قوانین لگاریتم

۱) $Log_a^a = 1 \quad (a > 0 , a \neq 1)$

۲) $Log_a^1 = 0 \quad (a > 0 \ , \ a \neq 1)$

۳) $Log_c^a + Log_c^b = Log_c^{ab}$

۴) $Log_c^a - Log_c^b = Log_c^{\frac{a}{b}}$

۵) $Log_c^{a^n} = nLog_c^a$

۶) $Log_{c^m}^a = \frac{1}{m} Log_c^a$

نتایج قوانین ۵ و ۶:

۱) $Log_{c^m}^{a^n} = \frac{n}{m} Log_c^a$

۲) $Log_{c^n}^{a^n} = Log_c^a$

۳) $Log_{a^m}^{a^n} = \frac{n}{m}$

۷) $Log_b^a = \frac{Log_c^a}{Log_c^b}$ (قانون تغییر مبنا)

نتایج قانون ۷:

۱) $Log_b^a \cdot Log_c^b = Log_c^a$

۲) $Log_b^a \cdot Log_a^b = 1$ **یا** $Log_b^a = \frac{1}{Log_a^b}$

۸) $a^{Log_c^b} = b^{Log_c^a}$

نتیجه قانون ۸:

$a^{Log_a^b} = b$

۹) $[\log A] = n \Rightarrow$ عددی A $(n+1)$ رقمی است

مثال۱: اگر $\log_2^3 = a$ **و** $\log_2^5 = b$، **حاصل** $\log_4^{15}$ **را بر حسب** a **و** b **بیابید.**

مثال۲: حاصل عبارت $5\log_3 \sqrt[5]{81} - 2\log_7 \frac{1}{49} + 3\log 0/001$ **را به‌دست آورید.**

$$5\log_3^{\sqrt[5]{81}} - 2\log_7^{\frac{1}{49}} + 3\log^{0/001} = 5\log_3^{3^{\frac{4}{5}}} - 2\log_7^{7^{-2}} + 3\log^{10^{-3}} = (5\times\frac{4}{5}) + (-2\times-2) - 9 = 4 + 4 - 9 = -1$$

مثال۳: با فرض $\log 2 = A$ **و** $\log 3 = B$ **حاصل** $\log 5\sqrt[3]{3}$ **کدام است؟**

۱) $1 + A - \frac{B}{3}$ ۲) $-A + 1 + \frac{B}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}(1 - A + B)$ ۴) $-A + 1 + 3B$

$$\log 5\sqrt[3]{3} = \log 5 + \log \sqrt[3]{3} = \log \frac{10}{2} + \log 3^{\frac{1}{3}} = \log 10 - \log 2 + \frac{1}{3}\log 3 = 1 - A + \frac{B}{3}$$

مثال۴: اگر $\log_{6}2=\alpha$ باشد، آن‌گاه $\log_{9}8$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}(1+\frac{1}{\alpha})$ ۲) $\frac{2}{3}(\frac{1}{\alpha}-1)$ ۳) $\frac{3}{2}(1-\frac{1}{\alpha})$ ۴) $\frac{3\alpha}{2-2\alpha}$

گزینه ۴ صحیح است.

مثال۵: اگر $x=\log_{9}3\sqrt{3}$ باشد، حاصل $\log_{2}(\frac{x}{6})$ چه‌قدر است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) -3 ۴) -4

مثال۶: حاصل عبارت $\left(\log_{6}3\right)^{2}+\log_{6}2\times\log_{6}18$ کدام است؟

۱) 1 ۲) $\log_{6}3$ ۳) $\log_{6}2$ ۴) 2

$$(\log_{6}3)^{2}+\log_{6}2(\log_{6}3^{2}\times 2)=(\log_{6}3)^{2}+\log_{6}2(2\log_{6}3+\log_{6}2)$$

$$(\log_{6}3)^{2}+2\log_{6}2\log_{6}3+(\log_{6}2)^{2}\xrightarrow{a^{2}+2ab+b^{2}=(a+b)^{2}}(\log_{6}3+\log_{6}2)^{2}=(\log_{6}6)^{2}=1$$

مثال۷: اگر $y=\frac{1}{81^{(1+\log_{9}3)}}$ باشد مقدار y کدام است؟

۱) $\frac{1}{729}$ ۲) $\frac{1}{(81)^{3}}$ ۳) $\frac{1}{81}$ ۴) $\frac{1}{(81)^{2}}$

گزینه ۱ صحیح است.

مثال۸: اگر $\log_{a}x=8$ و $\log_{b}x=3$ و $\log_{c}x=6$ باشد $\log_{abc}x$ برابر است با:

۱) 6 ۲) 3 ۳) $\frac{8}{5}$ ۴) $\frac{1}{18}$

گزینه ۳ صحیح است.

مثال۹: حاصل $7^{3\log_{\sqrt{7}}2}$ برابر است با:

۱) 8 ۲) $\sqrt{8}$ ۳) 64 ۴) 49

طبق نکته $a^{\log_{b}x}=x^{\log_{b}a}$ داریم:

$$۷^{۳\log_{\sqrt{۷}}^{۲}} = ۷^{\log_{۷^{\frac{۱}{۲}}}^{۲^{۳}}} = ۷^{۶\log_{۷}^{۲}} = ۲^{۶\log_{۷}^{۷}} = ۲^{۶} = ۶۴$$

مثال۱۰: حاصل $\log_n ۲ + \log_n \frac{۳}{۲} + \cdots + \log_n (\frac{n}{n-۱})$ کدام است؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) $n\log_{n}^{۲}$　　۴) $\left(\frac{n+۱}{n}\right)\log_{n}^{۲}$

گزینه ۲ صحیح است.

مثال۱۱: $\log_a \tan ۱^\circ + \log_a \tan ۲^\circ + \cdots + \log_a \tan ۸۹^\circ$ برابر است با:

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) a　　۴) $۸۹!$

گزینه ۱ صحیح است.

مثال۱۲: اگر $\log_۳ ۱۲ = a$ باشد $\log_۳ ۱۸$ برابر است با:

۱) $\frac{a-۳}{۲}$　　۲) $\frac{a+۳}{۲}$　　۳) $\frac{a-۱}{۲}$　　۴) $a+۳$

گزینه ۲ صحیح است.

$$۱+۲\log_۳ ۲ = a \Rightarrow \log_۳ ۲ = \frac{a-۱}{۲} \ , \ \log_۳ ۱۸ = ۲+\log_۳ ۲ = ۲+\frac{a-۱}{۲} = \frac{a+۳}{۲}$$

مثال۱۳: حاصل $\sqrt{۱۰^{۳+\frac{۱}{۴}\log ۱۶}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۰۰۰}$　　۲) $\sqrt{۲۰۰}$　　۳) $\sqrt{۲۰۰۰}$　　۴) ۱۰

گزینه ۳ صحیح است.

