

دنباله اعداد

به رشته ای از اعداد که کنار یکدیگر چنان قرار گیرند که با مجموعه اعداد طبیعی و یا قطعه ای از مجموعه اعداد طبیعی در تناظر یک به یک باشند دنباله می گوییم که ضابطه آن جمله عمومی دنباله را مشخص

می سازد و آن را با a_n یا t_n نشان می دهند.

مثال ۱: اگر جمله عمومی دنباله ای به صورت $t_n = \frac{1+3n}{n+1}$ باشد.

الف) جمله ی دهم آن چیست؟
ب) چندمین جمله ی آن $\frac{8}{3}$ می باشد؟

مثال ۲: در یک تصاعد عددی $t_{3n-1} = 5n + 2$ است. جمله ی هفدهم این تصاعد کدام است؟

۳۲ (۱) ۶ (۲) ۷۸ (۳) ۴ (۴) اطلاعات مسئله کافی نیست.

$$t_{3n-1} = 5n + 2$$

$$t_{3n-1} = 17 \Rightarrow n = 6$$

$$t_{17} = 5 \times 6 + 2 = 32$$

دنباله حسابی (عددی)

تعریف: دنباله حسابی یا عددی دنباله ای است که اختلاف هر دو جمله ی متوالی آن برابر مقدار ثابتی مانند d باشد یا به عبارت دیگر دنباله ی $\{t_n\}$ دنباله حسابی است هرگاه برای n طبیعی بزرگ تر یا مساوی ۲ داشته باشیم:

$$t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = t_4 - t_3 = \dots = t_n - t_{n-1} = d$$

بنا به قرارداد عدد ثابت d را قدر نسبت دنباله حسابی می نامند.

مثال ۳: آیا دنباله ی $t_n = \frac{2t_{n-1} + 3}{4}$, $t_1 = 1$ یک دنباله حسابی است؟ در صورت مثبت بودن جواب ، قدر

نسبت دنباله را بنویسید و چند جمله ی اول دنباله را نمایش دهید.

برای هر n طبیعی بزرگ تر از ۱ داریم :

$$2t_n = 2t_{n-1} + 3 \Rightarrow t_n - t_{n-1} = \frac{3}{4}$$

بنابراین دنباله ی $\{t_n\}$ یک دنباله عددی با قدر نسبت $\frac{3}{4}$ می باشد و دنباله را می توان به صورت زیر نوشت:

$$1, \frac{5}{4}, \frac{7}{2}, \frac{11}{4}, 7, \dots$$

جمله‌ی n ام دنباله حسابی

اگر a_1 جمله‌ی اول یک تصاعد حسابی و d قدرنسبت آن باشد، جمله عمومی تصاعد یا جمله‌ی n ام آن از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

نکته: به طور کلی دنباله‌ای با جمله‌ی عمومی $t_n = an + b$ که در آن a و b اعداد حقیقی هستند دنباله حسابی با قدر نسبت a می‌باشد.

$$a_1, \underbrace{a_1 + d}_{a_2}, \underbrace{a_1 + 2d}_{a_3}, \dots \quad d \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} d > 0 & \text{صعودی} \\ d < 0 & \text{نزولی} \end{cases}$$

تذکره: در حالتی که $d = 0$ باشد دنباله حسابی به یک دنباله ثابت تبدیل می‌شود.

مثال ۴: اگر در یک دنباله حسابی $t_{n+1} = t_n + 3, t_1 = 4$ جمله‌ی n ام آن کدام است؟

$$\frac{1}{81} 4n - 1 \quad (4) \quad 2n + 3 \quad (3) \quad 3n + 1 \quad (2) \quad n + 5 \quad (1)$$

گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۵: چندمین جمله از تصاعد حسابی و ۸ و ۵ و ۲ برابر با ۵۶ است؟

$$21 \quad (4) \quad 20 \quad (3) \quad 19 \quad (2) \quad 18 \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} a_n = 56 \\ d = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow a_1 + (n-1)d = 56 \Rightarrow 2 + (n-1) \times 3 = 56 \Rightarrow 3(n-1) = 54 \Rightarrow n-1 = 18 \Rightarrow n = 19$$

مثال ۶: چندمین جمله‌ی دنباله $1+x, 4+x, 7+x, 10+x, \dots$ برابر $43+x$ است؟

مثال ۷: اگر در تصاعد حسابی داشته باشیم $t_5 - t_2 = 12$ و $t_3 + t_4 = 18$ تصاعد را مشخص کنید.

مثال ۸: اگر مجموع جملات اول، پنجم و نهم یک دنباله عددی ۳۶ و جمله‌ی پانزدهم آن برابر ۴۲ باشد، آنگاه قدر نسبت کدام است؟

$$4 \quad (4) \quad 3 \quad (3) \quad 2 \quad (2) \quad 4 \quad (1)$$

گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۹: در یک تصاعد عددی $t_1 + t_7 + t_{13} = 27$ اگر $t_9 = 7$ باشد قدر نسبت تصاعد چقدر است؟
(آزاد ریاضی - ۷۰)

(۱) ۲ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) $\frac{1}{2}$

$$\left. \begin{aligned} 3t_1 + 18d = 27 &\Rightarrow t_1 + 6d = 9 \\ t_9 = 7 &\Rightarrow t_1 + 8d = 7 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (t_1 + 8d) - (t_1 + 6d) =$$

$$t_1 + t_7 + t_{13} = 27 \Rightarrow t_1 + (t_1 + 6d) + (t_1 + 12d) = 27 \Rightarrow (7 - 9) \Rightarrow 2d = -2 \Rightarrow d = -1$$

مثال ۱۰: چند جمله از تصاعد حسابی $a_1 = 170$ و $a_7 = 161$ مثبت است؟

(آزاد تجربی - ۸۴)

(۱) ۱۷ (۲) ۱۸ (۳) ۲۰ (۴) ۱۹

گزینه ۴ صحیح است.

