۱ مشتق تابع $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ در نقطهٔ $x=۱$ برابر ۳ است. اگر $f(۱)=۰$ و $f'(۱)=-۴$ و $g'(۱)$ موجود باشد، مقدار $g(۱)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۴}{۳}$
۲) $-\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) $\frac{۴}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

۲ کوتاه‌ترین فاصلهٔ مبدأ مختصات از نقاط منحنی به معادلهٔ $y=\frac{۲}{x^۲}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) $\sqrt{۲}$
۳) $\sqrt{۳}$
۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

۳ اگر $f(x)=(x^۲-x-۲)\sqrt[۳]{x^۲-۷x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(-۱+h)-f(-۱)}{h}$ کدام است؟

۱) ۶-
۲) ۳-
۳) $-\frac{۳}{۲}$
۴) $-\frac{۳}{۴}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۴ عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $y=\sqrt{x^۲+۳x}$ در نقطهٔ $x=۱$ واقع بر آن کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۵}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۵ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^۴+\frac{۴}{۳}x^۳-۴x^۲$ کدام است؟

۱) -۲
۲) -۱
۳) صفر
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۶ خط مماس بر نمودار $y = \frac{1}{\sin x}$, $0 < x < \pi$، در نقطه‌ای به طول x_0 واقع بر آن، موازی خط به معادلهٔ $3y - 2x = 5$ است، x_0 کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{3}$
۲) $\frac{2\pi}{3}$
۳) $\frac{\pi}{6}$
۴) $\frac{5\pi}{6}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۷ مشتق تابع f در نقطهٔ $x = 2$ به‌صورت $\lim_{h \to 0} \frac{2(2+h)^2 + k(2+h) - 2k - 8}{h} = 12$ بیان شده است، k کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۱

۸ به ازای کدام مقدار a خط به معادلهٔ $y = -3x + 2$، بر منحنی به معادلهٔ $y = \frac{x^2 + a}{x - 2}$، مماس است؟

۱) -۱
۲) صفر
۳) ۱
۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۹ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 6x} & ; 0 \le x < 4 \\ \left[\frac{x}{4}\right](x^2 - 9x) & ; 4 \le x < 8 \end{cases}$، مقدار $f'(2) - f'(5)$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$
۲) $\frac{1}{2}$
۳) $\frac{3}{4}$
۴) $\frac{3}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۰ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{a}{x} + bx^2$ در نقطهٔ $(1, -2)$ دارای اکسترمم نسبی است. عدد a و نوع اکسترمم نسبی کدام است؟

۱) $-\frac{4}{3}$، مینیمم
۲) $-\frac{4}{3}$، ماکزیمم
۳) $\frac{4}{3}$، مینیمم
۴) $\frac{4}{3}$، ماکزیمم

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۱۱ نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \frac{x}{1 - x^2}$ بر کدام بازه صعودی است؟

۱) $(-2, 0)$
۲) $(-\infty, -2)$
۳) $(0, 2)$
۴) $(-2, 2)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۲ خط گذرا از دو نقطهٔ $(۱, ۲)$ و $(-۱, ۳)$، بر منحنی پیوستهٔ $y = f(x)$ در نقطهٔ $x = ۳$ مماس است. حد عبارت $\frac{f^۲(x) + ۴f(x) - ۵}{۳ - x}$ وقتی $x \to ۳$، کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۳ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \left(\sqrt{\frac{x+۲}{۲x-۳}}\right)^۳$، حاصل $\lim\limits_{x \to ۲} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲}$، کدام است؟

۱) -۲۱
۲) -۱۸
۳) ۱۲
۴) ۱۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۱۴ اگر $\lim\limits_{x \to ۱} \frac{\sqrt{ax+b} - ۲}{x^۲ - ۱} = \frac{۳}{۲}$ باشد، b کدام است؟

۱) -۸
۲) -۶
۳) ۴
۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۱۵ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{ax^n + ۱۵}{۳x - \sqrt{۴x^۲ + ۱۵x}}$، اگر $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -۱$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{x \to ۳} f(x)$ کدام است؟

۱) -۶
۲) -۴
۳) ۳
۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۱۶ تابع f در $x = ۲$ مشتق‌پذیر است. اگر $\lim\limits_{h \to ۰} \frac{f(۲+h) - ۹}{h} = \frac{۳}{۲}$ باشد، مشتق تابع $g(x) = x\sqrt{f(x)}$ در $x = ۲$ کدام است؟

۱) ۲/۵
۲) ۳
۳) ۳/۵
۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۱۷ دو ضلع از مستطیلی منطبق بر محورهای مختصات و رأس چهارم آن واقع بر منحنی به معادلهٔ $y = (x-۲)^۲$ روی بازهٔ $[۰, ۲]$ است، بیشترین مساحت این مستطیل کدام است؟

۱) $\frac{۲۸}{۲۷}$
۲) $\frac{۱۰}{۹}$
۳) $\frac{۳۲}{۲۷}$
۴) $\frac{۱۱}{۹}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۸ اگر $f(x) = x^{۲} - ۲x + ۴$ و $g(x) = x^{۳} + x$، کمترین مقدار تابع gof کدام است؟

۱) ۲۱
۲) ۲۴
۳) ۲۷
۴) ۳۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۳

۱۹ مشتق راست تابع با ضابطهٔ $f(x) = ([x] - |x|)\sqrt[۳]{۹x}$ در نقطهٔ $x = -۳$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱۶}{۳}$
۲) -۵
۳) -۴
۴) $\frac{۷}{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۲۰ تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x) = |x^{۳} - x|$ روی بازهٔ $[-۱, ۲]$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۲۱ اگر $\lim_{x \to +\infty} \frac{ax + ۹}{۱ - x + \sqrt{x + ۱}} = ۳$ باشد، آنگاه حد این کسر وقتی $x \to ۳$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۴
۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۲۲ مشتق تابع با ضابطهٔ $f(x) = \left(\frac{\sqrt[۳]{x^{۲} + ۲x}}{x^{۲} - x}\right)^{۳}$، در نقطهٔ $x = ۲$، کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$
۲) $-\frac{۵}{۴}$
۳) $-\frac{۵}{۲}$
۴) $-\frac{۱۵}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۲۳ تعداد نقاط مشتق‌ناپذیری تابع با ضابطهٔ $f(x) = ||x| - ۱|$ بر روی $\mathbb{R}$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۲۴ به ازای کدام مقدار k، بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^{۳} - ۳x^{۲} + k$ در بازهٔ $[۱, ۳]$ قرینهٔ یکدیگرند؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۴

۲۵ خط $y = -۱$ بر نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x) = ۲x^{۲} - x + a$ مماس است. a کدام است؟

۱) $-\frac{۹}{۸}$
۲) $-\frac{۷}{۸}$
۳) $\frac{۷}{۸}$
۴) $\frac{۹}{۸}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۲۶ بیشترین مساحت از مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که مجموع یک ضلع زاویهٔ قائمه و وتر آن ۶ باشد، کدام است؟

۱) ۳
۲) $۲\sqrt{۳}$
۳) ۴
۴) $۳\sqrt{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۲

۲۷ بیشترین مقدار تابع $y = x^{۳} - ۳x^{۲} - ۹x + ۵$ در بازهٔ $[-۲, ۲]$ کدام است؟

۱) ۹
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۱۷

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۲۸ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{۱ + \sqrt{x}}{۵ - ۲x}$، حاصل $\lim\limits_{x \to ۴} \frac{f(x) - f(۴)}{x - ۴}$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۹}$
۲) $\frac{۵}{۱۲}$
۳) $\frac{۷}{۱۲}$
۴) $\frac{۵}{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۲۹ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \sqrt[۳]{(۲x + ۶)^{۲}} & ; x > ۱ \\ ax + b & ; x \leq ۱ \end{cases}$، مقدار $f'(۱)$ موجود است. b کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$
۲) $\frac{۷}{۳}$
۳) $\frac{۸}{۳}$
۴) $\frac{۱۰}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۳۰ به ازای کدام مقدار a، خط به معادلهٔ $y = ۵x + a$، بر نمودار تابع $y = ۲x^۲ - ۳x + ۶$ مماس است؟

۱) ۳-
۲) ۲-
۳) ۲
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۳۱ تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x) = [x]\sin \pi x$ روی بازهٔ $[-۱, ۲]$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) بی‌شمار

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۳۲ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۳x^۲ + ۴x - ۲$، تفاضل آهنگ لحظه‌ای در نقطهٔ $a + \frac{h}{۲}$ از آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر x از عدد a به $a + h$ تغییر کند، کدام حالت است؟

۱) h
۲) $۲h$
۳) $۳h$
۴) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۳۳ مینیمم مطلق تابع با ضابطهٔ $f(x) = x - \sqrt[۳]{x^۳ - ۳x^۲}$، بر روی $\mathbb{R}$ کدام است؟

۱) -۱
۲) $\frac{-۱}{۳}$
۳) صفر
۴) $\frac{۱}{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

۳۴ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \frac{x - [x]}{x^۳ - x - ۶} & ; x \neq ۲ \\ a & ; x = ۲ \end{cases}$، به ازای کدام مقدار a در بازهٔ $[۲, ۳)$ پیوسته است؟

۱) $\frac{۱}{۱۱}$
۲) $\frac{۱}{۹}$
۳) $\frac{۱}{۸}$
۴) $\frac{۱}{۶}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۳۵ خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = -\frac{۱}{۳}x^۳ + ۲x^۲ - x$، با بیشترین شیب ممکن، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $-\frac{۴}{۳}$
۲) $-\frac{۵}{۳}$
۳) $-\frac{۷}{۳}$
۴) $-\frac{۸}{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۳۶ کمترین مقدار تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۱ - \cos^۲ x - \sin x$ کدام است؟

۱) ۱-

۲) $\frac{-۱}{۲}$

۳) $\frac{-۱}{۴}$

۴) صفر

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۴
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷
قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۷

۳۷ اگر x و y دو ضلع قائم از مثلثی به طول وتر $۵\sqrt{۲}$ باشند، بیشترین مقدار $۳x + ۴y$ کدام است؟

۱) $۲۵\sqrt{۲}$

۲) ۳۶

۳) $۲۸\sqrt{۲}$

۴) ۴۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۳۸ ماکزیمم تابع با ضابطهٔ $f(x) = -|x| \cos x$، در بازهٔ $[-۱, ۱]$ کدام است؟

۱) صفر

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\cos ۱$

۴) ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

۳۹ تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \frac{۲\sqrt{x}}{x} & ; x \geq ۱ \\ ax^۲ + bx & ; x < ۱ \end{cases}$ بر روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. b کدام است؟

۱) ۲-

۲) ۱-

۳) ۳

۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

۴۰ تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{\sqrt{۱ + x^۲}}{x}$ بر روی دامنهٔ خود، کدام است؟

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) بی‌شمار

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۴۱ خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \frac{۵x - ۴}{\sqrt{x}}$ در نقطهٔ $x = ۴$ واقع بر آن، محور yها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟

۱) ۴-

۲) ۱-

۳) ۲

۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۴۲ اگر $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ;x\geq ۰\\ -\sqrt{-x} & ;x<۰\end{cases}$، مشتق اول و دوم تابع $f^{-۱}(x)$ در نقطهٔ $x=۰$ چگونه است؟

۱) مشتق اول دارد - مشتق دوم دارد.
۲) مشتق اول دارد - مشتق دوم ندارد.
۳) مشتق اول ندارد - مشتق دوم دارد.
۴) مشتق اول ندارد - مشتق دوم ندارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

۴۳ اگر $g(x)=x+\sqrt{x}$ و $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\frac{۴}{۳}$ باشد، $(fog)'(۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) ۲
۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۴۴ کدام بیان برای تابع با ضابطهٔ $f(x)=x\left|x^۲-۳\right|$ بر دامنهٔ $[-۱,۱]$ نادرست است؟

۱) مینیمم مطلق دارد.
۲) ماکزیمم مطلق دارد.
۳) دو نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد.
۴) فاقد اکسترمم نسبی

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

۴۵ اگر $f'(x)=\frac{۱}{x}$، مشتق تابع $f(x+\sqrt{۱+x^۲})$ کدام است؟

۱) $-x+\sqrt{۱+x^۲}$
۲) $x-\sqrt{۱+x^۲}$
۳) $\frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}$
۴) $\sqrt{۱+x^۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۴۶ اگر $f(x)=\frac{x^۲}{|۱-x|}[x]$ باشد، $\lim\limits_{h\to ۰^-}\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) وجود ندارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۴۷ اگر تابع f در $x_۰$ مشتق‌پذیر و $\lim\limits_{h\to ۰^+}\frac{f(x_۰+h)-f(x_۰)}{h}=-۲$، مقدار $\lim\limits_{h\to ۰^-}\frac{f(x_۰)-f(x_۰-h)}{h}$ کدام است؟

۱) $۲-f(x_۰)$
۲) $۲+f(x_۰)$
۳) ۲
۴) -۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۴۸ در تابع $f(x) = \sqrt{x}$، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر روی بازهٔ $[۲/۲۵,\ ۲/۵۶]$، از آهنگ آنی در شروع این بازه چقدر کمتر است؟

۱) $\frac{۱}{۹۳}$
۲) $\frac{۲}{۹۳}$
۳) $\frac{۱}{۶۲}$
۴) $\frac{۱}{۳۱}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۴۹ آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = \sqrt{x^۲ + ۱۶}$ نسبت به متغیر x روی بازهٔ $[۰, ۳]$، از آهنگ لحظه‌ای تابع در $x = \sqrt{۲}$، چقدر کمتر است؟

۱) صفر
۲) $\frac{۱}{۱۸}$
۳) $\frac{۱}{۱۲}$
۴) $\frac{۱}{۹}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۵۰ اگر $f(x) = x^۳ - [۲x^۲]x$ باشد، مقدار $f'_-(\sqrt{۲})$ و $f'_+(\sqrt{۲})$، از راست به چپ کدام است؟ (با تغییر)

۱) $f'_-(\sqrt{۲})$ وجود ندارد و $f'_+(\sqrt{۲})$ وجود ندارد.
۲) $f'_-(\sqrt{۲})$ وجود ندارد و $f'_+(\sqrt{۲}) = ۲$
۳) $f'_-(\sqrt{۲}) = ۳$ و $f'_+(\sqrt{۲})$ وجود ندارد.
۴) $f'_-(\sqrt{۲}) = ۳$ و $f'_+(\sqrt{۲}) = ۲$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۵۱ خط به معادلهٔ $y = ۳x - ۲$ در نقطهٔ $x = ۲$، بر منحنی پیوستهٔ $y = f(x)$ مماس است. حاصل $\lim\limits_{x \to ۲} \frac{f^۲(x) - ۴f(x)}{x - ۲}$، کدام است؟

۱) ۳
۲) ۶
۳) ۱۲
۴) ۱۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۵۲ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{x}$، آهنگ متوسط تغییر تابع، از نقطهٔ $x = ۴$ تا $x = ۶/۲۵$، از آهنگ لحظه‌ای آن در نقطهٔ $x = ۴$، چقدر کمتر است؟

۱) $\frac{۱}{۳۶}$
۲) $\frac{۱}{۱۸}$
۳) $\frac{۵}{۷۲}$
۴) $\frac{۱}{۱۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۵۳ اگر $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{g(x)-g(۲)}{x-۲}=\frac{۳}{۲}$ و $f(x)=\sqrt{۵-x^۳}$، آنگاه $(gof)'(۱)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

۵۴ نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^۲(x-۲)^۲$ سه رأس یک مثلث‌اند، نوع این مثلث کدام است؟

۱) متساوی‌الاضلاع
۲) فقط متساوی‌الساقین
۳) فقط قائم‌الزاویه
۴) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۴
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵
قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۸

۵۵ اگر $f(x)=\sqrt{x^۲-[x]+|x|}$ باشد، $\lim\limits_{h\to ۰^+}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۵}{۴}$
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) $\frac{۵}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۵۶ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\sqrt{۵-۲x} & ;x\le -۲\\ -\frac{۱}{۲}x^۲+bx+c & ;\ x>-۲\end{cases}$، در $x=-۲$، مشتق‌پذیر است. مقدار c کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$
۲) $-\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۵۷ تابع با ضابطهٔ $f(x)=x|x^۲-۱|$ با دامنهٔ $[-۲,۲]$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

۵۸ مستطیل‌های محاط در یک دایره به قطر ۶ واحد را حول یک ضلع خود دوران می‌دهیم تا استوانه‌های قائم ایجاد شود. وقتی حجم این استوانه‌ها بیشترین مقدار را دارد، ارتفاع آن کدام است؟

۱) ۴
۲) $۲\sqrt{۳}$
۳) $۲\sqrt{۶}$
۴) $۳\sqrt{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۵۹ اگر مماس چپ و راست تابع با ضابطهٔ $f(x) = |x|(x+a)$ در نقطهٔ گوشه‌ای (زاویه‌دار) آن عمود برهم باشند، مجموعهٔ مقادیر a کدام است؟

۱) $\{-۱\}$
۲) $\{۱\}$
۳) $\{-۱, ۱\}$
۴) $\varnothing$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۶۰ نقطهٔ $M(x, y)$ بر روی منحنی به معادلهٔ $y = \sqrt{x+۸}$ در حرکت است. T فاصلهٔ نقطهٔ M تا مبدأ مختصات است. آهنگ لحظه‌ای تغییر T در نقطهٔ $x = ۷$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۵}{۱۶}$
۲) $\frac{۱۵}{۸}$
۳) $\frac{۳}{۷}$
۴) $\frac{۵}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۶۱ تابع با ضابطهٔ $y = x\sqrt{x^۲}$ ازنظر پیوستگی و مشتق‌پذیری در صفر چگونه است؟

۱) پیوسته و مشتق‌پذیر است.

۲) پیوسته است ولی مشتق‌پذیر نیست.

۳) نه پیوسته است و نه مشتق‌پذیر

۴) فقط از راست پیوسته و از راست مشتق‌پذیر است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

۶۲ اگر $f(x) = \frac{x^۳ - ۲}{۱ + x^۳}$ و $g(x) = \sqrt[۳]{x-۱}$، حاصل $f'(g(x)) \cdot g'(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{x}$
۲) $\frac{۳}{x^۲}$
۳) $\frac{۱}{۳x}$
۴) $\frac{x-۳}{x^۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۶۳ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $y = (x-۱)^۲\sqrt[۳]{x^۲}$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۶۴ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}(x-1)\,|x-1| & ;x\neq 1\\ a & ;x=1\end{cases}$ در نقطهٔ $x=1$ مشتق‌پذیر است. a کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۲-

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۴

۶۵ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=x\sqrt{x}+|x-1|$، مقدار $f'_{+}(1)+3f'_{-}(1)$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۶۶ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x+a}-b}{x} & ;x\neq 0\\ \dfrac{1}{12} & ;x=0\end{cases}$، روی مجموعهٔ اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ پیوسته است. b کدام است؟

۱) ± 1
۲) ± 2
۳) ± 3
۴) ± 4

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۶۷ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{x}$، اختلاف آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x=2$، از آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ $[1,4]$ کدام است؟

۱) ۰/۲۵
۲) ۰/۵
۳) ۰/۴۵
۴) ۰/۷۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۶۸ مجموعهٔ طول‌های نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x-2|\sqrt[3]{x^2}$ کدام است؟

۱) $\{0,\frac{4}{5},2\}$
۲) $\{0,\frac{2}{3},2\}$
۳) $\{0,1\}$
۴) $\{\frac{2}{3},2\}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

۶۹ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & ;x\geq 2\\ -x^2+ax+b & ;x<2\end{cases}$، روی مجموعهٔ اعداد حقیقی مشتق‌پذیر است. b کدام است؟

۱) ۲-
۲) ۱-
۳) ۱
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۷۰ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{۳}{x}-۵ & ;x\geq ۱\\ x^{۲}+ax+b & ;x<۱\end{cases}$، در نقطهٔ $x=۱$ مشتق‌پذیر می‌باشد. b کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۷۱ مجموعهٔ طول‌های نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=(x^{۲}-۲۸).\sqrt[۳]{x}$ کدام است؟

۱) $\{-۲,۲\}$
۲) $\{-\sqrt{۷},\sqrt{۷}\}$
۳) $\{-۲,۰,۲\}$
۴) $\{-۷,۰,۱\}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۷۲ اگر $a>۰$ و ثابت و x متغیر باشد، مینیمم مقدار $\frac{۳a+x}{\sqrt[۴]{a^{۳}x}}$ کدام است؟

۱) $۴a$
۲) $۳a$
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۷۳ تابع f با ضابطهٔ زیر، در چند نقطه ناپیوسته و در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

$$f(x)=\begin{cases}۱ & ;\ x<۰\\ x+۱ & ;۰\leq x<۱\\ ۲x+۲ & ;۱\leq x<۲\\ x^{۲}+۲ & ;\ x\geq ۲\end{cases}$$

۱) یک نقطه ناپیوسته و دو نقطه مشتق‌ناپذیر
۲) دو نقطه ناپیوسته و دو نقطه مشتق‌ناپذیر
۳) یک نقطه ناپیوسته و سه نقطه مشتق‌ناپذیر
۴) دو نقطه ناپیوسته و سه نقطه مشتق‌ناپذیر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۲

۷۴ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{\frac{۴x+۵}{x+۳}}$، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$، کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۴۸}$
۲) $\frac{۵}{۲۴}$
۳) $\frac{۷}{۲۴}$
۴) $\frac{۷}{۱۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۷۵ با شرط $x \leq ۱$; $f(x) = x^۳ - ۳x$ در تابع با ضابطهٔ $g(x) = x^۳ + x$، بیشترین مقدار gof کدام است؟

۱) ۹
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۳۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

۷۶ اگر $f(x) = \frac{۴}{۵}x - \frac{۱}{۵}|x|$ و $g(x) = ۴x + |x|$ باشند، مشتق تابع fog کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) مشتق ندارد.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۸
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۷۷ از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با اندازهٔ وتر ۱۰ واحد، دو ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شود تا حجم حاصل از دوران این مثلث حول ضلع قائم، بیشترین باشد؟

۱) $\frac{۲}{۱}$
۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۱}$
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۱}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۷۸ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} ax - a & ; x < ۱ \\ x^۲ - x & ; x \geq ۱ \end{cases}$ به ازای کدام مقادیر a در نقطهٔ $x = ۱$ مشتق‌پذیر است؟

۱) -۱
۲) ۱
۳) هر مقدار a
۴) هیچ مقدار a

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۷۹ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} |x^۲ - ۲x| & ; x < ۲ \\ \frac{۱}{۲}x^۲ + ax + b & ; x \geq ۲ \end{cases}$ در نقطهٔ $x = ۲$ مشتق‌پذیر است. $a + b$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۸۰ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{۴x - ۵}{x + ۱}$ و دامنهٔ $[۰, ۸]$، خط مماس بر نمودار آن، موازی پاره‌خطی است که ابتدا و انتهای منحنی را به هم وصل کند. این خط مماس، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) -۲
۲) -۱/۵
۳) -۱
۴) -۰/۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۸۱ به ازای کدام مقادیر a، تابع f با ضابطهٔ $f(x) = x^{۲} + \frac{a}{x}$، دارای ماکزیمم نسبی است؟

۱) $|a| > ۲$
۲) $a < ۰$
۳) $a > ۰$
۴) هیچ مقدار a

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

۸۲ اگر $f(x) = (x-۲)\sqrt[۳]{x^{۲}}$، حاصل $\lim\limits_{\Delta x \to ۰} \frac{f(-۱+\Delta x) - f(-۱)}{\Delta x}$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۴}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۸۳ فرض کنید نمودارهای دو تابع $y = x\sqrt{x}$ و $y = x^{۲} + ax + b$ در یک نقطهٔ مشترک، بر یک خط مماس باشند. اگر طول نقطهٔ مشترک ۴ باشد، مقدار b کدام است؟

۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۱۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۸۴ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{x-۱}{\sqrt{x}}$، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به متغیر x، در نقطهٔ $x = ۱$ با نمو ۰/۴۴، از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چقدر کمتر است؟

۱) $\frac{۱}{۳۰}$
۲) $\frac{۱}{۲۴}$
۳) $\frac{۱}{۱۲}$
۴) $\frac{۱}{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۸۵ بیشترین مساحت از مستطیل‌هایی که دو رأس آن بر روی نیم‌بیضی به معادلهٔ $y = \frac{۲}{۳}\sqrt{۹ - x^{۲}}$ و دو رأس دیگر آن بر روی محور xها باشند، کدام است؟

۱) ۶
۲) $۳\sqrt{۵}$
۳) $۴\sqrt{۳}$
۴) ۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

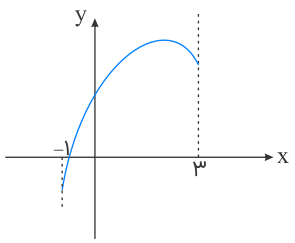
۸۶ بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن بر روی منحنی به معادلهٔ $y = \sqrt{۱۲ - x}$ در ناحیهٔ اول واقع شود، کدام است؟

۱) $۸\sqrt{۲}$
۲) $۸\sqrt{۳}$
۳) ۱۶
۴) ۱۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۸۷ شکل زیر، نمودار تابع $y = x + \sqrt{-x^{۲} + ax + b}$ است. مقدار ماکزیمم مطلق تابع کدام است؟



