۱ به ازای کدام مقدار m، نمودار تابع با ضابطهٔ $y = (m-۲)x^۲ - ۳x + m + ۲$ بالای محور xها و مماس بر آن است؟

۱) -۳
۲) $-\frac{۵}{۲}$
۳) $\frac{۵}{۲}$
۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۲

۲ در معادلهٔ درجهٔ دوم $۲x^۲ + ax + ۹ = ۰$، یک ریشه دو برابر ریشهٔ دیگر است، مجموع دو ریشهٔ مثبت کدام است؟

۱) ۳/۵
۲) ۴
۳) ۴/۵
۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴
قلمچی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۷
قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۲ ۱۴۰۰

۳ فاصلهٔ دو خط به معادلات $y = \sqrt{۳}x + ۲$ و $\sqrt{۳}y - ۳x + ۶ = ۰$ کدام است؟

۱) $۲ - \sqrt{۳}$
۲) $\sqrt{۳} - ۱$
۳) $\sqrt{۳} + ۱$
۴) $۲ + \sqrt{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۴ کوچک‌ترین دایرهٔ گذرا بر دو نقطهٔ $A(۲\,,\,۵)$ و $B(-۴\,,\,۱)$، محور xها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۱) $۱\,,\,-۳$
۲) $۰\,,\,-۳$
۳) $۲\,,\,-۱$
۴) $۳\,,\,-۲$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۵ به ازای کدام مجموعه مقادیر m، از معادلهٔ $x - ۲\sqrt{x} + m - ۱ = ۰$ دو جواب متمایز برای x حاصل می‌شود؟

۱) $m \geq ۱$
۲) $m < ۲$
۳) $۱ \leq m < ۲$
۴) هیچ مقدار m

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۶ نمودارهای دو تابع $y = |x-۲| + |x+۱|$ و $y = x + ۷$، در دو نقطهٔ A و B متقاطع هستند. اندازهٔ پاره‌خط AB، کدام است؟

۱) $۸\sqrt{۲}$
۲) ۱۲
۳) ۱۳
۴) $۱۰\sqrt{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۷ دایره‌ای به مرکز $(۱, ۳)$ بر روی خط راست $۵x + ۱۲y = ۱۵$، وتری به طول $۲\sqrt{۲۱}$، جدا می‌کند. این دایره بر روی محور xها، وتری با کدام اندازه جدا می‌کند؟

۱) $۲\sqrt{۶}$
۲) ۶
۳) $۲\sqrt{۱۵}$
۴) ۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۸ معادلهٔ درجهٔ دوم $۲x^۲ + mx + m + ۶ = ۰$ دارای دو ریشهٔ مثبت است. بازهٔ مقادیر m، کدام است؟

۱) $(-۴, ۰)$
۲) $(-۴, -۲)$
۳) $(-۶, ۰)$
۴) $(-۶, -۴)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۹ اضلاع مثلثی، منطبق بر سه خط به معادلات $y + ۲x = ۱۶$، $۲y - x = ۲$ و $y = ۰$ هستند. اندازهٔ میانهٔ نظیر ضلع افقی این مثلث، در صفحهٔ مختصات کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۵}$
۲) ۵
۳) $۳\sqrt{۳}$
۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۰ حجم جسم حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC با ضلع‌های قائم AB و AC، به ترتیب با اندازه‌های ۵ و $۲\sqrt{۶}$ واحد، حول خط گذرا از رأس C و موازی ضلع AB، کدام است؟

۱) ۶۰π
۲) ۷۰π
۳) ۷۵π
۴) ۸۰π

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۱ مساحت ناحیهٔ محدود به نمودارهای دو تابع $y = \sqrt{x^۲ - ۴x + ۴}$ و $y = \frac{۱}{۲}x + ۲$، کدام است؟

۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۱۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۱۲ مثلثی با رأس‌های $A(۱,۵)$، $B(۷,۳)$ و $C(۲,-۲)$، مفروض است. اندازهٔ ارتفاع AH در مثلث ABC، کدام است؟

۱) ۴
۲) $۳\sqrt{۲}$
۳) ۵
۴) $۴\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۳ معادلهٔ درجهٔ دوم $۳x^۲+(۲m-۱)x+۲-m=۰$ دارای دو ریشهٔ حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل‌ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۲}$
۲) ۳
۳) -۱
۴) $-\frac{۵}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۴ نمودار تابع درجهٔ دوم $f(x)=ax^۲+۴x+a-۳$ از طرف بالا بر محور xها مماس شده است، طول نقطهٔ تماس کدام است؟

۱) -۲
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۳

۱۵ به ازای کدام مقدار m عدد $\frac{۱}{۸}$ واسطهٔ عددی بین دو ریشهٔ معادلهٔ $(m^۲-۴)x^۲-۳x+m=۰$ است؟

۱) ۳
۲) -۳
۳) ۴
۴) -۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۴

۱۶ اگر α و β ریشه های معادلهٔ $۴x^۲-۱۲x+۱=۰$ باشند، مقدار $\frac{۱}{\sqrt{\alpha}}+\frac{۱}{\sqrt{\beta}}$ چقدر است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۱۷ به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(m-۱)x^۲+\sqrt{۳}x+m$ همواره در زیر محور xهاست؟

۱) $m<-\frac{۱}{۲}$
۲) $-\frac{۱}{۲}<m<۱$
۳) $۱<m<\frac{۳}{۲}$
۴) $m>\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۱۸ به ازای کدام مجموعه مقادیر m، منحنی به معادلهٔ $y = (m-۲)x^۲ - ۲(m+۱)x + ۱۲$، محور xها را در دو نقطه به طول‌های منفی، قطع می‌کند؟

۱) $m > ۲$
۲) $-۱ < m < ۲$
۳) هر مقدار m
۴) هیچ مقدار m

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۱۹ فاصلهٔ نزدیک‌ترین نقاط دایره به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y = ۴$ از خط به معادلهٔ $۳x + ۴y = ۱۵$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) ۱
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۲۰ در یک مکعب به طول یال a، صفحهٔ قطری، آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند. این دو قسمت را در وجه مربع به هم می‌چسبانیم. سطح کل منشور حاصل، چند برابر $a^۲$ است؟

۱) $۵ + \sqrt{۲}$
۲) $۴ + ۲\sqrt{۲}$
۳) $۵ + ۲\sqrt{۲}$
۴) $۳ + ۴\sqrt{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۲۱ دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $۲y + x = ۶$ و $۲x - y = ۷$ و یک رأس آن نقطهٔ $A(۸, ۵)$ است. مساحت این مستطیل کدام می‌باشد؟

۱) ۷/۲
۲) ۹/۶
۳) ۱۱/۴
۴) ۱۲/۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۲۲ به ازای کدام مقدار a زاویهٔ بین خط مماس بر دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۲x + y = ۱$ و خط به معادلهٔ $۳x + ۲y = a$ در نقطهٔ تلاقی آن‌ها ۹۰ درجه است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۲۳ نقطهٔ $(a, ۲a)$ مرکز دایرهٔ گذرنده بر دو نقطهٔ $(۲, ۱)$ و $(-۱, ۴)$ است. شعاع این دایره کدام می‌باشد؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) $۲\sqrt{۲}$
۴) $۳\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۲۴ در معادلهٔ $x^۲ - ۸x + m = ۰$ یک ریشه از نصف ریشهٔ دیگر ۵ واحد بیشتر است. m کدام است؟

۱) ۱۰
۲) ۱۲
۳) ۱۴
۴) ۱۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۲۵ به ازای کدام مجموعه مقادیر a، منحنی به معادلهٔ $۲x^۲ + (a^۲ - ۷)y^۲ + ۴y + a = ۰$ یک دایره است؟

۱) $\{-۳\}$
۲) $\{۳\}$
۳) $\{-۳, ۳\}$
۴) $\varnothing$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۲۶ در یک بیضی به اقطار $۲\sqrt{۵}$ و ۲ واحد، دایره‌ای هم‌مرکز با بیضی و شعاع ۲ واحد، بیضی را در نقطهٔ M قطع می‌کند. مجموع مربعات فواصل M از دو کانون بیضی کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۶
۳) ۱۸
۴) ۲۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۲۷ بهروز یک مجلّه را به‌تنهایی ۹ ساعت زودتر از فرهاد تایپ می‌کند. اگر هر دو باهم کار کنند، در ۲۰ ساعت این کار انجام می‌شود. بهروز به‌تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می‌دهد؟

۱) ۳۲
۲) ۳۳
۳) ۳۵
۴) ۳۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۲۸ منحنی توابع با ضابطهٔ $f(x) = -x^۲ + bx + ۳$ بر خط به معادلهٔ $y = ۷$ مماس اند، فاصلهٔ دو نقطهٔ تماس کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۲۹ به ازای کدام مقدار a دایرهٔ به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y + a = ۰$ بر خط به معادلهٔ $x + ۳y = ۰$ مماس است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) $\frac{۵}{۲}$
۳) ۳
۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۳۰ اگر $۳a + \sqrt{۲a^۲ + ۴a} = ۲$ باشد، عدد $\frac{a+۱}{a}$ کدام است؟

۱) ۱/۵
۲) ۲/۵
۳) ۳/۵
۴) ۴/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۳۱ سرعت یک قایق موتوری در آب راکد ۱۰۰ متر در دقیقه است. این قایق فاصلهٔ ۱۲۰۰ متری در رودخانه را رفته و برگشته است. اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است. سرعت آب رودخانه، چند متر در دقیقه است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۵
۳) ۲۰
۴) ۲۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۳۲ در یک بیضی به کانون‌های $(۲, -۱)$ و $(۲, ۷)$، اندازهٔ قطر کوچک ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی کدام است؟

۱) ۰/۶
۲) ۰/۶۴
۳) ۰/۷۵
۴) ۰/۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۳۳ اگر هر یک از ریشه های معادلهٔ $۳x^۲ + ax + b = ۰$، دو برابر معکوس هر ریشه از معادلهٔ $۴x^۲ - ۷x + ۳ = ۰$ باشد، a کدام است؟

۱) -۱۴
۲) -۱۲
۳) -۸
۴) -۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۳۴ دایرهٔ به مرکز $(۲, ۰)$ و مماس بر نیمساز ربع اول، خط به معادلهٔ $y = ۱$ را با کدام طول‌ها قطع می‌کند؟

۱) ۱ و ۳
۲) ۰ و ۴
۳) $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۵}{۲}$
۴) $۲ - \sqrt{۲}$ و $۲ + \sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۳۵ شعاع دایره‌ای که از دو نقطهٔ $(۰, ۰)$ و $(۳, ۱)$ گذشته و مرکز آن روی خط به معادلهٔ $y = ۲x$ باشد، کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$
۲) $\sqrt{۵}$
۳) $\sqrt{۱۰}$
۴) $\sqrt{۱۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۳۶ دو دایره به معادلات $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۶y = ۸$ و $x^۲ + y^۲ + ۸x - ۴y + ۱۲ = ۰$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

۱) مماس خارج
۲) مماس داخل
۳) متقاطع
۴) متخارج

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۳۷ به ازای کدام مجموعه مقادیر a، نمودار تابع $f(x) = ax^۲ + (a + ۳)x - ۱$ محور xها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟

۱) $a < -۹$
۲) $a < -۳$
۳) $a > -۱$
۴) $-۳ < a < ۰$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۳۸ دایره‌ای از دو نقطهٔ $(۲, ۰)$ و $(-۲, ۰)$ گذشته و بر خط به معادلهٔ $y = ۱$ مماس است. شعاع این دایره کدام می‌باشد؟

۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) $\sqrt{۵}$
۳) $\frac{۵}{۲}$
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۳۹ هر خط قائم بر یک دایره، از نقطهٔ $(-۲, ۱)$ می‌گذرد. این دایره بر خط به معادلهٔ $y = x - ۱$ مماس است. شعاع دایره کدام می‌باشد؟

۱) ۲
۲) $۲\sqrt{۲}$
۳) ۳
۴) $۳\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۴۰ دایره‌ای از دو نقطهٔ $(۰, ۱)$ و $(۳, ۰)$ گذشته و معادلهٔ یک قطر آن به‌صورت $x - y = ۲$ است. شعاع این دایره کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$
۲) ۲
۳) $\sqrt{۵}$
۴) ۳

قلمچی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۷
قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۸
قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۴۱ نقطهٔ $A(۷, ۶)$ رأس یک متوازی‌الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $۲y - ۳x = ۱۱$ و $۳y + ۴x = ۸$ می‌باشند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟

۱) $(۱, ۵)$
۲) $(۳, ۴)$
۳) $(۳, ۵)$
۴) $(۴, ۳)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۴۲ دایره‌ای از نقطهٔ $(-۱, ۲)$ گذشته و بر هر دو محور مختصات مماس است. قطر دایرهٔ بزرگ‌تر کدام می‌باشد؟

۱) ۸
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۱۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۴۳ ظرفی است به شکل نیمکره، به ضخامت یکنواخت ۳ واحد و قطر خارجی دهانهٔ آن ۱۶ واحد است. سطح کل این ظرف چند برابر π است؟

۱) ۲۰۸
۲) ۲۱۲
۳) ۲۱۵
۴) ۲۱۷

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۴۴ به ازای کدام مقدار m، خط به معادلهٔ $y = mx + ۲$ بر دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۲x = ۳$ مماس است؟

۱) $-\frac{۴}{۳}$ و ۰
۲) $\frac{۴}{۳}$ و ۰
۳) $-\frac{۴}{۳}$ و ۱
۴) $\frac{۲}{۳}$ و ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۴۵ به ازای کدام مجموعه مقادیر a، نمودار تابع $f(x) = (a - ۳)x^۲ + ax - ۱$، از ناحیهٔ اول محورهای مختصات نمی گذرد؟

۱) $a \leq ۲$
۲) $۰ < a \leq ۲$
۳) $۲ < a < ۳$
۴) $۰ < a < ۳$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۴۶ شعاع دایره‌ای که از سه نقطه با مختصات $(۲, ۱)$ و $(-۲, ۴)$ و $(۰, ۰)$ می‌گذرد، کدام است؟

۱) ۲
۲) ۲/۵
۳) ۳
۴) ۳/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۴۷ در یک دنبالهٔ هندسی، جملهٔ دوم و دو برابر جملهٔ پنجم و جملهٔ هشتم می‌توانند سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ حسابی باشند. بزرگ‌ترین این سه عدد چندبرابر کوچک‌ترین آن‌ها است؟

۱) $۲ + \sqrt{۳}$
۲) $۵ + ۲\sqrt{۳}$
۳) $۵ + ۴\sqrt{۳}$
۴) $۷ + ۴\sqrt{۳}$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ تابستان ۱۳۹۸
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۴۸ اگر معادلهٔ $x^۴ - (m+۲)x^۲ + m + ۵ = ۰$ دارای چهار ریشهٔ حقیقی متمایز باشد، مجموعهٔ مقادیر m به کدام صورت است؟

۱) $m < -۴$
۲) $m > ۴$
۳) $-۴ < m < ۴$
۴) $۴ < m < ۹$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۴۹ دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $۲x - ۲y = ۳$ و $y = x + ۱$ هستند، مساحت این مربع کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۸}$
۲) $\frac{۹}{۴}$
۳) $\frac{۲۵}{۸}$
۴) $\frac{۲۵}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۵۰ نمودار تابع با ضابطهٔ $y = x^۲ - ۳x - ۱۰$ را حداقل چند واحد به‌طرف xهای مثبت انتقال دهیم تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور xها غیرمنفی باشد؟

۱) ۱
۲) ۱/۵
۳) ۲
۴) ۳

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۷
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۵۱ به ازای کدام مجموعهٔ مقادیر m، منحنی به معادلهٔ $y = (m+۲)x^۲ + ۳x + ۱ - m$، محور xها را در هر دو طرف مبدأ مختصات، قطع می‌کند؟

۱) $m > ۱$ یا $m < -۲$
۲) $-۲ < m < ۱$
۳) فقط $m < -۲$
۴) فقط $m > ۱$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۵۲ شعاع دایره به مرکز $(-۲, ۲)$ و مماس خارج بر دایره $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y + ۱ = ۰$، کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$
۲) ۳
۳) $۲\sqrt{۳}$
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۵۳ از داخل یک استوانهٔ قائم توپُر، به شعاع قاعدهٔ ۴ و ارتفاع ۵ واحد، بزرگ‌ترین مخروط قائم ممکن را حذف می‌کنیم. جسم حاصل را با صفحه‌ای موازی قاعدهٔ مخروط به فاصلهٔ ۳ واحد از آن قطع می‌دهیم. مساحت مقطع حاصل، کدام است؟

۱) $۱۰/۳۶\pi$
۲) $۱۱/۲۸\pi$
۳) $۱۲/۵۶\pi$
۴) $۱۳/۴۴\pi$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۵۴ شعاع دایرهٔ گذرا بر سه نقطهٔ $(۰,۰)$، $(۲,۱)$ و $(۱,-۲)$، برابر کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$
۲) $\sqrt{۳}$
۳) $\sqrt{۵}$
۴) $\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۵۵ معادلهٔ سه ضلع یک مثلث $x+y=۱$ و $y=۲x$ و $x=۱$ است. معادلهٔ خطی که کوچک‌ترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد، کدام است؟

۱) $y=\frac{۲}{۳}$
۲) $x=\frac{۲}{۳}$
۳) $y+x=\frac{۲}{۳}$
۴) $y+x=\frac{۱}{۳}$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ تابستان ۱۳۹۸
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۵۶ نقطهٔ $A(۳,-۱)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادلهٔ $۲y-x=۵$ می‌باشد. مساحت این مربع کدام است؟

۱) ۴۰
۲) ۴۵
۳) ۷۵
۴) ۸۰

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۵۷ مساحت مثلثی با سه رأس به مختصات $A(۲,۵)$، $B(۳,۰)$ و $C(۰,۲)$، کدام است؟

۱) ۶
۲) ۶/۵
۳) ۷
۴) ۷/۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۵۸ یک خط از دسته خطوط به معادلهٔ $(k+۱)y+۲kx-k+۱=۰$ بر خط گذرنده از دو نقطهٔ $A(۲,-۱)$ و $B(۸,۳)$ عمود است، معادلهٔ آن خط کدام است؟

۱) $۲y+۳x=۴$
۲) $۲y+۳x=۱$
۳) $۲y-۳x=-۵$
۴) $۳y-۲x=-۵$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۵۹ یک مثلث قائم‌الزاویه با زاویهٔ ۳۰ درجه و طول وتر ۸ واحد، حول وتر خود دوران می‌کند، حجم جسم حاصل چندبرابر π است؟

۱) ۲۴
۲) ۳۲
۳) ۳۶
۴) ۴۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

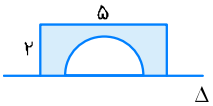
۶۰ یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه به قاعده‌های ۲ و ۵ و ساق قائم ۳ واحد را حول ساق قائم دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل، کدام است؟

۱) ۳۶π ۲) ۳۸π

۳) ۳۹π ۴) ۴۰π

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۶۱ سطح محدود به مستطیل ۲×۵ و نیم‌دایره به قطر ۳ واحد، حول خط Δ دوران می‌کند. حجم جسم حاصل چندبرابر π است؟



۱) ۱۵

۲) ۱۵/۵

۳) ۱۶/۵

۴) ۱۷

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۶۲ حاصل‌ضرب ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $x^۲ + ۴x + ۳ = \sqrt{x^۲ + ۴x + ۵}$ کدام است؟

۱) ۲-

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۶۳ مجموع ریشه های حقیقی معادلهٔ $(x^۲ + x)^۲ - ۱۸(x^۲ + x) + ۷۲ = ۰$، کدام است؟

۱) -۴

۲) -۲

۳) ۲

۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۴

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

۶۴ دایره‌ای، محور xها را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع کرده و مرکز آن، بر روی نیمساز ربع اول است. شعاع این دایره کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$

۲) ۲

۳) $\sqrt{۵}$

۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۶۵ مساحت مقطع یک مکعب با صفحه قطری آن برابر $۹\sqrt{۲}$ است، اندازهٔ قطر مکعب کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$

۲) $۳\sqrt{۲}$

۳) $۲\sqrt{۶}$

۴) $۳\sqrt{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۶۶ به ازای کدام مقدار m، مجموع جذر هر دو ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ دوم $۲x^۲ - (m+۱)x + \frac{۱}{۸} = ۰$ برابر با ۲ است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۶۷ به ازای کدام مقدار a معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲ - ۲(a-۲)x + ۱۴ - a = ۰$، دارای دو ریشهٔ مثبت است؟

۱) $-۲ < a < ۲$
۲) $۲ < a < ۵$
۳) $۲ < a < ۱۴$
۴) $۵ < a < ۱۴$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۶۸ دایره‌ای به مرکز $(۲ , -۱)$ و مماس بر خط به معادلهٔ $x - y = ۱$، محور xها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۱) ۳ و ۱
۲) ۴ و ۱
۳) ۳ و ۲
۴) ۴ و ۱/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۶۹ دایرهٔ گذرا بر نقطهٔ $(۱, -۲)$، بر هر دو محور مختصات مماس است. شعاع آن کدام است؟

۱) ۴ و ۱
۲) ۵ و ۱
۳) ۴ و ۲
۴) ۵ و ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۷۰ فاصلهٔ نقطهٔ $M(x, y)$ از نقطهٔ $A(۳, ۶)$، دو برابر فاصلهٔ آن از مبدأ مختصات است. بزرگ‌ترین وتر از مکان نقاط M کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$
۲) $۲\sqrt{۵}$
۳) $۴\sqrt{۳}$
۴) $۴\sqrt{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۷۱ نقطهٔ $A(-۱, ۴)$ مرکز یک دایره است که بر روی خط $۲x - ۳y + ۱ = ۰$ وتری به طول $۲\sqrt{۷}$ جدا می‌کند. این دایره خط $y = ۲$ را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۱) -۵، ۳
۲) -۴، ۲
۳) $-۱ \pm \sqrt{۲}$
۴) $-۱ \pm \sqrt{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۷۲ به ازای کدام مجموعه مقادیر m، معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲ + (m-۲)x + m + ۱ = ۰$، دارای دو ریشهٔ حقیقی مثبت است؟

۱) $-۱ < m < ۰$
۲) $m < ۰$
۳) $۲ < m < ۸$
۴) $m > ۸$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۷۳ معادلهٔ $(x^۲ - ۲x)^۲ - (x^۲ - ۲x) = ۲$، چند ریشهٔ حقیقی متمایز دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۷۴ اگر α و β ریشه های معادلهٔ $۲x^۲ - ۳x - ۴ = ۰$ باشند، مجموعه جواب های کدام معادله، به صورت $\{\frac{۱}{\alpha} + ۱, \frac{۱}{\beta} + ۱\}$ است؟