نکته: اگر دو جمله غیر متوالی از یک دنباله عددی معلوم باشد، می توانیم از رابطه‌ی زیر استفاده کنیم:

$$d = \frac{a_n - a_m}{n - m} \Rightarrow a_n - a_m = (n - m)d$$

مثال ۱۱: در یک تصاعد عددی جمله‌ی پنجم برابر ۷- و جمله‌ی نهم برابر ۲ است. قدر نسبت این تصاعد کدام است؟

(۱) $-\frac{5}{4}$ (۲) $\frac{9}{4}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴) $-\frac{9}{4}$

گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۱۲: در یک دنباله عددی $t_6 = 20$ ، $t_{11} = 30$ ، آنگاه t_{17} کدام است؟

(۱) ۴۲ (۲) ۳۶ (۳) ۴۸ (۴) ۴۰

گزینه ۱ صحیح است.

تذکره: اگر a و b و c سه جمله‌ی متوالی یک تصاعد حسابی باشند آن گاه $2b = a + c$ که b را واسطه‌ی حسابی بین a و c می‌گوییم.

مثال ۱۳: اگر $5x - 2, x + 1, 3$ جمله‌های متوالی یک دنباله حسابی باشند، x کدام است؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{-2}{3}$ (۴) 3

$$2(x+1) = (5x-2) + 3 \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

مثال ۱۴: اگر a, b, c و همچنین $2b, c + 3, a + 1$ تشکیل دنباله حسابی بدهند، b کدام است؟

(۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۱۵: سه عدد ناصفر تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند اگر به اولی یک واحد و به سومی پنج واحد اضافه کنیم به دومی چه قدر بیفزاییم تا اعداد حاصل نیز تشکیل تصاعد حسابی دهند؟

(۱) 3 (۲) 4 (۳) 6 (۴) 12

چون سه عدد ناصفر c و b و a تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند پس داریم $2b = a + c$ و برای این که اعداد $c + 5, b + x, a + 1$ نیز تشکیل تصاعد حسابی بدهند باید $b + x$ واسطه‌ی حسابی بین دو عدد $a + 1, c + 5$ باشد یعنی:

$$2(b+x) = a+1+c+5 \Rightarrow 2b+2x = a+c+6$$

$$\xrightarrow{2b=a+c} 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

نکته: (قاعده‌ی اندیس‌ها)

در تصاعد حسابی با جمله عمومی a_n داریم:

$$m + n = p + q \Rightarrow a_n + a_m = a_p + a_q$$

مثال ۱۶: اگر رابطه‌ی $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 60$ بین جملات تصاعد حسابی برقرار باشد، جمله‌ی پنجم کدام است؟

(۱) 6 (۲) 8 (۳) 10 (۴) 12

گزینه ۴ صحیح است.

مثال ۱۷: جملات هشتم و چهاردهم یک دنباله حسابی به ترتیب ۱۴ و ۵ می‌باشند جمله‌ی دوم و جمله‌ی سوم این دنباله را پیدا کنید.

$$a_7 \leftarrow a_8 \rightarrow a_{14}$$

$$2a_8 = a_7 + a_{14} \Rightarrow 28 = a_7 + 5 \Rightarrow a_7 = 23$$

$$\begin{cases} a_8 = 14 \\ a_{14} = 5 \end{cases} \quad d = \frac{a_n - a_m}{n - m} \Rightarrow d = \frac{a_{14} - a_8}{14 - 8} = \frac{5 - 14}{6} = -\frac{3}{2} \Rightarrow a_3 - a_7 = d = a_3 - 23 = -\frac{3}{2} \Rightarrow a_3 = \frac{43}{2}$$

مثال ۱۸: در یک دنباله حسابی $a_{10} - a_5 = 35$ ، $a_{15} = 28$ قدر نسبت دنباله را پیدا کنید.

تذکره: سه جمله‌ی متوالی تصاعد عددی را که مجهول باشند به صورت زیر فرض می‌کنیم:

$$x - d, x, x + d$$

مثال ۱۹: مجموع سه عدد که تشکیل دنباله عددی می‌دهند، ۲۱ و حاصل ضرب آن‌ها ۱۶۸ می‌باشد. سه عدد را به دست می‌آورید.

مثال ۲۰: اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل دنباله حسابی با قدر نسبت d می‌دهند مساحت این مثلث بر حسب d چیست؟

مثال ۲۱: مجموع سه جمله‌ی اول یک دنباله حسابی 30 و مجموع مربعات جملات اول و دوم برابر 116 است، اگر جمله‌ی پنجم بر 13 بخش پذیر باشد، جمله‌ی اول آن را بیابید.