۱) $۱ + \sqrt{۳}$

۲) $۲\sqrt{۳}$

۳) $۱ + ۲\sqrt{۲}$

۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۸۸ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{۲x + ۱} + \frac{۱}{x + ۱}$، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازهٔ $[۰, ۴]$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x = \frac{۳}{۲}$، چقدر کمتر است؟

۱) ۰/۰۳

۲) ۰/۰۴

۳) ۰/۰۵

۴) ۰/۰۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۸۹ خط به معادلهٔ $y = ۲x - ۵$ در نقطه‌ای به طول ۱ بر منحنی به معادلهٔ $y = ax^{۲} + bx + ۱$ مماس است، a کدام است؟

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۹۰ کمترین مقدار تابع $y = \frac{۱}{۴}x^{۴} - x^{۳} - ۲x^{۲}$، کدام است؟

۱) -۳۶

۲) -۳۲

۳) -۲۴

۴) -۱۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۹۱ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \frac{۸}{ax + b} & ; x > ۲ \\ -x^{۳} + ۶x & ; x \leq ۲ \end{cases}$، اگر $f'(۲)$ موجود باشد، a کدام است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۹۲ حد عبارت $\frac{۲-\sqrt[۳]{۳x+۲}}{۵x^۲-۱۸x+۱۶}$، وقتی $x \to ۲$، کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۳}$
۲) $-\frac{۱}{۴}$
۳) $-\frac{۱}{۶}$
۴) $-\frac{۱}{۸}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۹۳ نقطه‌ای با کدام طول بر روی محور xها انتخاب شود، به‌طوری‌که تفاضل فواصل آن از دو نقطهٔ $A(۱,۵)$ و $B(۷,-۲)$ بیشترین مقدار را داشته باشد؟

۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۱۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۹۴ اگر $f(x)=۱-|x|$ باشد، تعداد نقاط مشتق‌ناپذیری تابع با ضابطهٔ $y=f(f(x))$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

۹۵ مشتق چپ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{۱-\sqrt{۱-x^۲}}$ در نقطهٔ $x=۰$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۲) $-\sqrt{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۴) $\sqrt{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۹۶ از تساوی $y=\sqrt[۳]{x}$، مقدار $y''y^۵$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{-۴}{۹}x$
۲) $\frac{-۱}{۳}x$
۳) $\frac{-۲}{۹}$
۴) $\frac{-۲}{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۹۷ اگر تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} ax^۲+bx+۴ & ;x\geq -۲ \\ x^۳-x & ;x<-۲ \end{cases}$، همواره مشتق‌پذیر باشد، $f(۱)$ کدام است؟

۱) ۳-
۲) صفر
۳) ۱
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۹۸ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{۳۶}{x^۲}$، آهنگ متوسط تابع از $x_۱ = ۲$ تا $x_۲ = ۳$ چقدر از آهنگ لحظه‌ای آن در $x = \sqrt[۳]{۱۲}$ بیشتر است؟

۱) ۱
۲) ۱/۵
۳) ۲
۴) ۲/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۹۹ اگر $f(x) = |x - ۲| + \sqrt{۲x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{\Delta x \to ۰^-} \frac{f(۲+\Delta x) - f(۲)}{\Delta x}$ کدام است؟

۱) ۲-
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۱۰۰ کدام‌یک از تابع‌های زیر، یک‌به‌یک است؟

۱) $f(x) = x + \sqrt{x}$
۲) $g(x) = x - \sqrt{x}$
۳) $h(x) = ۲x + \frac{۱}{x}$
۴) $p(x) = \frac{x}{x^۲ + ۱}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۱۰۱ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = (x + ۲)\sqrt{۴x + ۱}$، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازهٔ $[۰, ۲]$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x = \frac{۳}{۴}$ چقدر بیشتر است؟

۱) ۰/۱۰
۲) ۰/۱۵
۳) ۰/۲۰
۴) ۰/۲۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۱۰۲ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = x|x| - ۲x$، فاصلهٔ دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$
۲) ۳
۳) $۳\sqrt{۲}$
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۰۳ در ساخت یک قیف به شکل مخروط قائم به حجم $\frac{\pi}{۳}$، با کدام ارتفاع، کمترین مقدار جنس مصرف می‌شود؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۲) ۱
۳) $\sqrt[۳]{۲}$
۴) $\sqrt{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۰۴ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{x}$ آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر x از ۴ به ۲۵ تغییر کند، برابر آهنگ لحظه‌ای در نقطهٔ a می‌باشد. a کدام است؟

۱) ۱۱/۷۵
۲) ۱۲/۲۵
۳) ۱۲/۵
۴) ۱۳/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۱۰۵ خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $y = \frac{x^2}{x-1}$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۱۰۶ خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $y = x^3 + 3x^2 + 1$، بر خط به معادلهٔ $x - 3y = 2$ عمود است. این خط مماس، از نقطه‌ای با کدام مختصات می‌گذرد؟

۱) $(1, 3)$
۲) $(1, 4)$
۳) $(2, -6)$
۴) $(2, -4)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

۱۰۷ به ازای کدام مجموعه مقادیر a، طول یکی از نقاط اکسترمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^3 + ax^2 - 8x$، در بازهٔ $(1, 4)$ قرار می‌گیرد؟

۱) $-3 < a < 1/5$
۲) $-3 < a < 2/5$
۳) $-5 < a < 1/5$
۴) $-5 < a < 2/5$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۰۸ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{x} & ; \ x \geq 1 \\ x^2 + ax + b & ; \ x < 1 \end{cases}$ مقدار $f'(1)$ موجود است، $f(1 - \sqrt{2})$ کدام است؟

۱) $3 - \sqrt{2}$
۲) $2 - \sqrt{2}$
۳) $2 - 2\sqrt{2}$
۴) $3 - 2\sqrt{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۰۹ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = (2x+1)^{-\frac{1}{2}}$، آهنگ متوسط تغییر تابع، از نقطهٔ $x = 4$ تا $x = 12$، از آهنگ لحظه‌ای آن در نقطهٔ $x = 4$، چقدر بیشتر است؟

۱) $\frac{7}{540}$
۲) $\frac{11}{540}$
۳) $\frac{7}{270}$
۴) $\frac{11}{270}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۱۰ اگر $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{x-\sqrt{۳x-۲}}{ax+b}=\dfrac{۱}{۲}$ باشد، آنگاه b کدام است؟

۱) ۲-
۲) ۱-
۳) ۱
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۱۱۱ به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۱-\sqrt{x-\sqrt{x+۱}}}{x-۳} & ;x>۳\\ ax-۳a-\dfrac{۳}{۸} & ;x\le ۳\end{cases}$، در نقطهٔ $x=۳$ پیوسته است؟

۱) ۲-
۲) ۲
۳) هیچ مقدار a
۴) a هر چه باشد

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۱۱۲ فاصلهٔ نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x)=x+\sqrt{۴x-x^۲}$، از نیمساز ناحیهٔ اول کدام است؟

۱) ۱
۲) $\sqrt{۲}$
۳) ۲
۴) $۲\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۱۳ اگر $f(x)=\sqrt{\frac{۳x-۱}{۲x+۱}}$، آنگاه $f'(۲)$ کدام است؟

۱) ۰/۲-
۲) ۰/۱-
۳) ۰/۱
۴) ۰/۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

۱۱۴ نقاط بحرانی بر روی نمودار تابع $f(x)=(x-۱)|x^۲+x-۲|$ سه رأس مثلثی هستند، مساحت این مثلث کدام است؟

۱) ۴
۲) ۴/۵
۳) ۶
۴) ۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۱۵ آهنگ متوسط تغییر تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x^۲+۱۴۴}$ نسبت به تغییر x روی بازه‌ای از $x=۵$ تا $x=۹$ کدام است؟

۱) ۰/۴
۲) ۰/۵
۳) ۰/۶
۴) ۰/۷

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۱۶ اگر $f'(۰) = g(۰) = ۱$ و $f(x) = x + ۱ + (g(x))^۵$، مقدار $f''(۰)$ برابر کدام است؟

۱) $۴g''(۰)$
۲) $۵g''(۰)$
۳) $۴g''(۰) + ۲۰$
۴) $۵g''(۰) + ۲۰$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۱۱۷ اگر $g(x) = \sqrt{۲x}$ و $f(x) = (x^۲ - x)$، حاصل $\lim\limits_{\Delta x \to ۰} \frac{f(۲+\Delta x)g(۲+\Delta x) - f(۲)g(۲)}{\Delta x}$ برابر کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۱۱۸ کمترین فاصلهٔ نقطهٔ $A(۴, ۰)$ از نقاط منحنی به معادلهٔ $y = \sqrt{۲x + ۹}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$
۲) $۲\sqrt{۲}$
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

۱۱۹ اگر $\lim\limits_{x \to ۲} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} = -\frac{۱}{۳}$، مشتق $f(\sqrt{|x| + ۳})$ در نقطهٔ $x = -۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$
۲) $\frac{۱}{۱۲}$
۳) $-\frac{۱}{۶}$
۴) $-\frac{۱}{۱۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷
قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۴

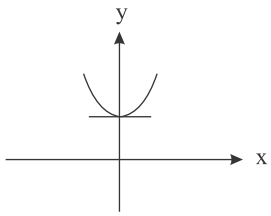
۱۲۰ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \left[\frac{۱}{x}\right]$ در کدام بازه مشتق‌پذیر است؟

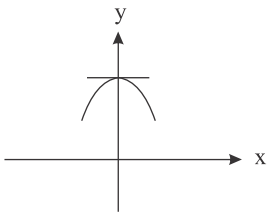
۱) $[۰, ۱]$
۲) $(-۱, ۰)$
۳) $[۱, +\infty)$
۴) $(-\infty, -۱)$

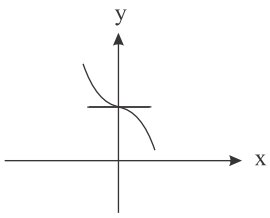
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

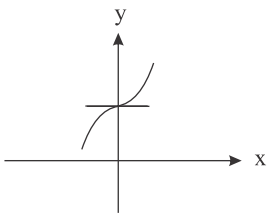
وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۲۱ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{x^{۲}+۱}{x^{۳}+۱}$ در نزدیکی نقطهٔ $x = ۰$ چگونه است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۴

۱۲۲ تابع f در نقطهٔ c دارای مینیمم است و مشتق راست دارد. الزاماً این مشتق چگونه است؟

۱) مثبت
۲) منفی
۳) نامنفی
۴) نامثبت

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۱۲۳ اگر $h(۰) = ۲h'(۰) = -g(۱) = -g'(۱) = f'(-۱) = ۱$، مقدار مشتق تابع $fogoh$ در صفر کدام است؟

۱) -۲
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۱۲۴ کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ $A(۵, ۰)$ از نقاط منحنی به معادلهٔ $y = \sqrt{۲x+۷}$، کدام است؟

۱) ۴
۲) $۴/۵$
۳) ۵
۴) $۳\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۲۵ برد تابع f با ضابطهٔ $f(x) = x^{۳} - ۱۲x + ۸$ بر بازهٔ $[-۳, ۱]$ کدام است؟

۱) $[-۸, ۱۷]$
۲) $[-۸, ۲۴]$
۳) $[-۳, ۱۷]$
۴) $[-۳, ۲۴]$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۱

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۲۶ مجموعهٔ طول نقاط ماکسیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x) = x\left|x^{۲} - ۳\right|$ کدام است؟

۱) $\{-\sqrt{۳}\}$
۲) $\{\sqrt{۳}\}$
۳) $\{-\sqrt{۳}, ۱\}$
۴) $\{\sqrt{۳}, ۱\}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۳

۱۲۷ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = x\left|x - ۴\right|$، فاصلهٔ دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$
۲) $۲\sqrt{۲}$
۳) $۳\sqrt{۲}$
۴) $۲\sqrt{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۲۸ تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر از مرتبهٔ دوم است. به ازای هر عدد حقیقی x تابع $g(x) = f(۴ - x^{۲})$ است. اگر $f'(۱) = -۵$ و $f''(۱) = -۱$ باشد، مقدار $g''(\sqrt{۳})$، کدام است؟

۱) ۳-
۲) ۲-
۳) ۲
۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۱۲۹ کمترین مقدار تابع با ضابطهٔ $f(x) = x + \sqrt[۳]{x^{۲} - x^{۳}}$، کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۹}$
۲) $-\frac{۱}{۶}$
۳) $-\frac{۱}{۳}$
۴) صفر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۱۳۰ آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \sqrt{۲۱ - x^{۲} + ۴x}$ در بازهٔ $[۵\,,\,۶]$، برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع، با کدام مقدار x است؟

۱) $۴ + \sqrt{۲}$
۲) $۳ + ۲\sqrt{۲}$
۳) $۲ + \frac{۳}{۲}\sqrt{۲}$
۴) $۲ + \frac{۵}{۲}\sqrt{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۳۱ خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $y = x^{۳} - x^{۲}$ در نقطهٔ $x = ۱$ واقع بر آن، منحنی را در نقطهٔ دیگر (A) قطع می‌کند. عرض نقطهٔ A کدام است؟

۱) ۳-
۲) ۲-
۳) ۲
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۳۲ دو برابر عددی از عدد دیگر ۶ واحد بیشتر است، اگر حاصل‌ضرب آن‌ها مینیمم باشد، مجموع آن دو عدد کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۱

۱۳۳ دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = ۳x + |x|$ و $g(x) = \frac{۳}{۴}x + a|x|$ مفروض‌اند. به ازای کدام مقدار a، تابع gof در مبدأ مختصات مشتق‌پذیر است؟

۱) $-\frac{۱}{۴}$
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) هیچ مقدار a

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

۱۳۴ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} x^۲ & ; x \text{ گویا} \\ ۰ & ; x \text{ گنگ} \end{cases}$ در چند نقطه مشتق دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) بی‌شمار
۴) هیچ نقطه

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

۱۳۵ ماکزیمم مطلق تابع با ضابطهٔ $y = -x + \sqrt[۳]{x^۳ - x^۲}$ کدام است؟

۱) صفر
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) فاقد ماکزیمم

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

۱۳۶ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{-x-۱}{\sqrt{x}}$، حاصل $\lim_{h \to ۰} \frac{f(\frac{۱}{۴} + h) - f(\frac{۱}{۴})}{h}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۳۷ بیشترین مساحت از زمینی که می‌توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود، چند متر مربع است؟

۱) ۹۵۸
۲) ۹۶۸
۳) ۹۷۸
۴) ۹۸۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۳۸ تابع f روی بازهٔ (a, b) تعریف شده است. در این مورد کدام بیان درست است؟

۱) هر نقطهٔ بحرانی، نقطهٔ اکسترمم نسبی است.

۲) هر نقطهٔ اکسترمم نسبی، نقطهٔ بحرانی است.

۳) در هر نقطهٔ بحرانی، مشتق تابع صفر است.

۴) در هر نقطهٔ اکسترمم نسبی، مشتق تابع صفر است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

۱۳۹ مقادیر مینیمم و ماکزیمم مطلق تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{۱}{۳}x^۳ - x^۲ - ۱۵x$، در بازهٔ $[-۴ , ۳]$، کدام است؟

۱) -۱۸ و ۲۴

۲) -۴۵ و ۲۷

۳) -۳۶ و ۲۷

۴) -۲۷ و ۳۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۱۴۰ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{x}{x-۱}$، آهنگ متوسط از $x_۱ = ۲$ تا $x_۲ = ۵$، برابر آهنگ لحظه‌ای آن در $x = \alpha$ است. α کدام است؟

۱) $۲/۵$

۲) $۱ + \sqrt{۳}$

۳) ۳

۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۱۴۱ دو نقطهٔ $A(۲, ۳)$ و $B(۴, ۷)$ و خط به معادلهٔ $y = x - ۱$ در صفحهٔ محورهای مختصات مفروض‌اند. نقطهٔ M بر روی خط مفروض؛ با کدام طول انتخاب شود به‌طوری‌که تفاضل فواصل آن از دو نقطهٔ مفروض، بیشترین مقدار را داشته باشد؟

۱) -۱

۲) صفر

۳) ۱

۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

۱۴۲ تابع f روی $[a, b]$ تعریف شده و $a < c < b$ است. کدام بیان نادرست است؟

۱) اگر c نقطهٔ اکسترمم نسبی و $f'(c)$ وجود داشته باشد، آنگاه خط مماس بر منحنی در c افقی است.

۲) اگر c نقطهٔ اکسترمم نسبی باشد، آنگاه c نقطهٔ بحرانی است.

۳) اگر c نقطهٔ بحرانی باشد، آنگاه c نقطهٔ اکسترمم نسبی است.

۴) اگر c نقطهٔ اکسترمم مطلق باشد، آنگاه c نقطهٔ بحرانی است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۴۳ خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $y = \frac{2x-1}{x+1}$ در نقطه‌ای به طول α واقع بر آن، از نقطهٔ $(-1, 0)$ می‌گذرد. α کدام است؟

۱) -1
۲) 1
۳) $\frac{3}{2}$
۴) 2

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

۱۴۴ اگر تابع f در $x = -2$ مشتق‌پذیر و $\lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h)+3}{h} = \frac{1}{2}$ باشد، آنگاه مشتق $x^2 f(x)$ در $x = -2$، کدام است؟

۱) 8
۲) 10
۳) 12
۴) 14

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۱۴۵ اگر $f(x) = \frac{3}{2} - \sqrt{x+2}$، آنگاه مشتق تابع $f(xf(x))$، در نقطهٔ $x = 2$ کدام است؟

۱) -1
۲) $-\frac{1}{2}$
۳) $\frac{1}{2}$
۴) 1

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۱۴۶ بزرگ‌ترین حجم مخروط، از بین مخروط‌هایی که مجموع شعاع قاعده و ارتفاع آن‌ها برابر واحد باشد، کدام است؟

۱) $\frac{4\pi}{81}$
۲) $\frac{\pi}{12}$
۳) $\frac{3\pi}{32}$
۴) $\frac{4\pi}{27}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۰

۱۴۷ اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ و $g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$، حاصل $f'(x) \cdot g'(f(x))$ کدام است؟

۱) -1
۲) 1
۳) x
۴) $\frac{1}{2}x$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۴۸ کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ $A(8, 0)$ از نقاط منحنی به معادلهٔ $y = x\sqrt{x}$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{11}$
۲) $3\sqrt{5}$
۳) $4\sqrt{3}$
۴) $5\sqrt{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۴۹ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = x + \frac{۱}{x}$، آهنگ متوسط تغییر تابع، وقتی متغیر از عدد ۲ به عدد $۲ + h$ تغییر کند برابر $\frac{۸}{۹}$ است. h کدام است؟

۱) ۱/۵
۲) ۲
۳) ۲/۵
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۱۵۰ به ازای کدام مقادیر m، خط به معادلهٔ $(m+۲)y = mx$، موازی یکی از خطوط مماس بر منحنی $y = \sqrt{۱ + x^۲}$ است؟

۱) $m > -۱$
۲) $m < -۱$
۳) $m > ۱$
۴) $m < ۱$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۱۵۱ مشتق تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{(x-۱).\sqrt[۵]{۳x-۲}}{(۵x-۳)^۴}$ در نقطهٔ $x = ۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۶}$
۲) $\frac{۱}{۸}$
۳) $\frac{۳}{۴۰}$
۴) $\frac{۵}{۱۶}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

۱۵۲ بیشترین مساحت مستطیلی که یک ضلع آن بر قطر نیم‌دایره به شعاع ۶ واحد و دو رأس دیگر آن روی این نیم‌دایره باشد، کدام است؟

۱) ۱۸
۲) ۲۴
۳) ۲۷
۴) ۳۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۵۳ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^۳$، آهنگ متوسط تغییر این تابع وقتی $x = ۳$ و $\Delta x = ۰/۱$، از آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطهٔ $x = ۳$ چقدر بیشتر است؟

۱) ۰/۳۱
۲) ۰/۴۲
۳) ۰/۶۲
۴) ۰/۹۱

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۴
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۱۵۴ اگر $f(x) = [x] - x$ و $g(x) = ۲^x$، آنگاه تابع gof از نظر اکسترمم نسبی کدام نوع را دارد؟

۱) دارای ماکسیمم - دارای مینیمم
۲) دارای ماکسیمم - فاقد مینیمم
۳) فاقد ماکسیمم - دارای مینیمم
۴) فاقد ماکسیمم - فاقد مینیمم

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۵۵ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{x}$، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به متغیر x، در نقطهٔ $x = ۱$ با نمو متغیر ۰/۲۱، از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چقدر کمتر است؟

۱) $\frac{۱}{۴۲}$
۲) $\frac{۱}{۲۱}$
۳) $\frac{۳}{۴۲}$
۴) $\frac{۲}{۲۱}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۱۵۶ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \left[x + \frac{۱}{۳}\right] + [x]$ روی بازهٔ $(۰, ۳)$ در چند نقطه، مشتق‌ناپذیر است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

۱۵۷ اگر تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{x^۲ - ۲x}{x + a}$ دارای اکسترمم نسبی باشد، مقادیر a کدام است؟

۱) $a > ۰$ یا $a < -۲$
۲) $a > ۲$ یا $a < ۰$
۳) $-۲ < a < ۰$
۴) $۰ < a < ۲$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۱۵۸ مینیمم مطلق تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{x^۴}{۴} - \frac{x^۳}{۳} - x^۲$ روی بازهٔ $[-۱, ۳]$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱۱}{۳}$
۲) $-\frac{۱۰}{۳}$
۳) $-\frac{۸}{۳}$
۴) $-\frac{۷}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۱۵۹ اگر $g(x) = \frac{۲x + ۱}{x - ۱}$ و $(fog)'(۲) = ۶$ باشد، $f'(۵)$ کدام است؟

۱) -۲
۲) -۱
۳) ۲
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۶۰ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = |x| . [x]$، مقدار $f'_-(۰) - f'_+(۰)$ کدام است؟

۱) -۱
۲) صفر
۳) ۱
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۶۱ خط به معادلهٔ $y = ۳x - ۵$ در نقطهٔ $x = ۲$ بر نمودار تابع $y = g(x)$ مماس است. اگر $\lim\limits_{x \to ۱} \frac{f(x) - f(۱)}{۲x - ۲} = \frac{۲}{۳}$ باشد، $(fog)'(۲)$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۶۲ خط مماس بر نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = \frac{x+۲}{x-۱}$ و $g(x) = ax^۲ + bx$، در نقطهٔ $x = ۲$، مشترک‌اند. مقدار b کدام است؟

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۶۳ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{|x^۳ - ۲x|}{x}$، در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۶۴ مشتق عبارت $\left(\frac{۱۶}{x} - \sqrt[۳]{x^۲}\right)^۲$ به ازای $x = -۸$ کدام است؟

۱) -۱
۲) $\frac{-۱}{۲}$
۳) ۱
۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

۱۶۵ ماکزیمم مطلق تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{۱}{x^۴ - ۴x^۳ + ۴x^۲ + ۵}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$
۲) $\frac{۱}{۵}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $\frac{۱}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۱۶۶ مقدار ماکزیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{x^۲ + ۲x - ۳}{x^۲ + ۱}$، کدام است؟

۱) $-۱ + \sqrt{۵}$
۲) $۱ + \sqrt{۵}$
۳) $-۱ + \sqrt{۳}$
۴) $۱ + \sqrt{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۶۷ به ازای کدام مقدار m نمودار تابع $y = ۲x^۲ + (m+۱)x + m + ۶$ بر نیمساز ناحیهٔ اوّل محورهای مختصات، مماس است؟

۱) ۴-
۲) ۴ و ۱۲-
۳) ۴- و ۱۲
۴) ۱۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۱۶۸ مقدار مشتق تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt[۳]{\left(\frac{۲x - x^۲}{۳x + ۵}\right)^۲}$ در نقطهٔ $x = -۲$، کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۶۹ تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^۴ - ۶x^۲ + ۸x$ از نظر اکسترمم نسبی کدام وضع را دارد؟

۱) مینیمم نسبی
۲) ماکسیمم نسبی
۳) مینیمم نسبی و ماکسیمم نسبی
۴) فاقد اکسترمم نسبی

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۱۷۰ اگر تابع f در $x = ۴$ مشتق‌پذیر و $\lim_{x \to ۴} \frac{f(x) + ۷}{x - ۴} = \frac{-۳}{۲}$ باشد، آنگاه مشتق $\frac{f(۲x)}{x}$ در $x = ۲$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۴}$
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۱}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۱۷۱ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{۱ + |x|}$ در نقطهٔ $x = \alpha$ مشتق ندارد، مقدار $f'_+(\alpha) - f'_-(\alpha)$ کدام است؟

۱) -۱
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) ۱
۴) تعریف‌نشده

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۱۷۲ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} ax^۳ + bx & ; \ x < ۱ \\ ۲\sqrt{۴x - ۳} & ; \ x \geq ۱ \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی مشتق‌پذیر است. b کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) ۱
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۷۳ اگر c طول نقطهٔ اکسترمم مطلق تابع f روی دامنهٔ آن باشد و تابع در همسایگی آن نقطه تعریف شده باشد، الزاماً تابع f در نقطهٔ c، کدام وضعیت را دارد؟

