x > y \end{cases}$$

بعد از حل نامعادله دامنه را تعیین می‌کنیم و با جواب اشتراک می‌گیریم تا جواب نهایی بدست آید.

مثال ۴۹: اگر $0 < a < 1$ کدام همواره درست است؟

$$\log_3 a > 1 \quad (۴) \quad \frac{1}{\log_a 7} > \frac{1}{\log_a 5} \quad (۳) \quad \log_a 5 > \log_a 2 \quad (۲) \quad \log_3 a > 0 \quad (۱)$$

$$0 < a < 1 \Rightarrow \log_3 a < 0, \log_a 5 < \log_a 2, \log_a 7 < \log_a 5 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\log_a 7} > \frac{1}{\log_a 5}$$

مثال ۵۰: اگر $A = (\log_3 2)^{-1} + (\log_5 3)^{-1}$ کدام درست است؟

$$2 < A < 3 \quad (۴) \quad A > 3 \quad (۳) \quad A < 2 \quad (۲) \quad A \geq 2 \quad (۱)$$

$$A = \log_3 2 + \log_5 3 = \log_3 10, 3^2 < 10 < 3^3 \Rightarrow 2 < \log_3 10 < 3$$

مثال ۵۱: نامعادله‌های لگاریتمی زیر را حل کنید.

$$1) \text{Log}_{\frac{x-1}{5}}^{(x-1)} > 1 \quad 2) \text{Log}_3^2 < -1$$

مثال ۵۲: جواب نامعادله‌ی $\log_{\frac{1}{2}} x - 1 < 0$ را به دست آورید.

$$\text{دامنه: } x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \quad (۱)$$

$$\log_{\frac{1}{2}}^x - 1 < 0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}^x < 1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}^x < \log_{\frac{1}{2}}^2 \Rightarrow x > \frac{1}{2} \quad (۲), (۱) \cap (۲)$$

$$\text{جواب: } x \in (1, +\infty)$$

مثال ۵۳: مجموعه جواب نامعادله‌ی $\log_x^{(x-2)} > \log_x^{(28-x)}$ چند عضو صحیح دارد؟

$$۲۵ \quad (۴) \quad ۱۲ \quad (۳) \quad ۱۳ \quad (۲) \quad ۱۴ \quad (۱)$$

هر کدام از عبارت‌های $\log_x^{(x-2)}$ و $\log_x^{(28-x)}$ باید تعریف شده باشد بنابراین باید داشته باشیم.

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \rightarrow x > 2 \\ 28 - x > 0 \rightarrow x < 28 \end{cases} \Rightarrow 2 < x < 28 \quad (۱)$$

از رابطه‌ی $\log_x^{(x-2)} > \log_x^{(28-x)}$ با توجه به $2 < x < 28$ داریم:

$$x - 2 > 28 - x \Rightarrow 2x > 30 \Rightarrow x > 15 \quad (2)$$

از روابط ۱ و ۲ نتیجه می‌شود که $15 < x < 28$ و داریم:

$$28 - 15 - 1 = 12$$

مثال ۵۴: نامعادله‌ی لگاریتمی $\log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 4) \geq -1$ را حل کنید.

مثال ۵۵: نامعادله $\log_{10} x + \log_{10}(x - 2) \leq \log_{10} 24$ را حل کنید.

$$\log_{10} x + \log_{10}(x - 2) \leq \log_{10} 24 \Rightarrow \log_{10}(x^2 - 2x) \leq \log_{10} 24$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x \leq 24 \Rightarrow x^2 - 2x - 24 \leq 0 \Rightarrow (x - 6)(x + 4) \leq 0 \Rightarrow -4 \leq x \leq 6$$

اما $x > 0$ و $x - 2 > 0$ پس $x > 2$ در نتیجه جواب $2 < x \leq 6$.

مثال ۵۶: مجموعه جواب نامعادله‌ی $\log_x(3 - x) < 1$ کدام است؟

(۴) $(0, 1)$

(۳) $(\frac{3}{2}, 3)$

(۲) $(0, 3) - \{1\}$

(۱) $(1, 3)$

$$\log_x(3 - x) < 1$$

ابتدا دامنه‌ی تعریف را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} 3 - x > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 3, x \neq 1 \quad \text{مجموعه جواب } (0, 3) - \{1\}$$

$$1) \quad 1 < x < 3 \Rightarrow \log_x(3 - x) < 1 \Leftrightarrow 3 - x < x^1 \Rightarrow 3 < 2x \Rightarrow x > \frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} 1 < x < 3 \\ x > \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2} < x < 3$$

$$2) \quad 0 < x < 1 \Rightarrow \log_x(3 - x) < 1 \Leftrightarrow 3 - x > x^1 \Rightarrow 3 > 2x \Rightarrow x < \frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{U} \frac{3}{2} < x < 3 \cup 0 < x < 1$$

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ x < \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 1$$

مثال ۵۷: نامعادله $x^{\log_{10} x} > 10$ را حل کنید.