مثال ۲۲: اگر $2x - \frac{y}{3}$ و x و $x - y$ زوایای یک مثلث باشند که سه جمله متوالی یک تصاعد حسابی هستند کوچکترین زاویه این مثلث چند درجه است؟

۳۰ (۴)

۲۵ (۳)

۲۰ (۲)

۱۵ (۱)

اگر a ، b و c سه جمله متوالی یک تصاعد حسابی باشند آن گاه $2b = a + c$ پس:

$$2x = (x - y) + \left(2x - \frac{y}{3}\right) \Rightarrow 2x = 3x - \frac{4y}{3} \Rightarrow x = \frac{4y}{3}$$

از طرفی مجموع زوایای داخلی یک مثلث برابر 180° است بنابراین

$$(x - y) + x + \left(2x - \frac{y}{3}\right) = 180 \Rightarrow 4x - \frac{4y}{3} = 180 \xrightarrow{x = \frac{4y}{3}}$$

$$4x - x = 180 \Rightarrow x = 60 \Rightarrow y = 45$$

بنابراین زوایای مثلث عبارتند از: 105° ، 60° ، 15° و کوچکترین زاویه مثلث برابر 15° است.

نکته: اگر بین دو عدد a و b و m واسطه‌ی حسابی قرار دهیم به یک تصاعد حسابی با $m+2$ جمله

$$d = \frac{b-a}{m+1}$$

می‌رسیم که قدرنسبت آن از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

مثال ۲۳: اگر اعداد 16 - و 20 و پنج جمله بین آن‌ها تشکیل تصاعد عددی دهند آن گاه مجموع این پنج جمله کدام است؟

۱۴ (۴)

۸ (۳)

۵ (۲)

۱۰ (۱)

گزینه ۱ صحیح است.

مجموع جملات تصاعد عددی

مجموع n جمله‌ی اول هر دنباله را با S_n نمایش می‌دهیم و داریم:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad \text{یا} \quad S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

در دنباله حسابی S_n بر حسب n از درجه‌ی ۲ است.

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

مثال ۲۴: جملات چهارم و شانزدهم از یک دنباله حسابی به ترتیب ۱ و ۲۵ است. مجموع ده جمله‌ی اول آن چقدر است؟

مثال ۲۵: جمله بیستم یک دنباله حسابی برابر ۱۰۰ است، مجموع ۳۹ جملهی نخستین آن را پیدا کنید.

مثال ۲۶: جملات پنجم و نهم از یک تصاعد حسابی به ترتیب ۱ و ۷ می‌باشند، مجموع ۱۲ جملهی اول آن کدام است؟

۳۹ (۴) ۴۲ (۳) ۳۶ (۲) ۳۳ (۱)

$$d = \frac{a_9 - a_5}{9 - 5} = \frac{7 - 1}{4} = \frac{3}{2}, \quad a_5 = a_1 + 4d \Rightarrow 1 = a_1 + 4\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow a_1 = -5$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_{12} = \frac{12}{2}(-10 + 11\left(\frac{3}{2}\right)) = 39$$

مثال ۲۷: مجموع n جمله یک تصاعد عددی از رابطه $s_n = n^2 + 2n$ به دست می‌آید، مجموع جملات هفتم و هشتم و نهم چقدر است؟ (آزاد تجربی - ۸۱)

۷۶ (۴) ۳۶ (۳) ۵۱ (۲) ۷۲ (۱)

$$a_7 + a_8 + a_9 = s_9 - s_6 = (81 + 18) - (36 + 12) = 51$$

مثال ۲۸: در یک تصاعد حسابی جملات دوم و هشتم قرینه‌اند. جمله هفتم برابر چهار است. مجموع هشت جمله اول چقدر است؟ (آزاد ریاضی - ۸۲)

-۸ (۴) ۴ (۳) صفر (۲) ۱۸ (۱)

گزینه ۴ صحیح است.

مثال ۲۹: در یک تصاعد حسابی جمله اول برابر ۱ و مجموع ۵ جمله اول آن $\frac{1}{4}$ مجموع ۵ جمله دوم آن است. جمله دوم تصاعد کدام است؟

۵ (۴) ۴ (۳) -۱ (۲) -۲ (۱)

مجموع n جمله دوم برابر است با: $S_{2n} - S_n$

$$S_5 = \frac{1}{4}(S_{10} - S_5) \Rightarrow 4S_5 = S_{10} - S_5 \Rightarrow 5S_5 = S_{10}$$

$$5S_5 = S_{10} \Rightarrow 5 \times \frac{5}{2}(2a_1 + 4d) = \frac{10}{2}(2a_1 + 9d)$$

$$\xrightarrow{a_1=1} \frac{5}{2}(2 + 4d) = 2 + 9d \rightarrow 10 + 20d = 4 + 18d \rightarrow d = -3$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2}(2a_1 + 4d) = 2a_1 + 9d$$

$$\Rightarrow a_2 = a_1 + d = -2$$

مثال ۳۰: در تصاعد عددی $۲, ۸, ۱۴, \dots$ مجموع ده جمله اول تصاعد چه قدر از جمله اول بیش تر است؟

(۴) ۳۹۸

(۳) ۲۹۸

(۲) ۳۸۸

(۱) ۲۸۸

گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۳۱: در یک تصاعد عددی با جمله اول a اگر یک واحد به قدر نسبت جملات افزوده شود آن گاه به مجموع ۲۰ جمله اول چقدر افزوده خواهد شد؟ (سراسری ریاضی - ۸۳)