مثال۱۴: اگر $\log_{۳}^{۸} = a$ باشد، آن‌گاه حاصل $\log_{۳}^{۱۲} + \log_{۳}^{۴۸}$ کدام است؟

۱) $۲a+۲$　　۲) $۲a$　　۳) $۲a-۲$　　۴) $-۲a$

$$\log_{۳}^{۸} = a \Rightarrow \log_{۳}^{۲^{۳}} = a \Rightarrow ۳\log_{۳}^{۲} = a \Rightarrow \log_{۳}^{۲} = \frac{a}{۳}$$

$$\log_{۳}^{۱۲} + \log_{۳}^{۴۸} = \log_{۳}^{۳\times۲^{۲}} + \log_{۳}^{۲^{۴}\times۳} = \log_{۳}^{۳} + ۲\log_{۳}^{۲} + \log_{۳}^{۲^{۴}} + \log_{۳}^{۳} = ۱+۲\log_{۳}^{۲}+۴\log_{۳}^{۲}+۱ = ۶\log_{۳}^{۲}+۲ = ۶(\frac{a}{۳})+۲ = ۲a+۲$$

مثال۱۵: اگر $\log_{۱۵}^{۳} = a$ باشد، آن‌گاه حاصل $\log_{۴}^{۳}\log_{۵}^{۴}\log_{۶}^{۵}\ldots\log_{۲۵}^{۲۴}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱-a}{۲a}$　　۲) $\frac{a}{۲(۱-a)}$　　۳) $\frac{۲a}{۱-a}$　　۴) $\frac{a}{۱-a}$

طبق نکته $\log_{a}^{x} = \log_{b}^{x}\log_{c}^{b}\log_{a}^{c}$ داریم:

$$A = \log_{۴}^{۳}\log_{۵}^{۴}\log_{۶}^{۵}\ldots\log_{۲۴}^{۲۳}\log_{۲۵}^{۲۴} = \log_{۲۵}^{۳} = \log_{۵^{۲}}^{۳} = \frac{۱}{۲}\log_{۵}^{۳}$$

$$\log_{۱۵}^{۳} = a \Rightarrow \log_{۳}^{۱۵} = \frac{۱}{a} \Rightarrow \log_{۳}^{۳}+\log_{۳}^{۵} = \frac{۱}{a} \Rightarrow \log_{۳}^{۵} = \frac{۱}{a}-۱ = \frac{۱-a}{a} \Rightarrow \log_{۵}^{۳} = \frac{a}{۱-a} \Rightarrow A = \frac{۱}{۲}\log_{۵}^{۳} = \frac{۱}{۲}(\frac{a}{۱-a})$$

مثال۱۶: حاصل $2^{\log_6 18}\times 3^{\log_6 3}$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۳ ۳) ٦ ٤) ۱۸

گزینه ۳ صحیح است.

مثال۱۷: با فرض $\log_{ab}^{a}=4$ مقدار $\log_{ab}\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$ چقدر است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $-\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{17}{6}$ ٤) $\frac{6}{17}$

$\log_{ab}\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}=\log_{ab}^{\sqrt[3]{a}}-\log_{ab}^{\sqrt{b}}=\frac{1}{3}\log_{ab}^{a}-\frac{1}{2}\log_{ab}^{b}=\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\log_{ab}^{b}$ حال $\log_{ab}^{b}$ را محاسبه می‌کنیم:

$1=\log_{ab}^{ab}=\log_{ab}^{a}+\log_{ab}^{b}\Rightarrow 1=4+\log_{ab}^{b}\Rightarrow \log_{ab}^{b}=-3$

بنابراین:

$$\log_{ab}\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}=\frac{4}{3}-\frac{1}{2}(-3)=\frac{4}{3}+\frac{3}{2}=\frac{17}{6}$$

مثال۱۸: اگر $\log_6^3=a$ و $\log_6^5=b$ باشد $\log 5$ کدام است؟

۱) $\frac{a}{1+a-b}$ ۲) $\frac{b}{1+a-b}$ ۳) $\frac{a}{1-a+b}$ ٤) $\frac{b}{1-a+b}$

گزینه ۴ صحیح است.

مثال۱۹: با فرض $4a^2+9b^2=13ab$، مقدار $\log(\frac{2a+3b}{5})$، میانگین حسابی کدام ۲ دو عدد زیر است؟

۱) $\log(\frac{a}{2}),\ \log(\frac{b}{3})$ ۲) $\frac{\log a}{2},\ \frac{\log b}{3}$ ۳) $2\log 2a,\ \log 3b$ ٤) $\log a, \log b$

$$4a^2+9b^2=13ab \Rightarrow 4a^2+9b^2+12ab=25ab \Rightarrow$$
$$(2a+3b)^2=25ab \Rightarrow (\frac{2a+3b}{5})^2=ab \Rightarrow \log(\frac{2a+3b}{5})^2=\log ab$$
$$\Rightarrow 2\log(\frac{2a+3b}{5})=\log a+\log b \Rightarrow \log(\frac{2a+3b}{5})=\frac{1}{2}(\log a+\log b)$$

در نتیجه $\log(\frac{2a+3b}{5})$، میانگین حسابی $\log a$ و $\log b$ است.

مثال۲۰: اگر $\log_{2y}^{\sqrt{x}}=\frac{1}{2}$ حاصل $\log_{x\sqrt[3]{x}}^{8y^3}$ کدام است؟

۱) $\frac{9}{4}$ ۲) $\frac{4}{9}$ ۳) $\frac{9}{8}$ ٤) $\frac{8}{9}$

$$\log_{2y}^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\log_{2y}^{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_{2y}^{x} = 1 \,,\ \log_{x\sqrt[3]{x}}^{8y^3} = \log_{x^{\frac{4}{3}}}^{(2y)^3} = \frac{3}{\frac{4}{3}}\log_{x}^{2y} = \frac{9}{4}\times\frac{1}{\log_{2y}^{x}} = \frac{9}{4}\times\frac{1}{1} = \frac{9}{4}$$

مثال۲۲: حاصل عبارت $x^{\left(\frac{\mathrm{Log}_5^{\mathrm{Log}_2^x}}{\mathrm{Log}_5^x}\right)}$ کدام است؟

۱) Log_5^x **۲)** Log_x^5 **۳)** Log_2^x **٤)** Log_x^2

گزینه ۳ صحیح است.

معادلات لگاریتمی

برای حل معادلات لگاریتمی ساده ، از تعریف لگاریتم استفاده می‌کنیم. همچنین در حل بسیاری از معادلات لگاریتمی به حالتی می‌رسیم که در طرفین تساوی دو لگاریتم قرار دارد. برای حل این معادلات باید از نکته زیر استفاده کنیم:

نکته: اگر $a > 0$ و $a \neq 1$ باشد آن‌گاه از تساوی $\mathrm{Log}_a^{f(x)} = \mathrm{Log}_a^{g(x)}$ می‌توان تساوی $f(x) = g(x)$ را نتیجه گرفت و بالعکس. $(f(x)\,,g(x) > 0)$

مثال۲۳: معادلات زیر را حل کنید.