۱) پیوسته
۲) مشتق‌پذیر
۳) خط مماس افقی
۴) اکسترمم نسبی

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

۱۷۴ برد تابع با ضابطهٔ $f(x) = (x + |x|)\sqrt{\frac{۲ - x}{x}}$ کدام است؟

۱) $(۰, ۱]$
۲) $[۰, ۲]$
۳) $[۱, ۲]$
۴) $(۱, ۳)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۷۵ مشتق تابع $f(x) = x\sqrt[۳]{\frac{۳x + ۱}{x + ۲}}$ در نقطهٔ $x = -۳$، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۴}{۳}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۷۶ بیشترین مساحت زمینی مستطیل‌شکل که می‌توان توسط یک طناب، از زمینی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود، ۶۴۸ متر مربع است، طول طناب چند متر است؟

۱) ۶۸
۲) ۷۰
۳) ۷۱
۴) ۷۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۴

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱ گزینه ۱

گام اول

مشتق تابع کسری $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)\,g(x) - g'(x)\,f(x)}{g^{۲}(x)}$$

گام دوم

باتوجه‌به مشخص بودن مقادیر $y'(۱)$، $f(۱)$ و $f'(۱)$، مقدار $g(۱)$ را حساب می‌کنیم (دلیل اینکه مقدار دقیق $g'(۱)$ ذکرنشده صفر بودن $f(۱)$ است).

$$y'(۱) = \frac{f'(۱)\,g(۱) - g'(۱)\,f(۱)}{g^{۲}(۱)} \Rightarrow ۳ = \frac{(-۴)\,g(۱) - ۰}{g^{۲}(۱)} \Rightarrow ۳ = \frac{-۴g(۱)}{g^{۲}(۱)} \Rightarrow ۳ = \frac{-۴}{g(۱)} \Rightarrow g(۱) = -\frac{۴}{۳}$$

۲ گزینه ۳

نقطهٔ $A(\alpha, \frac{۲}{\alpha^{۲}})$ را بر روی منحنی $y = \frac{۲}{x^{۲}}$ در نظر می‌گیریم. فاصلهٔ مبدأ مختصات از نقطهٔ A برابر است با:

$$OA = \sqrt{(\alpha - ۰)^{۲} + (\frac{۲}{\alpha^{۲}} - ۰)^{۲}} = \sqrt{\alpha^{۲} + \frac{۴}{\alpha^{۴}}}$$

برای مینیمم کردن فاصلهٔ OA، ابتدا معادلهٔ $(OA)'_{\alpha} = ۰$ را حل می‌کنیم:

$$(OA)'_{\alpha} = \frac{۲\alpha - \frac{۱۶\alpha^{۳}}{\alpha^{۸}}}{۲\sqrt{\alpha^{۲} + \frac{۴}{\alpha^{۴}}}}$$

$$(OA)'_{\alpha} = ۰ \Rightarrow ۲\alpha - \frac{۱۶}{\alpha^{۵}} = ۰ \Rightarrow ۲\alpha = \frac{۱۶}{\alpha^{۵}} \Rightarrow \alpha^{۶} = ۸ \Rightarrow \alpha = \sqrt{۲}$$

بنابراین کوتاه‌ترین فاصلهٔ مبدأ مختصات از منحنی $y = \frac{۲}{x^{۲}}$، به ازای $\alpha = \sqrt{۲}$ به دست می‌آید:

$$(OA)_{min} = \sqrt{(\sqrt{۲})^{۲} + \frac{۴}{(\sqrt{۲})^{۴}}} = \sqrt{۲ + \frac{۴}{۴}} = \sqrt{۲ + ۱} = \sqrt{۳}$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۳ گزینه ۱

گام اول

طبق تعریف مشتق، حد خواسته‌شده مشتق تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=-۱$ است یعنی:

$$f'(-۱)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(-۱+h)-f(-۱)}{h}$$

گام دوم

به ازای $x=-۱$ عبارت $(x^۲-x-۲)$ برابر صفر می‌شود و تابع $g(x)=\sqrt[۳]{x^۲-۷x}$ نیز در $x=-۱$ پیوسته است؛ بنابراین برای محاسبهٔ مشتق در نقطهٔ $x=-۱$، کافی است از عامل صفرشونده (عبارت $(x^۲-x-۲)$) مشتق گرفته، در تابع $g(x)$ ضرب کنیم و درنهایت مقدار آن را به ازای $x=-۱$ به دست آوریم:

$$x=-۱\ :\quad f'(x)=(۲x-۱)\sqrt[۳]{x^۲-۷x}\Rightarrow f'(-۱)=(-۲-۱)\sqrt[۳]{(-۱)^۲-۷(-۱)}=(-۳)\sqrt[۳]{۸}=-۳\times ۲=-۶$$

۴ گزینه ۲

گام اول

الف) عرض از مبدأ یک خط، به ازای جایگذاری $x=۰$، در معادلهٔ آن به دست می‌آید.

ب) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر با مشتق تابع در آن نقطه است.

ج) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ $(x_۱,y_۱)$ عبور می‌کند به‌صورت زیر است:

$$y-y_۱=m(x-x_۱)$$

گام دوم

ابتدا معادلهٔ خط مماس را می‌نویسیم. طبق قسمت "ب" از گام اول، شیب این خط برابر است با:

$$y=\sqrt{x^۲+۳x}\Rightarrow y'=\frac{۲x+۳}{۲\sqrt{x^۲+۳x}}$$

$$y'(۱)=\frac{۲+۳}{۲\sqrt{۱+۳}}=\frac{۵}{۲\sqrt{۴}}=\frac{۵}{۲\times ۲}=\frac{۵}{۴}\Rightarrow m_{\text{مماس}}=\frac{۵}{۴}$$

$$x=۱\Rightarrow y=\sqrt{۱+۳}=\sqrt{۴}=۲\Rightarrow y(۱)=۲$$

بنابراین، طبق قسمت "ج" از گام اول، معادلهٔ خط مماس در نقطهٔ $(۱,۲)$ برابر است با:

$$y-y(۱)=y'(۱)(x-۱)\Rightarrow y-۲=\frac{۵}{۴}(x-۱)$$

$$\Rightarrow y=\frac{۵}{۴}x-\frac{۵}{۴}+۲\Rightarrow y=\frac{۵}{۴}x+\frac{۳}{۴}$$

با جایگذاری $x=۰$ در معادلهٔ خط مماس، داریم:

$$\xrightarrow{x=۰} y=\frac{۵}{۴}(۰)+\frac{۳}{۴}=\frac{۳}{۴}$$

بنابراین عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی، برابر $\frac{۳}{۴}$ است.

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۵

گزینه ۳

گام اول

الف) فرض کنیم c نقطهٔ بحرانی تابع f باشد. همچنین فرض کنیم f بر بازهٔ I شامل c پیوسته و بر این بازه به جز احتمالاً در c مشتق‌پذیر باشد. در اینصورت c طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است هرگاه $f'(x)$ قبل از c مثبت و بعد از c منفی باشد.

ب) نقطهٔ $c \in D_f$ را نقطهٔ بحرانی تابع f گوییم هرگاه $f'(c) = ۰$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

گام دوم

$$y = x^۴ + \frac{۴}{۳}x^۳ - ۴x^۲ \Rightarrow D = \mathbb{R}$$

ابتدا با حل معادلهٔ $y' = ۰$ طول نقاط بحرانی تابع را تعیین می‌کنیم.

$$y'' = ۴x^۳ + ۴x^۲ - ۸x \xrightarrow{y''=۰} ۴x(x+۲)(x-۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = -۲ \\ x = ۱ \end{cases}$$

x	$-\infty$		-۲		۰		۱		$+\infty$
y'		$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	
y		$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

بنابراین طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع برابر صفر است.

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۶

گزینه ۲

گام اول

الف) شیب دو خط موازی باهم برابر است.

ب) شیب خطی به معادلهٔ $y = ax + b$ برابر a است.

ج) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

گام دوم

ابتدا با استاندارد کردن معادلهٔ خط داده‌شده، شیب آن را تعیین می‌کنیم:

$$۳y - ۲x = ۵ \Rightarrow ۳y = ۲x + ۵ \Rightarrow y = \frac{۲}{۳}x + \frac{۵}{۳} \Rightarrow m = \frac{۲}{۳}$$

شیب خط مماس بر منحنی در نقطهٔ $x_۰$ برابر شیب خط داده شده است، بنابراین:

$$y = \frac{۱}{\sin x} \Rightarrow y' = \frac{۰ - \cos x}{\sin^۲ x} = -\frac{\cos x}{\sin^۲ x}$$

$$\text{شیب خط مماس بر منحنی در نقطهٔ } x_۰ = y'(x_۰) = -\frac{\cos x_۰}{\sin^۲ x_۰} = \frac{۲}{۳}$$

$x_۰$ را به‌گونه‌ای پیدا می‌کنیم که معادلهٔ $-\frac{\cos x_۰}{\sin^۲ x_۰} = \frac{۲}{۳}$ برقرار باشد. با جایگذاری گزینه‌ها، فقط به ازای $x_۰ = \frac{۲\pi}{۳}$ معادله برقرار است. روش دیگر برای یافتن $x_۰$، حل معادلهٔ مثلثاتی است. داریم:

$$\frac{-\cos x_۰}{\sin^۲ x_۰} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow -\frac{\cos x_۰}{۱ - \cos^۲ x_۰} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۲ - ۲\cos^۲ x_۰ = -۳\cos x_۰ \Rightarrow ۲\cos^۲ x_۰ - ۳\cos x_۰ - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x_۰ = \frac{۳ + ۵}{۴} = \frac{۸}{۴} = ۲ \quad \text{غ ق ق} \\ \cos x_۰ = \frac{۳ - ۵}{۴} = -\frac{۲}{۴} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow x_۰ = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \end{cases}$$

از بین گزینه‌ها $x_۰ = \frac{۲\pi}{۳}$ جواب معادله است.

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۷ گزینه ۳

روش اول:

حد داده‌شده را ساده کرده و سپس مقدار k را تعیین می‌کنیم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{۲(۲+h)^۲+k(۲+h)-۲k-۸}{h}=۱۲ \quad\Rightarrow\quad \lim_{h\to ۰}\frac{۲\left(۴+۴h+h^۲\right)+۲k+kh-۲k-۸}{h}=۱۲$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to ۰}\frac{۸+۸h+۲h^۲+kh-۸}{h}=۱۲ \quad\Rightarrow\quad \lim_{h\to ۰}\frac{۲h^۲+۸h+kh}{h}=۱۲$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to ۰}۲h+۸+k=۱۲ \quad\Rightarrow\quad ۸+k=۱۲ \quad\Rightarrow\quad k=۴$$

روش دوم: (فراتر از کتاب)

حد داده‌شده را با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال حل می‌کنیم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{۲(۲+h)^۲+k(۲+h)-۲k-۸}{h}=\frac{۰}{۰}$$

$$\xrightarrow{\text{هوپیتال}} \lim_{h\to ۰}\frac{۲\times ۲(۱)(۲+h)+k}{۱}=\lim_{h\to ۰}\frac{۸+۴h+k}{۱}=۱۲ \quad\Rightarrow\quad ۸+k=۱۲ \quad\Rightarrow\quad k=۴$$

۸ گزینه ۲

درصورتی‌که خط بر منحنی مماس باشد، معادلهٔ تلاقی دو منحنی، ریشهٔ مضاعف دارد:

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{x^۲+a}{x-۲} \\ y=-۳x+۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^۲+a}{x-۲}=-۳x+۲$$

$$\Rightarrow x^۲+a=-۳x^۲+۸x-۴ \Rightarrow ۴x^۲-۸x+(a+۴)=۰$$

برای به دست آوردن ریشهٔ مضاعف، $\Delta=۰$ قرار می‌دهیم:

$$\Delta=۰\Rightarrow(-۸)^۲-۴(۴)(a+۴)=۰\Rightarrow ۶۴-۱۶a-۶۴=۰\Rightarrow a=۰$$

۹ گزینه ۱

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^۲+۶x} & ;۰\le x<۴\\ \left[\dfrac{x}{۴}\right](x^۲-۹x) & ;۴\le x<۸\end{cases}$$

$$۲<۴\Rightarrow f(x)=\sqrt{x^۲+۶x}\Rightarrow f'(x)=\frac{۲x+۶}{۲\sqrt{x^۲+۶x}}=\frac{x+۳}{\sqrt{x^۲+۶x}} \quad (I)$$

$$۵>۴\Rightarrow f(x)=\left[\frac{x}{۴}\right](x^۲-۹x)\ ,\ \left[\frac{۵}{۴}\right]=۱\Rightarrow f'(x)=۲x-۹ \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I)} f'(۲)=\frac{۵}{۴}$$

$$\xrightarrow{(II)} f'(۵)=۱$$

پس $f'(۲)-f'(۵)=\frac{۱}{۴}$ است.

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۰ گزینه ۲

نقطهٔ $(۱, -۲)$ اکسترمم نسبی تابع $f(x)$ است پس مختصات این نقطه در ضابطهٔ تابع $f(x)$ صدق می‌کند:

$$f(x) = \frac{a}{x} + bx^{۲} \xrightarrow{x=۱\ ,y=-۲} -۲ = a + b \quad (I)$$

می‌دانیم هر نقطهٔ اکسترمم نسبی، یک نقطهٔ بحرانی تابع است بنابراین $x = ۱$ در معادلهٔ $f'(x) = ۰$ صدق می‌کند یعنی $f'(۱) = ۰$ است:

$$f'(x) = -\frac{a}{x^{۲}} + ۲bx \xrightarrow{f'(۱)=۰} -a + ۲b = ۰ \Rightarrow a = ۲b \quad (II)$$

با جایگذاری رابطهٔ (II) در رابطهٔ (I) داریم:

$$a + b = -۲ \xrightarrow{a=۲b} ۲b + b = -۲ \Rightarrow ۳b = -۲ \Rightarrow b = \frac{-۲}{۳}$$

$$\xrightarrow{a=۲b} a = -\frac{۴}{۳}$$

بنابراین:

$$f(x) = -\frac{۴}{۳x} - \frac{۲}{۳}x^{۲} \quad , \quad f'(x) = \frac{۴}{۳x^{۲}} - \frac{۴}{۳}x$$

اکنون با تعیین علامت تابع $f'(x)$، نوع اکسترمم نسبی تابع $f(x)$ را مشخص می‌کنیم:

x		۱	
f′(x)	+	۰	-
f(x)	↗	max	↘

بنابراین به ازای $a = -\frac{۴}{۳}$، نقطهٔ $(۱, -۲)$ ماکزیمم نسبی تابع $f(x)$ است.

۱۱ گزینه ۲

گام اول

تابع $f(x)$ روی یک بازه صعودی است هرگاه تابع روی این بازه پیوسته و $f'(x) > ۰$ باشد.

گام دوم

$$۱ - x^{۲} = ۰ \Rightarrow x^{۲} = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱$$

تابع $f(x)$ در تمام نقاط $\mathbb{R}$ به جز دو نقطهٔ $x = ۱$ و $x = -۱$ تعریف شده است. داریم:

$$y = \frac{x}{۱ - x^{۲}} \Rightarrow y' = \frac{(۱ - x^{۲}) - (-۲x)x}{(۱ - x^{۲})^{۲}} = \frac{x^{۲} + ۱}{(۱ - x^{۲})^{۲}}$$

تابع y' به‌ازای تمام نقاط عضو دامنهٔ تعریف تابع y، مثبت است؛ بنابراین کافی است بازه‌ای را انتخاب کنیم که هیچ‌کدام از دو مقدار $x = \pm ۱$ درون بازه نباشد، باتوجه‌به گزینه‌ها، نمودار تابع روی بازهٔ $(-\infty, -۲)$ صعودی است.

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۲

گزینه ۲

گام اول

الف) معادلهٔ خط گذرا از دو نقطهٔ $(x_۱, y_۱)$ و $(x_۲, y_۲)$ به‌صورت زیر است:

$$y - y_۱ = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}(x - x_۱)$$

ب) شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

ج) خط در نقطهٔ $x = ۳$ بر منحنی مماس است بنابراین مختصات این نقطه در معادلهٔ خط و منحنی صدق می‌کند.

گام دوم

ابتدا معادلهٔ خط گذرا از دو نقطهٔ $A\,(۱, ۲)$ و $B\,(-۱, ۳)$ را به دست می‌آوریم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{۳ - ۲}{-۱ - ۱} = \frac{۱}{-۲} = -\frac{۱}{۲}$$

$$y - y_A = m_{AB}\,(x - x_A) \quad \Rightarrow \quad y - ۲ = -\frac{۱}{۲}\,(x - ۱) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{۱}{۲}x + \frac{۵}{۲}$$

طبق قسمت ج از گام اول داریم:

$$f(۳) = y(۳) = -\frac{۱}{۲}(۳) + \frac{۵}{۲} = -\frac{۳}{۲} + \frac{۵}{۲} = ۱ \quad \Rightarrow \quad f(۳) = ۱$$

باتوجه‌به قسمت ب از گام اول $f'\,(۳) = \frac{-۱}{۲}$ است. اکنون با دو روش حاصل حد داده‌شده را به دست می‌آوریم.

روش اول:

$$\lim_{x\to ۳} \frac{f^۲\,(x) + ۴f\,(x) - ۵}{۳ - x} = \lim_{x\to ۳} -\frac{(f\,(x) + ۵)\,(f\,(x) - ۱)}{x - ۳} = \lim_{x\to ۳} -(f\,(x) + ۵)\,\frac{(f\,(x) - f\,(۳))}{x - ۳}$$

$$= \lim_{x\to ۳} -(f\,(x) + ۵)\,(f'\,(۳)) = -(f\,(۳) + ۵)\,f'\,(۳) = -۶\left(-\frac{۱}{۲}\right) = ۳$$

روش دوم: (فراتر از کتاب)

$$\lim_{x\to ۳} \frac{f^۲\,(x) + ۴f\,(x) - ۵}{۳ - x} = \frac{f^۲\,(۳) + ۴f\,(۳) - ۵}{۳ - ۳} = \frac{۱ + ۴ - ۵}{۳ - ۳} = \frac{۰}{۰}$$

برای رفع ابهام از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۳} \frac{f^۲\,(x) + ۴f\,(x) - ۵}{۳ - x} = \lim_{x\to ۳} \frac{۲f'\,(x)\,f\,(x) + ۴f'\,(x)}{-۱} = \frac{۲f'\,(۳)\,f\,(۳) + ۴f'\,(۳)}{-۱}$$

$$= \frac{۲\left(-\frac{۱}{۲}\right)(۱) + ۴\left(-\frac{۱}{۲}\right)}{-۱} = \frac{-۱ - ۲}{-۱} = \frac{-۳}{-۱} = ۳$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۳ گزینه ۱

حد داده‌شده برابر مشتق تابع $f(x)$ در $x = ۲$ است، بنابراین مشتق تابع را در $x = ۲$ به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to ۲} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} = f'(۲)$$

$$f'(x) = ۳\left(\sqrt{\frac{x+۲}{۲x-۳}}\right)^{۲} \times \left(\frac{-۷}{۲\sqrt{\frac{x+۲}{۲x-۳}}(۲x-۳)^{۲}}\right) \Rightarrow f'(۲) = ۱۲ \times \frac{-۷}{۲ \times \sqrt{\frac{۲+۲}{۴-۳}}(۴-۳)^{۲}} = -۲۱$$

۱۴ گزینه ۱

هنگامی‌که $x = ۱$ باشد، مخرج کسر صفر می‌شود؛ درنتیجه باید صورت کسر در این حالت صفر شود تا حالت $\frac{۰}{۰}$ ایجاد شود که بعد از رفع ابهام حاصل حد، عددی غیرصفر باشد:

$$\lim_{x\to ۱} \frac{\sqrt{ax+b} - ۲}{x^{۲} - ۱} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \sqrt{a+b} - ۲ = ۰ \Rightarrow a + b = ۴$$

در اینجا برای رفع ابهام $\frac{۰}{۰}$ از هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$HOP : \lim_{x\to ۱} \frac{\frac{a}{۲\sqrt{ax+b}}}{۲x} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{a}{۴\sqrt{a+b}} = \frac{۳}{۲} \xrightarrow{a+b=۴} a = ۱۲ \Rightarrow b = -۸$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۵

گزینه ۱

گام اول

الف) می‌دانیم وقتی $x \to \infty$ هم‌ارزی زیر برقرار است:

$$\sqrt{ax^۲+bx+c} \underset{x\to\infty}{\sim} \sqrt{a}|x+\frac{b}{۲a}|$$

ب) صورت و مخرج کسر، یک عبارت چندجمله‌ای است و حاصل حد تابع در بی‌نهایت برابر با یک عدد ثابت شده است؛ بنابراین بزرگ‌ترین درجهٔ صورت و بزرگ‌ترین درجهٔ مخرج کسر باهم برابر است.

گام دوم

باتوجه‌به قسمت (الف) از گام اول، عبارت رادیکالی مخرج کسر را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{۴x^۲+۱۵x} \underset{x\to-\infty}{\sim} \sqrt{۴}|x+\frac{۱۵}{۸}| = -۲(x+\frac{۱۵}{۸})$$

(دقت کنید که چون $x \to -\infty$ بود، قرینهٔ عبارت درون قدر مطلق از آن خارج شد)

باتوجه‌به قسمت (ب) از گام اول، $n = ۱$ است. داریم:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{ax+۱۵}{۳x-(-۲(x+\frac{۱۵}{۸}))} = \lim_{x\to-\infty} \frac{ax+۱۵}{۳x+۲x+\frac{۱۵}{۴}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{ax+۱۵}{۵x+\frac{۱۵}{۴}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{ax}{۵x} = \frac{a}{۵}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -۱ \Rightarrow \frac{a}{۵} = -۱ \Rightarrow a = -۵$$

بنابراین ضابطهٔ تابع $f(x)$ برابر است با:

$$f(x) = \frac{-۵x+۱۵}{۳x-\sqrt{۴x^۲+۱۵x}}$$

اکنون حاصل حد تابع $f(x)$ را وقتی $x \to ۳$ به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to۳} f(x) = \lim_{x\to۳} \frac{-۵x+۱۵}{۳x-\sqrt{۴x^۲+۱۵x}} = \frac{۰}{۰}$$

با دو روش می‌توان ابهام به‌وجودآمده را رفع کرد.

روش اول:

با به‌کاربردن قاعدهٔ هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to۳} \frac{-۵x+۱۵}{۳x-\sqrt{۴x^۲+۱۵x}} = \lim_{x\to۳} \frac{-۵}{۳-\frac{۸x+۱۵}{۲\sqrt{۴x^۲+۱۵x}}} = \frac{-۵}{۳-\frac{۲۴+۱۵}{۲\sqrt{۳۶+۴۵}}}$$

$$= \frac{-۵}{۳-\frac{۳۹}{۱۸}} = \frac{-۵}{\frac{۱۵}{۱۸}} = \frac{-۵}{\frac{۵}{۶}} = -۶ \Rightarrow \lim_{x\to۳} f(x) = -۶$$

روش دوم:

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

با ضرب صورت و مخرج در مزدوج مخرج، داریم:

$$\lim_{x\to ۳}\frac{-۵x+۱۵}{۳x-\sqrt{۴x^۲+۱۵x}}\times\frac{۳x+\sqrt{۴x^۲+۱۵x}}{۳x+\sqrt{۴x^۲+۱۵x}}=\lim_{x\to ۳}\frac{-۵(x-۳)(۳x+\sqrt{۴x^۲+۱۵x})}{۹x^۲-۴x^۲-۱۵x}$$

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{-۵(x-۳)(۳x+\sqrt{۴x^۲+۱۵x})}{۵x(x-۳)}=\lim_{x\to ۳}-\frac{۳x+\sqrt{۴x^۲+۱۵x}}{x}=-\frac{۹+۹}{۳}=-\frac{۱۸}{۳}=-۶$$

۱۶ گزینه ۳

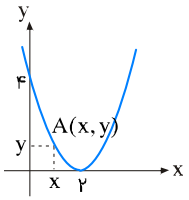
باتوجه‌به عبارت $\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-۹}{h}=\frac{۳}{۲}$، $f(۲)=۹$ و $f'(۲)=\frac{۳}{۲}$ می‌شود.

$$g(x)=x\sqrt{f(x)}\Rightarrow g'(x)=\sqrt{f(x)}+x\frac{f'(x)}{۲\sqrt{f(x)}}\Rightarrow g'(۲)=\sqrt{f(۲)}+۲\frac{f'(۲)}{۲\sqrt{f(۲)}}$$

$$\Rightarrow g'(۲)=\sqrt{۹}+۲\times\frac{\frac{۳}{۲}}{۲\sqrt{۹}}=۳+\frac{۱}{۲}=۳/۵$$

۱۷ گزینه ۳

نقطهٔ $A(x,y)$ روی منحنی $y=(x-۲)^۲$ را رأس چهارم مستطیل در نظر می‌گیریم، پس این رأس دارای مختصات $A(x,(x-۲)^۲)$ است. با رسم شکلی ساده، مستطیل ایجادشده را مشخص می‌کنیم.