تابع لگاریتمی

با توجه به تابع نمایی $y = a^x$ و نمودار آن در می یابیم که تابعی یک به یک است. بنابراین دارای تابع معکوس می باشد. برای محاسبه تابع معکوس باید x را بدست آوریم، بنابراین لگاریتم را به صورت زیر تعریف می کنیم.

نمای آرگمان
 $a^b = c \Leftrightarrow \log_a c = b \quad (c > 0, a > 0, a \neq 1)$
 مینا

تابع معکوس تابع $y = a^x$ را به دست آورید.

$f(x) = y = a^x \Rightarrow x = \log_a y \Rightarrow y = f^{-1}(x) = \log_a x$

این تابع را تابع لگاریتم می نامیم.

نکته: اگر تابع f را به صورت $f(x) = \log_{h(x)}^{g(x)}$ تعریف کنیم، دامنه ی آن به صورت زیر خواهد بود:

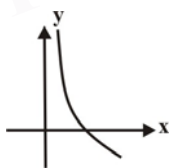
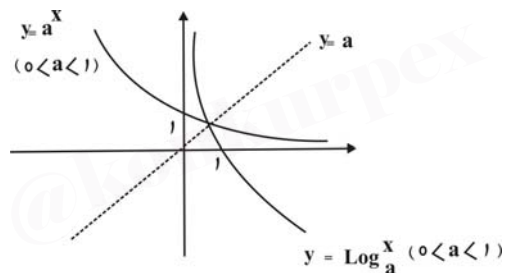
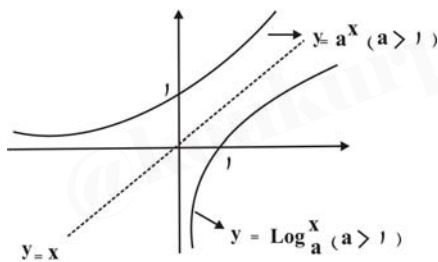
$D_f = \{x \mid g(x) > 0, h(x) > 0, h(x) \neq 1\}$

برای رسم تابع $y = \log_a x$ از معکوس آن یعنی $y = a^x$ استفاده می کنیم. می دانیم معکوس یک تابع، قرینه ی تابع نسبت به خط $y = x$ است.

برای رسم این تابع دو حالت داریم:

(ب) اگر $a > 1$ باشد:

(الف) اگر $0 < a < 1$ باشد:



(۴) $a > \frac{2}{3}$

(۳) $a \neq \frac{2}{3}$ و $a > \frac{1}{3}$

(۲) $\frac{1}{3} < a < \frac{2}{3}$

(۱) $a < \frac{1}{3}$

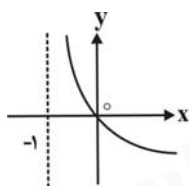


می دانیم نمودار $y = \log_b^x$ با $0 < b < 1$ باشد نزولی و به صورت

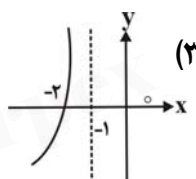
است بنابراین با توجه به شکلی که در سؤال برای \log_{ra-1}^x رسم شده است $0 < ra-1 < 1$ پس

$0 < ra-1 < 1 \Rightarrow 1 < ra < 2 \Rightarrow \frac{1}{3} < a < \frac{2}{3}$

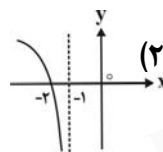
مثال ۵۹: نمودار تابع $y = -\log(-x-1)$ کدام است؟



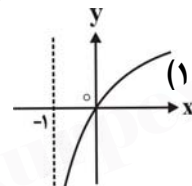
(۴)



(۳)



(۲)

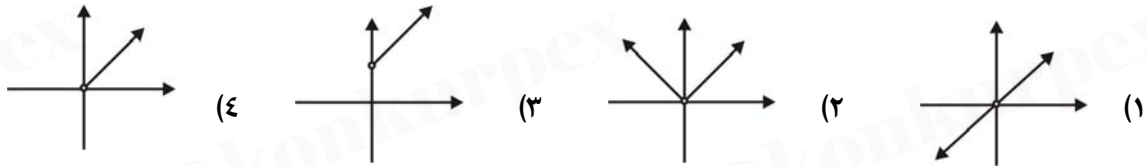


(۱)

$$y = -\log(-x-1) \Rightarrow -x-1 > 0 \quad Dy = x < -1 \quad Ry = (-\infty, +\infty)$$

چون به ازای $x = -2$ داریم $y = 0$ و از طرفی y تابعی صعودی است.