۱) $۴x^۲ - ۵x + ۱ = ۰$
۲) $۴x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$
۳) $۴x^۲ - ۵x - ۱ = ۰$
۴) $۴x^۲ - ۳x - ۱ = ۰$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۷۵ اگر α و β ریشه های معادلهٔ $x(۵x + ۳) = ۲$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب های معادلهٔ $۴x^۲ - kx + ۲۵ = ۰$ به صورت $\{\frac{۱}{\alpha^۲}, \frac{۱}{\beta^۲}\}$ است؟

۱) ۲۷
۲) ۲۸
۳) ۲۹
۴) ۳۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۷۶ اگر $۲a + \sqrt{۳a + ۱۶} = ۱$ باشد، عدد $۴a + ۹$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۶
۳) ۱۵
۴) ۲۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۷۷ پرنده‌ای فاصلهٔ یک کیلومتر را در جهت موافق باد رفته و در جهت مخالف باد برگشته است. اگر سرعت باد ۵ کیلومتر در ساعت و مدت رفت‌وبرگشت ۹ دقیقه باشد، سرعت پرنده در هوای آرام، چند کیلومتر در ساعت است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۲/۵
۳) ۱۳/۵
۴) ۱۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۷۸ به ازای کدام مقدار m ریشه های حقیقی معادلهٔ $mx^۲ + ۳x + m^۲ = ۲$، معکوس یکدیگرند؟

۱) -۲
۲) -۱
۳) ۱
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۷۹ نقطهٔ $M(۲\sqrt{۵}, b)$ مرکز دایره‌ای است که بر دو خط به معادلات $y = ۲x$ و $x = ۲y$ مماس است. شعاع دایرهٔ کوچک‌تر کدام است؟

۱) ۱
۲) ۱/۵
۳) ۲
۴) ۲/۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۸۰ مرکز دایره‌ای بر روی نیمساز ناحیهٔ اوّل است. اگر این دایره از نقطهٔ $A(۶, ۳)$ گذشته و بر خط به معادلهٔ $y = ۲x$ مماس شود، شعاع آن کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$
۲) $\sqrt{۶}$
۳) $۲\sqrt{۲}$
۴) $\sqrt{۱۰}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۸۱ دایرهٔ گذرا بر مبدأ مختصات، بر دو خط به معادلات $y = ۲x$ و $y = ۲x + ۱۰$، مماس است. مختصات مرکز این دایره کدام است؟

۱) $(-۳, ۲)$
۲) $(-۳, ۱)$
۳) $(-۲, ۱)$
۴) $(-۱, ۲)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۸۲ دو دایرهٔ C و C' در نقطهٔ $(۰, ۱)$ مماس برونی هم هستند. اگر قائم‌های بر دایرهٔ C همواره از نقطهٔ $(۲, -۳)$ بگذرد، مرکز دایرهٔ C' با شعاع $\sqrt{۵}$ کدام است؟

۱) $(-۱, ۳)$
۲) $(-۱, ۲)$
۳) $(۱, -۲)$
۴) $(۱, -۱)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۸۳ به ازای کدام مقدار a، دو دایره به معادلات $x^۲ + y^۲ + ۴x = ۰$ و $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۸y + a = ۰$ مماس خارج یکدیگرند؟

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۸۴ دایرهٔ C بر دایره به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ - ۴x + ۲y = ۴$ مماس خارج است. هر خط قائم بر دایرهٔ C از نقطهٔ $(۸, ۷)$ می‌گذرد. شعاع دایرهٔ C کدام است؟

۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۹

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۸۵ دو دایره گذرا بر نقطهٔ $(۲, -۹)$ بر هر دو محورهای مختصات مماس است. شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر، کدام است؟

۱) ۱۴
۲) ۱۵
۳) ۱۷
۴) ۱۹

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک چهارم داخل ۱۳۹۵

۸۶ در یک مکعب صفحهٔ گذرا بر یک یال و وسط یال دیگر، آن را به دو قطعه نابرابر تقسیم می‌کند. نسبت حجم‌های این دو قطعه کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{\sqrt{۵}}$
۴) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۸۷ دو نقطه بر خط به معادلهٔ $y = x - ۱$ قرار دارند که فاصلهٔ این نقاط از خط به معادلهٔ $۲x - ۳y = ۵$، برابر $\sqrt{۱۳}$ است. طول این دو نقطه، کدام می‌باشد؟

۱) ۹ و ۱۵-
۲) ۱۱ و ۱۵-
۳) ۱۵ و ۱۱-
۴) ۹- و ۱۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹
قلمچی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۷

۸۸ دایره‌ای بر محور xها و خط به معادلهٔ $۳x + ۴y = ۰$ مماس است. اگر مرکز این دایره در ناحیهٔ اول و شعاع آن ۳ واحد باشد، نقطهٔ مشترک آن با محور xها با کدام طول است؟

۱) ۱
۲) ۱/۵
۳) ۲
۴) ۲/۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۸۹ طول شعاع دایره‌ای که از سه نقطهٔ $A(-۱, ۰)$ و $B(۳, ۰)$ و $C(۰, -۳)$ می‌گذرد، کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$
۲) ۲
۳) $\sqrt{۵}$
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۹۰ دو دایره به معادلات $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y = ۱۳$ و $x^۲ + y^۲ + ۲x = ۱$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

۱) مماس داخل
۲) مماس خارج
۳) متقاطع
۴) متداخل

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۹۱ دو دایره به معادله‌های $x^۲ + y^۲ - ۴x + ۴y = ۱$ و $x^۲ + y^۲ - ۴x + ۸y + ۱۹ = ۰$، نسبت به یکدیگر چگونه‌اند؟

۱) مماس خارجی
۲) مماس داخلی
۳) متقاطع در دو نقطه
۴) یکی خارج دیگری

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۹۲ به ازای کدام مقادیر m، معادلهٔ درجهٔ دوم $(m - ۶)x^۲ - ۲mx - ۳ = ۰$، دارای دو ریشهٔ حقیقی منفی است؟

۱) $m < -۶$
۲) $m > ۳$
۳) $۰ < m < ۳$
۴) $۳ < m < ۶$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۹۳ یازده کیلوگرم رنگ با غلظت ۴۰ درصد با چهار کیلوگرم رنگ از همان نوع با غلظت ۷۰ درصد مخلوط شده‌اند. با تبخیر چند کیلوگرم آن، غلظت محلول به ۵۰ درصد می‌رسد؟

۱) ۰/۴
۲) ۰/۵
۳) ۰/۶
۴) ۰/۸

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ تابستان ۱۳۹۸
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۹۴ ریشه های کدام معادله، از معکوس ریشه های معادلهٔ درجه دوم $۲x^۲ - ۳x - ۱ = ۰$، یک واحد کمتر است؟

۱) $x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$
۲) $x^۲ + ۳x + ۱ = ۰$
۳) $x^۲ - ۵x + ۲ = ۰$
۴) $x^۲ + ۵x + ۲ = ۰$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴
قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

۹۵ اگر بیشترین مقدار تابع با ضابطهٔ $f(x) = (K + ۳)x^۲ - ۴x + K$ برابر صفر باشد، مقدار K کدام است؟

۱) -۴
۲) -۱
۳) ۱
۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

۹۶ در معادلهٔ $۳x^۲ - ۱۷x + m = ۰$ یک ریشه از سه برابر ریشهٔ دیگر ۳ واحد بیشتر است. m کدام است؟

۱) ۹
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۱۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۹۷ به ازای کدام مقدار m، عدد $\sqrt{۲}$ واسطهٔ هندسی بین ریشه های حقیقی معادلهٔ $mx^۲ - ۵x + m^۲ - ۳ = ۰$ است؟

۱) ۱
۲) -۱
۳) ۳
۴) -۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۴

۹۸ به ازای کدام مقدار m، هریک از ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $۸x^۲ - mx - ۸ = ۰$، توان سوم ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲ - x - ۲ = ۰$ است؟

۱) ۹
۲) ۱۱
۳) ۱۳
۴) ۱۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۹۹ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲ - ۳x = ۱$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادلهٔ $۸x^۲ + kx - ۱ = ۰$ به‌صورت $\{\alpha^۲\beta, \alpha\beta^۲\}$ است؟

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۹

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۱۰۰ به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه های حقیقی معادلهٔ $mx^۲ - (m + ۳)x + ۵ = ۰$ برابر ۶ است؟

۱) $-\frac{۹}{۵}$
۲) ۱
۳) ۱ و $-\frac{۹}{۵}$
۴) $\frac{۹}{۵}$ و -۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۱۰۱ ریشه های معادلهٔ $۳x^۲ + ax + b = ۰$، از ریشه های معادلهٔ $۳x^۲ - ۴x - ۱ = ۰$ یک واحد بیشتر است، b کدام است؟

۱) -۵
۲) ۲
۳) ۴
۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

۱۰۲ ریشه های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲ + ax + b = ۰$، یک واحد از ریشه های معادلهٔ $۳x^۲ + ۷x + ۱ = ۰$ بیشتر است، b کدام است؟

۱) -۲
۲) -۱
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۴}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۱۰۳ اگر یکی از منحنی های تابع درجهٔ دوم $y = (a-۱)x^۲ + x + ۳$ نسبت به خط $x = ۲$ متقارن باشد، این منحنی محور xها را با کدام طول مثبت قطع می کند؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۱۰۴ اگر منحنی به معادلهٔ $y = ۲x^۲ - ۴x + m - ۳$، محور xها را در دو نقطه به طول های مثبت قطع کند، آنگاه مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟

۱) $m > ۳$
۲) $۳ < m < ۴$
۳) $۳ < m < ۵$
۴) $۴ < m < ۵$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

۱۰۵ به ازای کدام مقادیر m، از معادلهٔ $mx - ۳\sqrt{x} + m - ۲ = ۰$ فقط یک جواب برای x حاصل می شود؟

۱) $\frac{-۳}{۲} < m < ۲$
۲) $۰ < m < ۲$
۳) $\frac{۳}{۲} < m < \frac{۵}{۲}$
۴) $۲ < m < ۳$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۱ گزینه ۳

گام اول

الف) نمودار تابع درجهٔ دو در صورتی بر محور xها مماس می‌شود که ریشهٔ مضاعف داشته باشد. در این صورت $\Delta = ۰$ خواهد بود.

ب) چون نمودار تابع بالای محور xها قرار دارد و بر محور xها مماس شده است، پس ضریب $x^۲$ مثبت در نظر گرفته می‌شود.

گام دوم

$$y = (m-۲)x^۲ - ۳x + m + ۲$$

$$۱)\ \ m - ۲ > ۰ \Rightarrow m > ۲ \quad (I)$$

$$۲)\ \ \Delta = ۰ \Rightarrow (-۳)^۲ - ۴(m-۲)(m+۲) = ۰ \Rightarrow ۹ - ۴(m^۲ - ۴) = ۰$$

$$\Rightarrow m^۲ - ۴ = \frac{۹}{۴} \Rightarrow m^۲ = ۴ + \frac{۹}{۴} = \frac{۲۵}{۴} \Rightarrow m = \pm\frac{۵}{۲} \quad (II)$$

اشتراک دو مجموعه جواب (I) و (II) مقدار $m = \frac{۵}{۲}$ را به ما می‌دهد.

۲

گزینه ۳

گام اول

اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲ + ax + ۹ = ۰$ را برابر α در نظر بگیریم، ریشهٔ دیگر برابر ۲α می‌شود.

گام دوم

روش اول:

حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a} = \frac{۹}{۲}$ است. هریک از ریشه‌ها را تعیین می‌کنیم:

$$\alpha(۲\alpha) = \frac{۹}{۲} \Rightarrow ۲\alpha^۲ = \frac{۹}{۲} \Rightarrow \alpha^۲ = \frac{۹}{۴} \xrightarrow{\text{ریشه‌ها مثبت}} \alpha = \frac{۳}{۲} \Rightarrow ۲\alpha = ۲(\frac{۳}{۲}) = ۳$$

بنابراین یکی از ریشه‌ها برابر $\frac{۳}{۲}$ و دیگری برابر ۳ است. پس مجموع ریشه‌ها برابر ۴/۵ می‌شود.

روش دوم:

یکی از ریشه‌ها α و دیگری ۲α است، پس داریم:

$$۲x^۲ + ax + ۹ = (x - \alpha)(x - ۲\alpha) = x^۲ - ۳\alpha x + ۲\alpha^۲$$
$$\Rightarrow x^۲ + \frac{a}{۲}x + \frac{۹}{۲} = x^۲ - ۳\alpha x + ۲\alpha^۲$$
$$\Rightarrow \frac{a}{۲} = -۳\alpha\,,\ ۲\alpha^۲ = \frac{۹}{۲} \Rightarrow \alpha^۲ = \frac{۹}{۴}$$
$$\xrightarrow{\alpha>۰} \alpha = \frac{۳}{۲}\,,\ ۲\alpha = ۳ \Rightarrow \alpha + ۲\alpha = \frac{۳}{۲} + ۳ = ۴/۵$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۳

گزینه ۳

گام اول

نکته: فاصلهٔ دو خط موازی با معادلات $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ برابر است با:

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

گام دوم

ابتدا شیب دو خط را به دست می‌آوریم:

$$y=\sqrt{3}x+2 \Rightarrow m_1=\sqrt{3}$$
$$\sqrt{3}y-3x+6=0 \Rightarrow m_2=-\frac{-3}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$$

شیب دو خط برابر با $\sqrt{3}$ است؛ بنابراین دو خط موازی‌اند. اکنون باتوجه‌به گام اول، معادلهٔ دو خط را به فرم استاندارد می‌نویسیم. دقت کنید که ضریب x و y در دو خط موازی باهم برابر باشند.

$$y=\sqrt{3}x+2 \Rightarrow y-\sqrt{3}x-2=0$$
$$\sqrt{3}y-3x+6=0 \xrightarrow{\div\sqrt{3}} y-\frac{3}{\sqrt{3}}x+\frac{6}{\sqrt{3}}=0 \Rightarrow y-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}=0$$

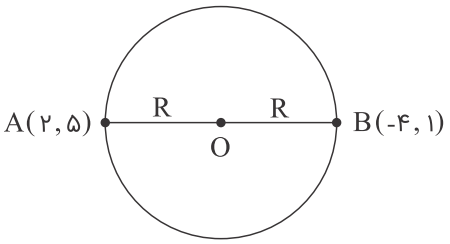
فاصلهٔ این دو خط موازی برابر است با:

$$d=\frac{|-2-2\sqrt{3}|}{\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}}=\frac{|-2(1+\sqrt{3})|}{\sqrt{4}}=\frac{2(1+\sqrt{3})}{2}=1+\sqrt{3}$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۴ گزینه ۱

کوچک‌ترین دایرهٔ گذرنده از A و B، دایره‌ای است که AB یک قطر آن باشد.



حال داریم:

$$\text{وسط } AB \text{ است.} O \Rightarrow O = \frac{A+B}{۲} = (-۱,\ ۳)$$

$$R = |OA| = \sqrt{(۲+۱)^۲ + (۵-۳)^۲} = \sqrt{۹+۴} = \sqrt{۱۳}$$

$$\Rightarrow \text{دایره} : (x+۱)^۲ + (y-۳)^۲ = ۱۳$$

$$\xrightarrow{\text{برخورد با محور x ها}} (x+۱)^۲ + (۰-۳)^۲ = ۱۳$$

$$\Rightarrow (x+۱)^۲ = ۴ \Rightarrow x+۱ = \pm ۲ \Rightarrow x = ۱\ ,\ \ x = -۳$$

۵ گزینه ۳

گام اول

الف) معادله را با تغییر متغیر $\sqrt{x} = t$ به معادلهٔ درجهٔ دو تبدیل می‌کنیم.

ب) برای این که معادلهٔ اولیه دارای دو جواب متمایز باشد، باید معادلهٔ جدید دو ریشهٔ مثبت داشته باشد. پس سه شرط $\Delta > ۰$، $t_۱ + t_۲ > ۰$ و $t_۱ t_۲ > ۰$ را برای معادلهٔ جدید بررسی می‌کنیم.

گام دوم

$$x - ۲\sqrt{x} + m - ۱ = ۰ \Rightarrow (\sqrt{x})^۲ - ۲\sqrt{x} + m - ۱ = ۰ \xrightarrow{\sqrt{x}=t} t^۲ - ۲t + m - ۱ = ۰$$

$$۱)\ \ \Delta > ۰ \Rightarrow ۴ - ۴(m-۱) > ۰ \Rightarrow ۴ - ۴m + ۴ > ۰ \Rightarrow ۴m < ۸ \Rightarrow m < ۲ \quad (I)$$

$$۲)\ \ t_۱ t_۲ > ۰ \Rightarrow \frac{m-۱}{۱} > ۰ \Rightarrow m - ۱ > ۰ \Rightarrow m > ۱ \quad (II)$$

$$۳)\ \ t_۱ + t_۲ > ۰ \Rightarrow -(-\frac{۲}{۱}) > ۰ \Rightarrow ۲ > ۰ \Rightarrow \ \text{همواره برقرار است}$$

توجه داشته باشید که به ازای $m = ۱$، معادلهٔ $x - ۲\sqrt{x} + m - ۱ = ۰$ به معادلهٔ $x - ۲\sqrt{x} = ۰$ تبدیل می‌شود که دارای دو جواب $x = ۰$ و $x = ۴$ است. پس $m = ۱$ نیز قابل‌قبول است:

$$(I) \cap (II) \cup m = ۱ \Rightarrow ۱ \leq m < ۲$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۶

گزینه ۴

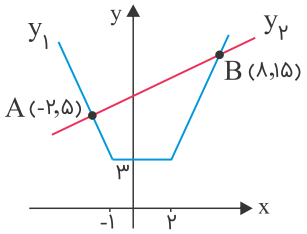
$$y_۱ = |x-۲| + |x+۱| \quad , \quad y_۲ = x+۷$$

$$y_۱ = \begin{cases} -x+۲-x-۱ & ; x \le -۱ \\ -x+۲+x+۱ & ; -۱ < x \le ۲ \\ x-۲+x+۱ & ; x > ۲ \end{cases} \Rightarrow y_۱ = \begin{cases} -۲x+۱ & ; x \le -۱ \\ ۳ & ; -۱ < x \le ۲ \\ ۲x-۱ & ; x > ۲ \end{cases}$$

حال نمودار دو تابع $y_۱$ و $y_۲$ را رسم می‌کنیم:

$$x > ۲ : ۲x-۱ = x+۷ \Rightarrow x = ۸$$

$$x < -۱ : -۲x+۱ = x+۷ \Rightarrow x = -۲$$

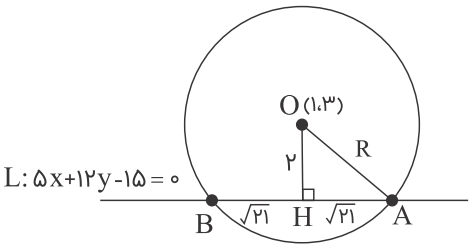


$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^۲ + (y_B - y_A)^۲} = \sqrt{(۸-(-۲))^۲ + (۱۵-۵)^۲}$$
$$= \sqrt{۱۰۰+۱۰۰} = ۱۰\sqrt{۲}$$

Nomreyar.com | وبسایت آموزشی نمره یار

۷ گزینه ۴

از مرکز دایره بر خط $L: ۵x + ۱۲y - ۱۵ = ۰$ عمود می‌کنیم، پس $AH = HB = \sqrt{۲۱}$ و داریم:



$$|OH| = \frac{|۵(۱) + ۱۲(۳) - ۱۵|}{\sqrt{۵^۲ + ۱۲^۲}} = \frac{۲۶}{۱۳} = ۲$$

$$\overset{\Delta}{OHA} : \text{فیثاغورس} \Rightarrow R^۲ = ۲^۲ + (\sqrt{۲۱})^۲ = ۲۵$$

$$\Rightarrow \text{دایره} : (x - ۱)^۲ + (y - ۳)^۲ = ۲۵$$

حال برای یافتن محل برخورد دایره و محور xها، مقدار y را در معادلهٔ دایره برابر با صفر قرار می‌دهیم:

$$(x - ۱)^۲ + (۰ - ۳)^۲ = ۲۵ \Rightarrow (x - ۱)^۲ + ۹ = ۲۵ \Rightarrow (x - ۱)^۲ = ۱۶$$

$$\Rightarrow x - ۱ = \pm ۴ \Rightarrow x = -۳ , x = ۵$$

$$\Rightarrow \text{نقاط برخورد با محور xها} : (-۳ , ۰) , (۵ , ۰)$$

$$\Rightarrow \text{طول پاره‌خط حاصل} = ۵ - (-۳) = ۸$$

۸ گزینه ۴

برای اینکه معادلهٔ درجهٔ دوم دارای دو ریشهٔ مثبت باشد باید $\Delta > ۰$، $p > ۰$ و $s > ۰$ باشد، بنابراین داریم:

$$۱)\ \Delta > ۰ \Rightarrow m^۲ - ۴ \times ۲ \times (m + ۶) = m^۲ - ۸m - ۴۸ > ۰$$

$$\Rightarrow \underbrace{(m - ۱۲)(m + ۴)}_{p} > ۰$$

x	-∞		-۴		۱۲		+∞
p(x)		+ ج	۰	-	۰	+ ج	

$$\Rightarrow m < -۴ \quad \text{یا} \quad m > ۱۲$$

$$۲)\ p > ۰ \Rightarrow p = -\frac{b}{a} = \frac{-m}{۲} > ۰ \Rightarrow m < ۰$$

$$۳)\ s > ۰ \Rightarrow s = \frac{c}{a} = \frac{m + ۶}{۲} > ۰ \Rightarrow m > -۶$$

حال از حدود m در (۱)، (۲) و (۳) اشتراک می‌گیریم، درنتیجه داریم:

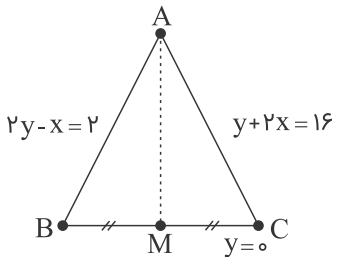
$$m \in (-۶, -۴)$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۹

گزینه ۲

مثلث را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:



باید فاصلهٔ نقطهٔ A از نقطهٔ M را به دست آوریم:

از تقاطع دو خط $y + ۲x = ۱۶$ و $۲y - x = ۲$ مختصات نقطهٔ A به دست می‌آید.

$$۲\times \begin{cases} ۲y - x = ۲ \\ y + ۲x = ۱۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴y - ۲x = ۴ \\ y + ۲x = ۱۶ \end{cases} \Rightarrow y = ۴ \ , \ x = ۶ \Rightarrow A(۶, ۴)$$

برای به دست آوردن مختصات نقطهٔ M، ابتدا مختصات نقاط B و C را محاسبه می‌کنیم.