مساحت این مستطیل برابر است با:

$$S=xy\xrightarrow{y_A=(x-۲)^۲}S=x(x-۲)^۲\quad;\quad ۰<x<۲$$

$$S'_x=(x-۲)^۲+۲x(x-۲)=(x-۲)(x-۲+۲x)=(x-۲)(۳x-۲)$$

$$S'_x=۰\Rightarrow(x-۲)(۳x-۲)=۰\xrightarrow{x\neq ۲}۳x-۲=۰\Rightarrow x=\frac{۲}{۳}$$

بنابراین بیشترین مساحت مستطیل به ازای $x=\frac{۲}{۳}$ به دست می‌آید:

$$S_{max}=x(x-۲)^۲=(\frac{۲}{۳})(\frac{۲}{۳}-۲)^۲=\frac{۲}{۳}(-\frac{۴}{۳})^۲=\frac{۲}{۳}\times\frac{۱۶}{۹}=\frac{۳۲}{۲۷}$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۸ گزینه ۴

ابتدا وضعیت یکنوایی دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را روی دامنهٔ تعریف آن‌ها بررسی می‌کنیم. داریم:

$$f(x) = x^{۲} - ۲x + ۴ \quad , \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = ۲x - ۲ \ , \ f'(x) = ۰ \Rightarrow ۲x = ۲ \Rightarrow x = ۱$$

$$f(۱) = ۱^{۲} - ۲(۱) + ۴ = ۱ - ۲ + ۴ = ۳ \Rightarrow f(x) \geq ۳$$

x	$-\infty$	۱	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	۰	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

$$g(x) = x^{۳} + x \quad , \quad D_g = \mathbb{R}$$

$$g'(x) = ۳x^{۲} + ۱ > ۰$$

تابع $g(x)$ همواره صعودی است بنابراین کمترین مقدار تابع gof به ازای کمترین مقدار تابع $f(x)$ به دست می‌آید، پس می‌توان نوشت:

$$f(x) \geq ۳ \Rightarrow g(f(x)) \geq g(۳)$$

$$\Rightarrow (gof)_{min} = g(۳) = ۳^{۳} + ۳ = ۲۷ + ۳ = ۳۰$$

۱۹ گزینه ۲

باتوجه‌به اینکه ضابطهٔ تابع شامل جزء صحیح است، وقتی $x \to (-۳)^{+}$ داریم:

$$x \to (-۳)^{+} \Rightarrow x > -۳ \Rightarrow [x] = -۳, |x| = -x$$

$$\Rightarrow f(x) = (-۳ + x)\sqrt[۳]{۹x} = (x - ۳)\sqrt[۳]{۹x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sqrt[۳]{۹x} + \frac{۹}{۳\sqrt[۳]{۸۱x^{۲}}}(x - ۳)$$

$$\Rightarrow f'_{+}(-۳) = \sqrt[۳]{-۲۷} + \frac{۹}{۳\sqrt[۳]{۷۲۹}}(-۶) = -۳ + \frac{۹}{۳ \times ۹}(-۶) = -۳ - ۲ = -۵$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۲۰ گزینه ۴

هرگاه $f(x)$ یک تابع چندجمله‌ای باشد آنگاه نقاط بحرانی تابع $y=|f(x)|$، ریشه‌های سادهٔ دو معادلهٔ $f(x)=0$ و $f'(x)=0$ خواهد بود.

$$f(x)=|x^3-x| \xrightarrow{f(x)=0} x^3-x=0 \Rightarrow x(x^2-1)=0 \Rightarrow x=0, x=1, x=-1$$

$$f'(x)=\frac{(3x^2-1)(x^3-x)}{|x^3-x|} \xrightarrow{f'(x)=0} 3x^2-1=0 \Rightarrow 3x^2=1$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{1}{3} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{3}, x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

همچنین تابع در ابتدا و انتهای بازهٔ $[-1,2]$ نیز بحرانی است، بنابراین تابع $f(x)=|x^3-x|$ روی بازهٔ $[-1,2]$ دارای شش نقطهٔ بحرانی $x=0$، $x=1$، $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$، $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ و $x=-1$ و $x=2$ است

۲۱ گزینه ۳

صورت و مخرج کسر یک عبارت چندجمله‌ای است. چون $x \to +\infty$، برای یافتن حاصل حد کافی است بزرگ‌ترین جملهٔ صورت را بر بزرگ‌ترین جملهٔ مخرج تقسیم کنیم؛ بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ax+9}{1-x+\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax}{-x} = -a = 3 \Rightarrow a=-3$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{-3x+9}{1-x+\sqrt{x+1}}$$

$$\lim_{x\to3} \frac{-3x+9}{1-x+\sqrt{x+1}} = \frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام، از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to3} f(x) = \lim_{x\to3} \frac{-3x+9}{1-x+\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to3} \frac{-3}{-1+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}} = \frac{-3}{-1+\frac{1}{2\sqrt{4}}} = -\frac{3}{-\frac{3}{4}} = 4$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۲۲ گزینه ۴

ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\left(\frac{\sqrt[3]{x^2+2x}}{x^2-x}\right)^3=\frac{x^2+2x}{(x^2-x)^3}$$

سپس مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=\frac{(x^2+2x)'(x^2-x)^3-((x^2-x)^3)'(x^2+2x)}{(x^2-x)^6}$$

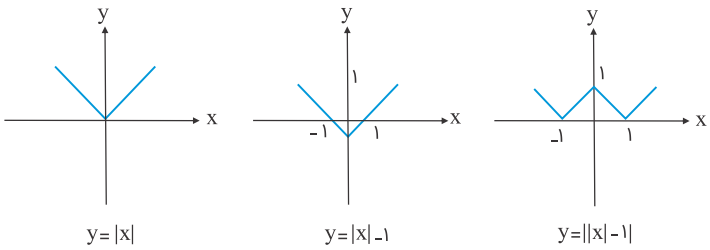
$$=\frac{(2x+2)(x^2-x)^3-(3(2x-1)(x^2-x)^2)(x^2+2x)}{(x^2-x)^6}$$

$$f'(2)=\frac{6\times\cancel{8}-3\times3\times4\times\cancel{8}}{\cancel{64}_{8}}=-\frac{15}{4}$$

۲۳ گزینه ۴

روش اول: رسم نمودار تابع

یکی از راه‌های تشخیص نقاط مشتق‌ناپذیر، رسم نمودار توابع است. دقت کنید که نقاط زاویه‌دار، بازگشتی، دارای مماس قائم و ... در نمودار تابع، نقاط مشتق‌ناپذیر تابع محسوب می‌شوند.



باتوجه‌به نمودار، سه نقطه به طول‌های $x=1, x=0, x=-1$، نقاط زاویه‌دار بوده و تابع در این نقاط مشتق‌ناپذیر است.

روش دوم: تعیین ریشه‌های ساده عبارت‌های داخل قدر مطلق

تابع در ریشه‌های سادهٔ عبارت داخل قدر مطلق نیز مشتق‌ناپذیر است. این تابع دو عبارت قدر مطلقی دارد؛ یکی $|x|$ و دیگری $||x|-1|$. ریشه‌ها را تعیین می‌کنیم:

$$1)|x| \ : \quad x=0$$

$$2)||x|-1| \ : \quad |x|-1=0 \ \Rightarrow \ |x|=1 \ \Rightarrow \ x=\pm1$$

تابع در سه نقطهٔ $x=1, x=0, x=-1$ مشتق‌ناپذیر است.

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۲۴ گزینه ۲

برای یافتن بیشترین و کمترین مقدار تابع پیوستهٔ $f(x)$ روی بازهٔ $[۱, ۳]$، ابتدا نقاط بحرانی تابع $f(x)$ را روی این بازه یافته و مقدار تابع را در این نقاط به دست می‌آوریم. می‌دانیم نقاط بحرانی تابع $f(x)$، نقاطی است که $f'(x) = ۰$ باشد یا $f'(x)$ تعریف‌نشده باشد. داریم:

$$f(x) = x^۳ - ۳x^۲ + k \Rightarrow f'(x) = ۳x^۲ - ۶x = ۳x(x - ۲) = ۰ \Rightarrow x = ۰, x = ۲$$

چون $۰ \notin [۱, ۳]$ پس تنها نقطهٔ $x = ۲$ قابل‌قبول است؛ همچنین نقاط ابتدا و انتهای بازه هم بحرانی‌اند. بنابراین داریم:

$$f(۱) = ۱ - ۳ + k = k - ۲$$

$$f(۲) = ۸ - ۱۲ + k = k - ۴$$

$$f(۳) = ۲۷ - ۲۷ + k = k$$

بیشترین مقدار تابع $f(x)$ برابر k و کمترین مقدار آن برابر $k - ۴$ است. این دو مقدار قرینهٔ یکدیگرند؛ پس:

$$k = -(k - ۴) \Rightarrow k = -k + ۴ \Rightarrow ۲k = ۴ \Rightarrow k = ۲$$

۲۵ گزینه ۲

گام اول

خط بر یک منحنی مماس است درصورتی‌که معادلهٔ تلاقی آن‌ها ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

گام دوم

با مساوی قرار دادن معادلهٔ خط و منحنی، معادلهٔ تلاقی آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$۲x^۲ - x + a = -۱ \Rightarrow ۲x^۲ - x + a + ۱ = ۰$$

می‌دانیم معادلهٔ درجه‌دو در صورتی ریشهٔ مضاعف دارد که $\Delta = ۰$ شود:

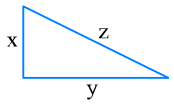
$$\Delta = (-۱)^۲ - ۴(۲)(a + ۱) = ۰ \Rightarrow ۱ - ۸(a + ۱) = ۰$$
$$\Rightarrow ۸(a + ۱) = ۱ \Rightarrow a + ۱ = \frac{۱}{۸} \Rightarrow a = -\frac{۷}{۸}$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۲۶

گزینه ۲

مثلث قائم‌الزاویه‌ای با طول اضلاع x، y و z به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم.



بر اساس اطلاعات صورت سؤال داریم:

$$x + z = ۶ \Rightarrow z = ۶ - x$$

ازطرفی طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$x^۲ + y^۲ = z^۲ \xrightarrow{z=۶-x} x^۲ + y^۲ = (۶ - x)^۲ \Rightarrow x^۲ + y^۲ = x^۲ - ۱۲x + ۳۶$$

$$\Rightarrow y^۲ = ۳۶ - ۱۲x \Rightarrow y = \sqrt{۳۶ - ۱۲x} \Rightarrow y = ۲\sqrt{۹ - ۳x}$$

اکنون مساحت مثلث را به‌صورت تابعی برحسب x می‌نویسیم:

$$S = \frac{۱}{۲}xy = \frac{۱}{۲}x(۲\sqrt{۹ - ۳x}) = x\sqrt{۹ - ۳x}$$

برای بهینه کردن مساحت، معادلهٔ $S'_x = ۰$ را حل می‌کنیم:

$$S'_x = \sqrt{۹ - ۳x} - \frac{۳x}{۲\sqrt{۹ - ۳x}} = \frac{۲(۹ - ۳x) - ۳x}{۲\sqrt{۹ - ۳x}} = \frac{۱۸ - ۹x}{۲\sqrt{۹ - ۳x}}$$

$$S'_x = ۰ \Rightarrow ۱۸ - ۹x = ۰ \Rightarrow x = ۲$$

$$\xrightarrow{y=۲\sqrt{۹-۳x}} y = ۲\sqrt{۹ - ۶} = ۲\sqrt{۳}$$

بنابراین بیشترین مساحت مثلث قائم‌الزاویه با مشخصات داده‌شده برابر است با:

$$S_{max} = \frac{۱}{۲}xy = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲\sqrt{۳} = ۲\sqrt{۳}$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۲۷ گزینه ۲

برای یافتن ماکزیمم و مینیمم مطلق یک تابع پیوسته، مقدار تابع را در نقاط بحرانی آن می‌یابیم. نقطهٔ بحرانی تابع، نقاطی از دامنهٔ تعریف آن است که به‌ازای آن‌ها $f'(x) = ۰$ یا $f'(x)$ موجود نباشد.

$$y = x^۳ - ۳x^۲ - ۹x + ۵ \Rightarrow y' = ۳x^۲ - ۶x - ۹$$

$$y' = ۰ \Rightarrow ۳(x^۲ - ۲x - ۳) = ۳(x - ۳)(x + ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x - ۳ = ۰ \Rightarrow x = ۳ \\ x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \end{cases}$$

چون $۳ \notin [-۲, ۲]$، پس مقدار تابع را به‌ازای $x = -۱, -۲, ۲$ محاسبه و باهم مقایسه می‌کنیم.

$$f(-۱) = -۱ - ۳ + ۹ + ۵ = ۱۰$$

$$f(۲) = ۸ - ۱۲ - ۱۸ + ۵ = -۱۷$$

$$f(-۲) = -۸ - ۱۲ + ۱۸ + ۵ = ۳$$

باتوجه‌به مقادیر به‌دست آمده، بیشترین مقدار تابع $y = ۱۰$ است.

۲۸ گزینه ۳

$\lim\limits_{x \to ۴} \frac{f(x) - f(۴)}{x - ۴}$ برابر $f'(۴)$ است، بنابراین برای به دست آوردن $\lim\limits_{x \to ۴} \frac{f(x) - f(۴)}{x - ۴}$ کافی است $f'(۴)$ را محاسبه کنیم:

$$f(x) = \frac{۱ + \sqrt{x}}{۵ - ۲x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۵ - ۲x) + ۲(۱ + \sqrt{x})}{(۵ - ۲x)^۲}$$

$$\Rightarrow f'(۴) = \frac{\frac{۱}{۴}(۵ - ۸) + ۲(۱ + ۲)}{(۵ - ۸)^۲} = \frac{-\frac{۳}{۴} + ۶}{۹} = \frac{۲۱}{۳۶} = \frac{۷}{۱۲}$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۲۹ گزینه ۴

گام اول

مشتق تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = ۱$ موجود است هرگاه:

اولاً تابع در این نقطه پیوسته باشد.

ثانیاً مشتق چپ و راست تابع در این نقطه موجود و برابر باشند.

گام دوم

بررسی شرط پیوستگی در نقطهٔ $x = ۱$:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} f(x) = f(۱) \Rightarrow \sqrt[۳]{(۲+۶)^۲} = a+b \Rightarrow \sqrt[۳]{۸^۲} = a+b \Rightarrow a+b = ۴ \quad (I)$$

بررسی شرط مشتق‌پذیری در نقطهٔ $x = ۱$:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[۳]{(۲x+۶)^۲} & ; x > ۱ \\ ax+b & ; x \le ۱ \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} (۲x+۶)^{\frac{۲}{۳}} & ; x > ۱ \\ ax+b & ; x \le ۱ \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} ۲ \times \frac{۲}{۳} \times (۲x+۶)^{-\frac{۱}{۳}} & ; x > ۱ \\ a & ; x < ۱ \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{۴}{۳} \times \frac{۱}{\sqrt[۳]{۲x+۶}} & ; x > ۱ \\ a & ; x < ۱ \end{cases}$$

$$f'_+(۱) = f'_-(۱) \Rightarrow \frac{۴}{۳} \times \frac{۱}{\sqrt[۳]{۲+۶}} = a \Rightarrow a = \frac{۴}{۳} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۲}{۳}$$

با جایگذاری در رابطهٔ (I) داریم:

$$a+b = ۴ \xrightarrow{a=\frac{۲}{۳}} \frac{۲}{۳} + b = ۴ \Rightarrow b = ۴ - \frac{۲}{۳} = \frac{۱۰}{۳}$$

۳۰ گزینه ۲

خط $y = ۵x + a$ بر نمودار تابع $y = ۲x^۲ - ۳x + ۶$ در نقطه‌ای مماس می‌شود که شیب خط مماس برابر با ۵ باشد.

$$y = ۲x^۲ - ۳x + ۶ \Rightarrow \text{شیب خط مماس} = \text{مشتق} \Rightarrow ۴x - ۳ = ۵ \Rightarrow x = ۲$$

پس خط در نقطه‌ای به طول ۲ بر تابع مماس است. به‌علاوه خط و تابع در این نقطه برخورد دارند. اگر $x = ۲$ را در تابع قرار دهیم داریم:

$$y(۲) = ۲(۲)^۲ - ۳(۲) + ۶ = ۸ - ۶ + ۶ = ۸ \Rightarrow \text{نقطهٔ تماس } (۲, ۸)$$

نقطهٔ تماس در معادلهٔ خط مماس باید صدق کند:

$$y = ۵x + a \xrightarrow{(۲,۸)} ۸ = ۵(۲) + a \Rightarrow a = -۲$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۳۱ گزینه ۴

باتوجه‌به وجود عبارت $[x]$ در ضابطهٔ تابع $f(x)$، ابتدا بازهٔ $[-۱,۲]$ را به زیربازه‌های کوچک‌تر تقسیم کرده و ضابطهٔ تابع را روی هر زیربازه مشخص می‌کنیم.

$$-۱ \le x < ۰ \Rightarrow [x] = -۱ \Rightarrow f(x) = -\sin \pi x$$

$$۰ \le x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰ \Rightarrow f(x) = ۰$$

$$۱ \le x < ۲ \Rightarrow [x] = ۱ \Rightarrow f(x) = \sin \pi x$$

$$x = ۲ \Rightarrow [x] = ۲ \Rightarrow f(x) = ۲ \sin \pi x$$

باتوجه‌به اینکه ضابطهٔ تابع $f(x)$ در بازهٔ $[۰,۱]$ به‌صورت خط افقی $y = ۰$ است پس هر $x \in [۰,۱]$ می‌تواند یک نقطهٔ بحرانی تابع $f(x)$ باشد، همچنین نقاط ابتدا و انتهای بازهٔ $[-۱,۲]$ یعنی $x = -۱,۲$ نیز بحرانی هستند. بنابراین تابع $f(x)$ در بازهٔ $[-۱,۲]$ دارای بی‌شمار نقطهٔ بحرانی است.

۳۲ گزینه ۴

گام اول

الف) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطهٔ $x = a$ برابر $f'(a)$ است.

ب) آهنگ متوسط تغییر تابع از $x_۱$ تا $x_۲$ چنین تعریف می‌شود:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_۲) - f(x_۱)}{x_۲ - x_۱}$$

گام دوم

آهنگ لحظه‌ای در نقطهٔ $a + \frac{h}{۲}$ یعنی محاسبهٔ $f'\left(a + \frac{h}{۲}\right)$، پس ابتدا ضابطهٔ $f'(x)$ را تعیین و سپس $f'\left(a + \frac{h}{۲}\right)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$f(x) = ۳x^۲ + ۴x - ۲ \Rightarrow f'(x) = ۶x + ۴$$

$$a + \frac{h}{۲} \text{ آهنگ لحظه‌ای تغییر در } = f'\left(a + \frac{h}{۲}\right) = ۶\left(a + \frac{h}{۲}\right) + ۴ = ۶a + ۳h + ۴$$

آهنگ متوسط تغییر تابع از a تا $a + h$ برابر است با:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{a + h - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \frac{\left[۳(a+h)^۲ + ۴(a+h) - ۲\right] - (۳a^۲ + ۴a - ۲)}{h}$$

$$= \frac{۳a^۲ + ۶ah + ۳h^۲ + ۴a + ۴h - ۲ - ۳a^۲ - ۴a + ۲}{h} = \frac{۶ah + ۳h^۲ + ۴h}{h} = ۶a + ۳h + ۴$$

مقدار آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای در موارد خواسته‌شده برابر شد، پس تفاضل آن‌ها برابر صفر است.

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۳۳ گزینه ۳

به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$x^{۲} \geq ۰ \Rightarrow -۳x^{۲} \leq ۰ \Rightarrow x^{۳} - ۳x^{۲} \leq x^{۳} \xrightarrow{\text{ریشهٔ سوم}} \sqrt[۳]{x^{۳} - ۳x^{۲}} \leq \sqrt[۳]{x^{۳}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[۳]{x^{۳} - ۳x^{۲}} \leq x \Rightarrow x - \sqrt[۳]{x^{۳} - ۳x^{۲}} \geq ۰$$

بنابراین مینیمم مطلق تابع $f(x)$ بر روی $\mathbb{R}$ برابر صفر است.

۳۴ گزینه ۱

$$\lim_{x \to ۲^{+}} f(x) = \lim_{x \to ۲^{+}} \frac{x - [x]}{x^{۳} - x - ۶} = \lim_{x \to ۲} \frac{x - ۲}{x^{۳} - x - ۶} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \to ۲} \frac{x - ۲}{x^{۳} - x - ۶} = \lim_{x \to ۲} \frac{۱}{۳x^{۲} - ۱} = \frac{۱}{۱۲ - ۱} = \frac{۱}{۱۱}$$

$$f(۲) = a \Rightarrow a = \frac{۱}{۱۱}$$

۳۵ گزینه ۴

$$f(x) = -\frac{۱}{۳}x^{۳} + ۲x^{۲} - x \Rightarrow f'(x) = -x^{۲} + ۴x - ۱$$

بیشترین شیب مماس، ماکزیمم مقدار مشتق است که در رأس سهمی $-x^{۲} + ۴x - ۱$ اتفاق می‌افتد.

$$x_{max} = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۴}{۲(-۱)} = ۲ \quad , \quad f(۲) = \frac{۱۰}{۳} \Rightarrow A\left(۲, \frac{۱۰}{۳}\right)$$

شیب خط مماس : $m = f'(۲) = -۴ + ۸ - ۱ = ۳$

معادلهٔ خط مماس : $y - \frac{۱۰}{۳} = ۳(x - ۲) \xrightarrow{x=۰} y = \frac{۱۰}{۳} - ۶ = \frac{-۸}{۳}$ عرض از مبدأ

۳۶ گزینه ۳

ازآنجایی‌که $۱ - \cos^{۲}x = \sin^{۲}x$ است، پس:

$$f(x) = \sin^{۲}x - \sin x$$

با فرض $\sin x = t$، داریم $-۱ \leq t \leq ۱$ و درنتیجه:

$$y = t^{۲} - t \quad , \quad -۱ \leq t \leq ۱$$

$$y' = ۲t - ۱ = ۰ \Rightarrow t = \frac{۱}{۲}$$

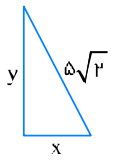
$$y(۱) = ۰ \quad , \quad y(-۱) = ۲ \quad , \quad y(\frac{۱}{۲}) = \frac{-۱}{۴}$$

بنابراین کمترین مقدار تابع $\frac{-۱}{۴}$ است.

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۳۷ گزینه ۱

مثلث قائم‌الزاویه‌ای با طول اضلاع قائم x و y، به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم. طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم:



$$x^۲ + y^۲ = (۵\sqrt{۲})^۲ \Rightarrow x^۲ + y^۲ = ۵۰$$

$$\Rightarrow y^۲ = ۵۰ - x^۲ \Rightarrow y = \sqrt{۵۰ - x^۲}$$

$$\Rightarrow f = ۳x + ۴y = ۳x + ۴\sqrt{۵۰ - x^۲}$$

برای یافتن ماکزیمم مقدار تابع $f(x) = ۳x + ۴\sqrt{۵۰ - x^۲}$، مشتق آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$f'(x) = ۳ + ۴(\frac{-۲x}{۲\sqrt{۵۰ - x^۲}}) = ۳ - \frac{۴x}{\sqrt{۵۰ - x^۲}}$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow ۳ = \frac{۴x}{\sqrt{۵۰ - x^۲}} \Rightarrow ۳\sqrt{۵۰ - x^۲} = ۴x \xrightarrow[\text{به توان ۲}]{x>۰} ۹(۵۰ - x^۲) = ۱۶x^۲$$

$$\Rightarrow ۴۵۰ - ۹x^۲ = ۱۶x^۲ \Rightarrow ۲۵x^۲ = ۴۵۰ \Rightarrow x^۲ = ۱۸ \Rightarrow x = \sqrt{۱۸}$$

$$y = \sqrt{۵۰ - x^۲} = \sqrt{۵۰ - ۱۸} = \sqrt{۳۲} = ۴\sqrt{۲}$$

بنابراین:

$$f_{max} = ۳x + ۴y = ۳(۳\sqrt{۲}) + ۴(۴\sqrt{۲}) = ۹\sqrt{۲} + ۱۶\sqrt{۲} = ۲۵\sqrt{۲}$$

۳۸ گزینه ۱

می‌دانیم به ازای $-۱ \le x \le ۱$ همواره $\cos x > ۰$ است؛ ازطرفی به ازای هر x، $|x| \ge ۰$ است بنابراین به ازای $x \in [-۱, ۱]$ نامساوی $-|x| \cos x \le ۰$ برقرار است.

می‌دانیم بیشترین مقدار یک عبارت نامثبت برابر صفر است، بنابراین در بازهٔ $[-۱, ۱]$ به ازای $x = ۰$، ماکزیمم مقدار تابع $f(x)$ برابر صفر خواهد بود.

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۳۹

گزینه ۴

گام اول

الف) تابع $f(x)$ بر روی مجموعهٔ $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است هرگاه در تمام نقاط این مجموعه مشتق‌پذیر باشد.

ب) تابع $f(x)$ در یک نقطه مشتق‌پذیر است درصورتی‌که اولاً در این نقطه پیوسته باشد، ثانیاً مشتق راست و چپ تابع در این نقطه، موجود و باهم برابر باشند.