(۴) ۱۹۰

(۳) ۱۸۰

(۲) ۱۷۰

(۱) ۱۶۰

$$S_1 = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_1 = 10 \cdot (2a_1 + 19d)$$

$$S_2 = 10 \cdot (2a_1 + 19(d+1)) = 10 \cdot (2a_1 + 19d) + 190 \Rightarrow S_2 = 190 + S_1$$

مثال ۳۲: در یک تصاعد عددی به جمله اول، ۴ واحد و به قدر نسبت، ۲ واحد اضافه می کنیم به مجموع ده جمله اول چند واحد اضافه می شود؟

(۴) ۱۳۰

(۳) ۱۴۰

(۲) ۲۶۰

(۱) ۲۸۰

گزینه ۴ صحیح است.

مثال ۳۳: در یک تصاعد عددی که ۲۱ جمله دارد، جمله ی وسطی برابر ۳۱ می باشد. مجموع جمله ها کدام است؟

(۴) ۶۹۵

(۳) ۷۲۰

(۲) ۶۵۱

(۱) ۶۵۰

گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۳۴: مجموع سه جمله اول یک تصاعد حسابی برابر با صفر و مجموع نشش جمله اول آن ۲۷ است چند جمله این تصاعد کوچک تر از ۱۰ می باشد؟

(۴) ۶ جمله

(۳) ۴ جمله

(۲) ۷ جمله

(۱) ۵ جمله

$$\begin{cases} S_3 = 0 \Rightarrow \frac{3}{2} (2a_1 + (3-1)d) = 0 \Rightarrow 3a_1 + 3d = 0 \Rightarrow a_1 = -d \quad (1) \\ S_6 = 27 \Rightarrow \frac{6}{2} (2a_1 + (6-1)d) = 27 \Rightarrow 2a_1 + 5d = 9 \quad (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1)(2)} 2(-d) + 5d = 9 \Rightarrow 3d = 9 \Rightarrow d = 3 \xrightarrow{(1)} a_1 = -3$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d = -3 + 3(n-1) = 3n - 6 \Rightarrow a_n < 10 \Rightarrow 3n - 6 < 10 \Rightarrow n < \frac{16}{3} \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 1, 2, 3, 4, 5$$

مثال ۳۵: اندازه‌های زوایای داخلی یک ضلعی محدب تصاعد عددی می‌سازند. اگر کوچک‌ترین زاویه 110° و بزرگ‌ترین زاویه 170° باشد. n کدام است؟

- ۶ (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)

$$\text{مجموع زوایای داخلی } n \text{ ضلعی محدب} = (n-2) \times 180$$

$$a_1 = 110, a_n = 170$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) \Rightarrow (n-2) \times 180 = \frac{n}{2} (110 + 170) \Rightarrow n = 9$$

مثال ۳۶: اگر زوایای یک ۹ ضلعی محدب تشکیل یک تصاعد حسابی بدهند، زاویه‌ی وسطی چند درجه است؟

- ۳۰ (۱) ۹۰ (۲) ۱۴۰ (۳) ۱۶۰ (۴)

گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۳۷: در یک تصاعد عددی، S_n مجموع n جمله اولیه و $S_{2n-5} = 4n^2$ آن گاه a_1 کدام است؟

- ۲۹ (۱) ۲۲۵ (۲) ۱۹۶ (۳) ۱۷ (۴)

$$a_{1.} = S_{1.} - S_4 \Rightarrow \begin{cases} S_{1.} \Rightarrow n = \frac{15}{2} \Rightarrow S_{1.} = 4 \times \frac{225}{4} = 225 \\ S_4 \Rightarrow n = 7 \Rightarrow S_4 = 4 \times 49 = 196 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_{1.} = 225 - 196 = 29$$

مثال ۳۸: اگر جمله‌ی سوم یک دنباله حسابی ۹ و تفاضل جملات هفتم و دوم آن برابر ۲۰ باشد، مجموع چه تعداد از جملات با شروع از جمله اول، برابر ۹۱ است؟

مثال ۳۹: تعداد اعداد سه رقمی که رقم سمت راست آن‌ها ۴ بوده ولی بر ۴ بخش پذیر نیستند، کدام است؟

(۱) ۹۰ (۲) ۴۵ (۳) ۳۰ (۴) ۵۵

اعداد سه رقمی که رقم سمت راست آن‌ها ۴ بوده ولی بر ۴ بخش پذیر نیستند تشکیل تصاعد عددی زیر را می‌دهند:

۱۱۴, ۱۳۴, ۱۵۴, ۱۷۴, ..., ۹۹۴

$$\begin{cases} a_1 = 114 \\ d = 20 \\ a_n = 994 \\ n = ? \end{cases} \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 994 = 114 + (n-1) \times 20 \Rightarrow n = 45$$

دنباله هندسی

دنباله هندسی دنباله‌ای است از اعداد مخالف صفر به طوری که خارج قسمت هر جمله بر جمله قبلی مقدار ثابتی مانند q باشد $q \neq 0$ است و موسوم به قدر نسبت دنباله هندسی می‌باشد یا به عبارت دیگر دنباله‌ی $\{t_n\}$ دنباله هندسی است، هرگاه برای هر n طبیعی بزرگ‌تر یا مساوی ۲ داشته باشیم:

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = \frac{t_4}{t_3} = \dots = \frac{t_n}{t_{n-1}} = q$$

مثال ۴۰: کدام یک از دنباله‌های زیر دنباله هندسی است؟

(۱) $t_n = n^2 \times 2^n$ (۲) $t_n = 3^n \times 2^n$ (۳) $t_n = 3^{n^2}$ (۴) $t_n = \frac{n}{2^n}$

$$\frac{t_n}{t_{n-1}} = \frac{3^n \times 2^n}{3^{n-1} \times 2^{n-1}} = 3 \times 2 = 6$$

تساوی فوق نشان می‌دهد که $t_n = 3^n \times 2^n$ دنباله هندسی با قدر نسبت ۶ است.