۱) $\mathrm{Log}_3^{(2x-1)} = \mathrm{Log}_3^{x+5}$

۲) $\mathrm{Log}_4^{(x^2-2)} = \mathrm{Log}_4^{x}$

۳) $\mathrm{Log}_5^{x^2-3x} = \mathrm{Log}_5^{-2x}$

۴) $\mathrm{Log}_x^{25} = 2$

مثال۲۴: معادله های زیر را حل کرده و جواب‌های قابل قبول را مشخص کنید.

۱) $\log_{99}^{(2x-1)} + \log_{99}^{(2x+1)} = 1$

۲) $2\log_3^{x} - \log_3^{(x^2+2)} = -1$

۳) $\log_3 2 + \log_3\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) = 1$

۱) $\log_{99}^{(2x-1)} + \log_{99}^{(2x+1)} = 1 \Rightarrow \begin{cases} 2x-1>0 \Rightarrow x > \frac{1}{2} \\ 2x+1>0 \Rightarrow x > -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x > \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \log_{99}^{(2x-1)(2x+1)} = 1 \Rightarrow \log_{99}^{(4x^2-1)} = 1 \Rightarrow 4x^2 - 1 = 99^1$$

$$\Rightarrow 4x^2 = 100 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 & \text{ق ق} \\ x = -5 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۲)

$$\begin{cases} x > 0 \xrightarrow{\text{اشتراک}} x > 0 :\text{دامنه متغیر} \\ x^2 + 2 > 0 \Rightarrow x \in R \end{cases}$$

$$\Rightarrow \log_3^{x^2} - \log_3^{(x^2+2)} = -1 \Rightarrow \log_3^{\frac{x^2}{x^2+2}} = -1 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+2} = 3^{-1} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3x^2 = x^2 + 2 \Rightarrow x^2 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 & \text{ق ق} \\ x = -1 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۳)

$$\frac{2x-1}{x+1} > 0 \xrightarrow{\text{اشتراک}} x < -1 \text{ یا } x > \frac{1}{2} :\text{دامنه متغیر}$$

$$\Rightarrow 1 + \log_3^{\frac{2x-1}{x+1}} = 2 \Rightarrow \log_3^{(\frac{2x-1}{x+1})} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2x-1}{x+1} = 3^1 \Rightarrow 2x - 1 = 3x + 3 \Rightarrow x = -4 \quad \text{ق ق}$$

مثال۲۵: جواب معادله‌ی $\log_{10}(x+4) = \frac{1}{2}\log_{10}(2x+11)$ **کدام است؟**

۱) صفر ۲) ۱- ۳) ۱ ٤) ۵

$$\log_{10}(x+4) = \frac{1}{2}\log_{10}(2x+11) \Rightarrow 2\log_{10}(x+4) = \log_{10}(2x+11) \Rightarrow \log(x+4)^2 = \log(2x+11)$$

$$\Rightarrow x^2 + 8x + 16 = 2x + 11 \Rightarrow x^2 + 6x + 5 = 0 \Rightarrow x = -1, x = -5$$

$x = -1$ قابل قبول است زیرا $x > -4$ با امتحان کردن گزینه‌ها در این تست نیز جواب به سادگی مشخص می‌شود.

مثال۲۶: اگر $\log_{16}^x + \log_4^x + \log_2^x = 7$ **باشد، مقدار** $\log_{\sqrt{x}}^2$ **برابر چیست؟**

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) $-\frac{1}{2}$ ٤) $\frac{1}{2}$

می‌دانیم: $\log_b^a = \frac{\log a}{\log b}$. بنابراین:

$$\log_{16}^x + \log_4^x + \log_2^x = 7 \Rightarrow \frac{\log x}{\log 16} + \frac{\log x}{\log 4} + \frac{\log x}{\log 2} = 7 \Rightarrow$$

$$\frac{\log x}{4\log 2} + \frac{\log x}{2\log 2} + \frac{\log x}{\log 2} = 7 \Rightarrow (\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1)\frac{\log x}{\log 2} = 7 \Rightarrow$$

$$\frac{\log x}{\log 2} = 4$$

حال مقدار مطلوب سؤال را نیز بر حسب عبارت فوق بازنویسی می‌کنیم:

$$\log_{\sqrt{x}}^2 = \frac{\log 2}{\log\sqrt{x}} = \frac{\log 2}{\frac{1}{2}\log x} = 2 \times \frac{\log 2}{\log x} = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

مثال۲۷: اگر $\log_{x-1}^4 + \log_3^{\frac{1}{9}} = 0$ **باشد آن‌گاه حاصل** $\log_{\sqrt{3}}^x$ **کدام است؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ٤) ۲

گزینه ۴ صحیح است.

مثال۲۸: معادله‌ی $\log_{10}(2x+1)+\log_{10}(x-2)=1+2\log_{10}5$ **چند جواب دارد؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ٤) ۳

$$\log(2x+1)(x-2)=\log 10+\log 25=\log 250$$

$$2x^2-3x-2=250 \Rightarrow 2x^2-3x-252=0 \Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9+\times 252}}{4}$$

که فقط جواب مثبت قابل قبول است.

مثال۳۰: حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی $\log_2^x \log_2(\frac{x}{4})=3$ **کدام است؟**

۱) ۳۲ ۲) ٤ ۳) ۳۲- ٤) ٤-

$$\log_2(\frac{x}{4})=\log_2^x-\log_2^4=\log_2^x-2$$

$$\log_2^x=t \Rightarrow t(t-2)=3 \Rightarrow t^2-2t-3=0 \Rightarrow t=3\ ,\ t=-1 \Rightarrow \log_2^x=3 \Rightarrow x=8\ ,\log_2^x=-1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

مثال۳۱: معادله‌ی $x^{\log_3^x}=81$ **چند ریشه دارد؟**

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۳ ٤) ٤

$$x^{\log_3^x}=81 \Rightarrow \log_3^{x^{\log_3^x}}=\log_3^{81} \Rightarrow (\log_3^x)^2=4 \Rightarrow \log_3^x=\pm 2$$

$x=3^{\pm 2} \Rightarrow x=9$ یا $\frac{1}{9}$

مثال۳۲: از معادله‌ی $\log(4x^2+x+1)-\log(x+1)=\log 30-\log 10$، **مقدار** $\log_{\sqrt{10}}^x$ **چقدر است؟**

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) صفر ۳) $\frac{2}{3}$ ٤) $\frac{3}{2}$

$$\log\frac{4x^2+x+1}{x+1}=\log\frac{30}{10}=\log 3 \Rightarrow \frac{4x^2+x+1}{x+1}=3$$

$$\Rightarrow 4x^2+x+1=3x+3 \Rightarrow 4x^2-2x-2=0 \Rightarrow \begin{cases} x'=1 \\ x''=-\frac{1}{2}\ \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \log_{\sqrt{10}}^x=\log_{\sqrt{10}}^1=0$$