$$۲y - x = ۲ \xrightarrow{y=۰} x = -۲ \Rightarrow B(-۲\,,\,۰)$$

$$y + ۲x = ۱۶ \xrightarrow{y=۰} x = ۸ \ \Rightarrow C\,(۸\,,\,۰)$$

سپس مختصات نقطهٔ M را حساب می‌کنیم:

$$M\,(\frac{x_B + x_C}{۲}, \frac{y_B + y_C}{۲}) \Rightarrow M\,(۳, ۰)$$

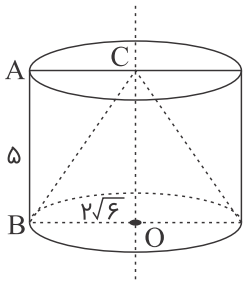
اکنون فاصلهٔ دو نقطهٔ M و A را محاسبه می‌کنیم:

$$AM = \sqrt{(۳ - ۶)^۲ + (۰ - ۴)^۲} = \sqrt{۹ + ۱۶} = ۵$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۱۰ گزینه ۴

مطابق شکل، باید حجم بین استوانه و مخروط را بیابیم که برابر است با:

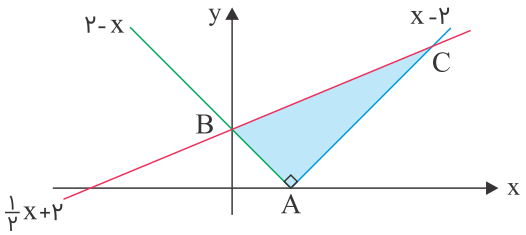


$$V_{\text{استوانه}} - V_{\text{مخروط}} = \pi(۲\sqrt{۶})^۲(۵) - \frac{۱}{۳}\pi(۲\sqrt{۶})^۲(۵) = \frac{۲}{۳}\pi(۲\sqrt{۶})^۲(۵)$$
$$= \frac{۲}{۳}\pi(۲۴)(۵) = ۸۰\pi$$

۱۱ گزینه ۴

$$y_۱ = \sqrt{x^۲ - ۴x + ۴} = \sqrt{(x-۲)^۲} = |x-۲|$$
$$y_۲ = \frac{۱}{۲}x + ۲$$

$$|x-۲| = \begin{cases} x-۲ & ; x \geq ۲ \\ -x+۲ & ; x < ۲ \end{cases}$$



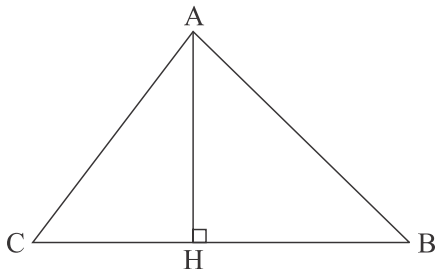
$$\begin{cases} A = (۲\,,\,۰) \\ x-۲ = \frac{۱}{۲}x + ۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲}x = ۴ \Rightarrow x = ۸ \Rightarrow C = (۸\,,\,۶) \\ ۲-x = \frac{۱}{۲}x + ۲ \Rightarrow \frac{۳}{۲}x = ۰ \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow B = (۰\,,\,۲) \end{cases}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^۲ + (y_B - y_A)^۲} = \sqrt{(۰-۲)^۲ + (۲-۰)^۲} = ۲\sqrt{۲}$$
$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^۲ + (y_C - y_A)^۲} = \sqrt{(۸-۲)^۲ + (۶-۰)^۲} = ۶\sqrt{۲}$$
$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{AB \times AC}{۲} = \frac{۲\sqrt{۲} \times ۶\sqrt{۲}}{۲} = ۱۲$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۱۲ گزینه ۴

برای به دست آوردن ارتفاع AH در مثلث ABC، کافی است که فاصلهٔ رأس A از خط BC را محاسبه کنیم.



ابتدا معادلهٔ خط BC را به دست می‌آوریم:

$$B(۷,۳), C(۲,-۲) \Rightarrow m = \frac{۳+۲}{۷-۲} = \frac{۵}{۵} = ۱$$
$$y - y_۰ = m(x - x_۰) \Rightarrow y + ۲ = x - ۲ \Rightarrow x - y - ۴ = ۰$$

بنابراین فاصلهٔ نقطهٔ $A(۱,۵)$ از خط BC برابر است با:

$$AH = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۱ - ۵ - ۴|}{\sqrt{۱+۱}} = \frac{۸}{\sqrt{۲}} = ۴\sqrt{۲}$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۱۳

گزینه ۱

می‌دانیم اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^{۲}+bx+c=۰$ باشد، آنگاه داریم:

$$s=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\ ,\ \ p=\alpha\beta=\frac{c}{a}$$

مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر است، پس داریم:

$$s=\frac{۱}{p}\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{۱}{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow-\frac{۲m-۱}{۳}=\frac{۱}{\frac{(۲-m)}{۳}}\Rightarrow\frac{-۲m+۱}{۳}=\frac{۳}{۲-m}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}-۴m+۲m^{۲}+۲-m=۹\Rightarrow۲m^{۲}-۵m-۷=۰$$

$$\xrightarrow{a+c=b}\begin{cases}m=-۱\\ m=-\frac{c}{a}=\frac{۷}{۲}\end{cases}$$

طبق صورت مسئله، معادلهٔ داده‌شده دارای دو ریشهٔ حقیقی است، پس باید $\Delta>۰$ باشد. حال مقدار m را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases}m=-۱\Rightarrow۳x^{۲}+(-۲-۱)x+۲+۱=۰\Rightarrow۳x^{۲}-۳x+۳=۰\Rightarrow\Delta<۰\ \ \text{غ ق ق}\\ m=\frac{۷}{۲}\Rightarrow۳x^{۲}+(۲\times\frac{۷}{۲}-۱)x+۲-\frac{۷}{۲}=۰\Rightarrow۳x^{۲}+۶x-\frac{۳}{۲}=۰\Rightarrow\Delta>۰\ \ \text{ق ق}\end{cases}$$

بنابراین $m=\frac{۷}{۲}$ است.

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۱۴ گزینه ۲

گام اول

الف) چون نمودار از طرف بالا بر محور xها مماس شده است، ضریب $x^۲$ مثبت است.

ب) نمودار منحنی درجه دو بر محور xها مماس است. بنابراین معادلهٔ $f(x) = ۰$ ریشهٔ مضاعف داشته و $\Delta = ۰$ است.

گام دوم

با مشخص شدن مقدار a، معادلهٔ $f(x) = ۰$ را حل کرده و طول نقطهٔ تماس یا همان ریشهٔ مضاعف تابع را مشخص می کنیم:

$$f(x) = ax^۲ + ۴x + a - ۳$$

$$۱)\ \ a > ۰ \quad (I)$$

$$۲)\ \ \Delta = ۰ \Rightarrow ۴^۲ - ۴\,(a)(a-۳) = ۰ \Rightarrow ۱۶ - ۴\,(a^۲ - ۳a) = ۰$$
$$\Rightarrow ۴\,(a^۲ - ۳a) = ۱۶ \Rightarrow a^۲ - ۳a = ۴$$
$$\Rightarrow a^۲ - ۳a - ۴ = ۰ \Rightarrow (a-۴)(a+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۴ \\ a = -۱ \end{cases} \quad (II)$$
$$(I)\ \cap\ (II) : a = ۴$$

با در نظر گرفتن $a = ۴$، ضابطهٔ $f(x)$ را بازنویسی کرده و معادلهٔ $f(x) = ۰$ را حل می کنیم:

$$f(x) = ax^۲ + ۴x + a - ۳ \xrightarrow{a=۴} f(x) = ۴x^۲ + ۴x + ۱ = ۰$$
$$\Rightarrow (۲x+۱)^۲ = ۰ \Rightarrow ۲x + ۱ = ۰ \Rightarrow ۲x = -۱ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۲}$$

۱۵ گزینه ۴

گام اول

ریشه های معادلهٔ درجه دو را α و β در نظر می گیریم. چون $\frac{۱}{۸}$ واسطهٔ عددی بین α و β است، داریم:

$$\frac{\alpha + \beta}{۲} = \frac{۱}{۸}$$

گام دوم

در معادلهٔ درجهٔ دو به فرم $ax^۲ + bx + c = ۰$ اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، در این صورت $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ است.

$$(m^۲ - ۴)x^۲ - ۳x + m = ۰ \xrightarrow[\text{معادله}]{\text{α و β ریشه‌های}} \alpha + \beta = -(-\frac{۳}{m^۲ - ۴})$$
$$\Rightarrow \alpha + \beta = \frac{۳}{m^۲ - ۴} \text{ و } \frac{\alpha + \beta}{۲} = \frac{۱}{۸} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{۱}{۴}$$

بنابراین می توان نوشت:

$$\frac{۳}{m^۲ - ۴} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow m^۲ - ۴ = ۱۲ \Rightarrow m^۲ = ۱۶ \Rightarrow m = \pm ۴$$

به ازای $m = ۴$ مقدار Δ برای معادله منفی شده و درنتیجه معادله فاقد ریشه می‌شود، پس فقط $m = -۴$ قابل‌قبول است.

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۱۶

گزینه ۳

اول عبارت $\frac{۱}{\sqrt{\alpha}}+\frac{۱}{\sqrt{\beta}}$ را ساده می‌کنیم تا مشخص شود برای حل تست به چه اطلاعاتی نیاز داریم:

$$\frac{۱}{\sqrt{\alpha}}+\frac{۱}{\sqrt{\beta}}=\frac{\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

$\alpha\beta$حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله است و به‌راحتی محاسبه می‌شود. برای به دست آوردن $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$A=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\Rightarrow A^{۲}=\alpha+\beta+۲\sqrt{\alpha\beta}\Rightarrow A=\sqrt{\alpha+\beta+۲\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$۴x^{۲}-۱۲x+۱=۰\xrightarrow[\text{معادله}]{\alpha\text{ و }\beta\text{ ریشه های}}\begin{cases}\alpha+\beta=-(-\frac{۱۲}{۴})=۳\\ \alpha\beta=\frac{۱}{۴}\end{cases}$$

$$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha+\beta+۲\sqrt{\alpha\beta}}=\sqrt{۳+۱}=\sqrt{۴}=۲$$

پس حاصل $\frac{۱}{\sqrt{\alpha}}+\frac{۱}{\sqrt{\beta}}$ برابر است با:

$$\frac{۱}{\sqrt{\alpha}}+\frac{۱}{\sqrt{\beta}}=\frac{۲}{\sqrt{\frac{۱}{۴}}}=\frac{۲}{\frac{۱}{۲}}=۴$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۱۷

گزینه ۱

برای اینکه نمودار تابع درجه دوم به فرم $y = ax^{۲} + bx + c$ همواره پایین محور xها باشد، باید دو شرط زیر برقرار باشد:

$$۱)\ a < ۰\ ,\ \ ۲)\ \Delta < ۰$$

مجموعه جواب های این دو نامعادله را به دست آورده و بین آن ها اشتراک می گیریم.

$$y = (m-۱)x^{۲} + \sqrt{۳}x + m$$

$$۱)\ a < ۰ \Rightarrow m - ۱ < ۰ \Rightarrow m < ۱ \quad (I)$$

$$۲)\ \Delta < ۰ \Rightarrow (\sqrt{۳})^{۲} - ۴(m-۱)m < ۰ \Rightarrow ۳ - ۴m^{۲} + ۴m < ۰ \Rightarrow ۴m^{۲} - ۴m - ۳ > ۰$$

جدول تعیین علامت عبارت $۴m^{۲} - ۴m - ۳$ را تشکیل می دهیم:

$$۴m^{۲} - ۴m - ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m_{۱} = \dfrac{۴ + \sqrt{۶۴}}{۸} = \dfrac{۱۲}{۸} = \dfrac{۳}{۲} \\ m_{۲} = \dfrac{۴ - \sqrt{۶۴}}{۸} = -\dfrac{۴}{۸} = -\dfrac{۱}{۲} \end{cases}$$

پس مجموعه جواب نامعادلهٔ دوم به صورت زیر درمی آید:

$$m \in (-\infty\,,\ -\frac{۱}{۲}) \cup (\frac{۳}{۲}\,,\ +\infty) \quad (II)$$

بنابراین مجموعه جواب قابل‌قبول برای m برابر است با:

$$(I)\ \cap\ (II) : m < -\frac{۱}{۲}$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۱۸

گزینه ۴

گام اول

الف) منحنی محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند بنابراین مقدار Δ بزرگ‌تر از صفر است.

ب) منحنی در دو نقطهٔ منفی محور xها را قطع می‌کند بنابراین حاصل‌جمع ریشه‌ها (S) منفی و حاصل‌ضرب ریشه‌ها (P) مثبت است.

ج) در هر معادلهٔ درجه‌دو به فرم $ax^۲ + bx + c = ۰$ داریم:

$$\Delta = b^۲ - ۴ac \quad , \quad S = -\frac{b}{a} \quad , \quad P = \frac{c}{a}$$

گام دوم

در معادلهٔ درجه‌دو داده‌شده داریم:

$$a = (m - ۲) \ , \ b = -۲(m + ۱) \ , \ c = ۱۲$$

حال هر سه شرط گفته‌شده را بررسی می‌کنیم:

$$I)\Delta > ۰ \Rightarrow ۴(m + ۱)^۲ - ۴(m - ۲)(۱۲) > ۰ \Rightarrow ۴m^۲ + ۸m + ۴ - ۴۸m + ۹۶ > ۰$$

$$\Rightarrow ۴m^۲ - ۴۰m + ۱۰۰ > ۰ \xrightarrow{\div ۴} m^۲ - ۱۰m + ۲۵ > ۰ \Rightarrow (m - ۵)^۲ > ۰ \Rightarrow m \neq ۵$$

$$II)S < ۰ \Rightarrow \frac{۲(m + ۱)}{m - ۲} < ۰ \Rightarrow -۱ < m < ۲$$

$$III)P > ۰ \Rightarrow \frac{۱۲}{m - ۲} > ۰ \Rightarrow m - ۲ > ۰ \Rightarrow m > ۲$$

اشتراک بین دو مجموعهٔ جواب II و III برابر تهی است؛ بنابراین منحنی موردنظر به ازای هیچ مقدار m، محور xها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع نمی‌کند.

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۱۹ گزینه ۲

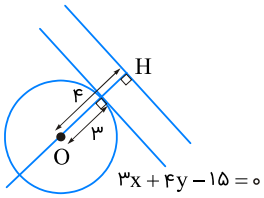
در آغاز معادلهٔ دایره را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم، برای این منظور باید بنویسیم:

$$x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y = ۴ \Rightarrow (x^۲ - ۲x + ۱ - ۱) + (y^۲ + ۴y + ۴ - ۴) = ۴$$
$$\xrightarrow{\text{دسته‌بندی جمله‌ها}} (x-۱)^۲ + (y+۲)^۲ = ۱ + ۴ + ۴ = ۹$$
$$\Rightarrow R_{\text{شعاع}} = \sqrt{۹} = ۳, \quad O_{\text{مرکز}} = (۱, -۲)$$

فاصلهٔ هر نقطه مانند $(x_۰, y_۰)$ از خط $ax + by + c = ۰$ که $a^۲ + b^۲ \neq ۰$، برابر است با $d = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$، پس فاصلهٔ مرکز دایره $O = (۱, -۲)$ تا خط $۳x + ۴y - ۱۵ = ۰$ برابر است با:

$$d = \frac{|۳(۱) + ۴(-۲) - ۱۵|}{\sqrt{۳^۲ + ۴^۲}} = \frac{۲۰}{۵} = ۴$$

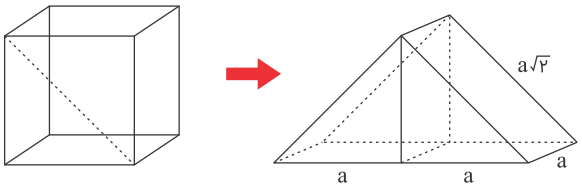
فاصلهٔ یک نقطه تا یک خط برابر با اندازهٔ عمودی است که از آن نقطه بر آن خط رسم می‌شود و هر خط گذرنده از مرکز یک دایره، قطری از آن است، پس فاصلهٔ مرکز تا خط موردنظر، برابر با طول پاره‌خط عمودی از قطر است که بین مرکز و آن خط محصور است. ازآنجاکه هر قطر دایره، در نقطهٔ تماس بر آن عمود است، پس کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقاط دایره تا خط موردنظر (شکل زیر) برابر می‌شود با $d_{min} = ۴ - ۳ = ۱$.



۲۰ گزینه ۲

مساحت کل منشور حاصل برابر است با:

$$S = ۲(a \times a\sqrt{۲} + a \times a + ۲ \times \frac{a^۲}{۲}) = ۲(a^۲\sqrt{۲} + ۲a^۲) = a^۲(۴ + ۲\sqrt{۲})$$



Nomreyar.com | وبسایت آموزشی نمره یار

۲۱

گزینه ۲

گام اول

فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۰ , y_۰)$ از خطی با معادلهٔ استاندارد $ax + by + c = ۰$ برابر است با:

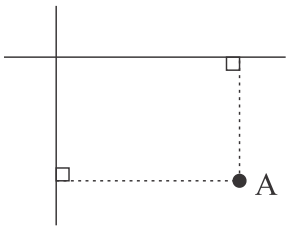
$$d = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

گام دوم

مختصات نقطهٔ $A(۸ , ۵)$ در ضابطهٔ هیچ‌یک از دو خط صدق نمی‌کند.

$$۲(۵) + ۸ \neq ۶ \quad , \quad ۲(۸) - ۵ \neq ۷$$

بنابراین نقطهٔ A روی دو خط قرار ندارد و نقطهٔ برخورد دو خط، رأس روبه‌رو به رأس A خواهد بود. اکنون با محاسبهٔ فاصلهٔ نقطهٔ A از هریک از خطوط، می‌توان طول و عرض مستطیل را به دست آورد.



$$۲y + x = ۶ \Rightarrow ۲y + x - ۶ = ۰$$
$$d_۱ = \frac{|۲(۵) + ۸ - ۶|}{\sqrt{۴ + ۱}} = \frac{۱۲}{\sqrt{۵}}$$
$$۲x - y = ۷ \Rightarrow ۲x - y - ۷ = ۰$$
$$d_۲ = \frac{|۲(۸) - ۵ - ۷|}{\sqrt{۴ + ۱}} = \frac{۴}{\sqrt{۵}}$$

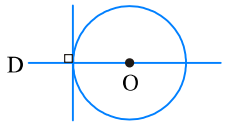
بنابراین $d_۱ = \frac{۱۲}{\sqrt{۵}}$ طول مستطیل و $d_۲ = \frac{۴}{\sqrt{۵}}$ عرض مستطیل است و مساحت آن برابر خواهد بود با:

$$S_{\text{مستطیل}} = d_۱ \times d_۲ = \frac{۱۲}{\sqrt{۵}} \times \frac{۴}{\sqrt{۵}} = \frac{۴۸}{۵} = ۹/۶$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۲۲ گزینه ۱

باتوجه‌به آنکه خط به معادلهٔ $۳x + ۲y = a$ بر خط مماس بر دایره عمود است، پس این خط قائم بر دایره بوده و درنتیجه از مرکز دایره عبور می‌کند.



پس مختصات مرکز دایره در معادلهٔ خط صدق می‌کند:

$$x^۲ + y^۲ - ۲x + y = ۱ \xrightarrow{\text{مرکز}} O(۱, -\frac{۱}{۲})$$

$$۳(۱) + ۲(-\frac{۱}{۲}) = a \Rightarrow a = ۲$$

۲۳ گزینه ۱

طبق تعریف دایره، فاصلهٔ هر نقطه روی دایره از مرکز دایره برابر با شعاع دایره است. شعاع دایره را R می‌نامیم. با محاسبهٔ فاصلهٔ نقطهٔ $(a , ۲a)$ از هریک از نقاط $(۲ , ۱)$ و $(-۱ , ۴)$، ابتدا مقدار a و سپس مقدار R را به دست می‌آوریم.

$$\left.\begin{array}{l} R = \sqrt{(a-۲)^۲ + (۲a-۱)^۲} \\ R = \sqrt{(a+۱)^۲ + (۲a-۴)^۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{(a-۲)^۲ + (۲a-۱)^۲} = \sqrt{(a+۱)^۲ + (۲a-۴)^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} (a-۲)^۲ + (۲a-۱)^۲ = (a+۱)^۲ + (۲a-۴)^۲$$

$$\Rightarrow a^۲ - ۴a + ۴ + ۴a^۲ - ۴a + ۱ = a^۲ + ۲a + ۱ + ۴a^۲ - ۱۶a + ۱۶$$

$$\Rightarrow -۸a + ۵ = -۱۴a + ۱۷ \Rightarrow ۶a = ۱۲ \Rightarrow a = ۲$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{(۲-۲)^۲ + (۴-۱)^۲} = \sqrt{۳^۲} = ۳$$

پس دایره‌ای به مرکز $(۲ , ۴)$ و شعاع ۳ داریم.

۲۴ گزینه ۲

یک ریشه را α و ریشهٔ دیگر را $\frac{\alpha}{۲} + ۵$ در نظر می‌گیریم. با استفاده از رابطهٔ مجموع ریشه‌ها مقدار α و با استفاده از رابطهٔ حاصل‌ضرب ریشه‌ها m را تعیین می‌کنیم.

$$x^۲ - ۸x + m = ۰ \xrightarrow[\text{معادله}]{\text{ریشه‌های } (\frac{\alpha}{۲}+۵) \text{ و } \alpha} \alpha + \frac{\alpha}{۲} + ۵ = -(-\frac{۸}{۱}) = ۸ \Rightarrow \frac{۳\alpha}{۲} + ۵ = ۸$$

$$\Rightarrow \frac{۳\alpha}{۲} = ۳ \Rightarrow \alpha = ۲$$

مقدار m را محاسبه می‌کنیم:

$$\alpha(\frac{\alpha}{۲} + ۵) = \frac{m}{۱} = m \Rightarrow ۲(۱+۵) = m \Rightarrow m = ۲ \times ۶ = ۱۲$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۲۵

گزینه ۱

گام اول

الف) معادلهٔ استاندارد یک دایره به مرکز (α , β) و شعاع R به‌صورت $(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = R^۲$ است.

ب) معادلهٔ گستردهٔ یک دایره به‌صورت $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ است.