گام دوم

تابع $f(x)$ به ازای نقاط $x > ۱$ و $x < ۱$ پیوسته و مشتق‌پذیر است. کافی است پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع را در نقطهٔ $x = ۱$ بررسی کنیم. با بررسی این دو شرط، مقادیر a و b را می‌یابیم.

بررسی شرط پیوستگی:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^+} \dfrac{۲\sqrt{x}}{x} = \dfrac{۲\times ۱}{۱} = ۲ \\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-} ax^۲ + bx = a + b \\ f(۱) = \dfrac{۲\times ۱}{۱} = ۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = f(۱)} a + b = ۲ \quad (I)$$

بررسی شرط مشتق‌پذیری:

$$f'(x) = \begin{cases} -x^{-\frac{۳}{۲}} & ; x > ۱ \\ ۲ax + b & ; x < ۱ \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'_+(۱) = -(۱)^{-\frac{۳}{۲}} = -۱ \\ f'_-(۱) = ۲a + b \end{array}\right\} \xrightarrow{f'_+(۱) = f'_-(۱)} ۲a + b = -۱ \qquad (II)$$

دو رابطهٔ I و II را به‌صورت یک دستگاه دو معادله و دو مجهولی حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} a + b = ۲ \\ ۲a + b = -۱ \end{cases} \xrightarrow{(-)} -a = ۳ \Rightarrow a = -۳ \xrightarrow{(I)} -۳ + b = ۲ \quad \Rightarrow \quad b = ۵$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۴۰ گزینه ۱

گام اول:

نقاط بحرانی تابع $f(x)$، نقاطی از دامنهٔ تعریف این تابع است که $f'(x) = ۰$ باشد یا $f'(x)$ موجود نباشد.

گام دوم:

ابتدا دامنهٔ تعریف تابع $f(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{\sqrt{۱+x^۲}}{x} \Rightarrow \begin{cases} ۱+x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ \geq -۱ \\ x \neq ۰ \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{۰\}$$

حال ضابطهٔ $f'(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = \frac{\frac{۲x^۲}{۲\sqrt{۱+x^۲}} - \sqrt{۱+x^۲}}{x^۲} = \frac{\frac{x^۲ - ۱ - x^۲}{\sqrt{۱+x^۲}}}{x^۲} = -\frac{۱}{x^۲\sqrt{۱+x^۲}}$$

معادلهٔ $f'(x) = ۰$ جواب ندارد. همچنین $f'(x)$ فقط به ازای $x = ۰$ تعریف‌نشده است اما $x = ۰$ عضو دامنهٔ تعریف تابع $f(x)$ نیست پس نقطهٔ بحرانی محسوب نمی‌شود، بنابراین تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x)$ بر روی دامنهٔ تعریف آن برابر صفر است.

۴۱ گزینه ۳

$$f(x) = \frac{۵x - ۴}{\sqrt{x}}$$

حال $f(۴)$ و $f'(۴)$ را به دست آورده و معادلهٔ خط مماس را می‌نویسیم:

$$f(۴) = \frac{۵ \times ۴ - ۴}{\sqrt{۴}} = \frac{۱۶}{۲} = ۸$$

$$f'(x) = \frac{۵\sqrt{x} - \frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۵x - ۴)}{x} \Rightarrow f'(۴) = \frac{۱۰ - \frac{۱}{۴}(۱۶)}{۴} = \frac{۳}{۲}$$

معادلهٔ خط مماس:

$$y - f(۴) = f'(۴)(x - ۴) \Rightarrow y - ۸ = \frac{۳}{۲}(x - ۴)$$

$$\xrightarrow[x=۰]{\text{عرض از مبدأ}} y - ۸ = \frac{۳}{۲}(-۴) \Rightarrow y - ۸ = -۶ \Rightarrow y = ۲$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

گزینه ۲

گام اول

الف) مشتق اول تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=0$ موجود است درصورتی‌که اولاً تابع در این نقطه پیوسته باشد، ثانیاً داشته باشیم: $f'_+(0)=f'_-(0)$.

ب) مشتق دوم تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=0$ موجود است درصورتی‌که اولاً مشتق اول تابع در این نقطه موجود و پیوسته باشد، ثانیاً داشته باشیم: $f''_+(0)=f''_-(0)$.

گام دوم

ابتدا ضابطهٔ معکوس تابع $f(x)$ را برای $x\geq 0$ و $x<0$ تعیین کرده و در ادامه وجود و عدم وجود $(f^{-1})'(x)$ و $(f^{-1})''(x)$ در نقطهٔ $x=0$ را بررسی می‌کنیم.

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ;x\geq 0\\ -\sqrt{-x} & ;x<0\end{cases}$$

$$x\geq 0,\ y\geq 0 \ \Rightarrow\ f(x)=\sqrt{x}\ \Rightarrow\ y=\sqrt{x}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲(دو طرف مثبت)}} y^2=x\Rightarrow f^{-1}(x)=x^2\ \ ;\ \ x\geq 0$$

$$x<0, y<0\Rightarrow f(x)=-\sqrt{-x}\Rightarrow y=-\sqrt{-x}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲(دو طرف منفی)}} y^2=-x\Rightarrow x=-y^2\Rightarrow f^{-1}(x)=-x^2\ \ ;\ \ x<0$$

پس ضابطهٔ تابع $f^{-1}(x)$ به‌صورت زیر می‌شود:

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}x^2 & ;x\geq 0\\ -x^2 & ;x<0\end{cases}$$

تابع $f^{-1}(x)$ در $x=0$ پیوسته است زیرا:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=0$$

همچنین داریم:

$$(f^{-1})'(x)=\begin{cases}2x & ;x>0\\ -2x & ;x<0\end{cases}\ \Rightarrow\ (f^{-1})'_+(0)=(f^{-1})'_-(0)=0$$

پس تابع $f^{-1}(x)$ در $x=0$ مشتق اول دارد و مشتق اول در این نقطه پیوسته است.

$$(f^{-1})''(x)=\begin{cases}2 & ;x>0\\ -2 & ;x<0\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}(f^{-1})''_+(0)=2\\ (f^{-1})''_-(0)=-2\end{array}\right\}\Rightarrow\ (f^{-1})''_+(0)\neq(f^{-1})''_-(0)$$

بنابراین تابع $f^{-1}(x)$ در $x=0$ مشتق دوم ندارد.

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۴۳ گزینه ۳

فرض دوم مسئله، تعریف مشتق تابع $f(x)$ در $x = ۲$ است:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow f'(۲)=\frac{۴}{۳}$$

$$g(۱)=۱+\sqrt{۱}=۲$$

طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم:

$$(fog)'(۱)=g'(۱)\times f'(g(۱))=g'(۱)\times f'(۲)=\frac{۴}{۳}g'(۱)$$

ازطرفی:

$$g(x)=x+\sqrt{x}\Rightarrow g'(x)=۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

$$\xrightarrow{x=۱} g'(۱)=۱+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

درنتیجه:

$$(fog)'(۱)=\frac{۴}{۳}g'(۱)=\frac{۴}{۳}\times\frac{۳}{۲}=۲$$

۴۴ گزینه ۳

عبارت $x^۲-۳$ روی بازهٔ $[-۱,۱]$ همواره منفی است بنابراین داریم:

$$x\in[-۱,۱]:\left|x^۲-۳\right|=-(x^۲-۳)=۳-x^۲$$

$$\Rightarrow f(x)=x\left|x^۲-۳\right|=x(۳-x^۲)=۳x-x^۳$$

با حل معادلهٔ $f'(x)=۰$، نقاط بحرانی تابع $f(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$f'(x)=۳-۳x^۲\xrightarrow{f'(x)=۰}۳-۳x^۲=۰\Rightarrow ۳x^۲=۳\Rightarrow x^۲=۱\Rightarrow x=\pm۱$$

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
$f'(x)$		-	۰	+	۰	-	
$f(x)$		↘		↗		↘	

تابع $f(x)$ در بازهٔ $[-۱,۱]$ صعودی و پیوسته است؛ بنابراین $f(-۱)=-۲$ مینیمم مطلق تابع و $f(۱)=۲$ ماکزیمم مطلق تابع روی این بازه است. نقاط $x=+۱$ و $x=-۱$ چون نقاط ابتدا و انتهای بازه هستند اکسترمم‌های نسبی تابع $f(x)$ محسوب نمی‌شوند پس گزینهٔ سوم نادرست است.

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۴۵ گزینه ۳

گام اول

اگر $y = f(u)$ باشد به‌طوری‌که u خود تابعی از x است، آنگاه داریم:

$$y' = u'f'(u)$$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول و با فرض اینکه $u = x + \sqrt{۱+x^۲}$ است، مشتق تابع $f\left(x+\sqrt{۱+x^۲}\right)$ را به دست می‌آوریم، همچنین داریم:

$$f'(x) = \frac{۱}{x} \Rightarrow f'(u) = \frac{۱}{u}$$

$$y = f\left(x+\sqrt{۱+x^۲}\right) \Rightarrow y' = \left(x+\sqrt{۱+x^۲}\right)' f'\left(x+\sqrt{۱+x^۲}\right) = \left(۱+\frac{۲x}{۲\sqrt{۱+x^۲}}\right)\left(\frac{۱}{x+\sqrt{۱+x^۲}}\right)$$

$$= \left(۱+\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}\right)\left(\frac{۱}{x+\sqrt{۱+x^۲}}\right) = \left(\frac{\sqrt{۱+x^۲}+x}{\sqrt{۱+x^۲}}\right)\left(\frac{۱}{x+\sqrt{۱+x^۲}}\right) = \frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}$$

۴۶ گزینه ۴

راه‌حل اول:

$$f'_-(۳) = \lim_{h\to ۰^-} \frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}$$

تابع f در $x = ۳$ پیوستگی چپ ندارد و درنتیجه $\lim\limits_{h\to ۰^-} \frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}$ وجود ندارد.

راه‌حل دوم:

بدون توجه به تعریف مشتق، حد خواسته‌شده را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{h\to ۰^-} \frac{f(۳+h)-f(۳)}{h} = \lim_{h\to ۰^-} \frac{\frac{(۳+h)^۲}{|۱-(۳+h)|}[۳+h] - \frac{۲۷}{۲}}{h}$$

$$= \lim_{h\to ۰^-} \frac{\frac{(۳+h)^۲}{|-۲-h|}\times ۲ - \frac{۲۷}{۲}}{h} = \frac{\frac{۹}{۲}\times ۲ - \frac{۲۷}{۲}}{۰^-} = \frac{-\frac{۹}{۲}}{۰^-} = +\infty$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۴۷ گزینه ۴

گام اول

الف) طبق تعریف مشتق داریم:

$$f'_{-}(x_{\circ}) = \lim_{h\to \circ^{-}} \frac{f(x_{\circ}+h)-f(x_{\circ})}{h} \quad , \quad f'_{+}(x_{\circ}) = \lim_{h\to \circ^{+}} \frac{f(x_{\circ}+h)-f(x_{\circ})}{h}$$

ب) تابع f در نقطهٔ $x_{\circ}$ مشتق‌پذیر است هرگاه مشتق راست و چپ تابع در این نقطه موجود و باهم برابر باشد.

گام دوم

وقتی $h \to \circ^{-}$، حاصل حد داده‌شده $\frac{\circ}{\circ}$ و مبهم می‌شود. با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال داریم:

$$\lim_{h\to \circ^{-}} \frac{f(x_{\circ})-f(x_{\circ}-h)}{h} \overset{H}{=} \lim_{h\to \circ^{-}} \frac{\circ-(-۱)f'(x_{\circ}-h)}{۱} = \lim_{h\to \circ^{-}} f'(x_{\circ}-h) = f'_{-}(x_{\circ})$$

چون تابع در $x_{\circ}$ مشتق‌پذیر است، پس داریم:

$$f'_{-}(x_{\circ}) = f'_{+}(x_{\circ}) = -۲$$

بنابراین حاصل حد داده‌شده برابر ۲- می‌شود.

۴۸ گزینه ۱

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ روی بازه‌ای از $x_{۱}$ تا $x_{۲}$ چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_{۲})-f(x_{۱})}{x_{۲}-x_{۱}}$$

ب) آهنگ آنی یا لحظه‌ای در نقطهٔ $x=a$ برابر $f'(a)$ است.

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، آهنگ متوسط و آهنگ آنی خواسته‌شده را به دست می‌آوریم سپس اختلاف آن‌ها را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(۲/۵۶)-f(۲/۲۵)}{۲/۵۶-۲/۲۵} = \frac{\sqrt{۲/۵۶}-\sqrt{۲/۲۵}}{\circ/۳۱} = \frac{۱/۶-۱/۵}{\circ/۳۱} = \frac{\circ/۱}{\circ/۳۱} = \frac{۱\circ}{۳۱}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

$$x = ۲/۲۵ \text{ آهنگ آنی در نقطهٔ } = f'(۲/۲۵) = \frac{۱}{۲\sqrt{۲/۲۵}} = \frac{۱}{۲\times ۱/۵} = \frac{۱}{۳}$$

اختلاف آهنگ آنی و آهنگ لحظه‌ای برابر است با:

$$f'(۲/۲۵) - \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{۱}{۳} - \frac{۱\circ}{۳۱} = \frac{۳۱-۳\circ}{۹۳} = \frac{۱}{۹۳}$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۴۹

گزینه ۱

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ روی بازه‌ای از x تا $x+\Delta x$ چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ برابر $f'(a)$ است.

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، دو مقدار آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای را به دست آورده، سپس اختلاف آن‌ها از یکدیگر را محاسبه می‌کنیم.

$$\text{آهنگ متوسط تغییر در بازهٔ } [۰,۳] = \frac{f(۳)-f(۰)}{۳-۰} = \frac{\sqrt{۹+۱۶}-\sqrt{۱۶}}{۳} = \frac{\sqrt{۲۵}-\sqrt{۱۶}}{۳} = \frac{۵-۴}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

$$f(x) = \sqrt{x^۲+۱۶} \Rightarrow f'(x) = \frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲+۱۶}} = \frac{x}{\sqrt{x^۲+۱۶}}$$

$$x=\sqrt{۲} \text{ آهنگ لحظه‌ای تغییر در } = f'\left(\sqrt{۲}\right) = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{\left(\sqrt{۲}\right)^۲+۱۶}} = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲+۱۶}} = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۱۸}} = \frac{\sqrt{۲}}{۳\sqrt{۲}} = \frac{۱}{۳}$$

مقدار آهنگ لحظه‌ای و آهنگ متوسط برابر شد، پس اختلاف آن‌ها برابر صفر است.

۵۰

گزینه ۲

گام اول

$f'_+(\sqrt{۲})$ مشتق راست تابع f در نقطه‌ای به طول $x=\sqrt{۲}$ و $f'_-(\sqrt{۲})$ مشتق چپ تابع f در نقطه‌ای به طول $x=\sqrt{۲}$ است.

گام دوم

ابتدا پیوستگی تابع را در نقطهٔ $\sqrt{۲}$ بررسی می‌کنیم:

$$f(\sqrt{۲}) = (\sqrt{۲})^۳ - [۲(\sqrt{۲})^۲](\sqrt{۲}) = ۲\sqrt{۲} - ۴\sqrt{۲} = -۲\sqrt{۲}$$

$$\lim_{x\to\sqrt{۲}^+} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{۲}^+} x^۳ - [۲x^۲]x = (\sqrt{۲})^۳ - \underbrace{[۲(\sqrt{۲}^+)^۲]}_{۴^+}\sqrt{۲} = ۲\sqrt{۲} - ۴\sqrt{۲} = -۲\sqrt{۲}$$

$$\lim_{x\to\sqrt{۲}^-} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{۲}^-} x^۳ - [۲x^۲]x = (\sqrt{۲})^۳ - \underbrace{[۲(\sqrt{۲}^-)^۲]}_{۴^-}\sqrt{۲} = ۲\sqrt{۲} - ۳\sqrt{۲} = -\sqrt{۲}$$

بنابراین تابع از سمت چپ ناپیوسته است، درنتیجه مشتق چپ وجود ندارد. مشتق راست تابع را بدست می‌آوریم:

$$x \to \sqrt{۲}^+ \Rightarrow x > \sqrt{۲} \Rightarrow x^۲ > ۲ \Rightarrow ۲x^۲ > ۴ \Rightarrow [۲x^۲] = ۴$$

$$\Rightarrow f(x) = x^۳ - ۴x \Rightarrow f'_+(x) = ۳x^۲ - ۴$$

$$\Rightarrow f'_+(\sqrt{۲}) = ۳(\sqrt{۲})^۲ - ۴ = ۳(۲) - ۴ = ۶ - ۴ = ۲$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۵۱

گزینه ۳

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر مقدار مشتق تابع در آن نقطه است.

ب) مختصات نقطهٔ تماس، هم در معادلهٔ خط مماس و هم در معادلهٔ تابع صدق می‌کند.

گام دوم

شیب خط $y = ۳x - ۲$ برابر ۳ است؛ بنابراین طبق قسمت الف از گام اول نتیجه می‌گیریم $f'(۲) = ۳$ است. با جایگذاری $x = ۲$ در معادلهٔ خط، عرض نقطهٔ تماس نیز برابر است با:

$$f(۲) = ۳(۲) - ۲ = ۶ - ۲ = ۴$$

اکنون با ساده کردن حد داده‌شده حاصل آن را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to ۲} \frac{f^۲(x) - ۴f(x)}{x - ۲} = \lim_{x\to ۲} \frac{f(x)(f(x) - ۴)}{x - ۲}$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to ۲} f(x)}_{f(۲)} \times \underbrace{\lim_{x\to ۲} \frac{f(x) - ۴}{x - ۲}}_{f'(۲)} = f(۲) \times f'(۲) = ۴ \times ۳ = ۱۲$$

۵۲

گزینه ۱

$$\text{آهنگ متوسط تابع} = \frac{f(۶/۲۵) - f(۴)}{۶/۲۵ - ۴} = \frac{\sqrt{۶/۲۵} - \sqrt{۴}}{۲/۲۵} = \frac{۲/۵ - ۲}{۲/۲۵} = \frac{۰/۵}{۲/۲۵} = \frac{۱}{۴/۵}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \Rightarrow f'(۴) = \frac{۱}{۲ \times ۲} = \frac{۱}{۴}$$

$$\text{آهنگ متوسط} - \text{آهنگ لحظه‌ای} = \frac{۱۰}{۴۵} - \frac{۱}{۴} = \frac{۴۰ - ۴۵}{۱۸۰} = \frac{-۵}{۱۸۰} = \frac{-۱}{۳۶}$$

بنابراین آهنگ متوسط به مقدار $\frac{۱}{۳۶}$ از آهنگ لحظه‌ای کمتر است.

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۵۳ گزینه ۱

گام اول

الف) با استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{g(x)-g(۲)}{x-۲}=g'(۲)$$

ب) می‌دانیم:

$$(gof)'(۱)=f'(۱)\,g'(f(۱))$$

گام دوم

با استفاده از ضابطهٔ تابع $f(x)$، مقادیر $f(۱)$ و $f'(۱)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{۵-x^۲}\Rightarrow f(۱)=\sqrt{۵-۱}=۲$$

$$f'(x)=\frac{-۲x}{۲\sqrt{۵-x^۲}}=\frac{-x}{\sqrt{۵-x^۲}}\quad\Rightarrow\quad f'(۱)=\frac{-۱}{\sqrt{۵-۱}}=\frac{-۱}{\sqrt{۴}}=-\frac{۱}{۲}$$

پس مقدار $(gof)'(۱)$ برابر است با:

$$(gof)'(۱)=f'(۱)\,g'(f(۱))\xrightarrow{f(۱)=۲}(gof)'(۱)=f'(۱)\times g'(۲)=-\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۲}=-\frac{۳}{۴}$$

۵۴ گزینه ۴

در توابع چندجمله‌ای نقاط بحرانی از حل معادلهٔ $y'=۰$ به دست می‌آید، لذا:

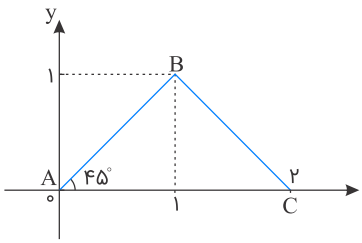
$$f(x)=x^۲(x-۲)^۲$$

$$\Rightarrow f'(x)=۲x(x-۲)^۲+۲(x-۲)(x^۲)$$

$$\Rightarrow f'(x)=۲x(x-۲)(x-۲+x)=۰$$

$$\Rightarrow x=۰,۱,۲$$

$$A\left|\begin{matrix}۰\\۰\end{matrix}\right.\quad,\quad B\left|\begin{matrix}۱\\۱\end{matrix}\right.\quad,\quad C\left|\begin{matrix}۲\\۰\end{matrix}\right.$$



$$\Rightarrow AB=BC$$

باتوجه‌به شکل و اینکه $AB=BC$، مثلث متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه است.

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۵۵ گزینه ۳

تابع در $x = ۱$ پیوستگی راست دارد. مشتق تابع را در همسایگی راست بررسی می‌کنیم.

$$x > ۱ : f(x) = \sqrt{x^۲ - ۱ + x} = \sqrt{x^۲ + x - ۱} \Rightarrow f'(x) = \frac{۲x + ۱}{۲\sqrt{x^۲ + x - ۱}} \Rightarrow f'_+(۱) = \frac{۳}{۲}$$

۵۶ گزینه ۳

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = a$ مشتق‌پذیر است، هرگاه:

۱) در نقطهٔ $x = a$ پیوسته باشد.

۲) مشتق چپ و راست در نقطهٔ $x = a$ موجود و متناهی و باهم برابر باشند.

ابتدا شرط پیوستگی را بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to(-۲)^-} f(x) = \lim_{x\to(-۲)^+} f(x) = f(-۲)$$

$$\lim_{x\to(-۲)^-} \sqrt{۵ - ۲x} = \sqrt{۵ - ۲(-۲)} = ۳$$

$$\lim_{x\to(-۲)^+} (-\frac{۱}{۲}x^۲ + bx + c) = -\frac{۱}{۲}(-۲)^۲ + b(-۲) + c = -۲ - ۲b + c$$

$$f(-۲) = \sqrt{۵ - ۲(-۲)} = ۳$$

$$\Rightarrow -۲ - ۲b + c = ۳ \Rightarrow -۲b + c = ۵ \quad (*)$$

اکنون شرط مشتق‌پذیری را بررسی می‌کنیم:

$$f'_-(-۲) = f'_+(-۲)$$

$$\begin{cases} f'_-(x) = \dfrac{-۲}{۲\sqrt{۵ - ۲x}} \Rightarrow f'_-(-۲) = \dfrac{-۲}{۲ \times ۳} = -\dfrac{۱}{۳} \\ f'_+(x) = -x + b \Rightarrow f'_+(-۲) = ۲ + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۳} = ۲ + b \Rightarrow b = -\frac{۷}{۳} \xrightarrow{(*)} -۲(-\frac{۷}{۳}) + c = ۵$$

$$\Rightarrow c = ۵ - \frac{۱۴}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۵۷ گزینه ۴

ابتدا با تعیین علامت عبارت قدر مطلقی $|x^۲ - ۱|$ روی بازهٔ $[-۲, ۲]$، ضابطهٔ تابع را ساده‌تر می‌کنیم. برای تعیین نقاط بحرانی تابع $f(x)$، کافی است نقاطی که $f'(x)$ برابر صفر باشد و یا در آن نقاط تعریف‌نشده باشد را بیابیم.

$$\begin{cases} x^۲ - ۱ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ \geq ۱ \Rightarrow |x| \geq ۱ \Rightarrow \begin{cases} x \geq ۱ \\ x \leq -۱ \end{cases} \\ x^۲ - ۱ < ۰ \Rightarrow x^۲ < ۱ \Rightarrow |x| < ۱ \Rightarrow -۱ < x < ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x(x^۲ - ۱) & ; x \geq ۱, x \leq -۱ \\ -x(x^۲ - ۱) & ; -۱ < x < ۱ \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^۳ - x & ; x \geq ۱, x \leq -۱ \\ -x^۳ + x & ; -۱ < x < ۱ \end{cases}$$

تابع $f(x)$ در دو نقطهٔ $x = ۱$ و $x = -۱$ پیوسته است، پس ضابطهٔ $f'(x)$ برابر است با:

$$f'(x) = \begin{cases} ۳x^۲ - ۱ & ; x > ۱, x < -۱ \\ -۳x^۲ + ۱ & ; -۱ < x < ۱ \end{cases}$$

اکنون ریشه‌های معادلهٔ $f'(x) = ۰$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x > ۱, x < -۱ : ۳x^۲ - ۱ = ۰ \Rightarrow x^۲ = \frac{۱}{۳} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{۳}}{۳} \text{ غ.ق.ق} \\ -۱ < x < ۱ : -۳x^۲ + ۱ = ۰ \Rightarrow x^۲ = \frac{۱}{۳} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{۳}}{۳} \end{cases}$$

(دقت کنید که در ضابطهٔ اول، چون ریشه‌های به‌دست‌آمده در محدودهٔ تعریف‌شده برای x قرار نمی‌گیرند پس قابل‌قبول نیستند.)