(برای محاسبه‌ی $\log_{\sqrt{10}}^x$ باید $x>0$ باشد)

مثال۳۳: معادله‌ی $5^{\log x}+x^{\log 5}=10$، **چند جواب دارد؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ٤) بی‌شمار

$$5^{\log x}+x^{\log 5}=10 \Rightarrow 5^{\log x}+5^{\log x}=2\times 5^{\log x}=10 \Rightarrow 5^{\log x}=5 \Rightarrow \log x=1 \Rightarrow x=10$$

مثال۳۴: حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی $\log_4^x + \log_{\sqrt{5}} 125 = 7\log_x^4$ برابر است با:

۱) 4^6 ۲) 4^{-6} ۳) 4^{-7} ٤) 4^{-3}

$$\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b} \Rightarrow \log_4^x = \frac{1}{\log_x^4}, \log_4^x = A$$

از طرفی $= \log_{\sqrt{5}}^{125} = \log_{5^{\frac{1}{2}}}^{5^3} = 6\log_5^5 = 6$

$$A + 6 = \frac{7}{A} \Rightarrow A^2 + 6A - 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 1 = \log_4^x \Rightarrow x = 4 \\ A = -7 = \log_4^x \Rightarrow x = \frac{1}{4^7} \end{cases} \Rightarrow 4 \times \frac{1}{4^7} = \frac{1}{4^6}$$

مثال۳۵: اگر $x^{\log_{x^2}^{49}} + 7^{\log^x} = 56$ باشد، مقدار x کدام است؟

۱) 10 ۲) 100 ۳) $\sqrt{10}$ ٤) 10^3

گزینه ۲ صحیح است.

مثال۳۶: ریشه‌ی معادله‌ی $3^{\log_9^x} + x^{\log_9^3} = 6$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۹ ۳) $\sqrt{3}$ ٤) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$3^{\log_9^x} + x^{\log_9^3} = 6 \Rightarrow x^{\log_9^3} + x^{\log_9^3} = 6 \Rightarrow x^{\log_9^3} = 3 \Rightarrow x^{\log_{3^2}^3} = 3 \Rightarrow x^{\frac{1}{2}} = 3 \Rightarrow x = 9$$

مثال۳۷: اگر $\log_y x . \log_{y^3\sqrt{y}}^{y^2} = 4$ باشد $\log_{y^2}^{\sqrt{x}}$ چه‌قدر است؟ **(آزاد تجربی – ۸٦)**

۱) ٤ ۲) ۳ ۳) $\frac{4}{7}$ ٤) $\frac{7}{4}$

$$\log_y^x \times \log_{y^{3+\frac{1}{2}}}^{y^2} = 4 \Rightarrow \log_y^x \times \frac{2}{\frac{7}{2}} = 4 \Rightarrow \log_y^x = 7$$

$$\log_{y^2}^{\sqrt{x}} = \frac{\frac{1}{2}}{2}\log_y^x = \frac{1}{4} \times 7 = \frac{7}{4}$$

مثال۳۸: اگر β , α ریشه‌های معادله $3\log_{\sqrt{2}}^x - \log_{\sqrt{x}}^2 = 4$ باشند $\log_8(\frac{\alpha}{\beta})$ کدام است؟ $(\alpha > \beta)$

۱) ۲ ۲) $\frac{4}{9}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ٤) $\frac{4}{3}$

$$3\log_{\sqrt{2}}^x - \log_{\sqrt{x}}^2 = 4 \Rightarrow 6\log_2^x - 2\log_x^2 = 4$$

$$\Rightarrow 3\log_2^x - \frac{1}{\log_2^x} = 2 \quad , \quad \log_2^x = t$$

$$\Rightarrow 3t-\frac{1}{t}=2\Rightarrow 3t^2-2t-1=0\Rightarrow \begin{vmatrix} t=1 \\ t=-\frac{1}{3}\end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \log_2^x=1\Rightarrow x=2 & \Rightarrow \alpha=2 \\ \log_2^x=-\frac{1}{3}\Rightarrow x=2^{-\frac{1}{3}} & \Rightarrow \beta=2^{-\frac{1}{3}}\end{cases} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta}=\frac{2}{2^{-\frac{1}{3}}}=2^{\frac{4}{3}}$$

$$\Rightarrow \log_8^{(\frac{\alpha}{\beta})}=\log_{2^3}^{2^{\frac{4}{3}}}=\frac{4}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$$

مثال۳۹: از معادله $\log(x^3+1)-\frac{1}{2}\log(x^2+2x+1)=\log 6-\log 2$ **مقدار** $\log_4^x$ **کدام است؟**

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) $\frac{1}{2}$ ٤) $-\frac{1}{2}$

$$\log(x^3+1)-\frac{1}{2}\log(x^2+2x+1)=\log\frac{6}{2}\Rightarrow \log(x^3+1)-\log((x+1)^2)^{\frac{1}{2}}=\log\frac{6}{2}\Rightarrow \log(x^3+1)-\log(x+1)=\log 3$$

$$\Rightarrow \log(\frac{x^3+1}{x+1})=\log 3\Rightarrow \frac{x^3+1}{x+1}=3\Rightarrow \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}=3\Rightarrow x^2-x+1=3\Rightarrow x^2-x-2=0\Rightarrow \begin{vmatrix} x=-1 & \text{غ ق ق} \\ x=2 & \text{ق ق}\end{vmatrix}$$

$$\log_4^2=\log_{2^2}^2=\frac{1}{2}\log_2^2=\frac{1}{2}$$

مثال۴۰: در معادله $\frac{1}{5-4\log x}+\frac{4}{1+\log x}=3$ **کدام است؟**

۱) یکی از ریشه‌ها دو برابر زیشه دیگر است. **۲) یکی از ریشه‌ها دو واحد بیش‌تر از ریشه دیگر است.**

۳) یکی از ریشه‌ها قرینه ریشه دیگر است. **٤) یکی از ریشه‌ها مربع ریشه دیگر است.**

فرض کنیم $\log x=t$ بنابراین داریم:

$$\frac{1}{5-4t}+\frac{4}{1+t}=3$$

$$1+t+4(5-4t)=3(1+t)(5-4t)\Rightarrow 1+t+20-16t=15+15t-12t-12t^2\Rightarrow 12t^2-18t+6=0\Rightarrow 2t^2-3t+1=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=\frac{1}{2}\end{cases} \xrightarrow{t=\log x} \begin{cases} \log x=1\Rightarrow x=10 \\ \log x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\sqrt{10}\end{cases}$$

بنابراین یکی از ریشه‌ها ، مربع ریشه دیگر است.

مثال۴۲: اگر $\log(3x-2)=\begin{vmatrix}\log 50 & \log 2 \\ \log 2 & \log 50\end{vmatrix}$ **آن‌گاه مجموع ارقام x کدام است؟**

۱) ۷ ۲) ۹ ۳) ۱۱ ٤) ۱۳

گزینه ۳ صحیح است.