گام دوم

باتوجه‌به معادلهٔ گستردهٔ نوشته‌شده در گام اول، ضریب $x^۲$ و $y^۲$ باید باهم برابر و برابر با یک باشد، بنابراین مقادیر a را به‌گونه‌ای می‌یابیم که ضریب $x^۲$ و $y^۲$ باهم برابر شوند؛ درنتیجه:

$$a^۲ - ۷ = ۲ \Rightarrow a^۲ = ۹ \Rightarrow a = \pm ۳$$

ازطرفی معادلهٔ این دایره را باید بتوان به‌صورت استاندارد نوشت، بنابراین دو مقدار $a = +۳$ و $a = -۳$ را در معادلهٔ دایره جایگذاری می‌کنیم تا مقدار صحیح را تشخیص دهیم.

$$a = ۳ \ : \ ۲x^۲ + (۹-۷)y^۲ + ۴y + ۳ = ۰ \Rightarrow ۲x^۲ + ۲y^۲ + ۴y + ۳ = ۰$$
$$\Rightarrow ۲(x-۰)^۲ + ۲(y^۲ + ۲y + ۱) + ۱ = ۰ \Rightarrow ۲(x-۰)^۲ + ۲(y+۱)^۲ + ۱ = ۰$$

$$\xrightarrow{\div ۲} (x-۰)^۲ + (y+۱)^۲ + \frac{۱}{۲} = ۰ \Rightarrow (x-۰)^۲ + (y+۱)^۲ = -\frac{۱}{۲} \quad \text{غ ق ق}$$

رابطهٔ به‌دست‌آمده همواره نادرست است؛ زیرا عبارت سمت چپ تساوی همواره نامنفی می‌باشد ولی مساوی با یک عدد منفی شده است.

$$a = -۳ \ : \ ۲x^۲ + (۹-۷)y^۲ + ۴y - ۳ = ۰ \Rightarrow ۲x^۲ + ۲y^۲ + ۴y - ۳ = ۰$$
$$\Rightarrow ۲(x-۰)^۲ + ۲(y^۲ + ۲y + ۱) - ۵ = ۰ \Rightarrow ۲(x-۰)^۲ + ۲(y+۱)^۲ - ۵ = ۰$$

$$\xrightarrow{\div ۲} (x-۰)^۲ + (y+۱)^۲ - \frac{۵}{۲} = ۰ \Rightarrow (x-۰)^۲ + (y+۱)^۲ = \frac{۵}{۲}$$

به ازای $a = -۳$، معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $(۰ , -۱)$ و شعاع $R = \sqrt{\frac{۵}{۲}}$ داریم.

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

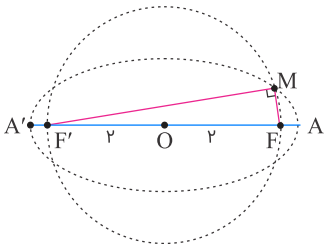
۲۶ گزینه ۲

باتوجه‌به معلومات سؤال، داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\text{طول قطر بزرگ} = ۲a = ۲\sqrt{۵} \Rightarrow a = \sqrt{۵} \\ \text{طول قطر کوچک} = ۲b = ۲ \Rightarrow b = ۱\end{array}\right\} \xrightarrow{a^۲=b^۲+c^۲} c = ۲$$

پس $OF = OF' = ۲$ و چون طول شعاع دایره هم ۲ واحد است، نقاط F و F' روی دایره‌اند. پس FF' قطر دایره است و چون زاویهٔ FMF' محاطی و روبه‌رو به قطر می‌باشد، قائمه است و داریم:

$$\overset{\Delta}{MFF'} : \text{فیثاغورس} \Rightarrow MF^۲ + MF'^۲ = FF'^۲ = ۴^۲ = ۱۶$$



۲۷ گزینه ۴

اگر زمانی که بهروز برای تایپ مجله صرف می‌کند x ساعت فرض شود، آنگاه زمانی که فرهاد برای تایپ مجله صرف می‌کند $x + ۹$ ساعت خواهد بود.

بهروز در یک ساعت $\frac{۱}{x}$ کل کار را انجام می‌دهد و فرهاد در یک ساعت $\frac{۱}{x+۹}$ کل کار و هر دو باهم در یک ساعت $\frac{۱}{۲۰}$ کل کار را انجام می‌دهند.

$$\frac{۱}{x} + \frac{۱}{x+۹} = \frac{۱}{۲۰} \xrightarrow{\times ۲۰x(x+۹)} ۲۰(x+۹) + ۲۰x = x(x+۹)$$
$$\Rightarrow ۲۰x + ۱۸۰ + ۲۰x = x^۲ + ۹x \Rightarrow x^۲ - ۳۱x - ۱۸۰ = ۰$$
$$\Rightarrow (x - ۳۶)(x + ۵) = ۰ \xrightarrow{x>۰} x = ۳۶$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۲۸

گزینه ۲

روش اول:

گام اول

وقتی منحنی یک تابع درجه‌دو بر یک خط مماس باشد، معادلهٔ تلاقی خط و منحنی ریشهٔ مضاعف دارد. پس معادلهٔ خط و منحنی را تلاقی داده، آن را به یک معادلهٔ درجه‌دو استاندارد تبدیل می کنیم و سپس Δ را برابر صفر قرار می دهیم.

گام دوم

$$-x^{۲}+bx+۳=۷ \Rightarrow -x^{۲}+bx-۴=۰ \Rightarrow x^{۲}-bx+۴=۰$$
$$\xrightarrow{\text{ریشهٔ مضاعف}} \Delta=۰ \Rightarrow b^{۲}-۱۶=۰ \Rightarrow b^{۲}=۱۶ \Rightarrow b=\pm ۴$$

به ازای هر کدام از مقادیر b، نقطهٔ تماس خط و منحنی را تعیین می کنیم:

$$b=۴ \Rightarrow x^{۲}-۴x+۴=۰ \Rightarrow (x-۲)^{۲}=۰ \Rightarrow x=۲ \xrightarrow{y=۷} A(۲\,,\,۷)$$
$$b=-۴ \Rightarrow x^{۲}+۴x+۴=۰ \Rightarrow (x+۲)^{۲}=۰ \Rightarrow x=-۲ \xrightarrow{y=۷} A(-۲\,,\,۷)$$

بنابراین فاصله دو نقطهٔ A و B برابر است با:

$$AB=|۲-(-۲)|=۴$$

روش دوم:

بر اساس صورت مسئله، تابع $f(x)=-x^{۲}+bx+۳$ در نقطه $x=\frac{b}{۲}$ یک ماکزیمم دارد و چون بر خط $y=۷$ مماس است پس $f(\frac{b}{۲})=۷$.

فاصلهٔ دو نقطهٔ تماس همان فاصله بین ماکزیمم توابع به معادله $y=-x^{۲}+bx+۳$ است (دو مقدار برای b داریم).

$$f(\frac{b}{۲})=۷ \Rightarrow -\frac{b^{۲}}{۴}+\frac{b^{۲}}{۲}+۳=۷ \Rightarrow \frac{b^{۲}}{۴}=۴ \Rightarrow b^{۲}=۱۶ \Rightarrow b=\pm ۴$$

ماکزیمم دو تابع به معادلهٔ $y=-x^{۲}+۴x+۳$ و $y=-x^{۲}-۴x+۳$، به ترتیب نقاط $(+۲\,,\,۷)$ و $(-۲\,,\,۷)$ است که فاصله بین آن ها برابر است با:

$$|+۲-(-۲)|=+۴$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۲۹

گزینه ۲

گام اول

الف) هرگاه خطی بر یک دایره مماس باشد، فاصلهٔ مرکز دایره از این خط برابر با شعاع دایره خواهد بود.

ب) اگر معادلهٔ گستردهٔ دایره‌ای را به‌صورت $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ در نظر بگیریم آنگاه مختصات مرکز این دایره برابر با $(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲})$ و شعاع آن برابر با $R = \sqrt{(\frac{a}{۲})^۲ + (\frac{b}{۲})^۲ - c}$ است.

ج) هرگاه دو منحنی بر هم مماس باشند، معادلهٔ تلاقی آن‌ها ریشهٔ مضاعف خواهد داشت.

گام دوم

روش اول:

باتوجه‌به گام اول، مرکز این دایره نقطهٔ $(۱, -۲)$ و شعاع آن برابر است با:

$$R = \sqrt{(\frac{-۲}{۲})^۲ + (\frac{۴}{۲})^۲ - a} = \sqrt{۱ + ۴ - a} = \sqrt{۵ - a}$$

ازطرفی فاصلهٔ نقطهٔ $(۱, -۲)$ از خط $x + ۳y = ۰$ برابر است با:

$$R = \frac{|۱ + ۳(-۲)|}{\sqrt{۱^۲ + ۳^۲}} = \frac{|-۵|}{\sqrt{۱۰}} = \frac{۵}{\sqrt{۱۰}}$$

بنابراین داریم:

$$\sqrt{۵ - a} = \frac{۵}{\sqrt{۱۰}} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۵ - a = \frac{۲۵}{۱۰} \Rightarrow ۵۰ - ۱۰a = ۲۵$$
$$\Rightarrow ۱۰a = ۲۵ \Rightarrow a = \frac{۲۵}{۱۰} = \frac{۵}{۲}$$

روش دوم:

باتوجه‌به قسمت (ج) از گام اول، باید معادلهٔ تلاقی خط و دایره، ریشهٔ مضاعف داشته باشد. داریم:

$$x + ۳y = ۰ \Rightarrow x = -۳y \qquad (I)$$

با جایگذاری رابطهٔ I در معادلهٔ دایره، به یک معادلهٔ درجه دو برحسب y می‌رسیم که ریشهٔ مضاعف دارد.

$$x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y + a = ۰ \xrightarrow{I} (-۳y)^۲ + y^۲ - ۲(-۳y) + ۴y + a = ۰$$
$$\Rightarrow ۹y^۲ + y^۲ + ۶y + ۴y + a = ۰ \Rightarrow ۱۰y^۲ + ۱۰y + a = ۰$$
$$\Delta = ۰ \Rightarrow ۱۰۰ - ۴(۱۰)a = ۰ \Rightarrow ۱۰۰ - ۴۰a = ۰ \Rightarrow ۴۰a = ۱۰۰ \Rightarrow a = \frac{۵}{۲}$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۳۰ گزینه ۴

$$۳a + \sqrt{۲a^۲ + ۴a} = ۲ \Rightarrow \sqrt{۲a^۲ + ۴a} = ۲ - ۳a$$

$$\begin{cases} ۲ - ۳a \geq ۰ \Rightarrow a \leq \frac{۲}{۳} \\ ۲a^۲ + ۴a \geq ۰ \Rightarrow ۲a(a+۲) \geq ۰ \Rightarrow a \in [۰, +\infty) \cup (-\infty, -۲] \end{cases} \xrightarrow{\cap} (-\infty, -۲] \cup [۰, \frac{۲}{۳}]$$

$$\sqrt{۲a^۲ + ۴a} = ۲ - ۳a \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۲a^۲ + ۴a = ۴ - ۱۲a + ۹a^۲ \Rightarrow ۷a^۲ - ۱۶a + ۴ = ۰$$

$$\Delta = ۱۶^۲ - ۴ \times ۷ \times ۴ = ۱۶(۱۶ - ۷) = ۱۶ \times ۹$$

$$a = \frac{۱۶ \pm ۱۲}{۱۴} \Rightarrow \begin{cases} a_۱ = \frac{۱۶ + ۱۲}{۱۴} = ۲ \\ a_۲ = \frac{۱۶ - ۱۲}{۱۴} = \frac{۲}{۷} \end{cases}$$

بنابراین $a = \frac{۲}{۷}$ قابل‌قبول است.

$$\frac{a+۱}{a} = \frac{\frac{۲}{۷} + ۱}{\frac{۲}{۷}} = \frac{۹}{۲} = ۴/۵$$

۳۱ گزینه ۳

در مسیر رفت و برگشت، به خاطر حرکت آب رودخانه به اندازهٔ سرعت آب (v) از سرعت قایق کم و به آن اضافه می‌شود، پس زمان رفت $\frac{۱۲۰۰}{۱۰۰ + v}$ و زمان برگشت $\frac{۱۲۰۰}{۱۰۰ - v}$ است و اختلاف آن‌ها باید ۵ باشد.

$$\frac{۱۲۰۰}{۱۰۰ - v} - \frac{۱۲۰۰}{۱۰۰ + v} = ۵ \xrightarrow{\div ۵} ۲۴۰(\frac{۱}{۱۰۰ - v} - \frac{۱}{۱۰۰ + v}) = ۱$$

$$\Rightarrow \frac{۲۴۰ \times ۲v}{(۱۰۰ - v)(۱۰۰ + v)} = ۱ \Rightarrow ۱۰۰^۲ - v^۲ = ۴۸۰v$$

$$\Rightarrow v^۲ + ۴۸۰v - ۱۰۰۰۰ = ۰ \Rightarrow (v - ۲۰)(v + ۵۰۰) = ۰ \xrightarrow{v > ۰} v = ۲۰$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۳۲ گزینه ۴

فاصلهٔ کانون‌های $F'(۲,-۱)$ و $F(۲,۷)$ برابر $۲c$ است.

$$۲c = |FF'| = |۷-(-۱)| = ۸ \Rightarrow c = ۴$$

قطر کوچک برابر ۶ است، پس:

$$۲b = ۶ \Rightarrow b = ۳$$

در بیضی رابطهٔ $a^۲ = b^۲ + c^۲$ برقرار است.

$$a^۲ = ۹ + ۱۶ = ۲۵ \Rightarrow a = ۵$$

$$\text{خروج از مرکز} = \frac{c}{a} = \frac{۴}{۵} = ۰/۸$$

۳۳ گزینه ۱

گام اول

الف) اگر ریشه های معادلهٔ $۴x^۲ - ۷x + ۳ = ۰$ را α و β فرض کنیم، آنگاه ریشه های معادلهٔ $۳x^۲ + ax + b = ۰$ ، برابر با $\frac{۲}{\alpha}$ و $\frac{۲}{\beta}$ است.

ب) $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ را از معادلهٔ $۴x^۲ - ۷x + ۳ = ۰$ تعیین کرده و با استفاده از آن مقدار a را در معادلهٔ دوم مشخص می کنیم.

گام دوم

فرض کردیم α و β ریشه های معادلهٔ $۴x^۲ - ۷x + ۳ = ۰$ باشند. داریم:

$$۴x^۲ - ۷x + ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{۷}{۴} \\ \alpha\beta = \frac{۳}{۴} \end{cases} \quad (I)$$

برای تعیین مقدار a باید حاصل‌جمع ریشه های معادلهٔ دوم را به دست آوریم:

$$۳x^۲ + ax + b = ۰ \xrightarrow{\text{ریشه ها } \frac{۲}{\alpha} \text{ و } \frac{۲}{\beta}} \frac{۲}{\alpha} + \frac{۲}{\beta} = -\frac{a}{۳} \Rightarrow \frac{۲\alpha + ۲\beta}{\alpha\beta} = -\frac{a}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{۲(\alpha+\beta)}{\alpha\beta} = -\frac{a}{۳} \xrightarrow{(I)} \frac{۲(\frac{۷}{۴})}{\frac{۳}{۴}} = -\frac{a}{۳} \Rightarrow \frac{۱۴}{۳} = -\frac{a}{۳} \Rightarrow a = -۱۴$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۳۴ گزینه ۱

گام اول

الف) هرگاه خطی بر دایره مماس باشد، فاصلهٔ مرکز دایره از این خط برابر با شعاع دایره خواهد بود.

ب) معادلهٔ دایره‌ای به مرکز (α , β) و شعاع R به‌صورت زیر است:

$$(x-\alpha)^{۲}+(y-\beta)^{۲}=R^{۲}$$

گام دوم

طبق قسمت (الف) از گام اول، شعاع دایره برابر است با فاصلهٔ نقطهٔ $(۲ , ۰)$ از خط $y=x$، پس داریم:

$$y=x \Rightarrow -x+y=۰$$
$$R=\frac{|-۲+۰|}{\sqrt{(-۱)^{۲}+۱^{۲}}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$$

معادلهٔ این دایره به‌صورت زیر است:

$$(x-۲)^{۲}+(y-۰)^{۲}=(\sqrt{۲})^{۲} \Rightarrow (x-۲)^{۲}+y^{۲}=۲$$

اکنون نقطهٔ تلاقی دایره با خط $y=۱$ را به دست می‌آوریم:

$$(x-۲)^{۲}+y^{۲}=۲ \xrightarrow{y=۱} (x-۲)^{۲}+۱=۲ \Rightarrow (x-۲)^{۲}=۱$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x-۲=۱ \Rightarrow x=۳ \\ x-۲=-۱ \Rightarrow x=۱ \end{cases}$$

پس این دایره، خط $y=۱$ را در نقاطی با طول‌های ۱ و ۳ قطع می‌کند.

۳۵ گزینه ۲

مرکز دایره روی خطی به معادلهٔ $y=۲x$ قرار دارد. فرض می‌کنیم مختصات مرکز دایره $(\alpha , ۲\alpha)$ باشد. طبق تعریف دایره، می‌دانیم فاصلهٔ هر نقطه روی دایره از مرکز دایره برابر با شعاع است. شعاع دایره را R می‌نامیم. با محاسبهٔ فاصلهٔ مرکز دایره از هریک از نقاط $(۰ , ۰)$ و $(۳ , ۱)$ ابتدا مقدار α و سپس مقدار R را به دست می‌آوریم.

$$\left.\begin{array}{l} R=\sqrt{(\alpha-۰)^{۲}+(۲\alpha-۰)^{۲}} \\ R=\sqrt{(\alpha-۳)^{۲}+(۲\alpha-۱)^{۲}} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{\alpha^{۲}+۴\alpha^{۲}}=\sqrt{(\alpha-۳)^{۲}+(۲\alpha-۱)^{۲}}$$
$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۵\alpha^{۲}=(\alpha-۳)^{۲}+(۲\alpha-۱)^{۲} \Rightarrow ۵\alpha^{۲}=\alpha^{۲}-۶\alpha+۹+۴\alpha^{۲}-۴\alpha+۱$$
$$\Rightarrow ۵\alpha^{۲}=۵\alpha^{۲}-۱۰\alpha+۱۰ \Rightarrow ۱۰\alpha=۱۰ \Rightarrow \alpha=۱$$
$$\Rightarrow R=\sqrt{(۱-۰)^{۲}+(۲-۰)^{۲}}=\sqrt{۱+۴}=\sqrt{۵}$$

بنابراین دایره‌ای به مرکز $(۱ , ۲)$ و شعاع $\sqrt{۵}$ داریم.

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۳۶

گزینه ۱

گام اول

در یک دایره به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$، نقطهٔ $(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲})$ مرکز دایره می‌باشد و شعاع این دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{(\frac{a}{۲})^۲ + (\frac{b}{۲})^۲ - c}$$

گام دوم

برای مشخص‌کردن وضعیت دو دایره نسبت به هم، مختصات مرکز دو دایره و شعاع آن‌ها را به دست می‌آوریم، سپس فاصلهٔ میان مرکز دو دایره (طول خط‌المرکزین) را با دو مقدار $R_۱ + R_۲$ و $|R_۱ - R_۲|$ مقایسه می‌کنیم.

$$x^۲ + y^۲ - ۲x + ۶y = ۸ \Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۲x + ۶y - ۸ = ۰$$

$$\text{مرکز دایره} : O_۱(-\frac{-۲}{۲}, -\frac{۶}{۲}) \Rightarrow O_۱(۱, -۳)$$

$$\text{شعاع دایره} : R_۱ = \sqrt{(-\frac{۲}{۲})^۲ + (\frac{۶}{۲})^۲ + ۸} = \sqrt{۱ + ۹ + ۸} = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$$

$$x^۲ + y^۲ + ۸x - ۴y + ۱۲ = ۰$$

$$\text{مرکز دایره} : O_۲(-\frac{۸}{۲}, -\frac{-۴}{۲}) \Rightarrow O_۲(-۴, ۲)$$

$$\text{شعاع دایره} : R_۲ = \sqrt{(\frac{۸}{۲})^۲ + (\frac{-۴}{۲})^۲ - ۱۲} = \sqrt{۱۶ + ۴ - ۱۲} = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$$

بنابراین داریم:

$$O_۱O_۲ = \sqrt{(-۴ - ۱)^۲ + (۲ + ۳)^۲} = \sqrt{۲۵ + ۲۵} = ۵\sqrt{۲}$$
$$R_۱ + R_۲ = ۳\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۲} = ۵\sqrt{۲}$$

چون $O_۱O_۲ = R_۱ + R_۲$ است پس دو دایره مماس خارج هستند.

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۳۷

گزینه ۱

گام اول

الف) نمودار تابع محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند. معادلهٔ $f(x) = ۰$ دارای دو ریشه بوده و $\Delta > ۰$ است.

ب) هر دو ریشهٔ معادله منفی است، بنابراین حاصل‌جمع ریشه‌ها منفی و حاصل‌ضرب ریشه‌ها مثبت در نظر گرفته می‌شود.

ج) مجموعه مقادیر قابل‌قبول برای a، اشتراک بین سه مجموعه جواب به‌دست‌آمده است.

گام دوم

$$f(x) = ax^۲ + (a+۳)x - ۱$$

$$۱)\ \Delta > ۰ \Rightarrow (a+۳)^۲ - ۴(a)(-۱) > ۰ \Rightarrow (a+۳)^۲ + ۴a > ۰$$

$$\Rightarrow a^۲ + ۶a + ۹ + ۴a > ۰ \Rightarrow a^۲ + ۱۰a + ۹ > ۰$$

$$\Rightarrow (a+۹)(a+۱) > ۰ \Rightarrow a < -۹ \text{ یا } a > -۱ \quad (I)$$

$$۲)\ S = x_۱ + x_۲ = -\frac{a+۳}{a} < ۰$$

$$\Rightarrow \frac{a+۳}{a} > ۰ \Rightarrow a < -۳ \text{ یا } a > ۰ \ (II)$$

$$۳)\ P = x_۱.x_۲ = -\frac{۱}{a} > ۰ \Rightarrow \frac{۱}{a} < ۰ \Rightarrow a < ۰ \ (III)$$

مجموعه مقادیر قابل‌قبول برای a عبارت است از:

$$(I) \cap (II) \cap (III) : a < -۹$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۳۸

گزینه ۳

گام اول

الف) هرگاه خطی بر دایره مماس باشد، فاصلهٔ مرکز دایره از این خط برابر با شعاع دایره خواهد بود.

ب) عمودمنصف هر وتر از دایره، از مرکز دایره عبور می‌کند.

گام دوم

دو نقطهٔ $A(۲\,,\,۰)$ و $B(-۲\,,\,۰)$ روی دایره قرار دارد بنابراین پاره‌خط AB وتری از دایره است که طبق گام اول، عمودمنصف آن از مرکز دایره عبور می‌کند. خط $x = ۰$ عمودمنصف پاره‌خط AB است؛ پس فرض می‌کنیم نقطهٔ $O(۰\,,\,\alpha)$، مرکز دایره است. فاصلهٔ مرکز دایره از نقاط A و B و خط $y = ۱$ برابر با شعاع دایره است، پس داریم:

$$R = OA = \sqrt{(۲-۰)^۲ + (۰-\alpha)^۲} = \sqrt{۴+\alpha^۲}$$

$$y = ۱ \Rightarrow y - ۱ = ۰ \Rightarrow R = \frac{|\alpha - ۱|}{\sqrt{۱^۲}} = |\alpha - ۱|$$

$$\Rightarrow \sqrt{۴+\alpha^۲} = |\alpha - ۱| \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۴ + \alpha^۲ = (\alpha - ۱)^۲$$

$$\Rightarrow ۴ + \alpha^۲ = \alpha^۲ - ۲\alpha + ۱ \Rightarrow -۲\alpha = ۳ \Rightarrow \alpha = -\frac{۳}{۲}$$

بنابراین شعاع دایره برابر است با:

$$R = |\alpha - ۱| = \left|-\frac{۳}{۲} - ۱\right| = \left|-\frac{۵}{۲}\right| = \frac{۵}{۲}$$

۳۹

گزینه ۲

گام اول

الف) هر خط قائم بر دایره، از مرکز دایره عبور می‌کند.