بررسی می‌کنیم $f'(x)$ در چه نقاطی تعریف‌نشده است:

$$x = ۱ : f'_+(۱) = ۳ - ۱ = ۲ \ , \ f'_-(۱) = -۳ + ۱ = -۲ \Rightarrow \text{مشتق‌ناپذیر}$$

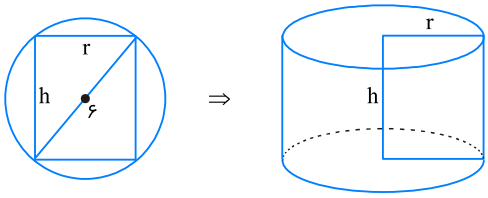
$$x = -۱ : f'_+(-۱) = -۳ + ۱ = -۲ \ , \ f'_-(-۱) = ۳ - ۱ = ۲ \Rightarrow \text{مشتق‌ناپذیر}$$

همچنین تابع در نقاط ابتدا و انتهای بازهٔ $[-۲, ۲]$ بحرانی است.

بنابراین تابع $f(x)$ دارای ۶ نقطهٔ بحرانی $x = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$، $x = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$، $x = ۱$، $x = -۱$، $x = ۲$ و $x = -۲$ است.

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۵۸ گزینه ۲



می‌دانیم قطر مستطیل محاط درون دایره، برابر با قطر دایره است پس طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$h^{۲}+r^{۲}=۶^{۲}\Rightarrow h^{۲}+r^{۲}=۳۶\Rightarrow r=\sqrt{۳۶-h^{۲}}$$

حجم استوانهٔ حاصل از دوران مستطیل برابر است با:

$$V=\pi r^{۲}h=\pi(۳۶-h^{۲})h=۳۶\pi h-\pi h^{۳}$$

می‌خواهیم حجم استوانه بیشترین مقدار باشد پس ابتدا معادلهٔ $V'_h=۰$ را حل می‌کنیم:

$$V'_h=۳۶\pi-۳\pi h^{۲}$$
$$V'_h=۰\Rightarrow ۳۶\pi-۳\pi h^{۲}=۰$$
$$\Rightarrow ۳\pi h^{۲}=۳۶\pi\Rightarrow h^{۲}=۱۲\Rightarrow h=\sqrt{۱۲}=۲\sqrt{۳}$$

۵۹ گزینه ۳

گام اول

الف) نکته: در توابع دارای عبارت قدر مطلقی، ریشهٔ سادهٔ عبارت درون قدر مطلق نقطهٔ گوشه‌ای (زاویه‌دار) یا مشتق‌ناپذیر تابع است؛ بنابراین در تابع $f(x)=|x|(x+a)$ نقطهٔ گوشه‌ای (زاویه‌دار) تابع، نقطهٔ $x=۰$ است.

ب) شیب مماس راست در نقطهٔ $x=۰$ برابر $f'_+(۰)$ و شیب مماس چپ در نقطهٔ $x=۰$ برابر $f'_-(۰)$ است.

ج) مماس چپ و راست در نقطهٔ $x=۰$ بر هم عمودند پس داریم: $f'_-(۰)\cdot f'_+(۰)=-۱$

گام دوم

$$x>۰:|x|=x\Rightarrow f(x)=x(x+a)=x^{۲}+ax$$

$$\Rightarrow f'(x)=۲x+a\Rightarrow f'_+(۰)=۲(۰)+a=۰+a=a$$

$$x<۰:|x|=-x\Rightarrow f(x)=(-x)(x+a)=-x^{۲}-ax$$

$$\Rightarrow f'(x)=-۲x-a\Rightarrow f'_-(۰)=-۲(۰)-a=۰-a=-a$$

$$f'_+(۰)f'_-(۰)=-۱\ \Rightarrow\ a(-a)=-۱\ \Rightarrow\ -a^{۲}=-۱\ \Rightarrow\ a^{۲}=۱\ \Rightarrow\ a=\pm۱$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۶۰

گزینه ۱

گام اول

الف) فاصلهٔ نقطهٔ $M\ (x, y)$ از مبدأ مختصات از رابطهٔ $T = \sqrt{x^{۲} + y^{۲}}$ به دست می‌آید.

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در یک نقطه، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

گام دوم

در رابطهٔ T از قسمت الف از گام اول، عبارت $y = \sqrt{x + ۸}$ را جایگزین می‌کنیم تا T برحسب متغیر x به دست آید.

$$T = \sqrt{x^{۲} + y^{۲}} \xrightarrow{y=\sqrt{x+۸}} T = \sqrt{x^{۲} + \left(\sqrt{x + ۸}\right)^{۲}} = \sqrt{x^{۲} + x + ۸}$$

از T نسبت به x مشتق گرفته و مقدار آن را در $x = ۷$ حساب می‌کنیم:

$$T' = \frac{۲x + ۱}{۲\sqrt{x^{۲} + x + ۸}}$$

$$\Rightarrow T'(۷) = \frac{۲(۷) + ۱}{۲\sqrt{۷^{۲} + ۷ + ۸}} = \frac{۱۴ + ۱}{۲\sqrt{۴۹ + ۷ + ۸}} = \frac{۱۵}{۲\sqrt{۶۴}} = \frac{۱۵}{۲ \times ۸} = \frac{۱۵}{۱۶}$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۶۱

گزینه ۱

گام اول

الف) عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج همواره نامنفی است.

ب) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = ۰$ پیوسته است هرگاه شرط زیر برقرار باشد:

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x) = \lim_{x\to ۰^+} f(x) = f(۰) \quad ; \quad ۰ \in D_f$$

ج) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = ۰$ مشتق‌پذیر است درصورتی‌که اولاً در این نقطه پیوسته باشد و ثانیاً مشتق راست و چپ تابع موجود و باهم برابر باشند یعنی $f'_-(۰) = f'_+(۰)$.

گام دوم

چون $x^۲ \geq ۰$ همواره برقرار است پس $D_f = \mathbb{R}$.

اکنون ضابطهٔ تابع را به ازای $x \geq ۰$ و $x < ۰$ تعیین می‌کنیم:

$$y = x\sqrt{x^۲} = x|x| = \begin{cases} x \geq ۰ \Rightarrow |x| = x \Rightarrow y = x^۲ \\ x < ۰ \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow y = -x^۲ \end{cases}$$

باتوجه‌به قسمت ب از گام اول، شرط پیوستگی تابع را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۰^+} y = \lim\limits_{x\to ۰^+} x^۲ = ۰ \\ \lim\limits_{x\to ۰^-} y = \lim\limits_{x\to ۰^-} -x^۲ = ۰ \\ y(۰) = ۰ \end{cases}$$

بنابراین تابع در $x = ۰$ پیوسته است.

باتوجه‌به قسمت ج از گام اول، شرط مشتق‌پذیری تابع را بررسی می‌کنیم:

$$y' = \begin{cases} ۲x & ; \ x > ۰ \\ -۲x & ; \ x < ۰ \end{cases} \Rightarrow y'_-(۰) = y'_+(۰) = ۰$$

پس تابع در نقطهٔ $x = ۰$ مشتق‌پذیر است.

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۶۲ گزینه ۲

گام اول

می‌دانیم $fog\,(x) = f(g(x))$ و $(fog)'\,(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ است.

گام دوم

با داشتن ضابطه‌های $f\,(x)$ و $g\,(x)$، ابتدا ضابطهٔ $fog\,(x)$ را تعیین کرده، سپس از آن مشتق می‌گیریم.

$$f\,(x) = \frac{x^{۳} - ۲}{۱ + x^{۳}} \quad , \quad g\,(x) = \sqrt[۳]{x - ۱}$$

$$fog\,(x) = f\,(g\,(x)) = \frac{(g\,(x))^{۳} - ۲}{۱ + (g\,(x))^{۳}} = \frac{\left(\sqrt[۳]{x - ۱}\right)^{۳} - ۲}{۱ + \left(\sqrt[۳]{x - ۱}\right)^{۳}} = \frac{x - ۱ - ۲}{۱ + x - ۱} = \frac{x - ۳}{x}$$

$$\Rightarrow \quad y = fog\,(x) = \frac{x - ۳}{x}$$

ضابطهٔ y' را به دست می‌آوریم:

$$f'\,(g\,(x)) \cdot g'\,(x) = y' = \frac{x - (x - ۳)}{x^{۲}} = \frac{x - x + ۳}{x^{۲}} = \frac{۳}{x^{۲}}$$

۶۳ گزینه ۱

$$y = (x - ۱)^{۲}\sqrt[۳]{x^{۲}} \Rightarrow y' = ۲(x - ۱)(x^{\frac{۲}{۳}}) + (x - ۱)^{۲}\left(\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}\right) \Rightarrow y' = \frac{۶(x - ۱)x + ۲(x - ۱)^{۲}}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

$$\text{صورت} = ۰ \Rightarrow ۲(x - ۱)(۳x + (x - ۱)) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ ۴x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱}{۴} \end{cases}$$

$$\text{مخرج} = ۰ \Rightarrow ۳\sqrt[۳]{x} = ۰ \Rightarrow x = ۰$$

باتوجه‌به گزینه‌ها $x = \frac{۱}{۴}$ جواب مسئله است.

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۶۴

گزینه ۱

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = ۱$ مشتق‌پذیر است درصورتی‌که:

اولاً در این نقطه پیوسته باشد یعنی:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} f(x) = f(۱)$$

ثانیاً مشتق راست و چپ تابع موجود و باهم برابر باشند یعنی:

$$f'_-(۱) = f'_+(۱)$$

گام دوم

ابتدا شرط پیوستگی را بررسی می‌کنیم:

$$x \to ۱^+ \Rightarrow x > ۱ \Rightarrow x - ۱ > ۰ \Rightarrow |x - ۱| = x - ۱$$

$$\Rightarrow f(x) = (x - ۱)(x - ۱) = (x - ۱)^۲ \Rightarrow \lim_{x\to ۱^+} f(x) = ۰$$

$$x \to ۱^- \quad \Rightarrow \quad x < ۱ \quad \Rightarrow \quad x - ۱ < ۰ \quad \Rightarrow \quad |x - ۱| = -(x - ۱)$$

$$\Rightarrow f(x) = (x - ۱)(-(x - ۱)) = -(x - ۱)^۲ \Rightarrow \lim_{x\to ۱^-} f(x) = ۰$$

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} f(x) = f(۱) \quad \Rightarrow \quad a = ۰$$

همچنین داریم:

$$f'_-(x) = ۲(x - ۱) \quad \Rightarrow \quad f'_-(۱) = ۰$$
$$f'_+(x) = -۲(x - ۱) \quad \Rightarrow \quad f'_+(۱) = ۰$$

بنابراین تابع به ازای $a = ۰$ در نقطهٔ $x = ۱$ مشتق‌پذیر است.

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۶۵ گزینه ۳

گام اول

$f'_+(۱)$ یعنی مشتق راست تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = ۱$ و $f'_-(۱)$ یعنی مشتق چپ تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = ۱$.

گام دوم

برای تعیین مشتق راست و چپ تابع در نقطهٔ $x = ۱$، ابتدا باید تکلیف قدر مطلق را روشن کنیم. ضابطهٔ تابع و مشتق آن را به ازای $x > ۱$ و $x < ۱$ تعیین می‌کنیم.

$$\begin{cases} x > ۱ \Rightarrow x - ۱ > ۰ \Rightarrow |x - ۱| = x - ۱ \\ x < ۱ \Rightarrow x - ۱ < ۰ \Rightarrow |x - ۱| = -x + ۱ \end{cases}$$

می‌دانیم $x\sqrt{x} = x^{\frac{۳}{۲}}$ پس:

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^{\frac{۳}{۲}} + x - ۱ & ; x > ۱ \\ x^{\frac{۳}{۲}} - x + ۱ & ; x < ۱ \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{۳}{۲}\sqrt{x} + ۱ & ; x > ۱ \\ \frac{۳}{۲}\sqrt{x} - ۱ & ; x < ۱ \end{cases}$$

با جایگذاری $x = ۱$ در ضابطه‌های بالا و پایین تابع $f'(x)$، مقدار $f'_+(۱)$ و $f'_-(۱)$ را به دست می‌آوریم:

$$f'_+(۱) = \frac{۳}{۲}\sqrt{۱} + ۱ = \frac{۳}{۲} + ۱ = \frac{۵}{۲}$$

$$f'_-(۱) = \frac{۳}{۲}\sqrt{۱} - ۱ = \frac{۳}{۲} - ۱ = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین:

$$f'_+(۱) + ۳f'_-(۱) = \frac{۵}{۲} + \frac{۳}{۲} = \frac{۸}{۲} = ۴$$

۶۶ گزینه ۲

$$f(۰) = \frac{۱}{۱۲}$$

$$\lim_{x\to ۰} f(x) = \lim_{x\to ۰} \frac{\sqrt[۳]{x+a} - b}{x} = \frac{۱}{۱۲} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[۳]{۰ + a} - b = ۰ \quad (۱) \\ \text{HOP} : \lim_{x\to ۰} \dfrac{\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x+a)^۲}}}{۱} = \frac{۱}{۱۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{a^۲}} = \frac{۱}{۱۲} \Rightarrow \sqrt[۳]{a} = \pm ۲ \xrightarrow{(۱)} b = \pm ۲$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۶۷ گزینه ۲

$$f(x)=\frac{۱}{۲}x^{۲}-\frac{۱}{x}\Rightarrow f'(x)=x+\frac{۱}{x^{۲}}\Rightarrow f'(۲)=۲+\frac{۱}{۴}=\frac{۹}{۴}$$

آهنگ تغییر متوسط : $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(۴)-f(۱)}{۴-۱}=\frac{(۸-\frac{۱}{۴})-(\frac{۱}{۲}-۱)}{۳}=\frac{\frac{۳۱}{۴}+\frac{۱}{۲}}{۳}=\frac{۱۱}{۴}$

اختلاف : $\frac{۱۱}{۴}-\frac{۹}{۴}=\frac{۲}{۴}=۰/۵$

۶۸ گزینه ۱

گام اول:

نقاط بحرانی تابع $f(x)$، نقاطی از دامنهٔ تعریف این تابع است که $f'(x)=۰$ یا $f'(x)$ تعریف‌نشده باشد.

گام دوم:

ابتدا با تعیین علامت عبارت قدر مطلقی $|x-۲|$، ضابطهٔ تابع $f(x)$ را ساده می‌کنیم. $x=۲$ ریشهٔ عبارت درون قدر مطلق است پس داریم:

$$f(x)=\begin{cases}(x-۲)\sqrt[۳]{x^{۲}} & ; x\geq ۲\\ -(x-۲)\sqrt[۳]{x^{۲}} & ; x<۲\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}(x-۲)x^{\frac{۲}{۳}} & ; x\geq ۲\\ -(x-۲)x^{\frac{۲}{۳}} & ; x<۲\end{cases}$$

تابع $f(x)$ در $x=۲$ پیوسته است پس ضابطهٔ تابع $f'(x)$ برابر است با:

$$f'(x)=\begin{cases}\sqrt[۳]{x^{۲}}+\frac{۲(x-۲)}{۳\sqrt[۳]{x}} & ; x>۲\\ -\sqrt[۳]{x^{۲}}-\frac{۲(x-۲)}{۳\sqrt[۳]{x}} & ; x<۲\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\frac{۵x-۴}{۳\sqrt[۳]{x}} & ; x>۲\\ \frac{-۵x+۴}{۳\sqrt[۳]{x}} & ; x<۲\end{cases}$$

ریشهٔ معادلهٔ $f'(x)=۰$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=۰\Rightarrow\begin{cases}x>۲ \quad : \quad ۵x-۴=۰\Rightarrow x=\frac{۴}{۵} \text{ غ.ق.ق}\\ x<۲ \quad : \quad -۵x+۴=۰\Rightarrow x=\frac{۴}{۵}\end{cases}$$

بررسی می‌کنیم $f'(x)$ در چه نقاطی موجود نیست. $x=۰$ ریشهٔ مخرج $f'(x)$ است پس در این نقطه تعریف‌نشده است؛ ازطرفی به ازای $x=۲$ داریم:

$$\begin{aligned}f'_{+}(۲)&=\frac{۱۰-۴}{۳\sqrt[۳]{۲}}=\frac{۲}{\sqrt[۳]{۲}}=\sqrt[۳]{۴}\\ f'_{-}(۲)&=\frac{-۱۰+۴}{۳\sqrt[۳]{۲}}=\frac{-۲}{\sqrt[۳]{۲}}=-\sqrt[۳]{۴}\end{aligned}\Rightarrow f'(۲) \text{ موجود نیست}$$

بنابراین مجموعه نقاط بحرانی تابع $f(x)$ به‌صورت $\{۰,\frac{۴}{۵},۲\}$ است.

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۶۹ گزینه ۲

زمانی تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است که در $x = ۲$ مشتق داشته باشد.
بنابراین باید f در $x = ۲$ پیوسته باشد و مشتق چپ و راست آن برابر باشد.

$$f(۲) = \lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} f(x) \Rightarrow -۴ + ۲a + b = ۱ \Rightarrow ۲a + b = ۵ \quad (۱)$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{۱}{(x-۱)^۲} & ; x \geq ۲ \\ -۲x + a & ; x < ۲ \end{cases}$$

$$f'_-(۲) = f'_+(۲) \Rightarrow -۴ + a = -۱ \Rightarrow a = ۳$$

$$(۱) : ۶ + b = ۵ \Rightarrow b = -۱$$

۷۰ گزینه ۲

ابتدا از ضوابط داده‌شده مشتق چپ و راست را به دست می‌آوریم:

$$x \to ۱^+ \Rightarrow f'(x) = \frac{-۳}{x^۲} \Rightarrow f'_+(۱) = -۳$$
$$x \to ۱^- \Rightarrow f'(x) = ۲x + a \Rightarrow f'_-(۱) = ۲ + a$$
$$f'_+(۱) = f'_-(۱) \Rightarrow -۳ = ۲ + a \Rightarrow a = -۵$$

چون تابع در $x = ۱$ مشتق‌پذیر می‌باشد، بنابراین پیوسته نیز هست.

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = f(۱) \Rightarrow ۳ - ۵ = (۱)^۲ - ۵(۱) + b \Rightarrow b = ۲$$

۷۱ گزینه ۳

گام اول

نقطهٔ $c \in D_f$ را نقطهٔ بحرانی تابع f گوئیم هرگاه $f'(c) = ۰$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، نقاطی از دامنهٔ تابع f که در معادلهٔ $f'(x) = ۰$ صدق می‌کند یا به‌ازای آن‌ها $f'(x)$ تعریف‌نشده است را می‌یابیم.

$$f(x) = (x^۲ - ۲۸)\sqrt[۳]{x} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = ۲x\sqrt[۳]{x} + \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}(x^۲ - ۲۸) = \frac{۶x^۲ + x^۲ - ۲۸}{۳\sqrt[۳]{x^۲}} = \frac{۷x^۲ - ۲۸}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow ۷x^۲ - ۲۸ = ۰ \Rightarrow ۷x^۲ = ۲۸ \Rightarrow x^۲ = ۴ \Rightarrow x = \pm ۲$$

به‌ازای $x = ۰$، مخرج تابع $f'(x)$ برابر صفر و درنتیجه این تابع تعریف‌نشده است؛ بنابراین مجموعه نقاط بحرانی تابع $f(x)$ به‌صورت $\{-۲, ۰, ۲\}$ است.

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۷۲

گزینه ۴

a مقداری ثابت است پس به ازای تمام مقادیر x، a فقط یک مقدار می‌پذیرد. برای سادگی حل a را مقداری انتخاب می‌کنیم که به ازای آن، گزینه‌ها یکسان نشوند. با انتخاب $a = ۲$، چهار گزینه مقدار متفاوتی خواهند داشت و همچنین داریم:

$$y = \frac{۶ + x}{\sqrt[۴]{۸x}}$$

برای یافتن مینیمم مقدار y ابتدا معادلهٔ $y' = ۰$ را حل می‌کنیم:

$$y = \frac{۶ + x}{\sqrt[۴]{۸x}} = (۶ + x)(۸x)^{-\frac{۱}{۴}}$$

$$y' = (۸x)^{-\frac{۱}{۴}} - ۲(۶ + x)(۸x)^{-\frac{۵}{۴}} = (۸x)^{-\frac{۵}{۴}}(۸x - ۱۲ - ۲x) = \frac{۶x - ۱۲}{\sqrt[۴]{(۸x)^{۵}}}$$

$$y' = ۰ \xrightarrow{x \neq ۰} ۶x - ۱۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲$$

مینیمم مقدار تابع برابر با $y(۲)$ است و داریم:

$$y(۲) = \frac{۶ + ۲}{\sqrt[۴]{۸(۲)}} = \frac{۸}{\sqrt[۴]{۱۶}} = \frac{۸}{\sqrt[۴]{۲^{۴}}} = \frac{۸}{۲} = ۴$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

گزینه ۳

گام اول

الف) تابع $f(x)$ در یک نقطه مشتق‌پذیر است درصورتی‌که اولاً در آن نقطه پیوسته باشد، ثانیاً مشتق راست و چپ تابع در آن نقطه، موجود و باهم برابر باشند.

ب) تابع $f(x)$ در یک نقطه پیوسته است هرگاه حد چپ و راست تابع موجود و برابر مقدار تابع در آن نقطه باشد.

گام دوم

تابع $f(x)$ در نقاط درونی هریک از زیربازه‌ها، پیوسته و مشتق‌پذیر است بنابراین کافی است پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع در سه نقطهٔ مرزی $x=0$، $x=1$ و $x=2$ بررسی شود.

بررسی پیوستگی و مشتق‌پذیری در نقطهٔ $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 1=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x+1=0+1=1\\ f(0)=1\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$$

پس تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است.

$$f'(x)=\begin{cases}0 & ;x<0\\ 1 & ;x>0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad f'_-(0)\neq f'_+(0)$$

پس تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=0$ مشتق‌پذیر نیست.

بررسی پیوستگی و مشتق‌پذیری در $x=1$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x+1=2\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 2x+2=4\\ f(x)=2(1)+2=4\end{array}\right\}\Rightarrow\quad \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$$

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=1$ ناپیوسته و درنتیجه مشتق‌ناپذیر است.

بررسی پیوستگی و مشتق‌پذیری در $x=2$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} 2x+2=4+2=6\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} x^2+2=4+2=6\\ f(2)=2^2+2=4+2=6\end{array}\right\}\Rightarrow\quad \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$$

پس تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=2$ پیوسته است.

$$f'(x)=\begin{cases}2 & ;x<2\\ 2x & ;x>2\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}f'_-(2)=2\\ f'_+(2)=4\end{array}\right\}\Rightarrow\quad f'_-(2)\neq f'_+(2)$$

پس تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=2$ مشتق‌پذیر نیست.

بنابراین تابع $f(x)$ در یک نقطه ناپیوسته و در سه نقطه مشتق‌ناپذیر است.

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۷۴ گزینه ۱

گام اول

می‌دانیم: $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ بنابراین حاصل حد $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ برابر $f'(1)$ است.

گام دوم

کافی است مقدار مشتق تابع $f(x)$ را در نقطهٔ $x=1$ محاسبه کنیم:

$$f(x)=\sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}\quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}}\times\frac{4(x+3)-(4x+5)}{(x+3)^2}$$

$$\Rightarrow f'(1)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{4+5}{1+3}}}\times\frac{4(1+3)-(4+5)}{(1+3)^2}=\frac{1}{3}\times\frac{7}{16}=\frac{7}{48}$$

۷۵ گزینه ۲

ابتدا با مشتق‌گیری از تابع $g(x)$، وضعیت یکنوایی این تابع را تعیین می‌کنیم:

$$g(x)=x^3+x\Rightarrow g'(x)=3x^2+1>0$$

تابع $g(x)$ همواره صعودی است بنابراین بیشترین مقدار تابع gof به ازای بیشترین مقدار تابع f به دست می‌آید. با تعیین علامت تابع $f(x)$، تغییرات آن را بررسی می‌کنیم. داریم:

$$f(x)=x^3-3x\ ;x\le 1\Rightarrow f'(x)=3x^2-3$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 3x^2=3\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0		
$f(x)$		↗		↘			

بیشترین مقدار تابع $f(x)$ با شرط $x\le 1$، در نقطهٔ $x=-1$ به دست می‌آید که برابر است با:

$$f(-1)=(-1)^3-3(-1)=-1+3=2$$

بنابراین با شرط $x\le 1$ داریم: $f(x)\le 2$

به این ترتیب بیشترین مقدار تابع gof برابر است با:

$$(gof)_{max}=g(2)=2^3+2=8+2=10$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۷۶ گزینه ۲

ابتدا تابع fog را تشکیل می‌دهیم:

$$(fog)(x) = \frac{۴}{۵}(۴x + |x|) - \frac{۱}{۵}|۴x + ۱|x||$$

$$\text{اگر } x \geq ۰ \Rightarrow (fog)(x) = \frac{۴}{۵}(۵x) - \frac{۱}{۵}(۵x) = ۴x - x = ۳x$$

$$\text{اگر } x < ۰ \Rightarrow fog(x) = \frac{۴}{۵}(۴x - x) - \frac{۱}{۵}\underbrace{|۴x - x|}_{۳x}$$

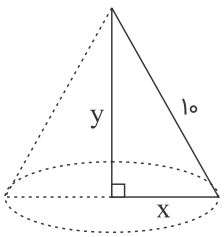
$$= \frac{۱۲}{۵}x - \frac{۱}{۵}(-۳x) = \frac{۱۵}{۵}x = ۳x$$

بنابراین $(fog)(x) = ۳x$، پس:

$$(fog)'(x) = ۳$$

۷۷ گزینه ۴

در مثلث قائم‌الزاویه به طول اضلاع قائم x و y داریم:



$$x^۲ + y^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow x^۲ = ۱۰۰ - y^۲ \quad (*)$$

از دوران مثلث حول ضلع قائمهٔ آن، مخروط تشکیل می‌شود، بنابراین داریم:

$$V = \frac{۱}{۳}\pi x^۲ y \xrightarrow{(*)} V = \frac{۱}{۳}\pi(۱۰۰ - y^۲)y = \frac{\pi}{۳}(۱۰۰y - y^۳)$$

حال برای به دست آوردن طول اضلاع قائم، از V مشتق می‌گیریم:

$$V' = \frac{\pi}{۳}(۱۰۰ - ۳y^۲) \Rightarrow \frac{\pi}{۳}(۱۰۰ - ۳y^۲) = ۰$$

$$\Rightarrow ۱۰۰ - ۳y^۲ = ۰ \Rightarrow y^۲ = \frac{۱۰۰}{۳}$$

$$\Rightarrow x^۲ = ۱۰۰ - y^۲ \Rightarrow x^۲ = ۱۰۰ - \frac{۱۰۰}{۳} = \frac{۳۰۰ - ۱۰۰}{۳} = \frac{۲۰۰}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{x^۲}{y^۲} = \frac{\frac{۲۰۰}{۳}}{\frac{۱۰۰}{۳}} = ۲ \Rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt{۲}$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۷۸

گزینه ۲

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = ۱$ مشتق‌پذیر است اگر اولاً در این نقطه پیوسته باشد $\left(\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = f(۱)\right)$، ثانیاً مشتق چپ و راست تابع در نقطهٔ $x = ۱$ موجود و باهم برابر باشند.