جمله‌ی nام دنباله هندسی

اگر a_1 جمله‌ی اول یک تصاعد هندسی و q قدرنسبت آن باشد، آن‌گاه جمله عمومی یا جمله‌ی nام آن از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

اگر q قدرنسبت یک دنباله‌ی هندسی باشد، وضعیت یکنوایی دنباله‌ی هندسی به صورت زیر است:

دنباله‌ی نزولی است

دنباله‌ی صعودی است

دنباله‌ی غیر یکنوا است

$$\Rightarrow 0 < q < 1$$

$$\Rightarrow q > 1$$

$$\Rightarrow q < 0$$

در حالت $q = 1$ ، دنباله به یک دنباله‌ی ثابت تبدیل می‌شود.

مثال ۴۱: هرگاه در یک تصاعد هندسی $a_3 a_5 = 3a_7$ باشد، در آن صورت a_1 کدام است؟

۳ (۴)

۶ (۳)

۸ (۲)

۳ (۱)

گزینه ۴ صحیح است.

مثال ۴۲: در یک تصاعد هندسی با قدرنسبت ۲ حاصل $\frac{a_1 a_7}{a_4^2}$ کدام است؟ (آزاد ریاضی - ۸۶)

۴ (۴)

$\frac{1}{4}$ (۳)

۱۶ (۲)

$\frac{1}{16}$ (۱)

گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۴۳: مجموع سه جمله اول یک تصاعد هندسی نزولی ۵ برابر جمله‌ی دوم است. قدرنسبت این تصاعد کدام است؟

$3 + \sqrt{2}$ (۴)

$2 + \sqrt{3}$ (۳)

$2 - \sqrt{3}$ (۲)

$2 \pm \sqrt{3}$ (۱)

$$a_1 + a_2 + a_3 = 5a_2$$

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 5a_1 q \Rightarrow 1 + q + q^2 = 5q \Rightarrow q^2 - 4q + 1 = 0 \Rightarrow q = 2 \pm \sqrt{3}$$

چون تصاعد هندسی نزولی است پس $q < 1 \Rightarrow q = 2 - \sqrt{3}$ قابل قبول است.

مثال ۴۴: در یک تصاعد هندسی صعودی $a_5 - a_7 = \sqrt{2}$ و $a_8 - a_6 = 2\sqrt{2}$ است قدرنسبت تصاعد کدام است؟

$2\sqrt{2}$ (۴)

$\sqrt{3}$ (۳)

$\sqrt{2}$ (۲)

۲ (۱)

$$a_5 - a_3 = \sqrt{2} \Rightarrow a_1 q^4 - a_1 q^2 = \sqrt{2} \Rightarrow a_1 q^2 (q^2 - 1) = \sqrt{2}$$

$$a_7 - a_5 = 2\sqrt{2} \Rightarrow a_1 q^6 - a_1 q^4 = 2\sqrt{2} \Rightarrow a_1 q^4 (q^2 - 1) = 2\sqrt{2}$$

حاصل طرفین را برهم تقسیم می‌نماییم.

$$\frac{a_1 q^4 (q^2 - 1)}{a_1 q^2 (q^2 - 1)} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow q^2 = 2 \Rightarrow q = \sqrt{2}$$

نکته: (قاعده‌ی اندیس‌ها)

در تصاعد هندسی با جمله عمومی a_n داریم:

$$n + m = p + q \Rightarrow a_n a_m = a_p a_q$$

مثال ۴۵: در یک تصاعد هندسی رابطه‌ی $a_2 a_6 a_{14} = 4a_8^3$ برقرار است. قدرنسبت کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) ۴

گزینه ۱ صحیح است.

نکته: در تصاعد هندسی رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\frac{a_n}{a_m} = \frac{a_1 q^{n-1}}{a_1 q^{m-1}} = q^{n-m}$$

مثال ۴۶: در یک تصاعد هندسی اگر جمله هفتم و دوم به ترتیب ۳۵۲ و ۱۱ باشند، قدرنسبت تصاعد کدام است؟

(۱) ۵ (۲) ۲ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{9}{4}$

گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۴۷: جمله‌ی دوم یک تصاعد هندسی $\frac{1}{3}$ و جمله‌ی چهارم $\frac{1}{27}$ است. جمله‌ی هفتم کدام است؟