ب) هرگاه خطی بر دایره مماس باشد، فاصلهٔ مرکز دایره از این خط برابر با شعاع دایره است.

گام دوم

باتوجه‌به اینکه هر خط قائم بر دایره از نقطهٔ $(-۲\,,\,۱)$ عبور می‌کند و باتوجه‌به قسمت (الف) از گام اول، نقطهٔ $(-۲\,,\,۱)$ همان مرکز دایره است. طبق قسمت (ب) از گام اول، فاصلهٔ نقطهٔ $(-۲\,,\,۱)$ از خط $y = x - ۱$ برابر با شعاع دایره است؛ پس داریم:

$$y = x - ۱ \Rightarrow x - y - ۱ = ۰$$

$$R = \frac{|-۲ - ۱ - ۱|}{\sqrt{۱^۲ + (-۱)^۲}} = \frac{|-۴|}{\sqrt{۲}} = \frac{۴}{\sqrt{۲}} = ۲\sqrt{۲}$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۴۰

گزینه ۳

توجه کنید که قطر هر دایره از مرکز آن می‌گذرد، پس مرکز این دایره روی خط به معادلهٔ $x - y = ۲$، قرار دارد، بنابراین می‌توانیم مختصات مرکز آن را به‌صورت $\omega(\beta + ۲, \beta)$ در نظر بگیریم. فاصلهٔ مرکز دایره از هر نقطهٔ دلخواه واقع بر آن، برابر با شعاع دایره است، چون دو نقطهٔ $A(۰, ۱)$ و $B(۳, ۰)$ بر این دایره واقع‌اند، پس:

$$R = \omega A = \omega B$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{(\beta + ۲ - ۰)^۲ + (\beta - ۱)^۲} = \sqrt{(\beta + ۲ - ۳)^۲ + (\beta - ۰)^۲}$$

$$\Rightarrow (\beta + ۲)^۲ + (\beta - ۱)^۲ = (\beta - ۱)^۲ + \beta^۲ \Rightarrow (\beta + ۲)^۲ = \beta^۲$$

$$\Rightarrow \beta^۲ + ۴\beta + ۴ = \beta^۲ \Rightarrow ۴\beta + ۴ = ۰ \Rightarrow \beta = -۱$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{(-۱ + ۲)^۲ + (-۱ - ۱)^۲} = \sqrt{۵}$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۴۱

گزینه ۳

گام اول

اگر M، نقطهٔ وسط دو نقطهٔ $A(x_۱ , y_۱)$ و $B(x_۲ , y_۲)$ باشد آنگاه داریم:

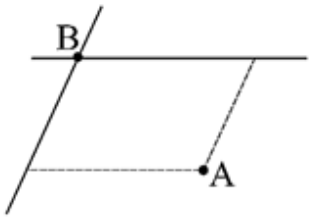
$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_۱ + x_۲}{۲} \\ y_M = \dfrac{y_۱ + y_۲}{۲} \end{cases}$$

گام دوم

مختصات نقطهٔ $A(۷ , ۶)$ در ضابطهٔ هیچ‌یک از دو خط صدق نمی‌کند:

$$۲(۶) - ۳(۷) \neq ۱۱ \quad , \quad ۳(۶) + ۴(۷) \neq ۸$$

بنابراین نقطهٔ برخورد دو خط قطعاً رأس روبه‌رو به رأس A در متوازی‌الاضلاع است.



مختصات نقطهٔ برخورد دو خط را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} ۲y - ۳x = ۱۱ \\ ۳y + ۴x = ۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۸y - ۱۲x = ۴۴ \\ ۹y + ۱۲x = ۲۴ \end{cases} \xrightarrow{+} ۱۷y = ۶۸ \Rightarrow y = ۴$$

$$۲y - ۳x = ۱۱ \xrightarrow{y=۴} ۸ - ۳x = ۱۱ \Rightarrow -۳x = ۳ \Rightarrow x = -۱ \Rightarrow B(-۱ , ۴)$$

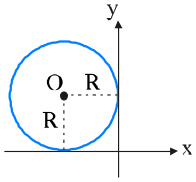
اکنون باتوجه‌به گام اول، مختصات وسط قطر AB برابر است با:

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{۷ + (-۱)}{۲} = \frac{۶}{۲} = ۳ \\ y_M &= \frac{۶ + ۴}{۲} = \frac{۱۰}{۲} = ۵ \end{aligned} \Rightarrow M(۳ , ۵)$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۴۲ گزینه ۲

باتوجه‌به اینکه دایره بر هر دو محور مختصات مماس است پس باید به‌طور کامل در یکی از چهار ناحیهٔ مختصاتی قرار بگیرد. چون دایره از نقطهٔ $(-۱\,,\,۲)$ نیز عبور می‌کند و این نقطه در ناحیهٔ دوم قرار دارد، پس دایرهٔ موردنظر به‌صورت زیر خواهد بود:



بنابراین دایره‌ای به شعاع R و به مرکز $(-R\,,\,R)$ داریم. معادلهٔ این دایره برابر است با:

$$(x+R)^۲+(y-R)^۲=R^۲$$

چون دایره از نقطهٔ $(-۱\,,\,۲)$ عبور می‌کند پس مختصات این نقطه در معادلهٔ دایره صدق می‌کند:

$$\xrightarrow{x=-۱\,,\,y=۲}(-۱+R)^۲+(۲-R)^۲=R^۲\Rightarrow ۱-۲R+R^۲+۴-۴R+R^۲=R^۲$$

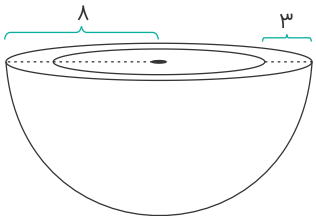
$$\Rightarrow R^۲-۶R+۵=۰\Rightarrow (R-۵)(R-۱)=۰\Rightarrow \begin{cases} R-۵=۰\Rightarrow R=۵ \\ R-۱=۰\Rightarrow R=۱ \end{cases}$$

قطر بزرگ‌تر به ازای شعاع بزرگ‌تر به دست می‌آید که برابر است با:

$$۲R=۲(۵)=۱۰$$

۴۳ گزینه ۴

طبق توضیحات صورت سؤال، شکل زیر را رسم می‌کنیم:



برای محاسبهٔ سطح کل این ظرف کافی است مساحت نیمکرهٔ درونی، نیمکرهٔ بیرونی و مساحت سطح مقطع ظرف را به دست آوریم؛ دقت کنید که سطح مقطع ظرف به‌صورت دایره‌ای به شعاع ۸ است که دایرهٔ دیگری به شعاع ۵ از آن کسر شده است.

$$S_{\text{نیمکرهٔ بیرونی}}=\frac{۱}{۲}(۴\pi\times ۶۴)=۲\pi\times ۶۴=۱۲۸\pi$$

$$S_{\text{نیمکرهٔ درونی}}=\frac{۱}{۲}(۴\pi\times ۲۵)=۲\pi\times ۲۵=۵۰\pi$$

$$S_{\text{سطح مقطع}}=\pi(۶۴-۲۵)=۳۹\pi$$

$$S_{\text{کل}}=S_{\text{نیمکرهٔ بیرونی}}+S_{\text{نیمکرهٔ درونی}}+S_{\text{سطح مقطع}}=۱۲۸\pi+۵۰\pi+۳۹\pi=۲۱۷\pi$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۴۴

گزینه ۲

گام اول

دو منحنی در یک نقطه بر هم مماس هستند، هرگاه معادلهٔ تلاقی آن‌ها در آن نقطه ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

گام دوم

داریم:

$$x^{۲}+y^{۲}-۲x=۳ \xrightarrow{y=mx+۲} x^{۲}+(mx+۲)^{۲}-۲x=۳ \Rightarrow x^{۲}+m^{۲}x^{۲}+۴mx+۴-۲x=۳$$
$$\Rightarrow (m^{۲}+۱)x^{۲}+(۴m-۲)x+۱=۰$$

این معادله باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد پس:

$$\Delta=۰ \Rightarrow (۴m-۲)^{۲}-۴(m^{۲}+۱)(۱)=۰ \Rightarrow ۱۶m^{۲}-۱۶m+۴-۴m^{۲}-۴=۰$$
$$\Rightarrow ۱۲m^{۲}-۱۶m=۰ \Rightarrow m(۱۲m-۱۶)=۰ \Rightarrow \begin{cases} m=۰ \\ ۱۲m-۱۶=۰ \Rightarrow m=\frac{۱۶}{۱۲}=\frac{۴}{۳} \end{cases}$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

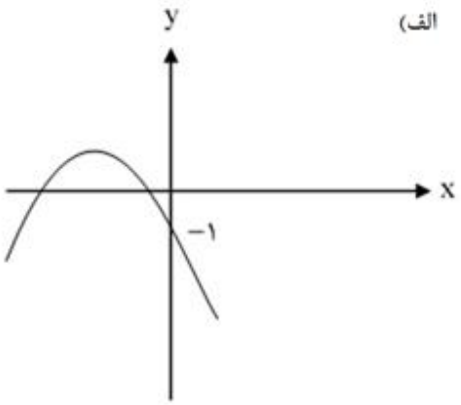
۴۵

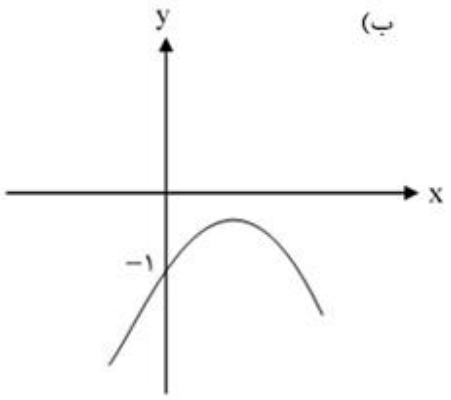
گزینه ۱

اولین شرط برای اینکه نمودار تابع $y = ax^۲ + bx + c$ از ناحیهٔ اول عبور نکند این است که ضریب $x^۲$ یا همان a منفی باشد.
که در اینجا باید داشته باشیم:

$$a - ۳ < ۰ \Rightarrow a < ۳$$

روش اول:
تابع صورت سؤال را می توان در دو حالت زیر فرض کرد:





$$f(x) = (a - ۳)x^۲ + ax - ۱ \Rightarrow \text{عرض از مبدأ} = -۱$$

در حالت (الف) باید شرایط زیر برقرار باشد:

$$P > ۰ \quad , \quad S < ۰ \quad , \quad \Delta > ۰$$

و در حالت (ب) تنها کافی است که $\Delta \leq ۰$ باشد.
برای حالت (الف) داریم:

$$\Delta > ۰ \Rightarrow a^۲ + ۴(a - ۳) > ۰ \Rightarrow a^۲ + ۴a - ۱۲ > ۰ \Rightarrow a > ۲ \text{ یا } a < -۶ \quad (I)$$

$$S < ۰ \Rightarrow -\frac{a}{a - ۳} < ۰ \xrightarrow{a-۳<۰} -a > ۰ \Rightarrow a < ۰ \quad (II)$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

$$P > ۰ \Rightarrow \frac{-۱}{a-۳} > ۰ \quad (III)$$

(با توجه به اینکه $a - ۳ < ۰$، همواره برقرار است.)

$$(I) \ \cap \ (II) \ \cap \ (III) \Rightarrow a < -۶$$

برای حالت (ب):

$$\Delta \leq ۰ \Rightarrow a^۲ + ۴(a-۳) \leq ۰ \Rightarrow a^۲ + ۴a - ۱۲ \leq ۰ \Rightarrow -۶ \leq a \leq ۲$$

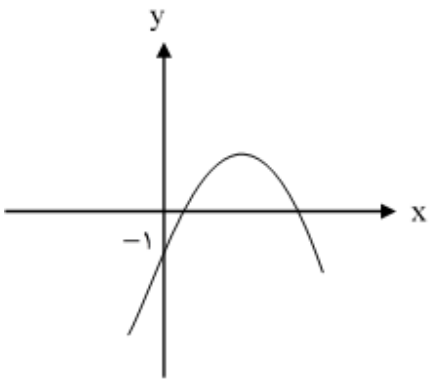
چون به ازای هر دو حالت (الف) و (ب) سهمی از ناحیه اول نمی گذرد داریم:

$$(-\infty \ , \ -۶) \cup [-۶ \ , \ ۲] = (-\infty \ , \ ۲] \Rightarrow a \leq ۲$$

روش دوم:

با توجه به اینکه $a < ۳$ است حالتی را در نظر می گیریم که نمودار حتماً از ناحیه اول بگذرد سپس مجموعه جواب به‌دست‌آمده را از $a < ۳$ کم می کنیم.

چون عرض از مبدأ -۱ است و $a < ۳$؛ پس تابع ماکزیمم دارد.



و باتوجه به نمودار شروط زیر باید برقرار باشد:

۱) باید دو ریشه داشته باشد $\Rightarrow \Delta > ۰$

۲) جمع ریشه ها > ۰

۳) ضرب ریشه ها > ۰

$$\Delta > ۰ \Rightarrow a^۲ - ۴(a-۳)(-۱) > ۰ \Rightarrow a^۲ - ۴a - ۱۲ > ۰ \Rightarrow (a-۲)(a+۶) > ۰ \Rightarrow a > ۲ \text{ یا } a < -۶ \quad (I)$$

$$\text{جمع ریشه ها} > ۰ \Rightarrow \frac{-a}{a-۳} > ۰ \Rightarrow ۰ < a < ۳ \quad (II)$$

$$\text{ضرب ریشه ها} > ۰ \Rightarrow \frac{-۱}{a-۳} > ۰ \Rightarrow a < ۳ \quad (III)$$

$$(I) \ \cap \ (II) \ \cap \ (III) \Rightarrow ۲ < a < ۳$$

به ازای بازهٔ به دست آمده برای a تابع حتماً از ناحیه اول عبور می کند. پس با کم کردن این بازه از $a < ۳$ خواسته سؤال محقق می شود.

$$(-\infty \ , \ -۳) - (۲ \ , \ ۳) = (-\infty \ , \ ۲] \Rightarrow a \leq ۲$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

درنتیجه به ازای بازهٔ فوق برای a نمودار تابع از ناحیهٔ اول محورهای مختصات نمی گذرد.

۴۶ گزینه ۲

گام اول

معادلهٔ گستردهٔ یک دایره به‌صورت $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ است. در این صورت شعاع دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{(\frac{a}{۲})^۲ + (\frac{b}{۲})^۲ - c}$$

گام دوم

سه نقطهٔ $(۲ , ۱)$، $(-۲ , ۴)$ و $(۰ , ۰)$ روی دایره قرار دارد، پس مختصات این نقطه در معادلهٔ دایره صدق می‌کند.

$$x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$$

$$\xrightarrow{(۲,۱)} ۲^۲ + ۱^۲ + a(۲) + b(۱) + c = ۰ \Rightarrow ۴ + ۱ + ۲a + b + c = ۰ \Rightarrow ۲a + b + c = -۵ \qquad (I)$$

$$\xrightarrow{(-۲,۴)} (-۲)^۲ + ۴^۲ + a(-۲) + b(۴) + c = ۰ \Rightarrow ۴ + ۱۶ - ۲a + ۴b + c = ۰ \Rightarrow -۲a + ۴b + c = -۲۰ \qquad (II)$$

$$\xrightarrow{(۰,۰)} ۰^۲ + ۰^۲ + a(۰) + b(۰) + c = ۰ \Rightarrow c = ۰ \qquad (III)$$

با جایگذاری $c = ۰$ در دو معادلهٔ I و II، به یک دستگاه دومعادله و دومجهول می‌رسیم و آن را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} ۲a + b = -۵ \\ -۲a + ۴b = -۲۰ \end{cases} \xrightarrow{+} ۵b = -۲۵ \Rightarrow b = -۵$$

$$۲a + b = -۵ \xrightarrow{b=-۵} ۲a - ۵ = -۵ \Rightarrow ۲a = ۰ \Rightarrow a = ۰$$

اکنون باتوجه‌به گام اول، شعاع دایره را به دست می‌آوریم.

$$R = \sqrt{(\frac{۰}{۲})^۲ + (\frac{-۵}{۲})^۲ - ۰} = \sqrt{\frac{۲۵}{۴}} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۴۷

گزینه ۴

$a_۲, ۲a_۵, a_۸$ سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ حسابی‌اند، پس:

$$۲a_۵ = \frac{a_۲ + a_۸}{۲}$$
$$\Rightarrow ۲a_۱q^۴ = \frac{a_۱q + a_۱q^۷}{۲} \Rightarrow ۴q^۳ = ۱ + q^۶$$
$$\Rightarrow q^۶ - ۴q^۳ + ۱ = ۰ \xrightarrow{q^۳=t} t^۲ - ۴t + ۱ = ۰$$
$$\Rightarrow t = \frac{۴ \pm ۲\sqrt{۳}}{۲} = ۲ \pm \sqrt{۳} \Rightarrow q^۳ = ۲ \pm \sqrt{۳}$$
$$\Rightarrow q = \sqrt[۳]{۲ + \sqrt{۳}}\ ,\ \ q = \sqrt[۳]{۲ - \sqrt{۳}}$$

با فرض افزایشی بودن دنباله، جملهٔ هشتم بزرگ‌ترین جمله است و درنتیجه $q = \sqrt[۳]{۲ + \sqrt{۳}}$، پس:

$$\frac{a_۸}{a_۲} = \frac{a_۱q^۷}{a_۱q} = q^۶ = \left(۲ + \sqrt{۳}\right)^۲ = ۷ + ۴\sqrt{۳}$$

۴۸

گزینه ۲

گام اول

الف) معادلهٔ درجه چهار را با تغییر متغیر $x^۲ = y$ به معادلهٔ درجهٔ دو تبدیل می‌کنیم.

ب) اگر قرار باشد معادلهٔ درجهٔ چهار داده‌شده دارای چهار ریشهٔ حقیقی متمایز باشد، باید برای معادلهٔ درجهٔ دو تشکیل‌شده داشته باشیم $\Delta > ۰$.

ج) نکتهٔ دیگر این است که هر دو ریشه باید مثبت باشند. در این صورت هم حاصل‌ضرب و هم حاصل‌جمع ریشه‌ها مثبت است.

گام دوم

$$x^۴ - (m+۲)x^۲ + m + ۵ = ۰ \xrightarrow{x^۲=y} y^۲ - (m+۲)y + m + ۵ = ۰$$
$$\Delta > ۰ \Rightarrow (m+۲)^۲ - ۴(m+۵) > ۰ \Rightarrow m^۲ + ۴m + ۴ - ۴m - ۲۰ > ۰$$
$$\Rightarrow m^۲ - ۱۶ > ۰ \Rightarrow m^۲ > ۱۶ \Rightarrow |m| > ۴ \Rightarrow m < -۴ \ \text{یا}\ m > ۴ \quad (I)$$

حاصل‌جمع ریشه‌ها مثبت است، پس:

$$-(-\frac{(m+۲)}{۱}) > ۰ \Rightarrow m + ۲ > ۰ \Rightarrow m > -۲ \quad (II)$$

حاصل‌ضرب ریشه‌ها نیز مثبت است، پس:

$$\frac{m+۵}{۱} > ۰ \Rightarrow m + ۵ > ۰ \Rightarrow m > -۵ \quad (III)$$

برای اینکه هر سه شرط فوق برقرار باشد، بین مجموعهٔ جواب‌های به‌دست‌آمده اشتراک می‌گیریم:

$$(I) \cap (II) \cap (III) : m > ۴$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۴۹

گزینه ۳

گام اول

فاصلهٔ دو خط موازی با معادلات $ax + by + c = ۰$ و $ax + by + c'' = ۰$ برابر است با:

$$d = \frac{|c - c''|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

گام دوم

ابتدا شیب دو خط را به دست می‌آوریم:

$$۲x - ۲y = ۳ \Rightarrow m_۱ = -\frac{۲}{-۲} = +۱$$
$$y = x + ۱ \Rightarrow m_۲ = +۱$$

دو خط داده‌شده باهم موازی‌اند؛ بنابراین فاصلهٔ این دو خط از هم برابر با طول ضلع مربع خواهد بود.
برای محاسبهٔ فاصلهٔ میان دو خط موازی، لازم است معادلات دو خط را به فرم استاندارد بنویسیم. دقت کنید که ضریب x و y در دو خط موازی باهم برابر باشند.

$$۲x - ۲y = ۳ \Rightarrow ۲x - ۲y - ۳ = ۰ \xrightarrow{\div(-۲)} -x + y + \frac{۳}{۲} = ۰$$
$$y = x + ۱ \Rightarrow y - x - ۱ = ۰$$

$$d = \frac{\left|\frac{۳}{۲} - (-۱)\right|}{\sqrt{(-۱)^۲ + ۱^۲}} = \frac{\left|\frac{۳}{۲} + ۱\right|}{\sqrt{۲}} = \frac{\frac{۵}{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{۵}{۲\sqrt{۲}}$$

بنابراین مساحت مربع برابر است با:

$$S_{\text{مربع}} = \frac{۵}{۲\sqrt{۲}} \times \frac{۵}{۲\sqrt{۲}} = \frac{۲۵}{۴ \times ۲} = \frac{۲۵}{۸}$$

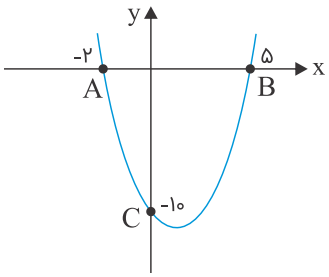
وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۵۰ گزینه ۳

$$y = x^{۲} - ۳x - ۱۰ \Rightarrow y = (x-۵)(x+۲)$$
$$\xrightarrow{y=۰} x = -۲ \ , \ x = ۵$$

باتوجه‌به صفرهای تابع، نمودار تابع محور xها را در نقاط $A(-۲,۰)$ و $B(۵,۰)$ قطع می‌کند. همچنین محور yها را در نقطهٔ $C(۰,-۱۰)$ قطع می‌کند.

همچنین به علت مثبت بودن ضریب $x^{۲}$، دهانهٔ این سهمی روبه‌بالا باز می‌شود؛ بنابراین نمودار آن به شکل زیر است:



همان‌طور که ملاحظه می‌شود برای آنکه طول نقطه‌های تلاقی نمودار سهمی با محور xها نامنفی باشند، باید نمودار را حداقل دو واحد به‌سمت xهای مثبت انتقال دهیم.