مثال۴۳: معادله $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x^2-2x}=\sin(\frac{11\pi}{6})$ **چند جواب دارد؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ٤) ۰

$$\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x^2-2x}=\sin\left(\frac{12\pi-\pi}{6}\right)\Rightarrow \log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x^2-2x}=\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)\Rightarrow \log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x^2-2x}=-\frac{1}{2}\Rightarrow \log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x^2-2x}=\log_{\frac{1}{3}}^{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2-2x}=\sqrt{3}\Rightarrow x^2-2x=3\Rightarrow x^2-2x-3=0\Rightarrow \begin{cases}x_1=-1\\ x_2=2\end{cases}$$

دو جواب بدست آمده مورد قبول است (صدق در معادله)

مثال۴۶: اگر $\log_2^{\sin(10^\circ)}=\alpha$، مقدار $\log_2\left(\frac{\sin 20^\circ+\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ}\right)$، **کدام است؟** **(سراسری ریاضی – ٦٢)**

۱) $-1-\alpha$　　۲) $-1+\alpha$　　۳) $1-\alpha$　　٤) $1+\alpha$

$$\log_2^{\frac{\sin 20^\circ+\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ}}=\log_2\left(\frac{2\sin\frac{20^\circ+40^\circ}{2}\times\cos\frac{20^\circ+40^\circ}{2}}{\sin 20^\circ}\right)=\log_2^{\frac{2\sin 30^\circ\times\cos(-10^\circ)}{\sin 20^\circ}}=\log_2^{\frac{2\sin 30^\circ\times\cos 10^\circ}{2\sin 10^\circ\cos 10^\circ}}=$$

$$\log_2^{\frac{\sin 30^\circ}{\sin 10^\circ}}=\log_2^{\frac{\frac{1}{2}}{\sin 10^\circ}}=\log_2^{\left(\frac{1}{2\sin 10^\circ}\right)}=-\log_2^{2\sin 10^\circ}=-\log_2^2-\log_2^{\sin 10^\circ}=-1-\alpha$$

یادآوری:

$$\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$

مثال۴۷: دستگاه لگاریتمی روبه‌رو را حل کنید.

$$\begin{cases}\log_3 x+\log_3 y=0\\ x+y=2\end{cases}$$

مثال۴۸: در دستگاه $\begin{cases}y+\log x=1\\ x^y=0/01\end{cases}$ مقدار y کدام است؟

۱) ۲ یا ۱-　　۲) ۱ یا ۲-　　۳) صفر یا ۵　　٤) ۵ یا ۲-

$$x^y=0/01\Rightarrow \log x^y=\log 0/01\Rightarrow y\log x=-2$$

$$\log x=-\frac{2}{y}\Rightarrow y+\log x=1\Rightarrow y-\frac{2}{y}=1$$

$$\Rightarrow y^2-y-2=0\Rightarrow\begin{cases}y=-1\\ y=2\end{cases}$$

نامعادلات لگاریتمی

در نامعادلات لگاریتمی با استفاده از قوانین لگاریتم سعی می‌کنیم نامعادله را به مقایسه دو لگـاریتم با مبناهای برابر تبدیل کنیم سپس از نکته‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\mathrm{Log}_a^x > \mathrm{Log}_a^y \Rightarrow \begin{cases} \text{اگر} \quad 0<a<1 & \Rightarrow x<y \\ \text{اگر} \quad a>1 & \Rightarrow x>y \end{cases}$$

بعد از حل نامعادله دامنه را تعیین می‌کنیم و با جواب اشتراک می‌گیریم تا جواب نهایی بدست آید.

مثال۴۹: اگر $0<a<1$ کدام همواره درست است؟

۱) $\log_3 a > 0$ ۲) $\log_a 5 > \log_a 2$ ۳) $\frac{1}{\log_a 7} > \frac{1}{\log_a 5}$ ۴) $\log_3 a > 1$

$0<a<1 \Rightarrow \log_3 a<0 , \log_a 5<\log_a 2 , \log_a 7<\log_a 5<0$

$\Rightarrow \frac{1}{\log_a 7} > \frac{1}{\log_a 5}$

مثال۵۰: اگر $A=(\log_2 3)^{-1}+(\log_5 3)^{-1}$ کدام درست است؟

۱) $A \geq 2$ ۲) $A<2$ ۳) $A>3$ ۴) $2<A<3$

$A=\log_3 2+\log_3 5=\log_3 10 , 3^2<10<3^3 \Rightarrow 2<\log_3 10<3$

مثال۵۱: نامعادله‌های لگاریتمی زیر را حل کنید.

۱) $\mathrm{Log}_{0/5}^{(x-1)}>1$ ۲) $\mathrm{Log}_4^{\frac{x+1}{2}}<-1$

مثال۵۲: جواب نامعادله‌ی $\log_{\frac{1}{2}} x-1<0$ را به‌دست آورید.

دامنه : $x-1>0 \Rightarrow x>1 \quad (1)$

$\log_{\frac{1}{2}}^x-1<0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}^x<1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}^x<\log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x>\frac{1}{2} \ (2),(1)\cap(2)$

جواب : $x \in (1,+\infty)$

مثال۵۳: مجموعه جواب نامعادله‌ی $\log_x^{(x-2)}>\log_x^{(28-x)}$ چند عضو صحیح دارد؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۳ ۳) ۱۲ ۴) ۲۵

هر کدام از عبارت‌های $\log_x^{(28-x)}$ و $\log_x^{(x-2)}$ باید تعریف شده باشد بنابراین باید داشته باشیم.

$\begin{cases} x-2>0 \to x>2 \\ 28-x>0 \to x<28 \end{cases} \Rightarrow 2<x<28 \quad (1)$

از رابطه‌ی $\log_x^{(x-2)}>\log_x^{(28-x)}$ با توجه به $2<x<28$ داریم:

$x-۲>۲۸-x \Rightarrow ۲x>۳۰ \Rightarrow x>۱۵ \quad (۲)$

از روابط ۱ و ۲ نتیجه می‌شود که $۱۵<x<۲۸$ و داریم:

$۱۲=۱-۱۵-۲۸=$ تعداد اعداد صحیح در این بازه

مثال۵۴: نامعادله‌ی لگاریتمی $\log_{\frac{۱}{۵}}(x^۲-۴)\geq -۱$ را حل کنید.

مثال۵۵: نامعادله $\log_{۱۰}x+\log_{۱۰}(x-۲)\leq \log_{۱۰}۲۴$ را حل کنید.

$$\log_{۱۰}x+\log_{۱۰}(x-۲)\leq \log_{۱۰}۲۴ \Rightarrow \log_{۱۰}(x^۲-۲x)\leq \log_{۱۰}۲۴$$
$$\Rightarrow x^۲-۲x\leq ۲۴ \Rightarrow x^۲-۲x-۲۴\leq ۰ \Rightarrow (x-۶)(x+۴)\leq ۰ \Rightarrow -۴\leq x\leq ۶$$

اما $x>۰$ و $x-۲>۰$ پس $x>۲$ در نتیجه جواب $۲<x\leq ۶$.