مثال ۶۰: کدام یک نمودار تابع $y = a^{\log_a x}$ می باشد. ($0 < a \neq 1$)



$y = a^{\log_a x} = x$ پس خط $y = x$ با شرط $x > 0$ است.

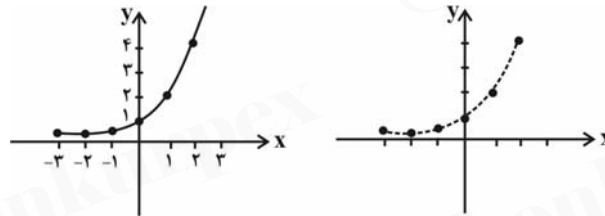
تابع نمایی

نقاط بدست آمده را روی دستگاه مختصات نمایش می دهیم!

مثال ۶۱: جدول زیر را در نظر بگیرید.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16

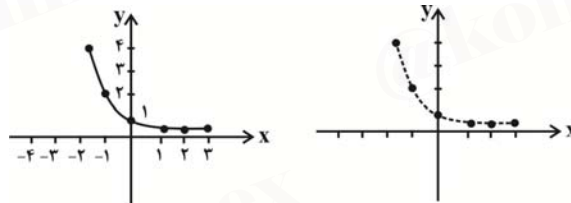
نقاط بدست آمده را روی دستگاه مختصات نمایش می دهیم:

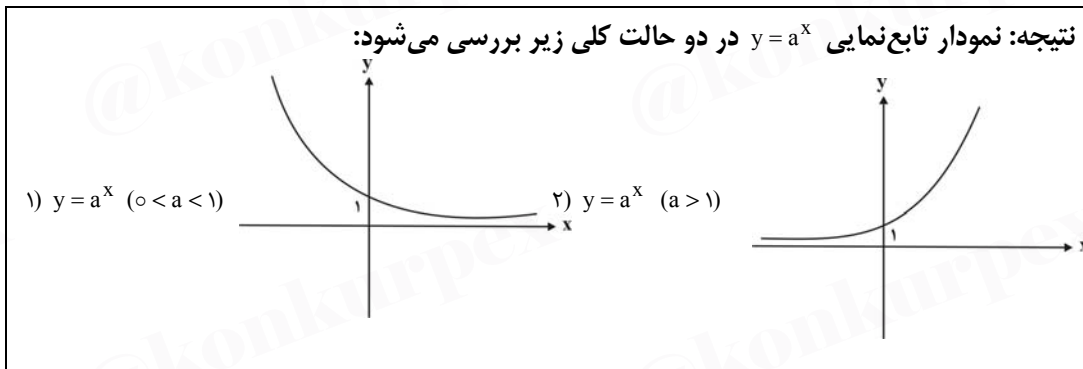


مثال ۶۲: جدول زیر را در نظر بگیرید:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = (\frac{1}{2})^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

نقاط بدست آمده را روی دستگاه مختصات نمایش می دهیم:





تذکره: با توجه به نمودارهای دو تابع بالا، واضح است که هر دو یک به یک می‌باشند.
 تذکره: برای تابع $y = a^x$ در حالتی که $a = 1$ نمودار به صورت تابع نمایی نخواهد بود و تابع به شکل خط افقی $y = 1$ تبدیل می‌شود.
 در این حالت تابع یک به یک نیست.