بررسی پیوستگی در نقطهٔ $x = ۱$:

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} f(x) = f(۱) \Rightarrow a - a = ۱ - ۱ \Rightarrow ۰ = ۰$$

به یک رابطهٔ همواره درست رسیدیم، پس تابع در $x = ۱$ پیوسته است.

بررسی مشتق‌پذیری در نقطهٔ $x = ۱$:

$$f(x) = \begin{cases} ax - a & ; x < ۱ \\ x^۲ - x & ; x \geq ۱ \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} a & ; x < ۱ \\ ۲x - ۱ & ; x > ۱ \end{cases}$$

$$f'_-(۱) = f'_+(۱) \Rightarrow a = ۲ - ۱ = ۱ \Rightarrow a = ۱$$

بنابراین تابع $f(x)$ تنها به ازای $a = ۱$ در نقطهٔ $x = ۱$ مشتق‌پذیر است.

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۷۹

گزینه ۱

تابع f در $x = ۲$ مشتق‌پذیر است، پس بایستی در $x = ۲$ پیوسته باشد و همچنین مشتق چپ و راست تابع در $x = ۲$ برابر باشند.

$$f(۲) = \lim_{x \to ۲^+} f(x) = \lim_{x \to ۲^-} f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} \times ۴ + ۲a + b = |۴ - ۴| \Rightarrow \frac{۱}{۲} \times ۴ + ۲a + b = ۰$$

$$\Rightarrow ۲a + b = -۲ \quad (۱)$$

تابع f را در همسایگی چپ $x = ۲$ (به دلیل وجود قدرمطلق) تعیین علامت می‌کنیم:

$$x^۲ - ۲x = ۰ \Rightarrow x = ۰, ۲$$

x		۰		۲	
$x^۲-۲x$	+	۰	−	۰	+

بنابراین باتوجه‌به جدول تعیین علامت اگر $۰ < x < ۲$ باشد، $|x^۲ - ۲x| = ۲x - x^۲$ است.

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۲x & ; x < ۰ \\ -x^۲ + ۲x & ; ۰ \le x < ۲ \\ \frac{۱}{۲}x^۲ + ax + b & ; x \ge ۲ \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} ۲x - ۲ & ; x < ۰ \\ -۲x + ۲ & ; ۰ < x < ۲ \\ x + a & ; x \ge ۲ \end{cases}$$

$$f'_+(۲) = f'_-(۲) \Rightarrow ۲ + a = -۲(۲) + ۲ \Rightarrow a = -۴$$

$$(۱) \xrightarrow{a=-۴} -۸ + b = -۲ \Rightarrow b = ۶$$

$$\Rightarrow a + b = ۲$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۸۰ گزینه ۳

شیب پاره‌خطی که ابتدا و انتهای بازه را به هم وصل می‌کند، پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{۴x-۵}{x+۱}\Rightarrow\begin{cases}f(۰)=-۵\\ f(۸)=\frac{۲۷}{۹}=۳\end{cases}\Rightarrow m=\frac{۳-(-۵)}{۸-۰}=۱$$

بنابراین شیب خط مماس هم باید ۱ باشد:

$$f'(x)=\frac{۴(x+۱)-(۴x-۵)}{(x+۱)^۲}\Rightarrow\frac{۹}{(x+۱)^۲}=۱\Rightarrow(x+۱)^۲=۹$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x+۱=۳\Rightarrow x=۲ & \text{ق.ق}\\ x+۱=-۳\Rightarrow x=-۴ & \text{غ.ق.ق}\end{cases}$$

خطی را می‌خواهیم که در $x=۲$ بر منحنی مماس است:

$$f(۲)=\frac{۳}{۳}=۱\Rightarrow(۲,۱)\,,m=۱$$
$$y-۱=۱(x-۲)\xrightarrow{x=۰}y=-۱$$

۸۱ گزینه ۴

گام اول

فرض کنیم $x=c$ یک نقطهٔ بحرانی تابع $f(x)$ باشد. اگر $f''(c)>۰$ باشد آنگاه $x=c$، مینیمم نسبی تابع $f(x)$ است و اگر $f''(c)<۰$ باشد آنگاه $x=c$، ماکزیمم نسبی تابع $f(x)$ است.

گام دوم

ابتدا با محاسبهٔ مشتق تابع $f(x)$، نقاط بحرانی تابع را تعیین می‌کنیم.

$$f(x)=x^۲+\frac{a}{x}\quad\Rightarrow\quad f'(x)=۲x-\frac{a}{x^۲}$$

برای یافتن نقاط بحرانی ریشه‌های معادلهٔ $f'(x)=۰$ را می‌یابیم:

$$f'(x)=۰\quad\Rightarrow\quad ۲x-\frac{a}{x^۲}=۰\Rightarrow ۲x=\frac{a}{x^۲}\Rightarrow x^۳=\frac{a}{۲}\Rightarrow x=\sqrt[۳]{\frac{a}{۲}}$$

پس $x=\sqrt[۳]{\frac{a}{۲}}$ یک نقطهٔ بحرانی تابع $f(x)$ است. اکنون مقدار مشتق دوم تابع را در این نقطه محاسبه می‌کنیم.

$$f''(x)=۲+\frac{۲a}{x^۳}\xrightarrow{x=\sqrt[۳]{\frac{a}{۲}}}f''(\sqrt[۳]{\frac{a}{۲}})=۲+\frac{۲a}{(\sqrt[۳]{\frac{a}{۲}})^۳}=۲+\frac{۲a}{\frac{a}{۲}}=۲+۴=۶$$

باتوجه‌به گام اول، چون $f''(\sqrt[۳]{\frac{a}{۲}})>۰$ است پس $x=\sqrt[۳]{\frac{a}{۲}}$ مینیمم نسبی تابع f است؛ بنابراین تابع f به ازای هیچ مقداری از a، ماکزیمم نسبی ندارد.

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۸۲

گزینه ۲

گام اول

الف) طبق تعریف مشتق یک تابع داریم:

$$f'(-۱) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(-۱ + \Delta x) - f(-۱)}{\Delta x}$$

ب) هرگاه u و v دو تابع برحسب x باشند و داشته باشیم $f(x) = u \times v$، آنگاه مشتق تابع f چنین تعریف می‌شود:

$$f'(x) = u' \times v + v' \times u$$

گام دوم

باتوجه‌به قسمت ب از گام اول ابتدا ضابطهٔ مشتق $f'(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = (x - ۲)\sqrt[۳]{x^۲} = (x - ۲)x^{\frac{۲}{۳}}$$
$$f'(x) = ۱ \times x^{\frac{۲}{۳}} + \frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}(x - ۲) = \sqrt[۳]{x^۲} + \frac{۲(x - ۲)}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

هدف ما محاسبه $f'(-۱)$ است، پس داریم:

$$f'(-۱) = \sqrt[۳]{(-۱)^۲} + \frac{۲(-۱ - ۲)}{۳\sqrt[۳]{-۱}} = ۱ + \frac{۲(-۳)}{۳(-۱)} = ۱ + ۲ = ۳$$

۸۳

گزینه ۴

ازآنجاکه این دو نمودار در یک نقطه بر یک خط مماس هستند، پس هم مقادیر و هم مشتق‌هایشان در این نقطه برابر است. داریم:

$$y_۱ = x\sqrt{x} \Rightarrow y'_۱ = \sqrt{x} + \frac{x}{۲\sqrt{x}}$$
$$y_۲ = x^۲ + ax + b \Rightarrow y'_۲ = ۲x + a$$
$$y'_۱(۴) = y'_۲(۴) \Rightarrow ۲ + \frac{۴}{۴} = ۸ + a \Rightarrow a = -۵$$

و نیز داریم:

$$y_۱(۴) = y_۲(۴) \Rightarrow ۸ = ۱۶ - ۵(۴) + b \Rightarrow ۸ = -۴ + b \Rightarrow b = ۱۲$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۸۴

گزینه ۴

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع از $x = ۱$ تا $x = ۱/۴۴$ را با استفاده از رابطهٔ $\frac{f(۱/۴۴) - f(۱)}{۰/۴۴}$ به دست می‌آوریم.

ب) برای به دست آوردن آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در $x = ۱$ باید ضابطهٔ مشتق تابع یا همان $f'(x)$ و سپس $f'(۱)$ را محاسبه کنیم.

اختلاف آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای به‌عنوان جواب تست در نظر گرفته می‌شود.

گام دوم

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(۱/۴۴) - f(۱)}{۰/۴۴} = \frac{\frac{۰/۴۴}{\sqrt{۱/۴۴}} - ۰}{۰/۴۴} = \frac{۱}{\sqrt{۱/۴۴}} = \frac{۱}{۱/۲} = \frac{۱}{\frac{۶}{۵}} = \frac{۵}{۶}$$

$$f(x) = \frac{x - ۱}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - \frac{۱}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} - \frac{-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{x}$$

$$= \frac{۱}{۲\sqrt{x}} + \frac{۱}{۲x\sqrt{x}} \Rightarrow f'(۱) = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۱$$

اختلاف آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر برابر است با:

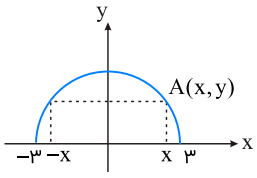
$$۱ - \frac{۵}{۶} = \frac{۱}{۶}$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۸۵

گزینه ۱

نقطهٔ A را بر روی نیم‌بیضی $y = \frac{۲}{۳}\sqrt{۹ - x^۲}$ در نظر می‌گیریم.



این نقطه دارای مختصات $A(x, \frac{۲}{۳}\sqrt{۹ - x^۲})$ است. فرض می‌کنیم طول مستطیل $۲x$ و عرض آن y باشد پس داریم:

$$S = ۲xy = ۲x(\frac{۲}{۳}\sqrt{۹ - x^۲}) = \frac{۴}{۳}x\sqrt{۹ - x^۲} = \frac{۴}{۳}\sqrt{۹x^۲ - x^۴} \ , \ -۳ < x < ۳$$

برای یافتن بیشترین مساحت، ابتدا معادلهٔ $S'(x) = ۰$ را حل می‌کنیم:

$$S'(x) = \frac{۴}{۳}(\frac{۱۸x - ۴x^۳}{۲\sqrt{۹x^۲ - x^۴}})$$

$$S'(x) = ۰ \Rightarrow ۱۸x - ۴x^۳ = ۰ \Rightarrow ۲x(۹ - ۲x^۲) = ۰$$

$$\xrightarrow{x \neq ۰} ۲x^۲ = ۹ \Rightarrow x^۲ = \frac{۹}{۲} \Rightarrow x = \pm\frac{۳}{\sqrt{۲}}$$

بنابراین داریم:

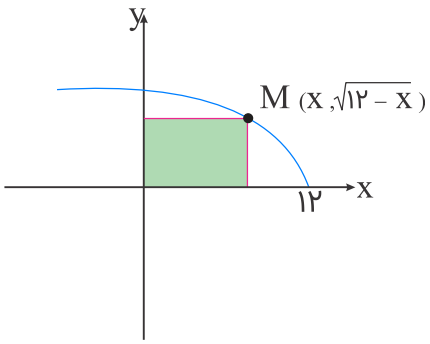
$$S_{max} = \frac{۴}{۳}\sqrt{۹x^۲ - x^۴} = \frac{۴}{۳}\sqrt{۹(\frac{۹}{۲}) - \frac{۸۱}{۴}} = \frac{۴}{۳}\sqrt{\frac{۸۱}{۲} - \frac{۸۱}{۴}} = \frac{۴}{۳}\sqrt{\frac{۸۱}{۴}}$$

$$= \frac{۴}{۳} \times \frac{۹}{۲} = \frac{۳۶}{۶} = ۶$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۸۶ گزینه ۳

نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:



مساحت مستطیل ساخته‌شده برابر $S(x) = x\sqrt{۱۲ - x}$ است.

$$S' = \sqrt{۱۲ - x} - \frac{x}{۲\sqrt{۱۲ - x}} = ۰ \Rightarrow \frac{۲(۱۲ - x) - x}{۲\sqrt{۱۲ - x}} = ۰$$

$$۲۴ - ۲x - x = ۰ \Rightarrow x = ۸ \Rightarrow S_{max} = ۸\sqrt{۱۲ - ۸} = ۱۶$$

۸۷ گزینه ۳

چون دامنهٔ تابع $[-۱, ۳]$ است، پس $x_۱ = ۳$ و $x_۲ = -۱$ ریشه‌های معادلهٔ $-x^۲ + ax + b = ۰$ هستند.

$$x_۱ + x_۲ = \frac{-a}{-۱} \Rightarrow -۱ + ۳ = a \Rightarrow a = ۲$$

$$x_۱x_۲ = \frac{b}{-۱} \Rightarrow -۱ \times ۳ = -b \Rightarrow b = ۳$$

طبق نمودار، مشاهده می‌کنید که مشتق تابع در ماکزیممش صفر است.

$$f'(x) = ۱ + \frac{-۲x + ۲}{۲\sqrt{-x^۲ + ۲x + ۳}} = ۰ \Rightarrow \frac{x - ۱}{\sqrt{-x^۲ + ۲x + ۳}} = ۱$$

$$\Rightarrow -x^۲ + ۲x + ۳ = (x - ۱)^۲ \Rightarrow -x^۲ + ۲x + ۳ = x^۲ - ۲x + ۱$$

$$\Rightarrow ۲x^۲ - ۴x - ۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۲x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \pm \sqrt{۲}$$

$x = ۱ + \sqrt{۲}$ قابل‌قبول است.

$$f(۱ + \sqrt{۲}) = ۱ + \sqrt{۲} + \sqrt{-(۱ + \sqrt{۲})^۲ + ۲(۱ + \sqrt{۲}) + ۳}$$

$$= ۱ + \sqrt{۲} + \sqrt{-۱ - ۲ - ۲\sqrt{۲} + ۲ + ۲\sqrt{۲} + ۳} = ۱ + ۲\sqrt{۲}$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۸۸ گزینه ۲

$$\text{آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ } [۰,۴] = \frac{f(۴)-f(۰)}{۴-۰} = \frac{(\sqrt{۹}+\frac{۱}{۵})-(\sqrt{۱}+\frac{۱}{۱})}{۴-۰} = \frac{\frac{۶}{۵}}{۴} = \frac{۳}{۱۰} = ۰/۳$$

$$f'(x) = \frac{۲}{۲\sqrt{۲x+۱}} - \frac{۱}{(x+۱)^۲}$$

$$x=\frac{۳}{۲} \text{ آهنگ تغییر لحظه‌ای در } = f'(\frac{۳}{۲}) = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{(\frac{۵}{۲})^۲} = \frac{۱}{۲} - \frac{۴}{۲۵} = ۰/۵ - ۰/۱۶ = ۰/۳۴$$

$$\Rightarrow \text{آهنگ تغییر لحظه‌ای} - \text{آهنگ تغییر متوسط} = ۰/۳۴ - ۰/۳ = ۰/۰۴$$

۸۹ گزینه ۴

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه روی منحنی، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

ب) مختصات نقطهٔ تماس در معادلهٔ خط مماس و معادلهٔ منحنی صدق می‌کند.

ج) شیب خطی به معادلهٔ $y = ax + b$ برابر a است.

گام دوم

شیب خط $y = ۲x - ۵$ برابر ۲ است؛ بنابراین مشتق تابع به معادلهٔ $y = ax^۲ + bx + ۱$ در نقطهٔ $x = ۱$ نیز برابر ۲ می‌شود:

$$y = ax^۲ + bx + ۱ \Rightarrow y' = ۲ax + b \xrightarrow{x=۱} m_{\text{مماس}} = y'(۱) = ۲ \Rightarrow ۲a + b = ۲ \quad (I)$$

طبق قسمت ب از گام اول، به ازای $x = ۱$ مقدار به‌دست‌آمده از معادلهٔ خط و منحنی برابر است، پس داریم:

$$y = ۲x - ۵ \Rightarrow y(۱) = ۲ - ۵ = -۳$$
$$y = ax^۲ + bx + ۱ \Rightarrow y(۱) = a + b + ۱ = -۳ \Rightarrow a + b = -۴ \quad (II)$$

از دو معادلهٔ (I) و (II)، a و b را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} ۲a + b = ۲ \\ a + b = -۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲a + b = ۲ \\ -a - b = ۴ \end{cases} \Rightarrow a = ۶$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۹۰ گزینه ۲

کمترین مقدار تابع، همان مینیمم مطلق تابع است. برای یافتن مینیمم مطلق یک تابع پیوسته، مقدار تابع را در نقاط بحرانی آن، می‌یابیم. نقطهٔ بحرانی تابع، نقاطی از دامنهٔ تعریف آن است که به‌ازای آن‌ها $f'(x) = ۰$ یا $f'(x)$ موجود نباشد.
ضابطهٔ $f(x)$ یک عبارت چندجمله‌ای و $D_f \in \mathbb{R}$ است. کافی است ریشه‌های معادلهٔ $f'(x) = ۰$ را یافته و مینیمم مقدار تابع را به‌ازای آن‌ها مشخص کنیم.

$$y = \frac{۱}{۴}x^۴ - x^۳ - ۲x^۲ \Rightarrow y' = x^۳ - ۳x^۲ - ۴x = x(x-۴)(x+۱)$$

$$y' = ۰ \Rightarrow x(x-۴)(x+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x - ۴ = ۰ \Rightarrow x = ۴ \\ x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(۰) = ۰ \\ y(۴) = -۳۲ \\ y(-۱) = -\frac{۳}{۴} \end{cases}$$

باتوجه‌به مقادیر به‌دست‌آمده، $y = -۳۲$ کمترین مقدار تابع است.

۹۱ گزینه ۳

تابع باید در $x = ۲$ پیوسته باشد:

$$\begin{matrix} \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲^+} \frac{۸}{ax+b} = \frac{۸}{۲a+b} \\ \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲^-} -x^۳ + ۶x = -۸ + ۱۲ = ۴ \end{matrix} \Rightarrow \frac{۸}{۲a+b} = ۴ \Rightarrow ۲a + b = ۲$$

مشتق چپ و راست هم باید در این نقطه برابر باشند:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-۸a}{(ax+b)^۲} & ; x > ۲ \\ -۳x^۲ + ۶ & ; x \le ۲ \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_+(۲) = \frac{-۸a}{(۲a+b)^۲} = \frac{-۸a}{۲^۲} = -۲a \\ f'_-(۲) = -۱۲ + ۶ = -۶ \end{cases} \Rightarrow -۲a = -۶ \Rightarrow a = ۳ \quad , \quad b = -۴$$

۹۲ گزینه ۴

$$\lim_{x\to ۲} \frac{۲ - \sqrt[۳]{۳x+۲}}{۵x^۲ - ۱۸x + ۱۶} = \frac{۰}{۰}$$

$$\xrightarrow{HOP} \lim_{x\to ۲} \frac{۰ - \frac{۳}{۳\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲}}}{۱۰x - ۱۸} = \lim_{x\to ۲} \frac{-۱}{(۱۰x-۱۸)\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲}}$$

$$= \frac{-۱}{۲(۴)} = \frac{-۱}{۸}$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۹۳

گزینه ۴

گام اول

فاصلهٔ میان دو نقطهٔ $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ برابر است با:

$$|AB| = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲}$$

گام دوم

نقطهٔ موردنظر را $M(\alpha, ۰)$ در نظر می‌گیریم. باتوجه‌به گام اول، فواصل MA و MB را محاسبه می‌کنیم.

$$|MA| = \sqrt{(۱ - \alpha)^۲ + (۵ - ۰)^۲} = \sqrt{(۱ - \alpha)^۲ + ۲۵}$$

$$|MB| = \sqrt{(۷ - \alpha)^۲ + (-۲ - ۰)^۲} = \sqrt{(۷ - \alpha)^۲ + ۴}$$

تفاضل این دو فاصله، عبارتی برحسب α است که برای یافتن ماکسیمم مقدارش، کافی است ریشهٔ مشتق این عبارت را به دست آوریم.

$$d(\alpha) = |MA| - |MB| = \sqrt{(۱ - \alpha)^۲ + ۲۵} - \sqrt{(۷ - \alpha)^۲ + ۴}$$

$$d'(\alpha) = \frac{-۲(۱ - \alpha)}{۲\sqrt{(۱ - \alpha)^۲ + ۲۵}} - \frac{-۲(۷ - \alpha)}{۲\sqrt{(۷ - \alpha)^۲ + ۴}} = \frac{(۷ - \alpha)}{\sqrt{(۷ - \alpha)^۲ + ۴}} - \frac{(۱ - \alpha)}{\sqrt{(۱ - \alpha)^۲ + ۲۵}}$$

$$d'(\alpha) = ۰ \Rightarrow \frac{(۷ - \alpha)}{\sqrt{(۷ - \alpha)^۲ + ۴}} = \frac{(۱ - \alpha)}{\sqrt{(۱ - \alpha)^۲ + ۲۵}} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \frac{(۷ - \alpha)^۲}{(۷ - \alpha)^۲ + ۴} = \frac{(۱ - \alpha)^۲}{(۱ - \alpha)^۲ + ۲۵}$$

$$\Rightarrow (۱ - \alpha)^۲((۷ - \alpha)^۲ + ۴) = (۷ - \alpha)^۲((۱ - \alpha)^۲ + ۲۵)$$

$$\Rightarrow (۱ - \alpha)^۲(۷ - \alpha)^۲ + ۴(۱ - \alpha)^۲ = (۷ - \alpha)^۲(۱ - \alpha)^۲ + ۲۵(۷ - \alpha)^۲$$

$$\Rightarrow ۴(۱ - \alpha)^۲ = ۲۵(۷ - \alpha)^۲ \xrightarrow{\text{جذر}} ۲(۱ - \alpha) = \pm ۵(۷ - \alpha)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲ - ۲\alpha = ۳۵ - ۵\alpha \Rightarrow ۳\alpha = ۳۳ \Rightarrow \alpha = ۱۱ \\ ۲ - ۲\alpha = -۳۵ + ۵\alpha \Rightarrow ۷\alpha = ۳۷ \Rightarrow \alpha = \frac{۳۷}{۷} \end{cases}$$

باتوجه‌به گزینه‌ها، $\alpha = ۱۱$ قابل‌قبول است.