۵۱ گزینه ۱

این منحنی باید دو ریشهٔ مختلف‌العلامت داشته باشد؛ درنتیجه کافی است حاصل‌ضرب دو ریشه منفی باشد.

$$P = \frac{c}{a} = \frac{۱-m}{m+۲} < ۰$$

m		-۲		۱	
P	$-$		$+$	۰	$-$

تعریف نشده

$$\Rightarrow m > ۱ \text{ یا } m < -۲$$

دقت کنید که اگر $\frac{c}{a} < ۰$ باشد، $\Delta > ۰$ می‌شود.

۵۲ گزینه ۲

ابتدا معادلهٔ دایره را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم.

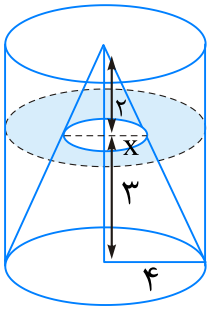
$$x^{۲} - ۲x + ۱ + y^{۲} + ۴y + ۴ - ۱ - ۴ + ۱ = ۰$$
$$\Rightarrow (x-۱)^{۲} + (y+۲)^{۲} = ۴ \Rightarrow O_{۱} : (۱,-۲),\ R_{۱} = ۲$$

چون دو دایره مماس خارج هستند، بنابراین فاصلهٔ مراکز آن‌ها از یکدیگر برابر مجموع اندازه‌های شعاع‌های آن‌ها است.

$$O_{۱}O_{۲} = R_{۱} + R_{۲} \Rightarrow \sqrt{(۱-(-۲))^{۲} + (-۲-۲)^{۲}} = ۲ + R_{۲} \Rightarrow ۵ = ۲ + R_{۲} \Rightarrow R_{۲} = ۳$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۵۳ گزینه ۴



نسبت تشابه : $\frac{x}{۴} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow x = \frac{۸}{۵}$

$$S = \pi(۴)^۲ - \pi(\frac{۸}{۵})^۲ = ۱۶\pi - \frac{۶۴}{۲۵}\pi = \frac{۳۳۶}{۲۵}\pi = ۱۳/۴۴\pi$$

۵۴ گزینه ۱

$$x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{(۰,۰) را صدق می‌دهیم}} c = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{(۲,۱) را صدق می‌دهیم}} ۴ + ۱ + ۲a + b = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{(۱,−۲) را صدق می‌دهیم}} ۱ + ۴ + a - ۲b = ۰$$

اکنون با معلوم بودن مقادیر a، b و c شعاع دایره برابر است با:

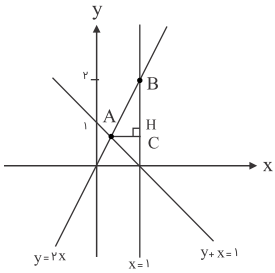
$$\xrightarrow{\times ۲} \begin{array}{l} ۴a + ۲b = -۱۰ \\ a - ۲b = -۵ \end{array} \Rightarrow ۵a = -۱۵ \Rightarrow a = -۳, b = ۱$$

$$R = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c} = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۳)^۲ + (۱)^۲ - ۴(۰)} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰}$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۵۵ گزینه ۱

با رسم خطوط در یک دستگاه، مطابق شکل کوچک‌ترین ارتفاع مثلث ABC پاره‌خط AH است.



مختصات نقطهٔ A را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y = ۲x \\ x + y = ۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{از حل دستگاه}} \begin{cases} x = \frac{۱}{۳} \\ y = \frac{۲}{۳} \end{cases}$$

بنابراین کوچک‌ترین ارتفاع مثلث یعنی AH روی خط $y = \frac{۲}{۳}$ قرار دارد.

۵۶ گزینه ۴

فاصلهٔ نقطهٔ A را از خط راست به دست می‌آوریم. فاصلهٔ به‌دست‌آمده نصف اندازهٔ ضلع مربع است.

$$d = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} \Rightarrow d = \frac{۲ + ۳ + ۵}{\sqrt{۵}} = \frac{۱۰}{\sqrt{۵}}$$

$$d = \frac{a}{۲} \Rightarrow a = ۲d = \frac{۲۰}{\sqrt{۵}} \Rightarrow s = a^۲ = (\frac{۲۰}{\sqrt{۵}})^۲ = ۸۰$$

۵۷ گزینه ۲

سه رأس داده‌شده مربوط به مثلث قائم‌الزاویه است، زیرا:

$$\begin{cases} m_{AC} = \frac{۳}{۲} \\ m_{BC} = -\frac{۲}{۳} \end{cases}$$

$$S = \frac{(AC) \times (BC)}{۲} \xrightarrow{AC=\sqrt{۴+۹}=\sqrt{۱۳}, BC=\sqrt{۴+۹}=\sqrt{۱۳}} S = \frac{\sqrt{۱۳} \times \sqrt{۱۳}}{۲} = ۶/۵$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۵۸

گزینه ۲

گام اول

الف) دو خط با شیب‌های $m_۱$ و $m_۲$ بر هم عمودند، هرگاه داشته باشیم:

$$m_۱ \cdot m_۲ = -۱$$

ب) شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ $A(x_۱ , y_۱)$ و $B(x_۲ , y_۲)$ برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}$$

ج) شیب خطی با معادلهٔ استاندارد $ax + by + c = ۰$ برابر است با:

$$m = -\frac{a}{b}$$

گام دوم

شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ $A(۲ , -۱)$ و $B(۸ , ۳)$ برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{۳ - (-۱)}{۸ - ۲} = \frac{۳ + ۱}{۶} = \frac{۲}{۳}$$

شیب خط انتخاب‌شده از میان دسته خطوط با معادلهٔ $(k + ۱)y + ۲kx - k + ۱ = ۰$ برابر است با:

$$m' = -\frac{۲k}{k + ۱}$$

این دو خط بر هم عمود هستند، بنابراین طبق قسمت (الف) از گام اول، باید داشته باشیم:

$$m_{AB} \cdot m' = -۱ \Rightarrow \frac{۲}{۳} \times (-\frac{۲k}{k + ۱}) = -۱ \Rightarrow \frac{-۴k}{۳k + ۳} = -۱ \Rightarrow -۴k = -۳k - ۳$$
$$\Rightarrow k = ۳$$

به ازای $k = ۳$، معادلهٔ خط انتخاب‌شده به دست می‌آید.

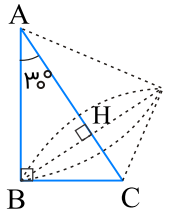
$$(k + ۱)y + ۲kx - k + ۱ = ۰ \xrightarrow{k=۳} ۴y + ۶x - ۳ + ۱ = ۰ \Rightarrow ۴y + ۶x - ۲ = ۰$$
$$\Rightarrow ۲(۲y + ۳x - ۱) = ۰ \Rightarrow ۲y + ۳x - ۱ = ۰ \Rightarrow ۲y + ۳x = ۱$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۵۹

گزینه ۲

مطابق شکل از دوران مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC حول وتر AC، دو مخروط پدید می‌آید که ارتفاع وارد بر وتر (BH)،شعاع قاعدهٔ این دو مخروط است.



طول ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰° در مثلث قائم‌الزاویه، نصف طول وتر است. پس طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$AC = ۸ \Rightarrow BC = \frac{۱}{۲} \times ۸ = ۴$$
$$BC^۲ = AC.CH \Rightarrow ۱۶ = ۸ \times CH$$
$$\Rightarrow CH = ۲ \Rightarrow AH = ۸ - ۲ = ۶$$
$$BH^۲ = AH.CH = ۲ \times ۶ = ۱۲$$

مجموع حجم دو مخروط برابر است با:

$$V = \frac{۱}{۳}\pi(BH)^۲ \times AH + \frac{۱}{۳}\pi(BH)^۲ \times CH$$
$$= \frac{\pi}{۳} \times ۱۲ \times ۶ + \frac{\pi}{۳} \times ۱۲ \times ۲$$
$$= ۲۴\pi + ۸\pi = ۳۲\pi$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۶۰ گزینه ۳

گام اول

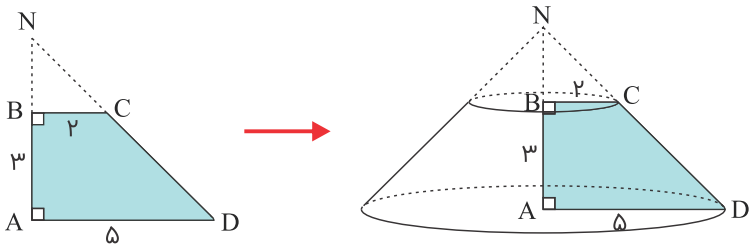
الف) در یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه با امتداد دادن اضلاع غیرقاعده‌ای، یک مثلث قائم‌الزاویه به وجود می‌آید.

ب) از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه‌اش، یک مخروط ایجاد می‌شود.

ج) حجم مخروط از رابطهٔ $V = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲} h$ به دست می‌آید که r شعاع قاعده و h ارتفاع آن است.

گام دوم

ذوزنقهٔ $ABCD$ را رسم می‌کنیم. نقطهٔ تقاطع امتداد دو ضلع AB و CD را N می‌نامیم. دو مثلث $\overset{\Delta}{NBC}$ و $\overset{\Delta}{NAD}$ قائم‌الزاویه هستند. برای محاسبهٔ حجم حاصل از دوران ذوزنقه حول ضلع قائم آن، کافی است حجم مخروط حاصل از دوران مثلث $\overset{\Delta}{NBC}$ حول ضلع NB را از حجم مخروط حاصل از دوران مثلث $\overset{\Delta}{NAD}$ حول ضلع NA کم کنیم.



باتوجه‌به اینکه $BC || AD$ است، طبق قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{BN}{AN} = \frac{BC}{AD} \Rightarrow \frac{BN}{BN + ۳} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow ۵BN = ۲BN + ۶ \Rightarrow ۳BN = ۶ \Rightarrow BN = ۲$$

بنابراین:

$$V_{\text{دوران ذوزنقه}} = V_{\overset{\Delta}{NAD}\ \text{دوران مثلث}} - V_{\overset{\Delta}{NBC}\ \text{دوران مثلث}}$$

$$V_{\text{دوران ذوزنقه}} = \frac{۱}{۳}\pi(۵)^{۲} \times ۵ - \frac{۱}{۳}\pi(۲)^{۲} \times ۲ = \frac{۱}{۳}\pi\,(۱۲۵ - ۸) = \frac{۱۱۷}{۳}\pi = ۳۹\pi$$

۶۱ گزینه ۲

باتوجه‌به شکل، قطر نیم‌دایره بر طول مستطیل منطبق شده است. حال داریم:

نکتهٔ ۱: از دوران یک مستطیل حول طول خود یک استوانه به ارتفاعی برابر با طول مستطیل و شعاع قاعده‌ای برابر با عرض آن پدید می‌آید.

نکتهٔ ۲: از دوران یک نیم‌دایره حول قطر آن، یک کره با همان شعاع پدید می‌آید.

بنابراین باتوجه‌به این دو نکته، شکل ما یک استوانه می‌شود که از درون آن یک کره به شعاع $\frac{۳}{۲}$ خالی شده است، حجم جسم حاصل به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$V_{\text{رنگی}} = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{کره}} = \pi(۲)^{۲} \times ۵ - \frac{۴}{۳}\pi\left(\frac{۳}{۲}\right)^{۳} = ۲۰\pi - \frac{۹}{۲}\pi = ۱۵/۵\pi$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۶۲

گزینه ۲

برای حل معادلهٔ داده‌شده از تغییر متغیر به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$x^{۲}+۴x+۳=t$$

حالا معادلهٔ جدید برحسب t به صورت زیر درمی آید:

$$x^{۲}+۴x+۳=\sqrt{x^{۲}+۴x+۳+۲}\Rightarrow t=\sqrt{t+۲}$$

با حل معادلهٔ به‌دست‌آمده، مقدار t و در ادامه حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ اصلی را محاسبه می‌کنیم.

$$t=\sqrt{t+۲}\xrightarrow{\text{به توان ۲}}t^{۲}=t+۲\Rightarrow t^{۲}-t-۲=۰$$

$$\Rightarrow (t-۲)(t+۱)=۰\Rightarrow \begin{cases} t-۲=۰\Rightarrow t=۲ \\ t+۱=۰\Rightarrow t=-۱ \end{cases}$$

اکنون معادلهٔ اصلی را حل می‌کنیم:

$$t=۲\Rightarrow x^{۲}+۴x+۳=۲\Rightarrow x^{۲}+۴x+۱=۰\Rightarrow x_{۱}x_{۲}=۱$$

$t=-۱$ غیرقابل‌قبول است. چون حاصل رادیکال با فرجهٔ زوج نباید منفی باشد.

۶۳

گزینه ۲

گام اول

برای حل ساده‌تر معادله، با تغییر متغیر $x^{۲}+x=t$، معادلهٔ داده‌شده را به یک معادلهٔ درجه‌دو تبدیل می کنیم.

گام دوم

$$(x^{۲}+x)^{۲}-۱۸(x^{۲}+x)+۷۲=۰\xrightarrow{x^{۲}+x=t}t^{۲}-۱۸t+۷۲=۰$$

$$\Rightarrow (t-۱۲)(t-۶)=۰\Rightarrow \begin{cases} t-۱۲=۰\Rightarrow t=۱۲ \\ t-۶=۰\Rightarrow t=۶ \end{cases}$$

حال مقادیر x را محاسبه می کنیم:

$$t=۱۲\Rightarrow x^{۲}+x=۱۲\Rightarrow x^{۲}+x-۱۲=۰\Rightarrow (x+۴)(x-۳)=۰\Rightarrow \begin{cases} x_{۱}=-۴ \\ x_{۲}=۳ \end{cases}$$

$$t=۶\Rightarrow x^{۲}+x=۶\Rightarrow x^{۲}+x-۶=۰\Rightarrow (x+۳)(x-۲)=۰\Rightarrow \begin{cases} x_{۳}=-۳ \\ x_{۴}=۲ \end{cases}$$

مجموع ریشه های حقیقی معادلهٔ اولیه برابر است با:

$$x_{۱}+x_{۲}+x_{۳}+x_{۴}=-۴+۳-۳+۲=-۲$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۶۴ گزینه ۳

گام اول

الف) دایره محور xها را در دو نقطه به طول $x = ۱$ و $x = ۳$ قطع می‌کند؛ بنابراین نقاط $A\,(۱, ۰)$ و $B\,(۳, ۰)$ روی دایرهٔ موردنظر قرار دارند.

ب) مرکز دایره روی نیمساز ربع اول (خط $y = x$) است؛ بنابراین مرکز دایره را به‌صورت $O\,(\alpha, \alpha)$ در نظر می‌گیریم.

گام دوم

چون نقاط A و B روی دایره قرار دارند پس فاصلهٔ آن‌ها تا مرکز دایره باهم برابر و برابر شعاع دایره است.

$$OA = OB = R \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(\alpha - ۱)^۲ + \alpha^۲} = \sqrt{(\alpha - ۳)^۲ + \alpha^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} (\alpha - ۱)^۲ + \alpha^۲ = (\alpha - ۳)^۲ + \alpha^۲$$

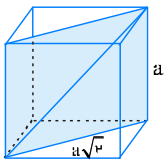
$$\Rightarrow \alpha^۲ - ۲\alpha + ۱ = \alpha^۲ - ۶\alpha + ۹ \Rightarrow ۴\alpha = ۸ \Rightarrow \alpha = ۲$$

بنابراین مرکز دایره نقطهٔ $O\,(۲, ۲)$ می‌شود و شعاع دایره برابر است با:

$$R = OA = \sqrt{(۲ - ۱)^۲ + ۲^۲} = \sqrt{۱ + ۴} = \sqrt{۵}$$

۶۵ گزینه ۴

همان‌طوری که در شکل زیر نیز مشخص است، سطح مقطع یک مکعب به طول یال a و صفحهٔ قطری آن، مستطیلی به طول اضلاع a و $a\sqrt{۲}$ است. با توجه به مساحت مستطیل، اندازهٔ a را محاسبه می‌کنیم.



بنابراین می‌توان نوشت:

$$a\left(a\sqrt{۲}\right) = ۹\sqrt{۲} \quad \Rightarrow \quad a^۲\sqrt{۲} = ۹\sqrt{۲} \quad \Rightarrow \quad a^۲ = ۹ \quad \Rightarrow \quad a = ۳$$

قطر مکعب به طول یال a برابر $a\sqrt{۳}$ است (با دو بار استفاده از قضیهٔ فیثاغورس ثابت می‌شود)، پس داریم:

$$a\sqrt{۳} = ۳\sqrt{۳}$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۶۶ گزینه ۴

گام اول

اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، باید رابطهٔ $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=۲$ برقرار باشد.

گام دوم

$$A=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\Rightarrow A^{۲}=\alpha+\beta+۲\sqrt{\alpha\beta}=S+۲\sqrt{P}$$

$$\Rightarrow A=\sqrt{S+۲\sqrt{P}}\quad,\quad S=\frac{m+۱}{۲}\quad,\quad P=\frac{۱}{۱۶}$$

$$A=\sqrt{\frac{m+۱}{۲}+۲(\frac{۱}{۴})}=۲\Rightarrow\sqrt{\frac{m+۱}{۲}+\frac{۱}{۲}}=۲$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}}\frac{m+۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۴\Rightarrow\frac{m+۱}{۲}=\frac{۷}{۲}\Rightarrow m+۱=۷\Rightarrow m=۶$$

۶۷ گزینه ۴

گام اول

شرط اینکه معادلهٔ درجهٔ دو دارای ۲ ریشهٔ مثبت باشد، این است که:

$$۱)\ \Delta>۰\qquad ۲)\ S>۰\qquad ۳)\ P>۰$$

گام دوم

$$\Delta>۰\Rightarrow ۴(a-۲)^{۲}-۴(۱)(۱۴-a)>۰$$

$$\xrightarrow{\div ۴}(a-۲)^{۲}-(۱۴-a)>۰\Rightarrow a^{۲}-۴a+۴-۱۴+a>۰\Rightarrow a^{۲}-۳a-۱۰>۰$$

$$\Rightarrow(a-۵)(a+۲)>۰\Rightarrow a<-۲\ \text{یا}\ a>۵\quad(۱)$$

$$S>۰\Rightarrow ۲(a-۲)>۰\Rightarrow a-۲>۰\Rightarrow a>۲\quad(۲)$$

$$P>۰\Rightarrow ۱۴-a>۰\Rightarrow a<۱۴\quad(۳)$$

$$(۱)\cap(۲)\cap(۳):۵<a<۱۴$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۶۸

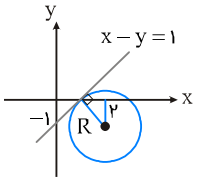
گزینه ۱

فاصلهٔ مرکز دایره از خط مماس بر دایره برابر با شعاع دایره است. فاصلهٔ یک نقطه با مختصات $(x_۰, y_۰)$ از خط به معادلهٔ $ax + by + c = ۰$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

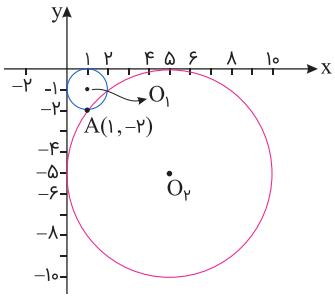
بنابراین شعاع دایره برابر است با:

$$R = \frac{|۲ + ۱ - ۱|}{\sqrt{۱^۲ + (-۱)^۲}} = \sqrt{۲}$$



معادلهٔ دایره : $(x - ۲)^۲ + (y + ۱)^۲ = ۲ \xrightarrow{y=۰} (x - ۲)^۲ = ۱ \Rightarrow \begin{cases} x - ۲ = ۱ \Rightarrow x = ۳ \\ x - ۲ = -۱ \Rightarrow x = ۱ \end{cases}$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com



شکل به زیبایی به ما نشان می‌دهد که ۲تا دایره داریم که بر محورهای مختصات مماس هستند و از نقطهٔ $A(1,-2)$ می‌گذرند. به‌علاوه مرکز دایره‌ها به‌صورت $O(r,-r)$ است؛ چراکه وقتی دایره‌ای بر هر دو محور مختصات مماس است، فاصله مرکز آن تا محورها برابر با شعاع می‌شود؛ پس فهمیدیم این دایره‌ها به مرکز $O(r,-r)$ و شعاع r هستند. معادلهٔ آن‌ها به این صورت است:

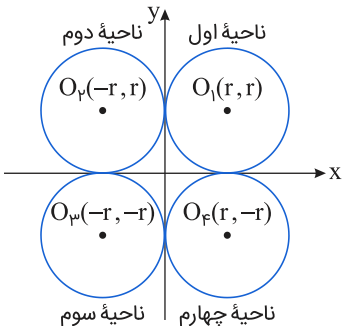
$$(x-r)^2+(y+r)^2=r^2 \xrightarrow{(1,-2)} (1-r)^2+(-2+r)^2=r^2$$

$$1-2r+r^2+4-4r+r^2=r^2 \Rightarrow r^2-6r+5=0$$

$$\Rightarrow (r-1)(r-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} r=1 \\ r=5 \end{cases}$$

همان‌طوری که انتظار داشتیم، وقتی به روش جبری هم سؤال را حل کردیم، دو مقدار برای r به دست آوردیم.