تذکره: دامنه و برد تابع $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) با توجه به نمودارهای آن عبارت است از:

دامنه $D = \mathbb{R}$
 برد $R = (0, +\infty)$

مقایسه‌ی دو نمودار $y = a^x, y = b^x$ با شرط $0 < b < a < 1$:

نتیجه:

$$0 < b < a < 1 \Rightarrow \begin{cases} a^x > b^x & x > 0 \\ a^x < b^x & x < 0 \\ a^x = b^x = 1 & x = 0 \end{cases}$$

مقایسه‌ی دو نمودار $y = a^x, y = b^x$ با شرط $1 < b < a$:

۱) $y = a^x$
 ۲) $y = b^x$

نتیجه:

$$1 < b < a \Rightarrow \begin{cases} a^x > b^x & x > 0 \\ a^x < b^x & x < 0 \\ a^x = b^x = 1 & x = 0 \end{cases}$$

مثال ۶۳: نمودارهای توابع $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$, $y = 5^x$ و $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = 3^x$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و آن‌ها را در $x > 0$ و $x < 0$ و $x = 0$ مقایسه کنید.

الف) در $x > 0$ داریم:

$$5^x > 3^x > \left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{5}\right)^x$$

ب) در $x < 0$ داریم:

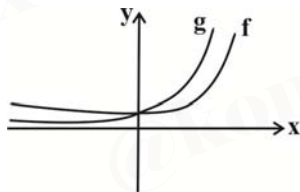
$$\left(\frac{1}{5}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^x > 3^x > 5^x$$

ج) در $x = 0$ داریم:

$$5^x = 3^x = \left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{5}\right)^x = 1$$

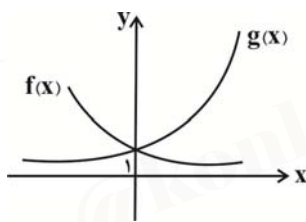
مثال ۶۴: نمودار دو تابع $f(x) = 3^x$ و $g(x) = 5^x$ را رسم کنید و مقادیر x را چنان تعیین کنید که:

الف) $f(x) > g(x)$ ب) $g(x) > f(x)$



الف) $f(x) > g(x) \Rightarrow x < 0$ ب) $f(x) < g(x) \Rightarrow x > 0$

مثال ۶۵: نمودار دو تابع $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ و $g(x) = 3^x$ را رسم کنید و مقادیر x را چنان بیابید که:



الف) $f(x) > g(x)$ ب) $g(x) > f(x)$

الف) $f(x) > g(x) \Rightarrow x < 0$

ب) $f(x) < g(x) \Rightarrow x > 0$

مثال ۶۶: فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد تابع $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 3$ با محور y ها را تا نقطه‌ی برخورد تابع $y = 3^x - 1$ کدام است؟

۴ (ع)

۳ (ب)

۲ (د)

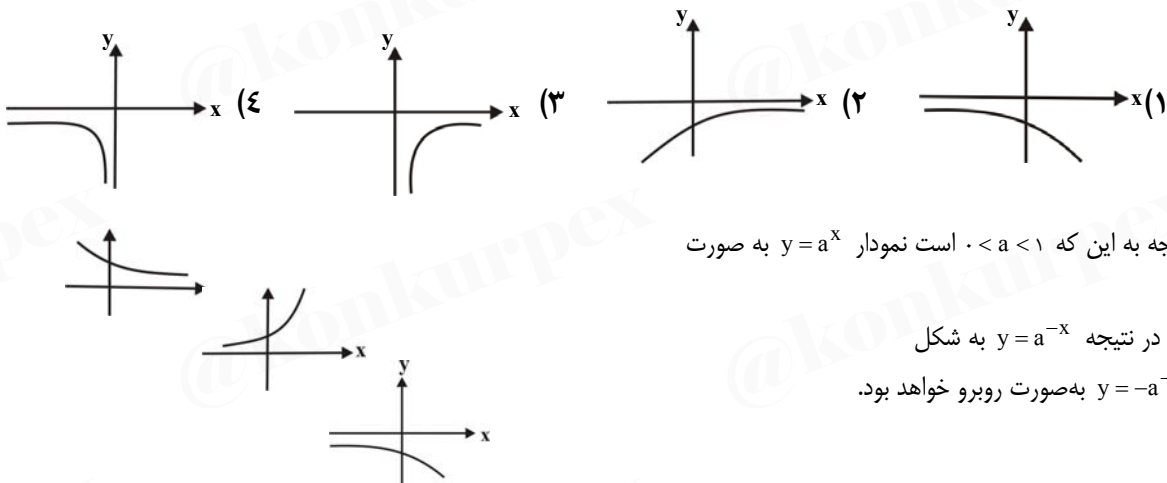
۱ (ا)

نقطه‌ی برخورد $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 3$ با محور y ها نقطه‌ی $(0, 4)$ است و نقطه‌ی برخورد $y = 3^x - 1$ با محور y ها نقطه‌ی

$(0, 0)$ است.