(۱) $\frac{1}{243}$ (۲) $\pm \frac{1}{243}$ (۳) $\frac{1}{729}$ (۴) $\pm \frac{1}{729}$

$$\frac{a_4}{a_2} = q^{4-2} = q^2 \Rightarrow \frac{\frac{1}{27}}{\frac{1}{3}} = q^2 \Rightarrow q^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow q = \pm \frac{1}{3}$$

$$a_V = a_1 q^6 = (a_1 q) q^5 = a_2 q^5 = \frac{1}{3} \left(\pm \frac{1}{3}\right)^5 = \pm \frac{1}{729}$$

مثال ۴۸: در یک تصاعد هندسی، جمله اول برابر ۲ و نسبت جمله هشتم به مربع جمله سوم نیز برابر ۲ می‌باشد. قدر نسبت این تصاعد کدام است؟

(۱) $2\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt[3]{4}$ (۴) $\sqrt[3]{2}$

گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۴۹: حاصل ضرب پنج عدد که تصاعد هندسی می‌سازند ۲۴۳ است. $a_1 \times a_5$ برابر است با:

(۱) ۹ (۲) ۲۷ (۳) $9\sqrt{3}$ (۴) $18\sqrt{3}$

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 \times a_5 = 243 \Rightarrow (a_1)(a_1 q)(a_1 q^2)(a_1 q^3)(a_1 q^4) = 243$$

$$a_1^5 q^{10} = 3^5 \Rightarrow a_1 q^2 = 3$$

$$a_1 \times a_5 = a_1 \times a_1 q^4 = a_1^2 q^4 = (a_1 q^2)^2 = 3^2 = 9$$

مثال ۵۰: حاصل ضرب سه جمله‌ی اول یک تصاعد هندسی (-۱) است. جمله‌ی دوم این تصاعد هندسی کدام است؟

(۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ± 1 (۴) هیچ کدام

گزینه ۱ صحیح است.

نکته: اگر a و b و c سه جمله‌ی متوالی یک تصاعد هندسی باشند، b را واسطه‌ی هندسی (میانگین هندسی) دو عدد a و c می‌نامیم و $b^2 = ac$

مثال ۵۱: اگر اعداد $(m-5)$ ، $(m+1)$ و $(m-1)$ سه جمله‌ی متوالی تصاعد هندسی باشند، m کدام است؟

(۱) ۲ (۲) -۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۵۲: هرگاه x و $\sqrt{x^3}$ و $x-1$ جملات متوالی یک تصاعد هندسی باشند، در این صورت:

(۱) $x=0$ (۲) $x=1$ (۳) $x=-1$ (۴) $x \in \emptyset$

$$x(x-1) = (\sqrt{x^3})^2 \Rightarrow x(x-1) = x^3 \quad x=0 \text{ غفقی}$$

زیرا $0, 0, -1$ جملات یک تصاعد هندسی نیستند.

$$x \neq 0 \Rightarrow x-1 = x^2 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0 \quad \Delta = 1 - 4 = -3 < 0$$

پس جوابی برای x وجود ندارد. $x \in \emptyset$

مثال ۵۳: جملات نهم، هفتم و سوم یک تصاعد حسابی سه جمله‌ی متوالی یک تصاعد هندسی می‌باشند. نسبت جمله‌ی دهم به جمله‌ی هشتم این تصاعد حسابی کدام است؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{1}{9}$ (۴) $\frac{1}{11}$

گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۵۴: اگر میانگین حسابی دو عدد x و y دو برابر میانگین هندسی آنها باشد و $x > y > 0$ ، مقدار $\sqrt{\frac{x}{y}}$

کدام است؟

(۱) $2 - \sqrt{3}$ (۲) $2 + \sqrt{3}$ (۳) $3 - \sqrt{2}$ (۴) $3 + \sqrt{2}$

$$\frac{x+y}{2} = 2\sqrt{xy}$$

$$x+y = 4\sqrt{xy} \Rightarrow \frac{x+y}{y} = \frac{4\sqrt{xy}}{y}$$

$$\text{اگر: } \sqrt{\frac{x}{y}} = z \text{ و } \frac{x}{y} + 1 = 4\sqrt{\frac{x}{y}} \Rightarrow z^2 + 1 = 4z \Rightarrow z^2 - 4z + 1 = 0 \Rightarrow z = 2 \pm \sqrt{3}$$

چون $x > y > 0$ پس $\sqrt{\frac{x}{y}} > 1$ و از آنجایی که $2 - \sqrt{3} < 1$ پس $\sqrt{\frac{x}{y}} = 2 + \sqrt{3}$ قابل قبول است.

نکته: اگر بین دو عدد a و b و m واسطه‌ی هندسی درج کنیم به یک تصاعد هندسی با $m+2$ جمله

$$q = m + \sqrt{\frac{b}{a}}$$

می‌رسیم که قدرنسبت آن از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

مثال ۵۵: بین دو عدد a و b پنج واسطه هندسی با قدر نسبت n درج کرده‌ایم چه رابطه‌ای بین a و b

وجود دارد؟ ($n > 0$)

(۱) $a = n^6 b$ (۲) $b = n^6 a$ (۳) $a = \sqrt[n]{nb}$ (۴) $b = \sqrt[n]{na}$

گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۵۶: بین اعداد ۲ و ۱۸، ۵ واسطه‌ی هندسی درج شده است. قدرنسبت کدام است؟

- ۳ (۱) ± 3 (۲) $\pm \sqrt[3]{3}$ (۳) $\sqrt[3]{3}$ (۴)