مثال۵۶: مجموعه جواب نامعادله‌ی $\log_x(۳-x)<۱$ کدام است؟

۱) $(۱,۳)$ **۲)** $(۰,۳)-\{۱\}$ **۳)** $(\frac{۳}{۲},۳)$ **٤)** $(۰,۱)$

$\log_x(۳-x)<۱$

ابتدا دامنه‌ی تعریف را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۳-x>۰ \\ x>۰ \\ x\neq ۱ \end{cases} \Rightarrow ۰<x<۳\ ,\ x\neq ۱ \quad \text{مجموعه جواب}\ (۰,۳)-\{۱\}$$

$$۱)\ ۱<x<۳ \Rightarrow \log_x(۳-x)<۱ \Leftrightarrow ۳-x<x^۱ \Rightarrow ۳<۲x \Rightarrow x>\frac{۳}{۲}$$

$$\begin{cases} ۱<x<۳ \\ x>\frac{۳}{۲} \end{cases} \Rightarrow \frac{۳}{۲}<x<۳$$

$$۲)\ ۰<x<۱ \Rightarrow \log_x(۳-x)<۱ \Leftrightarrow ۳-x>x^۱ \Rightarrow ۳>۲x \Rightarrow x<\frac{۳}{۲} \qquad \xrightarrow{\cup} \frac{۳}{۲}<x<۳ \cup ۰<x<۱$$

$$\begin{cases} ۰<x<۱ \\ x<\frac{۳}{۲} \end{cases} \Rightarrow ۰<x<۱$$

مثال۵۷: نامعادله $x^{\log_{۱۰}x}>۱۰$ را حل کنید.

تابع لگاریتمی

با توجه به تابع‌نمایی $y=a^x$ و نمودار آن در می‌یابیم که تابعی یک به یک است. بنابراین دارای تابع معکوس می‌باشد. برای محاسبه تابع معکوس باید x را بدست آوریم، بنابراین لگاریتم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$a^b=c \Leftrightarrow \log_{\underset{\text{مبنا}}{a}}^{\overset{\text{نما یا آرگمان}}{c}}=b \qquad (c>0 \quad , \quad a>0 \quad , a\neq 1)$$

تابع معکوس تابع $(a>0\,,a\neq 1)\ y=a^x$ را به دست آورید.

$$f(x)=y=a^x \Rightarrow x=\log_a^y \quad \Rightarrow \quad y=f^{-1}(x)=\log_a^x$$

این تابع را تابع لگاریتم می‌نامیم.

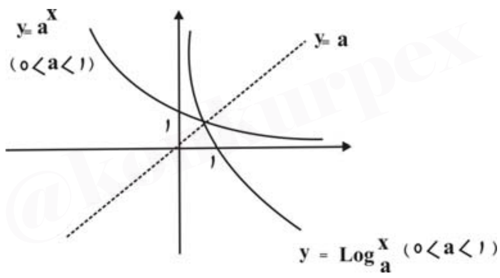
نکته: اگر تابع f را به صورت $f(x)=\log_{h(x)}^{g(x)}$ تعریف کنیم، دامنه‌ی آن به صورت زیر خواهد بود:

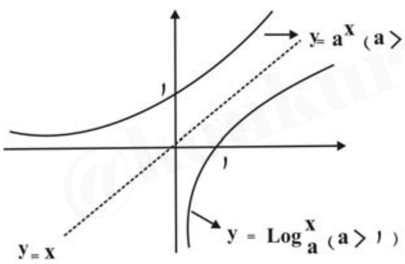
$$D_f=\{x\,|\,g(x)>0\,,h(x)>0\,,h(x)\neq 1\}$$

برای رسم تابع $y=\log_a^x$ از معکوس آن یعنی $y=a^x$ استفاده می‌کنیم. می‌دانیم معکوس یک تابع، قرینه‌ی تابع نسبت به خط $y=x$ است.

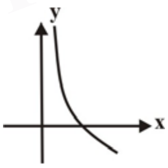
برای رسم این تابع دو حالت داریم:

الف) اگر $0<a<1$ باشد: ب) اگر $a>1$ باشد:



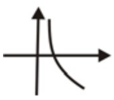


مثال۵۸: نمودار $y=\log_{3a-1}^x$ به‌صورت روبروست حدود a کدام است؟



۱) $a<\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}<a<\frac{2}{3}$ ۳) $a>\frac{1}{3}$ و $a\neq\frac{2}{3}$ ۴) $a>\frac{2}{3}$

می دانیم نمودار $y=\log_b^x$ $0<b<1$ باشد نزولی و به صورت

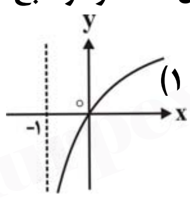


است بنابراین با توجه به شکلی که در سئوال برای $\log_{3a-1}^x$ رسم شده است $0<3a-1<1$ پس

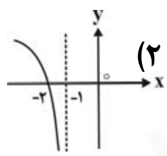
$$0<3a-1<1 \Rightarrow \quad 1<3a<2 \Rightarrow \frac{1}{3}<a<\frac{2}{3}$$

مثال۵۹: نمودار تابع $y=-\log(-x-1)$ کدام است؟

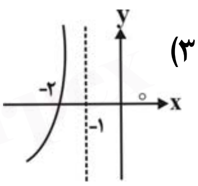
۱)



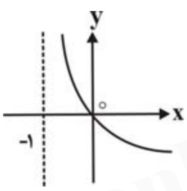
۲)



۳)



۴)

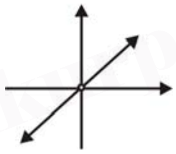


$y=-\log(-x-۱)\Rightarrow -x-۱>۰\quad Dy=x<-۱\quad Ry=(-\infty،+\infty)$

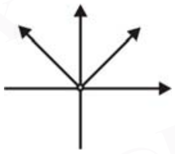
چون به ازای $x=-۲$ داریم $y=۰$ و از طرفی y تابعی صعودی است.

مثال۶۰: کدام‌یک نمودار تابع $=a^{\log_a x}$ می‌باشد. $(۰<a\neq ۱)$

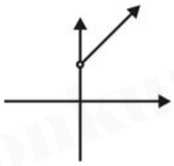
۱)



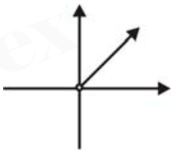
۲)



۳)



۴)



$y=a^{\log_a x}=x$ پس خط $y=x$ با شرط $x>۰$ است.