نکته: اگر دایره‌ای بر هر دو محور مختصات در ناحیه‌های اول تا چهارم مماس باشد، مختصات مرکز آن به‌صورت زیر است:



وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۷۰ گزینه ۴

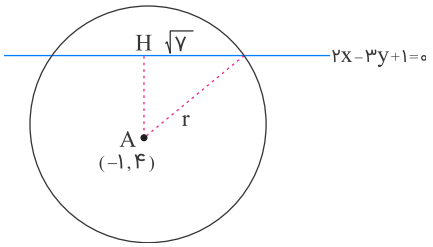
$$\sqrt{(x-۳)^۲+(y-۶)^۲}=۲\sqrt{x^۲+y^۲}$$
$$\Rightarrow x^۲-۶x+۹+y^۲-۱۲y+۳۶=۴x^۲+۴y^۲$$
$$\Rightarrow ۳x^۲+۳y^۲+۶x+۱۲y-۴۵=۰$$
$$\xrightarrow{\div ۳} x^۲+y^۲+۲x+۴y-۱۵=۰$$
$$\Rightarrow (x+۱)^۲+(y+۲)^۲=۲۰\Rightarrow O(-۱,-۲)$$

معادلهٔ فوق، معادلهٔ یک دایره است که بزرگ‌ترین وتر همان قطر است:

$$r=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}\Rightarrow ۲r=۴\sqrt{۵}$$

۷۱ گزینه ۱

فاصلهٔ مرکز دایره از خط برابر AH است. داریم:



$$AH=\frac{|۲(-۱)-۳(۴)+۱|}{\sqrt{۲^۲+(-۳)^۲}}=\frac{۱۳}{\sqrt{۱۳}}=\sqrt{۱۳}$$

همچنین می‌دانیم شعاع عمود بر وتر در دایره، وتر را نصف می‌کند. پس:

$$r^۲=AH^۲+\sqrt{۷}^۲\Rightarrow r^۲=۱۳+۷=۲۰$$

معادلهٔ دایره را می‌نویسیم:

$$(x+۱)^۲+(y-۴)^۲=۲۰\xrightarrow{y=۲}(x+۱)^۲+۴=۲۰\Rightarrow (x+۱)^۲=۱۶$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x=۳ \\ x=-۵ \end{cases}$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۷۲ گزینه ۱

شرط آنکه معادلهٔ درجه دومی، ۲ ریشهٔ حقیقی مثبت داشته باشد این است که $\Delta > ۰$، $S = \frac{-b}{a} > ۰$ و $P = \frac{c}{a} > ۰$ باشند.

$$x^۲ + (m-۲)x + m + ۱ = ۰$$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-(m-۲)}{۱} > ۰ \Rightarrow m - ۲ < ۰ \Rightarrow m < ۲$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{m+۱}{۱} > ۰ \Rightarrow m > -۱$$

از اشتراک دو شرط بالا $-۱ < m < ۲$ به دست می‌آید و گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ حذف می‌شوند؛ پس اصلاً نیازی به بررسی $\Delta > ۰$ نیست ولی ما شرط $\Delta > ۰$ را هم بررسی می‌کنیم:

$$\Delta > ۰ \Rightarrow (m-۲)^۲ - ۴(m+۱) > ۰ \Rightarrow m^۲ - ۴m + ۴ - ۴m - ۴ > ۰$$

$$\Rightarrow m^۲ - ۸m > ۰ \Rightarrow \begin{cases} m > ۸ \\ \text{یا} \\ m < ۰ \end{cases}$$

از اشتراک $-۱ < m < ۲$ با شرط بالا به این نتیجه می‌رسیم: $-۱ < m < ۰$

۷۳ گزینه ۳

با فرض $x^۲ - ۲x = t$ داریم:

$$t^۲ - t - ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = -۱ \Rightarrow x^۲ - ۲x = -۱ \Rightarrow x^۲ - ۲x + ۱ = ۰ \xrightarrow{\Delta = ۰} x = ۱ \\ t = ۲ \Rightarrow x^۲ - ۲x = ۲ \Rightarrow x^۲ - ۲x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \pm \sqrt{۳} \end{cases}$$

پس معادله سه ریشهٔ حقیقی دارد.

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۷۴ گزینه ۳

ابتدا از روی معادلهٔ $2x^2 - 3x - 4 = 0$، حاصل $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ را به دست می آوریم. سپس حاصل $\frac{1}{\alpha} + 1 + \frac{1}{\beta} + 1$ و $(\frac{1}{\alpha} + 1)(\frac{1}{\beta} + 1)$ را محاسبه می کنیم. اگر S و P مقادیر حاصل جمع و حاصل ضرب ریشه های یک معادلهٔ درجه دو باشند، آن معادلهٔ درجه دو به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ نوشته می شود.

$$2x^2 - 3x - 4 = 0 \xrightarrow[\text{معادله}]{\alpha \text{ و } \beta \text{ ریشه های}} \begin{cases} \alpha + \beta = -(-\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} \\ \alpha\beta = -\frac{4}{2} = -2 \end{cases}$$

S و P را برای معادلهٔ جدید به دست می آوریم:

$$S = \frac{1}{\alpha} + 1 + \frac{1}{\beta} + 1 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 2 = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + 2 = \frac{\frac{3}{2}}{-2} + 2 = -\frac{3}{4} + 2 = \frac{5}{4}$$

$$P = (\frac{1}{\alpha} + 1)(\frac{1}{\beta} + 1) = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 1 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + 1 = -\frac{1}{4}$$

بنابراین معادلهٔ درجه ۲ جدید به صورت زیر درمی آید:

$$x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{4} = 0 \xrightarrow{\times 4} 4x^2 - 5x - 1 = 0$$

۷۵ گزینه ۳

ابتدا معادلهٔ $x(5x + 3) = 2$ را به فرم استاندارد معادلهٔ درجهٔ دو تبدیل کرده و باتوجه به اینکه α و β ریشه های آن است، مقدار $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ را به دست می آوریم.

برای یافتن k باید حاصل $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$ را محاسبه کرده و برابر $\frac{k}{4}$ قرار دهیم.

$$x(5x + 3) = 2 \Rightarrow 5x^2 + 3x = 2 \Rightarrow 5x^2 + 3x - 2 = 0 \xrightarrow[\text{معادله}]{\alpha \text{ و } \beta \text{ ریشه های}} \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{3}{5} \\ \alpha\beta = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

مقدار k را محاسبه می کنیم:

$$4x^2 - kx + 25 = 0 \xrightarrow[\text{معادله}]{\frac{1}{\alpha^2} \text{ و } \frac{1}{\beta^2} \text{ ریشه های}} \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{k}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2\ \beta^2} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha^2\ \beta^2} = \frac{k}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{(-\frac{3}{5})^2 - 2(-\frac{2}{5})}{(-\frac{2}{5})^2} = \frac{k}{4} \Rightarrow \frac{\frac{9}{25} + \frac{4}{5}}{\frac{4}{25}} = \frac{\frac{29}{25}}{\frac{4}{25}} = \frac{29}{4} = \frac{k}{4} \Rightarrow k = 29$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۷۶ گزینه ۱

$$\sqrt{3a+16}=1-2a \xrightarrow{\text{توان ۲}} 3a+16=1-4a+4a^2$$

$$\Rightarrow 4a^2-7a-15=0 \Rightarrow (4a+5)(a-3)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ a=\dfrac{-5}{4} \end{cases}$$

همچنین داریم:

$$\begin{cases} 1-2a\geq 0 \Rightarrow a\leq \dfrac{1}{2} \\ 3a+16\geq 0 \Rightarrow a\geq -\dfrac{16}{3} \end{cases} \xrightarrow{\cap} a\in[-\frac{16}{3},\frac{1}{2}]$$

پس $a=3$ در معادلهٔ اولیهٔ صدق نمی‌کند، بنابراین $a=-\frac{5}{4}$ است.

$$4a+9=4(-\frac{5}{4})+9=-5+9=4$$

۷۷ گزینه ۴

فرض کنید سرعت پرواز پرونده v باشد. در این صورت سرعت رفت $5+v$ و سرعت برگشت $v-5$ خواهد بود و داریم:

$$t_1=\frac{x_1}{v_1} \Rightarrow t_1=\frac{1}{5+v}$$

$$t_2=\frac{x_2}{v_2} \Rightarrow t_2=\frac{1}{v-5}$$

$$t_1+t_2=9\ (\text{min})=\frac{9}{60}\ (\text{h}) \Rightarrow \frac{9}{60}=\frac{1}{5+v}+\frac{1}{v-5}$$

$$\frac{3}{20}=\frac{1}{5+v}+\frac{1}{v-5} \xrightarrow{\times 20(v^2-25)} 3(v^2-25)=20(v-5)+20(v+5)$$

$$\Rightarrow 3v^2-75=20v-100+20v+100$$

$$\Rightarrow 3v^2-40v-75=0 \Rightarrow (3v+5)(v-15)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v=15 & \checkmark \\ v=-\dfrac{5}{3} & \times \end{cases}$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۷۸

گزینه ۲

گام اول

وقتی گفته می شود معادله دارای دو ریشه معکوس است دو نتیجه می گیریم : اولاً Δ در این معادله بزرگ تر از صفر است، ثانیاً حاصل ضرب ریشه های معادله برابر یک است.

گام دوم

ابتدا معادله را به فرم استاندارد $ax^۲ + bx + c = ۰$ در می آوریم:

$$mx^۲ + ۳x + m^۲ = ۲ \Rightarrow mx^۲ + ۳x + m^۲ - ۲ = ۰$$

برای پیدا کردن مقدار m هر دو شرط بیان‌شده را بررسی می کنیم.

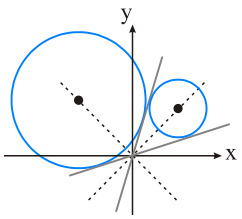
$$mx^۲ + ۳x + m^۲ - ۲ = ۰ \xrightarrow{\text{ریشه ها } x_۱ \text{ و } x_۲} x_۱x_۲ = ۱ \Rightarrow x_۱x_۲ = \frac{m^۲ - ۲}{m} = ۱$$
$$\Rightarrow m^۲ - ۲ = m \Rightarrow m^۲ - m - ۲ = ۰ \Rightarrow (m - ۲)(m + ۱) = ۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} m = ۲ \Rightarrow ۲x^۲ + ۳x + ۲ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۹ - ۴(۲)(۲) = ۹ - ۱۶ = -۷ < ۰ \\ m = -۱ \Rightarrow -x^۲ + ۳x - ۱ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۹ - ۴(-۱)(-۱) = ۹ - ۴ = ۵ > ۰ \end{cases}$$

با توجه به شرط $\Delta > ۰$ فقط $m = -۱$ جواب قابل‌قبول است.

۷۹

گزینه ۳

مرکز دایره بر روی نیمساز زاویهٔ بین دو خط قرار دارد. باتوجه‌به شکل، مرکز دایرهٔ کوچک‌تر روی $y = x$ و مرکز دایره بزرگ‌تر روی $y = -x$ قرار دارد.



$$M(۲\sqrt{۵}, ۲\sqrt{۵})$$

شعاع دایره برابر با فاصلهٔ مرکز آن از خط $۲y - x = ۰$ است.

$$R = \frac{|۴\sqrt{۵} - ۲\sqrt{۵}|}{\sqrt{۲^۲ + ۱^۲}} = ۲$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۸۰ گزینه ۱

مرکز دایره روی نیمساز ناحیهٔ اول است، پس مختصات آن به‌صورت (x, x) است. فاصلهٔ مرکز دایره از نقطهٔ $A(۶, ۳)$ و خط $y = ۲x$ یکسان است، پس داریم:

$$\sqrt{(x-۶)^۲ + (x-۳)^۲} = \frac{|۲x - x|}{\sqrt{۴+۱}} \Rightarrow (x-۶)^۲ + (x-۳)^۲ = \frac{x^۲}{۵} \Rightarrow ۲x^۲ - ۱۸x + ۴۵ = \frac{x^۲}{۵}$$

$$\Rightarrow ۹x^۲ - ۹۰x + ۲۲۵ = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۱۰x + ۲۵ = ۰ \Rightarrow (x-۵)^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۵$$

$$\text{شعاع دایره}: R = \frac{|x|}{\sqrt{۵}} = \frac{۵}{\sqrt{۵}} = \sqrt{۵}$$

۸۱ گزینه ۳

چون دایره بر دو خط موازی $y = ۲x$ و $y = ۲x + ۱۰$ مماس است؛ پس مرکز آن روی خط $y = ۲x + ۵$ (وسط این دو خط) قرار دارد و شعاع دایره برابر نصف فاصلهٔ این دو خط است.

$$\text{فاصله دو خط} = \frac{|۱۰ - ۰|}{\sqrt{۲^۲ + (-۱)^۲}} = \frac{۱۰}{\sqrt{۵}} = ۲\sqrt{۵} \Rightarrow R = \sqrt{۵}$$

چون دایره از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس فاصلهٔ مبدأ از مرکز دایره برابر R است.

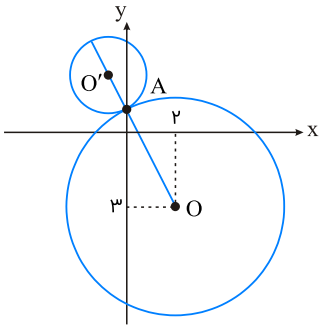
$$R = \sqrt{x^۲ + (۲x+۵)^۲} \Rightarrow \sqrt{۵} = \sqrt{۵x^۲ + ۲۰x + ۲۵}$$

$$\Rightarrow ۵(x^۲ + ۴x + ۴) = ۰ \Rightarrow (x+۲)^۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲ \Rightarrow y = ۲(-۲) + ۵ = ۱$$

$$\text{مرکز دایره} = (-۲, ۱)$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

گزینه ۱



مطابق شکل، مراکز دو دایرهٔ مماس خارج و محل تماس دو دایره، روی یک خط راست قرار دارند و مرکز دایرهٔ C' در ناحیهٔ دوم دستگاه مختصات است. می‌دانیم قائم‌های رسم‌شده بر یک دایره از مرکز آن دایره عبور می‌کنند، پس با فرض $O = (۲, -۳)$ و $A = (۰, ۱)$، داریم:

$$m_{OA} = \frac{۱ - (-۳)}{۰ - ۲} = -۲$$

$$\text{معادلهٔ خط } OA : y - ۱ = -۲(x - ۰) \Rightarrow y = -۲x + ۱$$

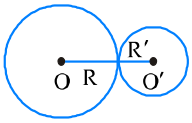
در بین گزینه‌ها، تنها نقطهٔ $(-۱, ۳)$ در ناحیهٔ دوم دستگاه مختصات است و در معادلهٔ خط OA صدق می‌کند. با فرض $O' = (-۱, ۳)$ داریم:

$$O'A = \sqrt{(۰ + ۱)^۲ + (۱ - ۳)^۲} = \sqrt{۵}$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۸۳ گزینه ۴

دو دایره با مرکزهای O و O' و شعاع‌های R و R' مماس بیرون‌اند اگر و تنها اگر داشته باشیم $|OO'| = R + R'$. در آغاز با دسته‌بندی معادله‌ها، مرکز و شعاع هر دایره را می‌یابیم:



$$x^۲ + y^۲ + ۴x = ۰ \Rightarrow (x+۲)^۲ - ۴ + y^۲ = ۰ \Rightarrow (x+۲)^۲ + y^۲ = ۴ \Rightarrow \begin{cases} O = (-۲, ۰) \\ R = \sqrt{۴} = ۲ \end{cases}$$

$$x^۲ + y^۲ - ۲x + ۸y + a = ۰ \Rightarrow (x-۱)^۲ - ۱ + (y+۴)^۲ - ۱۶ + a = ۰$$

$$\Rightarrow (x-۱)^۲ + (y+۴)^۲ = ۱۷ - a \Rightarrow \begin{cases} O' = (۱, -۴) \\ R' = \sqrt{۱۷ - a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |OO'| = \sqrt{(-۲-۱)^۲ + (۰+۴)^۲} = ۵ \\ R + R' = ۲ + \sqrt{۱۷ - a} \end{cases} \xrightarrow{|OO'| = R + R'} ۵ = ۲ + \sqrt{۱۷ - a}$$

$$\Rightarrow \sqrt{۱۷ - a} = ۳ \Rightarrow ۱۷ - a = ۹ \Rightarrow a = ۸$$

۸۴ گزینه ۲

شعاع و مرکز دایره به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ - ۴x + ۲y - ۴ = ۰$ عبارت‌اند از:

$$x^۲ + y^۲ - ۴x + ۲y - ۴ = ۰ \Rightarrow (x-۲)^۲ + (y+۱)^۲ = ۹$$

$$\text{مرکز} : O'(۲, -۱) \quad , \quad \text{شعاع} : R' = ۳$$

نقطه‌ای که تمامی خطوط قائم بر دایرهٔ C از آن عبور می‌کنند، مرکز این دایره است، پس $O(۸, ۷)$ مرکز دایرهٔ C است.

$$d = OO' = \sqrt{(۲-۸)^۲ + (-۱-۷)^۲} = ۱۰$$

چون دو دایره مماس خارج هستند، پس داریم:

$$d = R + R' \Rightarrow ۱۰ = R + ۳ \Rightarrow R = ۷$$

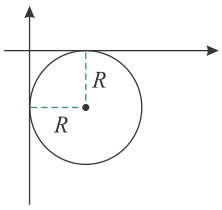
وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۸۵

گزینه ۳

گام اول

الف) شکل دایره‌ای به شعاع R که بر هر دو محور مختصات مماس باشد و از نقطهٔ $(۲, -۹)$ نیز عبور کند به‌صورت زیر است:



ب) معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $(x_۰, y_۰)$ و به شعاع R برابر است با:

$$(x - x_۰)^۲ + (y - y_۰)^۲ = R^۲$$

گام دوم

با توجه به شکل رسم‌شده در قسمت (الف) از گام اول، مختصات مرکز این دایره برابر $(R, -R)$ است. طبق قسمت (ب) از گام اول، معادلهٔ این دایره برابر است با:

$$(x - R)^۲ + (y + R)^۲ = R^۲$$

چون هر دو دایره از نقطهٔ $(۲, -۹)$ عبور می‌کنند، بنابراین مختصات این نقطه در معادلهٔ آن‌ها صدق می‌کند پس داریم:

$$\xrightarrow{x=۲, y=-۹} (۲ - R)^۲ + (-۹ + R)^۲ = R^۲ \Rightarrow ۴ - ۴R + R^۲ + ۸۱ - ۱۸R + R^۲ = R^۲$$

$$\Rightarrow R^۲ - ۲۲R + ۸۵ = ۰ \Rightarrow (R - ۱۷)(R - ۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} R = ۱۷ \\ R = ۵ \end{cases}$$

بنابراین شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر برابر ۱۷ است.

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۸۶ گزینه ۲

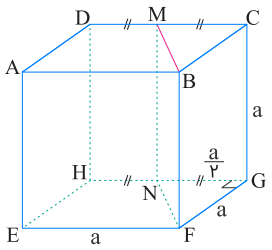
یال BF از مکعب زیر را در نظر می‌گیریم. نقطهٔ موردنظر نمی‌تواند وسط یال‌های EF، FG، AE، BC و CG باشد، زیرا در این صورت صفحهٔ گذرنده از BF و این نقطه، بر مکعب مماس می‌شود. ضمناً این نقطه نمی‌تواند وسط DH باشد، زیرا در این صورت، صفحهٔ گذرنده از AB و این نقطه، صفحهٔ قطری مکعب خواهد بود و حجم آن را نصف می‌کند که خلاف فرض است. پس فرض می‌کنیم نقطهٔ موردنظر، نقطهٔ M وسط یال CD است. (دقت کنید که برای یال‌های AD, EH, GH هم به همان نسبت یکسان، حجم‌ها تقسیم می‌شد). نقطهٔ M را به نقطهٔ N وسط HG وصل می‌کنیم. پس $MN||BF$ و درنتیجه صفحهٔ گذرنده از BF و M، از نقطهٔ N هم می‌گذرد و مکعب را به دو منشور تقسیم می‌کند. حال اگر حجم کوچک‌تر را $V_۱$، حجم بزرگ‌تر را $V_۲$ و حجم مکعب را V فرض کنیم، داریم:

$$V = a^۳$$

$$V_۱ = S_{\overset{\Delta}{GFN}} \times CG = \frac{۱}{۲}(a)(\frac{a}{۲})(a) = \frac{a^۳}{۴}$$

$$\Rightarrow V_۲ = V - V_۱ = \frac{۳a^۳}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{V_۱}{V_۲} = \frac{۱}{۳}$$



۸۷ گزینه ۲

گام اول

فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۰, y_۰)$ از خطی با معادلهٔ استاندارد $ax + by + c = ۰$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

گام دوم

نقطهٔ فرضی $A(\alpha, \alpha - ۱)$ را روی خط $y = x - ۱$ در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم فاصلهٔ نقطهٔ A از خط به معادلهٔ $۲x - ۳y = ۵$ برابر با $\sqrt{۱۳}$ باشد؛ بنابراین طبق گام اول داریم:

$$۲x - ۳y = ۵ \Rightarrow ۲x - ۳y - ۵ = ۰$$

$$\sqrt{۱۳} = \frac{|۲\alpha - ۳(\alpha - ۱) - ۵|}{\sqrt{۲^۲ + (-۳)^۲}} \Rightarrow \sqrt{۱۳} = \frac{|۲\alpha - ۳\alpha + ۳ - ۵|}{\sqrt{۱۳}}$$

$$\Rightarrow ۱۳ = |-\alpha - ۲| \Rightarrow \begin{cases} -\alpha - ۲ = -۱۳ \Rightarrow \alpha = ۱۱ \\ -\alpha - ۲ = ۱۳ \Rightarrow \alpha = -۱۵ \end{cases}$$

بنابراین دو نقطه روی خط $y = x - ۱$ که فاصلهٔ آن‌ها از خط $۲x - ۳y = ۵$ برابر با $\sqrt{۱۳}$ باشد، دارای طول ۱۱ و ۱۵- است.