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 18 \Rightarrow q = \sqrt[5]{\frac{18}{2}} = \sqrt[5]{9} = \pm \sqrt[3]{3} \\ m = 5 \end{cases}$$

مثال ۵۷: بین اعداد ۸ و $\frac{81}{2}$ ، سه واسطه‌ی هندسی درج کرده‌ایم. جمله‌ی دوم این تصاعد کدام است؟

- ۱۲ (۱) ۱۴ (۲) ۱۶ (۳) ۱۸ (۴)

$$q = \sqrt[4]{\frac{\frac{81}{2}}{8}} = \sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \sqrt[4]{\frac{3^4}{2^4}} = \frac{3}{2} \Rightarrow a_2 = a_1 q = 8 \times \frac{3}{2} = 12$$

مثال ۵۸: بین دو عدد ۲ و ۱۶۲ سه واسطه حسابی و سه واسطه هندسی (مثبت) درج می‌کنیم اگر جملات وسط را به ترتیب A و B بنامیم حاصل A-B کدام است؟

- ۷۶ (۱) ۷۰ (۲) ۶۴ (۳) ۶۲ (۴)

اگر سه واسطه حسابی بین ۲ و ۱۶۲ درج کنیم قدرنسبت تصاعد به دست آمده برابر است با: $d = \frac{162-2}{3+1} = 40$ بنابراین جملات تصاعد عبارتند از:



جمله وسط این تصاعد برابر است با $A=82$ اگر سه واسطه هندسی بین ۲ و ۱۶۲ درج کنیم داریم $q = \sqrt[4]{\frac{162}{2}} = 3$. بنابراین جملات تصاعد هندسی حاصل عبارتند از:



جمله‌ی وسط این تصاعد برابر $B=18$ است و $A-B=64$

نکته: در یک تصاعد هندسی مجموع n جمله اول تصاعد از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

مثال ۵۹: در یک تصاعد هندسی با قدرنسبت $q=2$ ، مجموع شش جمله‌ی اول چند برابر مجموع سه جمله‌ی اول است؟

(آزاد ریاضی - ۸۶)

- ۶ (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)

گزینه ۴ صحیح است.

مثال ۶۰: در یک تصاعد هندسی مجموع هشت جمله اول $\frac{5}{4}$ مجموع چهار جمله اول آن است جمله هفتم چند برابر جمله اول است؟

(سراسری ریاضی - ۸۵)

$$\frac{1}{16} \quad (1) \quad \frac{1}{8} \quad (2) \quad \frac{5}{32} \quad (3) \quad \frac{1}{4} \quad (4)$$

$$S_8 = \frac{5}{4} S_4 \Rightarrow \frac{S_8}{S_4} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{a(1-q^8)}{a(1-q^4)} = \frac{1-q^8}{1-q^4} = \frac{(1-q^4)(1+q^4)}{1-q^4} = 1+q^4 = \frac{5}{4} \Rightarrow q^4 = \frac{1}{4} \Rightarrow q^2 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a_7}{a_1} = \frac{a_1 q^6}{a_1} = (q^2)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

مثال ۶۱: حاصل $(1+x+x^2+\dots+x^{\sqrt{2}})(1-x+x^2-\dots+x^{\sqrt{2}})$ به ازای $x = \sqrt{2}$ کدام است؟

(سراسری ریاضی - ۸۲)

$$516 \quad (4) \quad 512 \quad (3) \quad 511 \quad (2) \quad 507 \quad (1)$$

گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۶۲: با فرض $f(x) = \frac{x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + 1}{x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + 1}$ و $x \neq 1$ حاصل $f(3)$ کدام است؟

$$27 \quad (4) \quad 61 \quad (3) \quad 70 \quad (2) \quad 81 \quad (1)$$

اول و قدر نسبت x و قدر نسبت x^2 و x^4 ، x^6 ، x^8 یک تصاعد هندسی با جمله اول ۱ و قدر نسبت x و x^2 ، x^3 ، x^4 ، x^5 یک تصاعد هندسی با جمله اول ۱ و قدر نسبت x می‌باشد.

پس با استفاده از فرمول $S_n = a_1 \left(\frac{1-q^n}{1-q} \right)$ داریم:

$$\begin{cases} 1+x^2+x^4+x^6+x^8 = \frac{1-(x^2)^5}{1-x^2} = \frac{1-x^{10}}{1-x^2} \\ 1+x+x^2+x^3+x^4 = \frac{1-x^5}{1-x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1-x^{10}}{1-x^2} \cdot \frac{1-x}{1-x^5} \Rightarrow f(x) = \frac{(1-x^5)(1+x^5)(1-x)}{(1-x^5)(1-x)(1+x)} = \frac{1+x^5}{1+x} \Rightarrow f(3) = \frac{1+3^5}{1+3} = \frac{244}{4} = 61$$

مثال ۶۳: تصاعد هندسی و $\frac{1}{4}$ و x و ۲ غیرنزولی است. مجموع شش جمله اول آن کدام است؟

(سراسری ریاضی - ۸۶)

$$\frac{23}{16} \quad (4) \quad \frac{11}{8} \quad (3) \quad \frac{21}{16} \quad (2) \quad \frac{41}{32} \quad (1)$$

گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۶۴: در یک تصاعد هندسی، مجموع ۴ جمله دوم تصاعد ۱۶ برابر مجموع ۴ جمله اول این تصاعد است. جمله پنجم تصاعد چند برابر جمله سوم آن است؟

$$\begin{aligned} & \text{۲ (۱)} \quad \text{۸ (۳)} \quad \text{۴ (۲)} \quad \text{۱۶۱ (۴)} \\ & (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) = 16(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \\ & \Rightarrow S_8 - S_4 = 16S_4 \Rightarrow S_8 = 17S_4 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^8)}{1-q} = 17 \times \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} \\ & \Rightarrow (1-q^8) = 17(1-q^4) \Rightarrow (1-q^4)(1+q^4) = 17(1-q^4) \\ & 1+q^4 = 17 \Rightarrow q^2 = 4 \Rightarrow \frac{a_5}{a_3} = \frac{a_1q^5}{a_1q^3} = q^2 = 4 \end{aligned}$$

حد مجموع در تصاعد هندسی

در یک تصاعد هندسی با شرط $|q| < 1$ مجموع بی‌نهایت جمله‌ی تصاعد (حد مجموع تصاعد) از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

مثال ۶۵: مجموع تمام جملات دنباله‌ی هندسی $\frac{9}{4}, \frac{3}{4}, \dots$ را بیابید.

ابتدا قدر نسبت را می‌یابیم:

$$\begin{cases} t_1 = \frac{9}{4} \\ t_2 = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow q = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{9}{4}} = \frac{1}{3}$$

چون $|q| < 1$ می‌باشد بنابراین مجموع تمام جملات برابر است با:

$$\frac{t_1}{1-q} = \frac{\frac{9}{4}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{2}{3}} = \frac{27}{4}$$

مثال ۶۶: حد مجموع جملات یک دنباله‌ی هندسی ۸ برابر جمله‌ی اول است. قدر نسبت این دنباله را بیابید.

$$\frac{a_1}{1-q} = 8a_1 \Rightarrow \frac{1}{1-q} = 8 \Rightarrow 1-q = \frac{1}{8} \Rightarrow q = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

مثال ۶۷: حاصل $6 + 0.6 + 0.06 + 0.006 + \dots$ را به دست آورید.

سعی می‌کنیم مجموع فوق را به یک دنباله‌ی هندسی تبدیل کنیم.

$$A = 6 + 0.6 + 0.06 + 0.006 + \dots = 6 + 6\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots\right)$$

همان طور که ملاحظه می کنید عبارت داخل پرانتز مجموع جملات یک دنباله هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{10}$ و جمله اول $\frac{1}{10}$ می باشد که چون $\frac{1}{10} < 1$ ، حد مجموع این جملات را به دست می آوریم:

$$A = 6 + 6 \left(\frac{1}{10} \right) + 6 \left(\frac{1}{10} \right)^2 + \dots = 6 + 6 \left(\frac{1}{9} \right) = 6 + \frac{6}{9} = 6 + \frac{2}{3} = \frac{20}{3}$$

مثال ۶۸: حد مجموع $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$ برابر است با:

(۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{5}{4}$

گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۶۹: مقدار a را از معادله زیر بیابید. ($0 < a < 1$)

$$a + a^3 + a^5 + \dots = \frac{5}{24}$$

طرف چپ تساوی مجموع جملات یک دنباله هندسی با قدر نسبت a^2 می باشد که چون $a^2 < 1$ است پس حد مجموع آن ها را محاسبه می کنیم:

$$a + a^3 + a^5 + \dots = \frac{5}{24} \Rightarrow \frac{a}{1-a^2} = \frac{5}{24} \Rightarrow 24a = -5a^2 + 5 \Rightarrow 5a^2 + 24a - 5 = 0 \Rightarrow (5a-1)(5a+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = \frac{1}{5} \end{cases}$$

مثال ۷۰: در یک تصاعد هندسی نزولی، هر جمله ۴ برابر حد مجموع جملات بعدی می باشد. قدر نسبت کدام است؟

(۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{2}$

گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۷۱: در یک تصاعد هندسی نزولی جمله اول ۶ برابر مجموع از جمله دوم به بعد است. قدر نسبت این تصاعد کدام است؟

(۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{7}$ (۴) $\frac{7}{13}$

$$a_1 = \frac{6a_2}{1-q} \Rightarrow \frac{6}{1-q} = \frac{6}{1-q} \Rightarrow 1-q = 6q \Rightarrow q = \frac{1}{7}$$

مثال ۷۲: در یک تصاعد هندسی نزولی نامتناهی مجموع جملات اول و دوم، دو برابر مجموع بقیه جملات است. قدر نسبت این تصاعد کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) ۱

فرض می‌کنیم جملات تصاعد هندسی مورد نظر برابر a, aq, aq^2, \dots باشد. با توجه به فرض مسئله، حاصل جمع a و aq دو برابر مجموع جملات تصاعد aq^2, aq^3, \dots است. چون جمله‌ی اول این مجموع برابر aq^2 و قدر نسبتش برابر q است، پس:

$$a + aq = \frac{2aq^2}{1-q}$$

$$\xrightarrow{a \neq 0} 1+q = \frac{2q^2}{1-q} \Rightarrow 1-q^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow q = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(تصاعد را نزولی گویند هرگاه $|q| < 1$) پس $q = \frac{\sqrt{3}}{3}$ است.