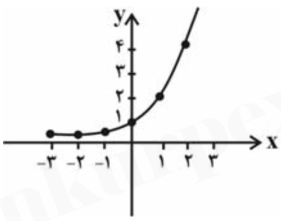
تابع نمایی

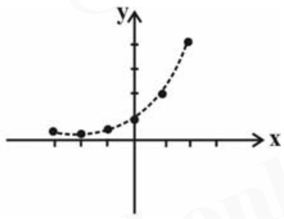
> !ë<>¤{x Ë{ê Áè° ¢! $y=a^x$!Üê a Ì·¶ î! Ùñ̀Ù ĩ!ç $a\neq ۱$!ç $a>۰$!ç xð Û ¥Ññ»w½ £Ü̈ð Û!¤{x Ëæäæ̈Mð ĩ!
> æxñ·é É ..Ĩ ¿è¶*!!

مثال۶۱: جدول زیر را در نظر بگیرید.

x	−۳	−۲	−۱	۰	۱	۲	۳	۴
$y=۲^x$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۴	۸	۱۶

نقاط بدست آمده را روی دستگاه مختصات نمایش می‌دهیم:

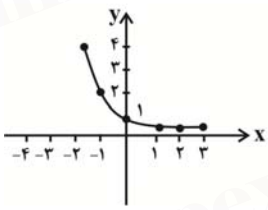


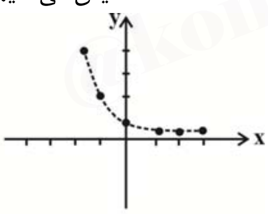


مثال۶۲: جدول زیر را در نظر بگیرید:

x	−۳	−۲	−۱	۰	۱	۲	۳
$y=(\frac{۱}{۲})^x$	۸	۴	۲	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۸}$

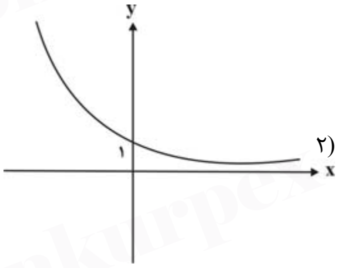
نقاط بدست آمده را روی دستگاه مختصات نمایش می‌دهیم:



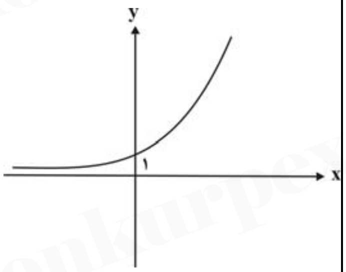


نتیجه: نمودار تابع‌نمایی $y=a^x$ در دو حالت کلی زیر بررسی می‌شود:

۱) $y=a^x \quad (0<a<1)$



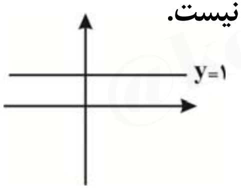
۲) $y=a^x \quad (a>1)$



تذکر: با توجه به نمودارهای دو تابع بالا ، واضح است که هر دو یک به یک می‌باشند.

تذکر: برای تابع $y=a^x$ در حالتی که $a=1$ نمودار به صورت تابع‌نمایی نخواهد بود و تابع بـه شـکل خط افقی $y=1$ تبدیل می‌شود.

در این حالت تابع یک به یک نیست.



تذکر: دامنه و برد تابع $y=a^x \ (a\neq 1,\ a>0)$ با توجه به نمودارهای آن عبارت است از:

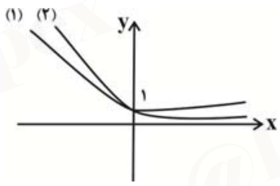
$D=\mathbb{R}$ **دامنه**

$R=(0,+\infty)$ **برد**

مقایسه‌ی دو نمودار $y=a^x$, $y=b^x$ **با شرط** $0<b<a<1$:

$(1): y=a^x$

$(2): y=b^x$



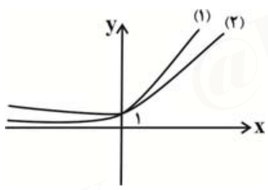
نتیجه:

$$0<b<a<1 \Rightarrow \begin{cases} a^x>b^x & x>0 \\ a^x<b^x & x<0 \\ a^x=b^x=1 & x=0 \end{cases}$$

مقایسه‌ی دو نمودار $y=a^x$, $y=b^x$ **با شرط** $1<b<a$:

$(1): y=a^x$

$(2): y=b^x$



نتیجه:

$$1 < b < a \Rightarrow \begin{cases} a^x > b^x & x > 0 \\ a^x < b^x & x < 0 \\ a^x = b^x = 1 & x = 0 \end{cases}$$

مثال۶۳: نمودارهای توابع $y = (\frac{1}{5})^x$ و $y = 5^x$, $y = (\frac{1}{3})^x$ و $y = 3^x$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و آن‌ها را در $x > 0$ و $x < 0$ و $x = 0$ مقایسه کنید.

الف) در $x > 0$ داریم:

$$5^x > 3^x > (\frac{1}{3})^x > (\frac{1}{5})^x$$

ب) در $x < 0$ داریم:

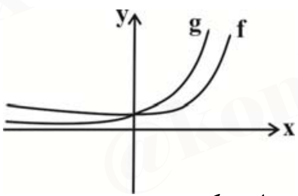
$$(\frac{1}{5})^x > (\frac{1}{3})^x > 3^x > 5^x$$

ج) در $x = 0$ داریم:

$$5^x = 3^x = (\frac{1}{3})^x = (\frac{1}{5})^x = 1$$

مثال۶۴: نمودار دو تابع $f(x) = 3^x$ و $g(x) = 5^x$ را رسم کنید و مقادیر x را چنان تعیین کنید که:

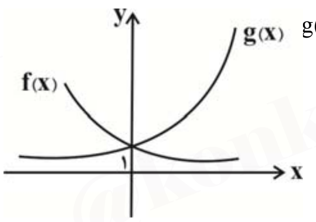
الف) $f(x) > g(x)$ **ب)** $g(x) > f(x)$



الف) $f(x) > g(x) \Rightarrow x < 0$ ب) $f(x) < g(x) \Rightarrow x > 0$

مثال۶۵: نمودار دو تابع $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ و $g(x) = 3^x$ را رسم کنید و مقادیر x را چنان بیابید که :

الف) $f(x) > g(x)$ **ب)** $g(x) > f(x)$



الف) $f(x) > g(x) \Rightarrow x < 0$

ب) $f(x) < g(x) \Rightarrow x > 0$

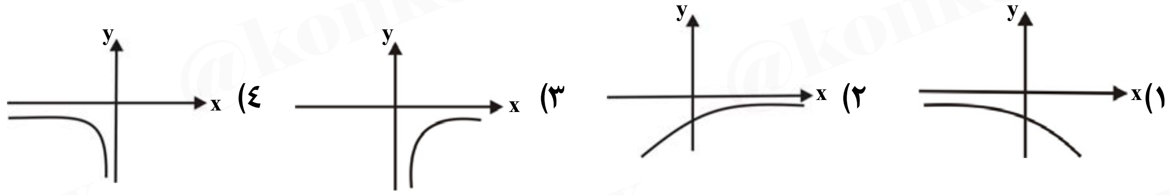
مثال۶۶: فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد تابع $y = (\frac{1}{2})^x + 3$ با محور y ها را تا نقطه‌ی برخورد تابع $y = 3^x - 1$ کدام است؟

۱) ۱ **۲)** ۲ **۳)** ۳ **٤)** ۴

نقطه‌ی برخورد $y = (\frac{1}{2})^x + 3$ با محور **y** ها نقطه‌ی $(0, 4)$ است و نقطه‌ی برخورد $y = 3^x - 1$ با محور **y** ها نقطه‌ی $(0, 0)$ است.