بنابراین فاصله‌ی این دو نقطه برابر ۴ است و گزینه‌ی ۴ صحیح است.

مثال ۶۷: اگر $0 < a < 1$ باشد کدام نمودار $y = -a^{-x}$ است؟



با توجه به این که $0 < a < 1$ است نمودار $y = a^x$ به صورت

است در نتیجه $y = a^{-x}$ به شکل
و $y = -a^{-x}$ به صورت روبرو خواهد بود.

معادلات توابع نمایی

برای حل معادلات شامل توابع نمایی، از قواعد توان استفاده می‌کنیم. گاهی نیز از تغییر متغیر و تجزیه کردن استفاده می‌کنیم. به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال ۶۸: معادلات زیر را حل کنید:

۱) $2^{x^2+1} = 8^{\frac{1}{3}x}$

۲) $(\frac{1}{3})^{2x-5} = 81^{x+1}$

۱) $2^{x^2+1} = (2^3)^{\frac{1}{3}x} \Rightarrow 2^{x^2+1} = 2^{2x} \Rightarrow x^2+1 = 2x \Rightarrow x^2-2x+1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$

۲) $(\frac{1}{3})^{2x-5} = 81^{x+1} \Rightarrow (3^{-1})^{2x-5} = (3^4)^{x+1} \Rightarrow 3^{5-2x} = 3^{4x+4} \Rightarrow 5-2x = 4x+4 \Rightarrow 6x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{6}$

مثال ۷۰: معادله $27^x + 12^x = 2 \times 8^x$ را حل کنید.

$(3^3)^x + (2^2)^x \times 3^x = 2 \times (2^3)^x \Rightarrow (3^x)^3 + (2^x)^2 \times 3^x - 2(2^x)^3 = 0 \quad (3^x=b, 2^x=a)$

$b^3 + a^2b - 2a^3 = 0 \Rightarrow b^3 - a^3 + a^2b - a^3 = 0 \Rightarrow (b-a)(b^2 + a^2 + ab) + a^2(b-a) = 0$

$\Rightarrow (b-a)(2a^2 + b^2 + ab) = 0 \Rightarrow b-a = 0 \Rightarrow b = a \Rightarrow 3^x = 2^x \Rightarrow \boxed{x=0}$

مثال ۷۱: معادله $3^x = 5^x - 4^x$ را حل کنید.

$3^x + 4^x = 5^x$

طرفین تساوی بالا را بر 5^x تقسیم می‌کنیم:

$\frac{3^x}{5^x} + \frac{4^x}{5^x} = \frac{5^x}{5^x} \Rightarrow (\frac{3}{5})^x + (\frac{4}{5})^x = 1$

می‌توانیم $\frac{3}{5}$ را $\sin \alpha$ و $\frac{4}{5}$ را $\cos \alpha$ در نظر بگیریم ($\alpha = 37^\circ$) داریم:

$\sin^x \alpha + \cos^x \alpha = 1 \Rightarrow \boxed{x=2}$

مثال ۷۲: ریشه‌های معادله‌ی $(2-\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x = 4$ کدام‌اند؟

(۱) ± 2 (۲) ۱ و ۲ (۳) ± 1 (۴) ۲ و -۱

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2+\sqrt{3} \Rightarrow (2-\sqrt{3})^x = a \Rightarrow (2+\sqrt{3})^x = \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow a + \frac{1}{a} = 4 \Rightarrow \frac{a^2 + 1}{a} = 4 \Rightarrow a^2 - 4a + 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2-\sqrt{3})^x = (2-\sqrt{3})^1 \Rightarrow x = 1 \\ (2-\sqrt{3})^x = 2+\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^{-1} \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

مثال ۷۳: جواب معادله‌ی $(\frac{1}{64})^{2x-1} = 4^{3x}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{5}$ (۲) ۳ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) ۵

$$(4^{-3})^{2x-1} = 4^{3x} \Rightarrow 4^{-6x+3} = 4^{3x}$$

$$\Rightarrow -6x + 3 = 3x \Rightarrow 9x = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

مثال ۷۴: مجموع ریشه‌های معادله‌ی $(\sqrt{3})^{2x^2+4} = 27^x$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

$$(\sqrt{3})^{2x^2+4} = (3^3)^x \Rightarrow x^2 + 2 = 3x$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1 + 2 = 3$$

مثال ۷۵: ریشه‌ی معادله‌ی $-2^{x+1} + 2^{2x} = -1$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

گزینه ۱ صحیح است.