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

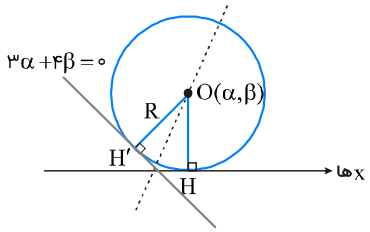
۸۸

گزینه ۱

مرکز دایره را نقطهٔ $O(\alpha,\beta)$ درنظر می‌گیریم. باید فاصلهٔ O از محور xها با فاصلهٔ آن از خط $۳x+۴y=۰$، برابر باشد:

$$OH = OH' \Rightarrow |\beta| = \frac{|۳\alpha+۴\beta|}{\sqrt{۹+۱۶}} = \frac{|۳a+۴\beta|}{۵} \Rightarrow \begin{cases} ۳\alpha+۴\beta = ۵\beta \\ ۳\alpha+۴\beta = -۵\beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳\alpha = \beta \\ ۳\alpha = -۹\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز}: \ O(\alpha, ۳\alpha) \\ \text{مرکز}: \ O(\alpha, -\frac{۱}{۳}\alpha) \end{cases}$$



مرکز دایره در ناحیهٔ اول است، پس فقط $O(\alpha, ۳\alpha)$ قابل‌قبول است؛بنابراین مطابق شکل، داریم:

$$R = OH = ۳ \Rightarrow \beta = ۳\alpha = ۳ \Rightarrow \alpha = ۱$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۸۹

گزینه ۳

گام اول

معادلهٔ گستردهٔ یک دایره به‌صورت $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ است. در این صورت شعاع دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{(\frac{a}{۲})^۲ + (\frac{b}{۲})^۲ - c}$$

گام دوم

سه نقطهٔ A، B و C روی دایره قرار دارد، پس مختصات این نقاط در معادلهٔ دایره صدق می‌کند.

$$x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$$
$$\xrightarrow{A(-۱,۰)} (-۱)^۲ + ۰^۲ + a(-۱) + b(۰) + c = ۰ \Rightarrow ۱ - a + c = ۰ \Rightarrow a - c = ۱ \qquad (I)$$
$$\xrightarrow{B(۳,۰)} ۳^۲ + ۰^۲ + a(۳) + b(۰) + c = ۰ \Rightarrow ۹ + ۳a + c = ۰ \Rightarrow ۳a + c = -۹ \qquad (II)$$
$$\xrightarrow{C(۰,-۳)} ۰^۲ + (-۳)^۲ + a(۰) + b(-۳) + c = ۰ \Rightarrow ۹ - ۳b + c = ۰ \Rightarrow c - ۳b = -۹ \qquad (III)$$

بنابراین سه معادله و سه مجهول داریم. با کمی دقت متوجه می‌شویم که دو معادلهٔ I و II فقط شامل دو مجهول a و c است، پس با حل یک دستگاه دو معادله و دو مجهول مقدار a و c را حساب می‌کنیم.

$$\begin{cases} a - c = ۱ \\ ۳a + c = -۹ \end{cases} \xrightarrow{+} ۴a = -۸ \Rightarrow a = -۲$$
$$a - c = ۱ \xrightarrow{a=-۲} c = -۲ - ۱ = -۳$$

با جایگذاری $c = -۳$ در معادلهٔ (III) مقدار b را هم حساب می‌کنیم.

$$c - ۳b = -۹ \xrightarrow{c=-۳} -۳ - ۳b = -۹ \Rightarrow ۳b = ۶ \Rightarrow b = ۲$$

اکنون باتوجه‌به گام اول، شعاع دایره را به دست می‌آوریم.

$$R = \sqrt{(\frac{-۲}{۲})^۲ + (\frac{۲}{۲})^۲ + ۳} = \sqrt{۱ + ۱ + ۳} = \sqrt{۵}$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۹۰

گزینه ۱

گام اول

در یک دایره به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$، نقطهٔ $(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲})$ مرکز دایره می‌باشد و شعاع این دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{(\frac{a}{۲})^۲ + (\frac{b}{۲})^۲ - c}$$

گام دوم

برای مشخص‌کردن وضعیت دو دایره نسبت به هم، مختصات مرکز دو دایره و شعاع آن‌ها را به دست می‌آوریم، سپس فاصلهٔ میان مرکز دو دایره (طول خط‌المرکزین) را با دو مقدار $|R_۱ - R_۲|$ و $R_۱ + R_۲$ مقایسه می‌کنیم.

$$x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y = ۱۳ \Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y - ۱۳ = ۰$$

$$\text{مرکز دایره} : O_۱(-\frac{-۲}{۲}, -\frac{۴}{۲}) \Rightarrow O_۱(۱, -۲)$$

$$\text{شعاع دایره} : R_۱ = \sqrt{(-\frac{۲}{۲})^۲ + (\frac{۴}{۲})^۲ + ۱۳} = \sqrt{۱ + ۴ + ۱۳} = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$$

$$x^۲ + y^۲ + ۲x = ۱ \Rightarrow x^۲ + y^۲ + ۲x - ۱ = ۰$$

$$\text{مرکز دایره} : O_۲(-\frac{۲}{۲}, -\frac{۰}{۲}) \Rightarrow O_۲(-۱, ۰)$$

$$\text{شعاع دایره} : R_۲ = \sqrt{(\frac{۲}{۲})^۲ + ۰ + ۱} = \sqrt{۱ + ۱} = \sqrt{۲}$$

بنابراین داریم:

$$O_۱O_۲ = \sqrt{(-۱ - ۱)^۲ + (۰ + ۲)^۲} = \sqrt{۴ + ۴} = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$$
$$R_۱ + R_۲ = ۳\sqrt{۲} + \sqrt{۲} = ۴\sqrt{۲}$$
$$|R_۱ - R_۲| = \left| ۳\sqrt{۲} - \sqrt{۲} \right| = ۲\sqrt{۲}$$

بنابراین $O_۱O_۲ = |R_۱ - R_۲|$ است و دو دایره نسبت به هم مماس داخل هستند.

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

گزینه ۲

گام اول

در یک دایره به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$، مختصات مرکز دایره $(-\frac{a}{۲}\,,\,-\frac{b}{۲})$ می‌باشد و شعاع این دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{(\frac{a}{۲})^۲ + (\frac{b}{۲})^۲ - c}$$

گام دوم

برای مشخص‌کردن وضعیت دو دایره نسبت به هم، فاصلهٔ میان مرکز دو دایره (طول خط‌المرکزین) را با دو مقدار $R_۱ + R_۲$ و $|R_۱ - R_۲|$ مقایسه می‌کنیم، بنابراین لازم است ابتدا مختصات مرکز دو دایره و شعاع آن‌ها را به دست آوریم.

$$x^۲ + y^۲ - ۴x + ۴y = ۱ \Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۴x + ۴y - ۱ = ۰$$

$$\text{مرکز دایره} : O_۱(-\frac{-۴}{۲}\,,\,-\frac{۴}{۲}) \Rightarrow O_۱(۲\,,\,-۲)$$

$$\text{شعاع دایره} : R_۱ = \sqrt{(-\frac{۴}{۲})^۲ + (\frac{۴}{۲})^۲ - (-۱)} = \sqrt{۴ + ۴ + ۱} = ۳$$

$$x^۲ + y^۲ - ۴x + ۸y + ۱۹ = ۰$$

$$\text{مرکز دایره} : O_۲(-\frac{-۴}{۲}\,,\,-\frac{۸}{۲}) \Rightarrow O_۲(۲\,,\,-۴)$$

$$\text{شعاع دایره} : R_۲ = \sqrt{(-\frac{۴}{۲})^۲ + (\frac{۸}{۲})^۲ - ۱۹} = \sqrt{۴ + ۱۶ - ۱۹} = ۱$$

طول خط‌المرکزین دو دایره برابر است با:

$$O_۱O_۲ = \sqrt{(۲ - ۲)^۲ + (-۴ + ۲)^۲} = \sqrt{۰ + (-۲)^۲} = \sqrt{۴} = ۲$$

همچنین داریم:

$$|R_۱ - R_۲| = |۳ - ۱| = ۲$$

بنابراین $O_۱O_۲ = |R_۱ - R_۲|$ است، پس دو دایره مماس داخل هستند.

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۹۲ گزینه ۴

برای اینکه تابع دارای دو ریشهٔ حقیقی منفی باشد، باید سه شرط زیر برقرار باشد:

$$(m-۶)x^۲ - ۲mx - ۳ = ۰$$

$$۱)\ \Delta > ۰ \Rightarrow (۲m)^۲ - ۴(m-۶)(-۳) > ۰$$

$$۴m^۲ + ۴(۳m - ۱۸) > ۰$$

$$m^۲ + ۳m - ۱۸ > ۰ \Rightarrow (m+۶)(m-۳) > ۰ \Rightarrow \begin{cases} m > ۳ \\ \text{یا} \\ m < -۶ \end{cases}$$

$$۲)\ -\frac{b}{a} < ۰ \Rightarrow \frac{۲m}{m-۶} < ۰ \Rightarrow ۰ < m < ۶$$

$$۳)\ \frac{c}{a} > ۰ \Rightarrow \frac{-۳}{m-۶} > ۰ \Rightarrow m - ۶ < ۰ \Rightarrow m < ۶$$

اشتراک جواب‌ها : $۳ < m < ۶$

۹۳ گزینه ۳

فرض کنید x، مقدار تبخیر برحسب کیلوگرم باشد. ابتدا محاسبه می‌کنیم که چند کیلوگرم رنگ خالص داریم:

$$\text{وزن رنگ خالص} = ۱۱ \times ۴۰\% + ۴ \times ۷۰\% = ۷/۲ \text{ کیلوگرم}$$

بنابراین در $۱۱ + ۴ = ۱۵$ کیلوگرم رنگ موجود، $۷/۲$ کیلوگرم رنگ خالص وجود دارد، اگر x میزان تبخیر باشد، آنگاه:

$$\frac{۷/۲}{۱۵ - x} = ۵۰\% = \frac{۵۰}{۱۰۰}$$
$$\Rightarrow ۷۲۰ = ۷۵۰ - ۵۰x \Rightarrow x = ۰/۶ \text{ کیلوگرم}$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۹۴

گزینه ۴

گام اول

ریشه‌های معادلهٔ موردنظر از معکوس ریشه‌های معادلهٔ داده شده یک واحد کمتر است، بنابراین ریشه‌های آن به‌صورت $\frac{۱}{\alpha} - ۱$ و $\frac{۱}{\beta} - ۱$ است.

گام دوم

روابط مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را می‌نویسیم:

$$۲x^۲ - ۳x - ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{۳}{۲} \\ P = \alpha\beta = \frac{-۱}{۲} \end{cases}$$

ریشه‌های معادلهٔ موردنظر به‌صورت $\frac{۱}{\alpha} - ۱$ و $\frac{۱}{\beta} - ۱$ است، لذا:

$$S' = (\frac{۱}{\alpha} - ۱) + (\frac{۱}{\beta} - ۱) = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} - ۲ = \frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{-۱}{۲}} - ۲ = -۵$$

$$P' = (\frac{۱}{\alpha} - ۱)(\frac{۱}{\beta} - ۱) = \frac{۱}{\alpha\beta} - \frac{۱}{\alpha} - \frac{۱}{\beta} + ۱$$

$$= \frac{۱ - (\alpha + \beta)}{\alpha\beta} + ۱ = \frac{۱ - \frac{۳}{۲}}{\frac{-۱}{۲}} + ۱ = ۲$$

پس معادله به‌صورت زیر است:

$$x^۲ - S'x + P' = ۰ \Rightarrow x^۲ + ۵x + ۲ = ۰$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۹۵ گزینه ۱

گام اول

اگر تابع درجه دو دارای ماکسیمم باشد، باید ضریب $x^۲$ منفی شود.

گام دوم

ضریب $x^۲$ منفی است پس:

$$K + ۳ < ۰ \Rightarrow K < -۳$$

عرض بیشترین مقدار تابع (عرض ماکسیمم) برابر صفر است:

$$-\frac{\Delta}{۴a} = ۰ \Rightarrow \Delta = ۰ \Rightarrow (-۴)^۲ - ۴(K+۳)K = ۰$$
$$\Rightarrow ۱۶ = ۴(K+۳)K \Rightarrow K(K+۳) = ۴ \Rightarrow K^۲ + ۳K - ۴ = ۰$$
$$\Rightarrow (K+۴)(K-۱) = ۰ \xrightarrow{K<-۳} K = -۴$$

البته اگر از اول نگاهی به گزینه ها می انداختیم تنها گزینه ای که $K < -۳$ باشد، گزینهٔ ۱ یعنی $k = -۴$ است.

۹۶ گزینه ۲

یک ریشه را α و ریشهٔ دیگر را $۳\alpha + ۳$ در نظر می گیریم.
با استفاده از حاصل جمع ریشه ها مقدار α را محاسبه می کنیم. سپس با استفاده از حاصل ضرب ریشه ها مقدار m را به دست می آوریم.

$$۳x^۲ - ۱۷x + m = ۰ \xrightarrow[\text{معادله}]{\text{ریشه های } (۳\alpha+۳) \text{ و } \alpha} \alpha + (۳\alpha + ۳) = -(-\frac{۱۷}{۳})$$
$$\Rightarrow ۴\alpha + ۳ = \frac{۱۷}{۳} \Rightarrow ۴\alpha = \frac{۸}{۳} \Rightarrow \alpha = \frac{۲}{۳}$$
$$۳\alpha + ۳ = ۳(\frac{۲}{۳}) + ۳ = ۲ + ۳ = ۵$$

پس حاصل‌ضرب ریشه ها برابر است با:

$$\alpha \times (۳\alpha + ۳) = \frac{۲}{۳} \times ۵ = \frac{m}{۳} \Rightarrow \frac{m}{۳} = \frac{۱۰}{۳} \Rightarrow m = ۱۰$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۹۷

گزینه ۲

گام اول

α و β را ریشه های معادلهٔ درجه دو فرض می کنیم. $\sqrt{۲}$ واسطهٔ هندسی بین α و β است. بنابراین داریم:

$$\alpha\beta = (\sqrt{۲})^{۲} = ۲$$

گام دوم

در معادلهٔ درجهٔ دو به فرم $ax^{۲} + bx + c = ۰$ اگر α و β ریشه های معادله باشند، حاصل ضرب ریشه ها برابر است با:

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$$mx^{۲} - ۵x + m^{۲} - ۳ = ۰ \xrightarrow[\text{معادله}]{\alpha \text{ و } \beta \text{ ریشه های}} \alpha\beta = \frac{m^{۲} - ۳}{m}$$

$$\xrightarrow{\alpha\beta=۲} ۲ = \frac{m^{۲} - ۳}{m} \Rightarrow m^{۲} - ۳ = ۲m$$

$$\Rightarrow m^{۲} - ۲m - ۳ = ۰ \Rightarrow (m-۳)(m+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = ۳ \\ m = -۱ \end{cases}$$

$$m = ۳: \quad ۳x^{۲} - ۵x + ۶ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۲۵ - ۷۲ < ۰ \Rightarrow \text{فاقد ریشه}$$

$$m = -۱: \quad -x^{۲} - ۵x - ۲ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۲۵ - ۸ > ۰$$

پس فقط $m = -۱$ قابل‌قبول است.

۹۸

گزینه ۳

اگر α و β را ریشه‌های معادلهٔ $۲x^{۲} - x - ۲ = ۰$ در نظر بگیریم، داریم:

$$۲x^{۲} - x - ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{۱}{۲} \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -۱ \end{cases}$$

بنابراین $\alpha^{۳}$ و $\beta^{۳}$ ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $۸x^{۲} - mx - ۸ = ۰$ می‌شود:

$$۸x^{۲} - mx - ۸ = ۰ \Rightarrow S' = \alpha^{۳} + \beta^{۳} = (\alpha+\beta)^{۳} - ۳\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

$$= (\frac{۱}{۲})^{۳} - ۳(-۱)(\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۸} + \frac{۳}{۲} = \frac{۱۳}{۸}$$

$$S' = -\frac{b}{a} = \frac{m}{۸} \Rightarrow \frac{۱۳}{۸} = \frac{m}{۸} \Rightarrow m = ۱۳$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۹۹ گزینه ۲

اگر فرض کنیم $x_1 = \alpha\beta^2$ و $x_2 = \alpha^2\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $8x^2 + kx - 1 = 0$ باشند آنگاه کافی است $x_1 + x_2$ را به دست آوریم.

$$2x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{3}{2} \\ P = \alpha\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$$

$$8x^2 + kx - 1 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$\Rightarrow \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta = \frac{-k}{8} \Rightarrow \alpha\beta(\beta + \alpha) = -\frac{k}{8} \Rightarrow (\frac{3}{2})(-\frac{1}{2}) = -\frac{k}{8} \Rightarrow k = 6$$

۱۰۰ گزینه ۱

گام اول

الف) اگر α و β ریشه های معادلهٔ درجه‌دو داده‌شده، باشد می دانیم $\alpha^2 + \beta^2 = 6$ است. $\alpha^2 + \beta^2$ برابر است با:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P = 6$$

ب) درصورتی‌که $\Delta > 0$ باشد معادلهٔ درجه‌دو، دو ریشهٔ حقیقی دارد و اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله فاقد ریشه است.

گام دوم

$$mx^2 - (m + 3)x + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \dfrac{m + 3}{m} \\ P = \alpha\beta = \dfrac{5}{m} \end{cases}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\frac{m + 3}{m})^2 - 2(\frac{5}{m}) = 6 \Rightarrow \frac{m^2 + 6m + 9}{m^2} - \frac{10}{m} = 6$$

$$\xrightarrow{\times m^2} m^2 + 6m + 9 - 10m = 6m^2 \Rightarrow 5m^2 + 4m - 9 = 0 \Rightarrow (5m + 9)(m - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = -4 < 0 \Rightarrow \text{فاقد ریشهٔ حقیقی} \\ m = -\dfrac{9}{5} \Rightarrow -\dfrac{9}{5}x^2 - \dfrac{6}{5}x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow \text{دارای دو ریشهٔ حقیقی} \end{cases}$$

پس فقط به ازای $m = -\frac{9}{5}$ معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد.

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۱۰۱ گزینه ۴

گام اول

الف) فرض کنید α و β ریشه های معادلهٔ $۳x^۲ - ۴x - ۱ = ۰$ باشند پس می توانیم نتیجه بگیریم که $(\alpha + ۱)$ و $(\beta + ۱)$ ریشه های معادلهٔ $۳x^۲ + ax + b = ۰$ هستند.

ب) برای به دست آوردن مقدار b باید حاصل ضرب ریشه های معادله یا همان $(\alpha + ۱)(\beta + ۱)$ را تعیین کنیم.

گام دوم

$$۳x^۲ - ۴x - ۱ = ۰ \xrightarrow{\text{ریشه ها } \alpha \text{ و } \beta} \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{۴}{۳} \\ \alpha\beta = -\frac{۱}{۳} \end{cases} \quad (I)$$

$$۳x^۲ + ax + b = ۰ \xrightarrow{\text{ریشه ها } (\alpha+۱) \text{ و } (\beta+۱)} (\alpha + ۱)(\beta + ۱) = \frac{b}{۳}$$

$$\Rightarrow \alpha\beta + \alpha + \beta + ۱ = \frac{b}{۳} \xrightarrow{(I)} -\frac{۱}{۳} + \frac{۴}{۳} + ۱ = \frac{b}{۳} \Rightarrow \frac{b}{۳} = ۲ \Rightarrow b = ۶$$

۱۰۲ گزینه ۲

گام اول

الف) ریشه های معادلهٔ $۳x^۲ + ۷x + ۱ = ۰$ را α و β فرض می‌کنیم. بنابراین ریشه های معادلهٔ $x^۲ + ax + b = ۰$ به صورت $(\alpha + ۱)$ و $(\beta + ۱)$ می شود.

ب) برای به دست آوردن b ، باید حاصل ضرب $(\alpha + ۱)(\beta + ۱)$ را تعیین کنیم.

گام دوم

$$۳x^۲ + ۷x + ۱ = ۰ \xrightarrow{\text{ریشه های معادله } \alpha \text{ و } \beta} \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{۷}{۳} \\ \alpha\beta = \frac{۱}{۳} \end{cases}$$

$$x^۲ + ax + b = ۰ \xrightarrow{\text{ریشه های معادله } (\alpha+۱) \text{ و } (\beta+۱)} (\alpha + ۱)(\beta + ۱) = b$$

$$\Rightarrow \alpha\beta + \alpha + \beta + ۱ = b \xrightarrow[\alpha+\beta=-\frac{۷}{۳}]{\alpha\beta=\frac{۱}{۳}} \frac{۱}{۳} - \frac{۷}{۳} + ۱ = -۱ = b \Rightarrow b = -۱$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۱۰۳ گزینه ۴

در تابع درجه‌دو به فرم $y = ax^۲ + bx + c$، محور تقارن منحنی ، خط $x = -\frac{b}{۲a}$ است. با توجه به این نکته، مقدار aرا به دست می آوریم:

$$y = (a-۱)x^۲ + x + ۳ \xrightarrow{\text{محور تقارن } x=۲} x = -\frac{۱}{۲(a-۱)} = ۲ \Rightarrow a - ۱ = -\frac{۱}{۴}$$

بنابراین ضابطهٔ تابع درجه‌دو به صورت $y = -\frac{۱}{۴}x^۲ + x + ۳$ درمی‌آید. معادلهٔ $y = ۰$ را حل می کنیم:

$$y = ۰ \Rightarrow -\frac{۱}{۴}x^۲ + x + ۳ = ۰ \xrightarrow{\times(-۴)} x^۲ - ۴x - ۱۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (x-۶)(x+۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۶ \\ x = -۲ \text{ غ.ق.ق} \end{cases}$$

چون در سؤال ذکرشده نمودار را با طول مثبت قطع کند، فقط $x = ۶$ قابل‌قبول است.

۱۰۴ گزینه ۳

گام اول

الف) اولاً نمودار تابع محور xها را در دو نقطه قطع می کند، پس معادلهٔ $y = ۰$ دارای دو ریشه بوده و $\Delta > ۰$ است.

ب) هر دو ریشهٔ معادله مثبت است، بنابراین حاصل جمع و حاصل ضرب ریشه ها باید مثبت باشد.

گام دوم

$$y = ۲x^۲ - ۴x + m - ۳$$

$$۱)\ \ \Delta > ۰ \Rightarrow (-۴)^۲ - ۴(۲)(m-۳) > ۰ \Rightarrow ۱۶ - ۸(m-۳) > ۰$$

$$\Rightarrow ۸(m-۳) < ۱۶ \Rightarrow m - ۳ < ۲ \Rightarrow m < ۵ \quad (I)$$

$$۲)\ \ S = x_۱ + x_۲ = -(-\frac{۴}{۲}) = ۲ > ۰ \Rightarrow \text{همواره برقرار است}$$

$$۳)\ \ P = x_۱.x_۲ = \frac{m-۳}{۲} > ۰ \Rightarrow m - ۳ > ۰ \Rightarrow m > ۳ \quad (II)$$

مجموعه مقادیر قابل‌قبول برای m، اشتراک دو مجموعه جواب (I) و (II) است پس می توان نوشت:

$$(I) \ \cap \ (II): \ \ ۳ < m < ۵$$

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com

۱۰۵

گزینه ۲

گام اول

الف) با تغییر متغیر $\sqrt{x} = t$ معادلهٔ داده‌شده را به معادلهٔ درجه‌دو تبدیل می کنیم.

ب) برای این که معادلهٔ اولیه فقط یک ریشه داشته باشد، معادلهٔ جدید باید دارای یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی باشد (چون در این صورت یک بار $\sqrt{x}$ برابر یک عدد مثبت شده که یک جواب به دست می‌آید و یک بار برابر یک عدد منفی شده که قابل‌قبول نیست) پس در این حالت معادله باید دو ریشهٔ مختلف العلامه داشته باشد.

ج) حالت دیگر این است که معادلهٔ اولیه فقط دارای یک ریشه باشد که در این صورت معادلهٔ جدید یک ریشهٔ مضاعف مثبت دارد.

گام دوم

$$mx - ۳\sqrt{x} + m - ۲ = ۰ \Rightarrow m(\sqrt{x})^۲ - ۳(\sqrt{x}) + m - ۲ = ۰ \xrightarrow{\sqrt{x}=t} mt^۲ - ۳t + m - ۲ = ۰$$

$$\text{حالت اول} : t_۱t_۲ < ۰ \Rightarrow \frac{m-۲}{m} < ۰ \Rightarrow ۰ < m < ۲ (I)$$

$$\text{حالت دوم} : mt^۲ - ۳t + m - ۲ = ۰ \xrightarrow{\Delta=۰} ۹ - ۴m(m-۲) = ۰ \Rightarrow ۹ - ۴m^۲ + ۸m = ۰$$

$$\Rightarrow -۴m^۲ + ۸m + ۹ = ۰ \Rightarrow m = \frac{۲ \pm \sqrt{۳}}{۲} \xrightarrow{m>۰} m = \frac{۲ \pm \sqrt{۳}}{۲} \quad (II)$$

جواب سؤال اشتراک (I) و (II) است که باتوجه‌به گزینه‌ها جواب به‌صورت $۰ < m < ۲$ می‌شود.

وبسایت آموزشی نمره یار | Nomreyar.com