بنابراین فاصله‌ی این دو نقطه برابر۴ است و گزینه‌ی ۴ صحیح است.

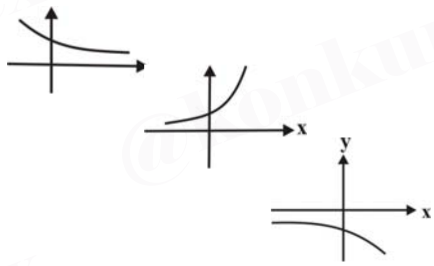
مثال۶۷: اگر $\cdot<a<۱$ باشد کدام نمودار $y=-a^{-x}$ است؟



با توجه به این که $\cdot<a<۱$ است نمودار $y=a^{x}$ به صورت

است در نتیجه $y=a^{-x}$ به شکل

و $y=-a^{-x}$ به‌صورت روبرو خواهد بود.



معادلات توابع‌نمایی

برای حل معادلات شامل توابع‌نمایی ، از قواعد توان استفاده می‌کنیم. گاهی نیز از تغییر متغیر و تجزیه کردن استفاده می‌کنیم.
به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال۶۸: معادلات زیر را حل کنید:

$۱)\ \ ۲^{x^۲+۱}=۸^{\frac{۲}{۳}x}$ $\qquad$ $۲)\ \ (\frac{۱}{۳})^{۲x-۵}=۸۱^{x+۱}$

$$۱)\quad ۲^{x^۲+۱}=(۲^۳)^{\frac{۲}{۳}x}\ \Rightarrow\ ۲^{x^۲+۱}=۲^{۲x}\ \Rightarrow\ x^۲+۱=۲x\ \Rightarrow\ x^۲-۲x+۱=\circ\ \Rightarrow\ (x-۱)^۲=\circ\ \Rightarrow\ x-۱=\circ\ \Rightarrow\ x=۱$$

$$۲)\quad (\frac{۱}{۳})^{۲x-۵}=۸۱^{x+۱}\ \Rightarrow\ (۳^{-۱})^{۲x-۵}=(۳^۴)^{x+۱}\ \Rightarrow\ ۳^{۵-۲x}=۳^{۴x+۴}\ \Rightarrow\ ۵-۲x=۴x+۴\ \Rightarrow\ ۶x=۱\ \Rightarrow\ x=\frac{۱}{۶}$$

مثال۷۰: معادله‌ی $۲۷^x+۱۲^x=۲\times۸^x$ را حل کنید.

$$(۳^۳)^x+(۲^۲)^x\times۳^x=۲\times(۲^۳)^x\ \Rightarrow\ (۳^x)^۳+(۲^x)^۲\times۳^x-۲(۲^x)^۳=\circ\ \xrightarrow{(۳^x=b\ \ ,\ ۲^x=a)}$$

$$b^۳+a^۲b-۲a^۳=\circ\Rightarrow b^۳-a^۳+a^۲b-a^۳=\circ\ \Rightarrow\ (b-a)\,(b^۲+a^۲+ab)+a^۲(b-a)=\circ$$

$$\Rightarrow\ (b-a)\,(۲a^۲+b^۲+ab)=\circ\ \Rightarrow\ b-a=\circ\ \Rightarrow\ b=a\ \Rightarrow\ ۳^x=۲^x\ \Rightarrow\ \boxed{x=\circ}$$

مثال۷۱: معادله‌ی $۳^x=۵^x-۴^x$ را حل کنید.

$$۳^x+۴^x=۵^x$$

طرفین تساوی بالا را بر ۵^x تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{۳^x}{۵^x}+\frac{۴^x}{۵^x}=\frac{۵^x}{۵^x}\ \Rightarrow\ (\frac{۳}{۵})^x+(\frac{۴}{۵})^x=۱$$

می‌توانیم $\frac{۳}{۵}$را $\sin\alpha$ و $\frac{۴}{۵}$ را $\cos\alpha$ در نظر بگیریم $(\alpha=۳۷^\circ)$ داریم:

$$\sin^x\alpha+\cos^x\alpha=۱\ \Rightarrow\ \boxed{x=۲}$$

مثال۷۲: ریشه‌های معادله‌ی $(۲-\sqrt{۳})^x+(۲+\sqrt{۳})^x=۴$ کدام‌اند؟

۱) ±۲ ۲) ۱ و ۲ ۳) ±۱ ٤) ۲ و ۱-

$$\frac{۱}{۲-\sqrt{۳}}=\frac{۱}{۲-\sqrt{۳}}\times\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}=\frac{۲+\sqrt{۳}}{۴-۳}=۲+\sqrt{۳}\Rightarrow(۲-\sqrt{۳})^x=a\Rightarrow(۲+\sqrt{۳})^x=\frac{۱}{a}$$

$$\Rightarrow a+\frac{۱}{a}=۴\Rightarrow\frac{a^۲+۱}{a}=۴\Rightarrow a^۲-۴a+۱=۰\Rightarrow a=\frac{۴\pm\sqrt{۱۲}}{۲}=۲\pm\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(۲-\sqrt{۳})^x=(۲-\sqrt{۳})^۱\Rightarrow x=۱\\(۲-\sqrt{۳})^x=۲+\sqrt{۳}=(۲-\sqrt{۳})^{-۱}\Rightarrow x=-۱\end{cases}$$

مثال۷۳: جواب معادله‌ی $(\frac{۱}{۶۴})^{۲x-۱}=۴^{۳x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) ۳ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ٤) ۵

$$(۴^{-۳})^{۲x-۱}=۴^{۳x}\Rightarrow۴^{-۶x+۳}=۴^{۳x}$$

$$\Rightarrow-۶x+۳=۳x\Rightarrow۹x=۳\Rightarrow x=\frac{۱}{۳}$$

مثال۷۴: مجموع ریشه‌های معادله‌ی $(\sqrt{۳})^{۲x^۲+۴}=۲۷^x$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ٤) ۵

$$(۳^{\frac{۱}{۲}})^{۲x^۲+۴}=(۳^۳)^x\Rightarrow x^۲+۲=۳x$$

$$\Rightarrow x^۲-۳x+۲=۰\Rightarrow(x-۱)(x-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۱\\x=۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow۱+۲=۳$$

مثال۷۵: ریشه‌ی معادله‌ی $۲^{۲x}-۲^{x+۱}=-۱$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱- ۳) ۱ ٤) ۲

گزینه ۱ صحیح است.