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

گزینه ۳

برای تعیین ضابطهٔ تابع $f(f(x))$، کافی است در ضابطهٔ $f(x)$ به‌جای متغیر x تابع $f(x)$ را جایگذاری کنیم:

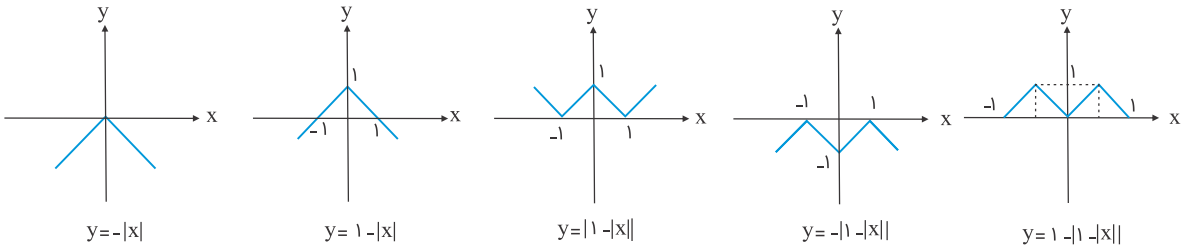
$$f(x) = ۱ - |x| \quad \Rightarrow \quad f(f(x)) = ۱ - |f(x)| = ۱ - |۱ - |x||$$

می‌دانیم تابع در ریشه‌های سادهٔ عبارت درون قدر مطلق مشتق‌ناپذیر است:

$$۱)|x| \ : \quad x = ۰$$

$$۲)|۱ - |x|| \ : \quad ۱ - |x| = ۰ \quad \Rightarrow \quad |x| = ۱ \quad \Rightarrow \quad x = \pm ۱$$

علاوه‌برآن، با رسم نمودار تابع نیز می‌توان نقاط مشتق‌ناپذیر را مشخص کرد:



بنابراین تابع $y = |۱ - |x||$، دارای سه نقطهٔ مشتق‌ناپذیر $x = ۰$, $x = ۱$, $x = -۱$ است.

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

گزینه ۱

گام اول

الف) عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج، باید همواره نامنفی باشد.

ب) پیوستگی تابع در یک نقطه، شرط لازم برای مشتق‌پذیری در آن نقطه است.

ج) مشتق چپ تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=0$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

گام دوم

ابتدا دامنهٔ تعریف تابع را مشخص می‌کنیم:

$$1-x^2\geq 0 \Rightarrow x^2\leq 1 \Rightarrow -1\leq x\leq 1 \Rightarrow D_f=[-1,1]$$

تابع $f(x)$ در $x=0$ پیوسته است (باتوجه‌به اینکه گزینهٔ "وجود ندارد" نداریم، پس تابع حتماً در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است و برای یافتن مشتق چپ در این نقطه، نیازی به بررسی پیوستگی نیست). اکنون مشتق چپ تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{x}=\frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام، صورت و مخرج کسر را در مزدوج عبارت زیر رادیکال صورت ضرب می‌کنیم تا عامل صفرکنندهٔ صورت و مخرج حذف شود:

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{x}\times\frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-1+x^2}}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x^2}}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}$$

چون داریم:

$$x\to 0^- \quad\Rightarrow\quad x<0 \quad\Rightarrow\quad |x|=-x$$

بنابراین:

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=\frac{-1}{\sqrt{1+\sqrt{1-0}}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۹۶ گزینه ۳

برای سهولت در مشتق‌گیری به‌جای $\sqrt[۳]{x}$، عبارت $x^{\frac{۱}{۳}}$ را قرار می‌دهیم. ضابطهٔ مشتق دوم یا همان y'' را تعیین کرده و حاصل $y''y^{۵}$ را به دست می‌آوریم (دقت کنید $y^{۵}$ مشتق پنجم تابع y نیست، مشتق پنجم را به‌صورت $y^{(۵)}$ نمایش می‌دهند).

$$y = \sqrt[۳]{x} \quad \Rightarrow \quad y = x^{\frac{۱}{۳}} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{۱}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}$$

$$\Rightarrow \quad y'' = (\frac{۱}{۳})\ (-\frac{۲}{۳})\ x^{-\frac{۵}{۳}} = -\frac{۲}{۹}x^{-\frac{۵}{۳}} = -\frac{۲}{۹\sqrt[۳]{x^{۵}}}$$

$$\Rightarrow \quad y''y^{۵} = -\frac{۲}{۹\sqrt[۳]{x^{۵}}}\left(\sqrt[۳]{x}\right)^{۵} = -\frac{۲}{۹\sqrt[۳]{x^{۵}}} \times \sqrt[۳]{x^{۵}} = -\frac{۲}{۹}$$

۹۷ گزینه ۲

برای اینکه تابع در یک نقطه مشتق‌پذیر باشد باید ابتدا در آن نقطه پیوسته باشد، بنابراین داریم:

$$\begin{matrix} \lim\limits_{x\to(-۲)^{+}} f(x) = ۴a - ۲b + ۴ \\ \lim\limits_{x\to(-۲)^{-}} f(x) = -۸ + ۲ = -۶ \end{matrix} \Rightarrow ۴a - ۲b = -۱۰ \Rightarrow ۲a - b = -۵$$

$$f'(x) = \begin{cases} ۲ax + b & ; x > -۲ \,, f'_{+}(-۲) = -۴a + b \\ ۳x^{۲} - ۱ & ; x < -۲ \,, f'_{-}(-۲) = ۱۱ \end{cases}$$

$$\begin{cases} -۴a + b = ۱۱ \\ ۲a - b = -۵ \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} -۲a = ۶ \Rightarrow a = -۳\,,\ b = -۱$$

$$f(x) = \begin{cases} -۳x^{۲} - x + ۴ & ; x \geq -۲ \\ x^{۳} - x & ; x < -۲ \end{cases}$$

$$f(۱) = -۳ - ۱ + ۴ = ۰$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۹۸

گزینه ۱

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ روی بازه‌ای از $x_۱$ تا $x_۲$ چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_۲) - f(x_۱)}{x_۲ - x_۱}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = a$ برابر $f'(a)$ است.

گام دوم

باتوجه‌به قسمت الف از گام اول، آهنگ متوسط تغییر تابع از $x_۱ = ۲$ تا $x_۲ = ۳$ برابر است با:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(۳) - f(۲)}{۳ - ۲} = \frac{\frac{۳۶}{۹} - \frac{۳۶}{۴}}{۱} = \frac{۳۶}{۹} - \frac{۳۶}{۴} = ۴ - ۹ = -۵$$

برای به دست آوردن آهنگ لحظه‌ای در نقطهٔ $x = \sqrt[۳]{۱۲}$، ابتدا ضابطهٔ مشتق تابع را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{۳۶}{x^۲} \Rightarrow f'(x) = \frac{۰ \times x^۲ - ۲x(۳۶)}{x^۴} = -\frac{۷۲x}{x^۴} = -\frac{۷۲}{x^۳}$$

$$x = \sqrt[۳]{۱۲} \text{ آهنگ آنی در } = f'\left(\sqrt[۳]{۱۲}\right) = -\frac{۷۲}{\left(\sqrt[۳]{۱۲}\right)^۳} = -\frac{۷۲}{۱۲} = -۶$$

اختلاف آهنگ متوسط و لحظه‌ای برابر است با:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} - f'\left(\sqrt[۳]{۱۲}\right) = -۵ - (-۶) = ۱$$

۹۹

گزینه ۲

گام اول

حاصل $\lim\limits_{\Delta x \to ۰^-} \frac{f(۲+\Delta x) - f(۲)}{\Delta x}$ بیانگر مقدار مشتق چپ تابع در نقطهٔ $x = ۲$ یا همان $f'_-(۲)$ است.

گام دوم

ابتدا ضابطهٔ تابع $f(x)$ را وقتی $x < ۲$ است، تعیین می‌کنیم سپس ضابطهٔ $f'(x)$ و مقدار $f'(-۲)$ را به دست می‌آوریم.

$$x < ۲ \Rightarrow x - ۲ < ۰ \Rightarrow |x - ۲| = -(x - ۲) = ۲ - x$$

$$f(x) = ۲ - x + \sqrt{۲x} \Rightarrow f'(x) = -۱ + \frac{۲}{۲\sqrt{۲x}} = \frac{۱}{\sqrt{۲x}} - ۱$$

$$\lim_{\Delta x \to ۰^-} \frac{f(۲ + \Delta x) - f(۲)}{\Delta x} = f'_-(۲) = \frac{۱}{\sqrt{۲ \times ۲}} - ۱ = \frac{۱}{\sqrt{۴}} - ۱ = \frac{۱}{۲} - ۱ = -\frac{۱}{۲}$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۰۰ گزینه ۱

تابع $y = x + \sqrt{x}$ یک‌به‌یک است زیرا صعودی اکید است.

$$y = x + \sqrt{x} \Rightarrow y' = ۱ + \frac{۱}{۲\sqrt{x}} > ۰$$

۱۰۱ گزینه ۴

آهنگ تغییر متوسط تابع در $[۰, ۲]$:

$$\frac{f(۲) - f(۰)}{۲ - ۰} = \frac{۱۲ - ۲}{۲} = ۵$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع، همان مشتق است:

$$f'(x) = ۱ \times \sqrt{۴x + ۱} + \frac{۴}{۲\sqrt{۴x + ۱}}(x + ۲) \xrightarrow{x = \frac{۳}{۴}} f'\left(\frac{۳}{۴}\right) = \frac{۱۹}{۴}$$

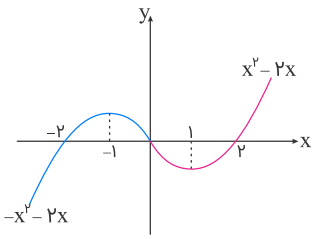
تفاضل مقادیر به دست آمده برابر است با:

$$۵ - \frac{۱۹}{۴} = \frac{۱}{۴}$$

۱۰۲ گزینه ۱

$$f(x) = x|x| - ۲x = \begin{cases} x^۲ - ۲x & ; x \geq ۰ \\ -x^۲ - ۲x & ; x < ۰ \end{cases}$$

نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:



$$\begin{cases} x \geq ۰ : f'(x) = ۲x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \\ x < ۰ : f'(x) = -۲x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \end{cases}$$

باتوجه‌به شکل، ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع به ترتیب برابر $(-۱, ۱)$ و $(۱, -۱)$ است، پس فاصلهٔ آن‌ها از هم برابر است با:

$$\text{فاصله} : \sqrt{(-۱ - ۱)^۲ + (۱ + ۱)^۲} = \sqrt{۲^۲ + ۲^۲} = ۲\sqrt{۲}$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۰۳

گزینه ۳

گام اول

الف) حجم مخروطی به شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h برابر است با:

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲} h$$

ب) مقدار جنس مصرفی برای ساخت یک مخروط معادل مساحت جانبی آن است.

ج) مساحت جانبی مخروطی به شکل زیر برابر است با:

$$S = \pi r l$$

گام دوم

برای اینکه در ساخت یک قیف مخروطی شکل با حجم ثابت کمترین مقدار جنس مصرف شود باید مساحت جانبی آن را مینیمم کنیم.

باتوجه‌به اینکه حجم مخروط برابر $\frac{\pi}{۳}$ است، رابطه‌ای بین شعاع قاعدهٔ مخروط و ارتفاع مخروط به دست می‌آوریم:

$$V = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲} h = \frac{\pi}{۳} \Rightarrow r^{۲} h = ۱ \Rightarrow r^{۲} = \frac{۱}{h} \Rightarrow r = \frac{۱}{\sqrt{h}} \quad (I)$$

برای محاسبهٔ مساحت جانبی مخروط ابتدا لازم است اندازهٔ l را به دست آوریم. با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$l^{۲} = r^{۲} + h^{۲} \Rightarrow l = \sqrt{r^{۲} + h^{۲}} \quad (II)$$

اکنون با استفاده از رابطهٔ مساحت جانبی و با جایگذاری دو رابطهٔ (I) و (II) در آن داریم:

$$S = \pi r l \xrightarrow{(II)} S = \pi r \sqrt{r^{۲} + h^{۲}} \xrightarrow{(I)} S = \pi \times \frac{۱}{\sqrt{h}} \times \sqrt{\frac{۱}{h} + h^{۲}} = \frac{\pi\sqrt{h^{۳} + ۱}}{h}$$

برای مینیمم کردن مساحت جانبی، از S نسبت به h مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$S' = \pi \times \frac{\frac{۳h^{۲}}{۲\sqrt{h^{۳} + ۱}} \times h - \sqrt{h^{۳} + ۱}}{h^{۲}} = \frac{\pi}{h^{۲}}\left(\frac{۳h^{۳} - ۲h^{۳} - ۲}{۲\sqrt{h^{۳} + ۱}}\right) = \frac{\pi}{h^{۲}}\left(\frac{h^{۳} - ۲}{۲\sqrt{h^{۳} + ۱}}\right) = ۰$$

$$\Rightarrow h^{۳} - ۲ = ۰ \Rightarrow h^{۳} = ۲ \Rightarrow h = \sqrt[۳]{۲}$$

بنابراین به ازای ارتفاع $h = \sqrt[۳]{۲}$ در ساخت یک قیف مخروطی شکل با حجم ثابت $\frac{\pi}{۳}$، کمترین مقدار جنس مصرف می‌شود.

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۰۴

گزینه ۲

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ از $x_۱$ به $x_۲$ چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(x_۲) - f(x_۱)}{x_۲ - x_۱}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای (آنی) تغییر تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = a$ برابر $f'(a)$ است.

گام دوم

برای محاسبهٔ مقدار a کافی است معادلهٔ $f'(a) = \frac{f(۲۵)-f(۴)}{۲۵-۴}$ را حل کنیم.

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

$$\text{آهنگ متوسط تغییر از ۴ به ۲۵} = \frac{f(۲۵) - f(۴)}{۲۵ - ۴} = \frac{\sqrt{۲۵} - \sqrt{۴}}{۲۱} = \frac{۵ - ۲}{۲۱} = \frac{۳}{۲۱} = \frac{۱}{۷}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر در } a = f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{۱}{۲\sqrt{a}}$$

$$f'(a) = \frac{۱}{۷} \Rightarrow \frac{۱}{۲\sqrt{a}} = \frac{۱}{۷} \Rightarrow ۲\sqrt{a} = ۷ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۴a = ۴۹ \Rightarrow a = \frac{۴۹}{۴} = ۱۲/۲۵$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۰۵

گزینه ۴

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

ب) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ $(x_۰, y_۰)$ عبور می‌کند، به‌صورت زیر است:

$$y - y_۰ = m(x - x_۰)$$

ج) در محل برخورد یک منحنی با محور عرض‌ها، مقدار x برابر صفر است.

گام دوم

$$y = \frac{x^۲}{x-۱} \xrightarrow{x=۲} y(۲) = \frac{۲^۲}{۲-۱} = ۴$$

$$y' = \frac{۲x(x-۱) - x^۲}{(x-۱)^۲} = \frac{۲x^۲ - ۲x - x^۲}{(x-۱)^۲} = \frac{x^۲ - ۲x}{(x-۱)^۲}$$

$$m_{\text{مماس}} = y'(۲) = \frac{۲^۲ - (۲ \times ۲)}{(۲-۱)^۲} = \frac{۴-۴}{۱} = ۰$$

بنابراین معادلهٔ خط مماس بر منحنی در نقطهٔ $(۲, ۴)$ به‌صورت زیر است:

$$y - y(۲) = y'(۲)(x-۲) \xrightarrow[x=۲]{y'(۲)=۰} y - ۴ = ۰ \Rightarrow y = ۴$$

پس محل برخورد خط مماس بر منحنی در نقطهٔ $(۲, ۴)$؛ یعنی خط $y = ۴$، دارای عرض ۴ است.

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۰۶ گزینه ۳

گام اول

الف) شیب دو خط عمود بر هم، قرینه و معکوس یکدیگر است؛ بنابراین حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۱- می‌شود.

۲) شیب خطی به معادلهٔ $y = ax + b$ برابر a است.

ج) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه واقع بر آن برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

د) معادلهٔ خط به شیب m که از نقطهٔ $(x_۱, y_۱)$ عبور می‌کند به‌صورت زیر است:

$$y - y_۱ = m(x - x_۱)$$

گام دوم

ابتدا معادلهٔ خط داده‌شده را به فرم استاندارد نوشته و شیب آن را به دست می‌آوریم.

$$x - ۳y = ۲ \Rightarrow ۳y = x - ۲ \Rightarrow y = \frac{۱}{۳}x - \frac{۲}{۳} \Rightarrow m = \frac{۱}{۳}$$

پس طبق قسمت الف از گام اول، شیب خط مماس بر منحنی برابر ۳- است. فرض می‌کنیم خط در نقطهٔ $x = x_۰$ بر منحنی مماس شده است بنابراین:

$$y = x^۳ + ۳x^۲ + ۱ \Rightarrow y' = ۳x^۲ + ۶x \Rightarrow y'(x_۰) = ۳x_۰^۲ + ۶x_۰ = -۳$$

$$\Rightarrow ۳{x_۰}^۲ + ۶x_۰ + ۳ = ۰ \xrightarrow{\div ۳} x_۰^۲ + ۲x_۰ + ۱ = ۰ \Rightarrow (x_۰ + ۱)^۲ = ۰$$

$$\Rightarrow x_۰ + ۱ = ۰ \Rightarrow x_۰ = -۱$$

$$y(-۱) = (-۱)^۳ + ۳(-۱)^۲ + ۱ = -۱ + ۳ + ۱ = ۳$$

پس نقطهٔ تماس دارای مختصات $(-۱, ۳)$ است. طبق قسمت د از گام اول، معادلهٔ خط مماس برابر است با:

$$y - ۳ = -۳(x + ۱) \Rightarrow y = -۳x - ۳ + ۳ \Rightarrow y = -۳x$$

از میان گزینه‌ها، فقط نقطهٔ $(۲, -۶)$ در معادلهٔ خط صدق می‌کند.

۱۰۷ گزینه ۴

تابع چندجمله‌ای $f(x)$ روی $\mathbb{R}$ و ازجمله روی بازهٔ $(۱, ۴)$ پیوسته است. برای یافتن نقاط اکسترمم این تابع، کافی است معادلهٔ $f'(x) = ۰$ را حل کنیم. می‌دانیم این معادله روی بازهٔ $(۱, ۴)$ ریشه خواهد داشت درصورتی‌که رابطهٔ $f'(۱)f'(۴) < ۰$ برقرار باشد؛ بنابراین داریم:

$$f(x) = x^۳ + ax^۲ - ۸x \Rightarrow f'(x) = ۳x^۲ + ۲ax - ۸$$

$$\begin{cases} f'(۱) = ۳ + ۲a - ۸ = ۲a - ۵ \\ f'(۴) = ۴۸ + ۸a - ۸ = ۸a + ۴۰ \end{cases} \xrightarrow{f'(۱)f'(۴) < ۰} ۸(a + ۵)(۲a - ۵) < ۰$$

$$\Rightarrow -۵ < a < ۲/۵$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۰۸

گزینه ۳

گام اول

الف) $f'(۱)$ موجود است؛ یعنی در $x = ۱$ تابع $f(x)$ هم پیوسته است و هم مشتق‌پذیر.

ب) تابع در نقطهٔ $x = ۱$ پیوسته است هرگاه:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} f(x) = f(۱)$$

ج) تابع در نقطهٔ $x = ۱$ مشتق‌پذیر است هرگاه:

$$f'_+(۱) = f'_-(۱)$$

گام دوم

باتوجه‌به اینکه $۱ - \sqrt{۲} < ۱$ است، برای محاسبهٔ $f\left(۱-\sqrt{۲}\right)$ باید از ضابطهٔ مربوط به xهای کوچک‌تر از ۱ استفاده کنیم؛ بنابراین لازم است ابتدا با بررسی شرط پیوستگی و مشتق‌پذیری، مقادیر a و b را بیابیم.

بررسی شرط پیوستگی:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^+}\left(x - \frac{۱}{x}\right) = ۱ - ۱ = ۰ \\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-} x^۲ + ax + b = a + b + ۱ \\ f(۱) = ۰ \end{array}\right\} \xrightarrow{\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = f(۱)} a + b + ۱ = ۰ \Rightarrow a + b = -۱ \,(I)$$

برای بررسی شرط مشتق‌پذیری، ابتدا ضابطهٔ مشتق تابع را به دست آورده و سپس مشتق چپ و راست را در نقطهٔ $x = ۱$ مساوی قرار می‌دهیم:

$$f'(x) = \begin{cases} ۱ + \frac{۱}{x^۲} & ; x > ۱ \\ ۲x + a & ; x < ۱ \end{cases}$$

$$f'_+(۱) = f'_-(۱) \quad \Rightarrow \quad ۱ + ۱ = ۲ + a \quad \Rightarrow \quad a + ۲ = ۲ \quad \Rightarrow \quad a = ۰$$

با جایگذاری در رابطهٔ I مقدار b را محاسبه می‌کنیم:

$$a + b = -۱ \quad \Rightarrow \quad ۰ + b = -۱ \quad \Rightarrow \quad b = -۱$$

بنابراین ضابطهٔ تابع به ازای $x < ۱$ به‌صورت زیر می‌شود:

$$x < ۱ \;:\; f(x) = x^۲ - ۱$$

$$\Rightarrow \quad f\left(۱-\sqrt{۲}\right) = \left(۱-\sqrt{۲}\right)^۲ - ۱ = ۱ - ۲\sqrt{۲} + ۲ - ۱ = ۲ - ۲\sqrt{۲}$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۰۹

گزینه ۲

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع از $x_۱$ تا $x_۲$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_۲)-f(x_۱)}{x_۲-x_۱}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در یک نقطه برابر مقدار مشتق تابع آن نقطه است.

گام دوم

داریم:

$$f(x)=(۲x+۱)^{-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲x+۱}}$$

ابتدا آهنگ متوسط تغییر تابع از $x=۴$ تا $x=۱۲$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(۱۲)-f(۴)}{۱۲-۴}=\frac{\frac{۱}{\sqrt{۲۴+۱}}-\frac{۱}{\sqrt{۸+۱}}}{۸}=\frac{\frac{۱}{\sqrt{۲۵}}-\frac{۱}{\sqrt{۹}}}{۸}=\frac{\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۳}}{۸}=\frac{\frac{۳-۵}{۱۵}}{۸}=\frac{-\frac{۲}{۱۵}}{۸}=-\frac{۱}{۶۰}$$

طبق قسمت ب از گام اول، $f'(x)$ و سپس مقدار $f'(۴)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{۰-\frac{۲}{۲\sqrt{۲x+۱}}}{۲x+۱}=-\frac{۱}{(۲x+۱)\sqrt{۲x+۱}}$$

$$x=۴ \text{ آهنگ لحظه‌ای تغییر در } =f'(۴)=-\frac{۱}{(۸+۱)\sqrt{۸+۱}}=-\frac{۱}{۹\times ۳}=-\frac{۱}{۲۷}$$

اختلاف آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر برابر است با:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}-f'(x)=-\frac{۱}{۶۰}-\left(-\frac{۱}{۲۷}\right)=-\frac{۱}{۶۰}+\frac{۱}{۲۷}=\frac{-۹+۲۰}{۵۴۰}=\frac{۱۱}{۵۴۰}$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۱۰ گزینه ۲

وقتی $x \to ۲$، صورت کسر برابر صفر می‌شود؛ اما حاصل حد وقتی $x \to ۲$، مخالف صفر است بنابراین باید به ازای $x = ۲$ مخرج کسر هم برابر صفر شود؛ یعنی:

$$ax + b = ۰ \xrightarrow{x=۲} ۲a + b = ۰ \qquad (I)$$

اکنون حاصل حد $\frac{۰}{۰}$ و مبهم است. با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال رفع ابهام کرده و مقادیر a و b را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to ۲} \frac{x - \sqrt{۳x - ۲}}{ax + b} = \frac{۰}{۰}$$

$$\xrightarrow{HOP} \lim_{x\to ۲} \frac{۱ - \frac{۳}{۲\sqrt{۳x-۲}}}{a} = \frac{۱ - \frac{۳}{۲\times ۲}}{a} = \frac{۱ - \frac{۳}{۴}}{a} = \frac{۱}{۴a} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۴a = ۲ \Rightarrow a = \frac{۱}{۲}$$

با استفاده از رابطهٔ (I) مقدار b برابر است با:

$$۲\left(\frac{۱}{۲}\right) + b = ۰ \Rightarrow b + ۱ = ۰ \Rightarrow b = -۱$$

۱۱۱ گزینه ۴

گام اول

الف) برای این که تابع در $x = ۳$ پیوسته باشد، باید رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$\lim_{x\to ۳^+} f(x) = \lim_{x\to ۳^-} f(x) = f(۳)$$

ب) وقتی $x \to ۳^+$ حاصل حد $\frac{۰}{۰}$ شده و مبهم است. با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال حاصل حد راست تابع را در نقطهٔ $x = ۳$ به دست می‌آوریم.

گام دوم

$$\lim_{x\to ۳^-} f(x) = \lim_{x\to ۳^-} ax - ۳a - \frac{۳}{۸} = ۳a - ۳a - \frac{۳}{۸} = -\frac{۳}{۸}$$

$$f(۳) = ۳a - ۳a - \frac{۳}{۸} = -\frac{۳}{۸}$$

$$\lim_{x\to ۳^+} f(x) = \lim_{x\to ۳^+} \frac{۱ - \sqrt{x - \sqrt{x+۱}}}{x - ۳} = \frac{۰}{۰}$$

$$\xrightarrow{\text{هوپیتال}} \lim_{x\to ۳^+} f(x) = \lim_{x\to ۳^+} \frac{-\frac{۱ - \frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}}}{۲\sqrt{x - \sqrt{x+۱}}}}{۱} = -\frac{۱ - \frac{۱}{۲\sqrt{۴}}}{۲\sqrt{۳ - ۲}}$$

$$= -\frac{۱ - \frac{۱}{۴}}{۲} = -\frac{\frac{۳}{۴}}{۲} = -\frac{۳}{۸}$$

مشاهده می‌شود فارغ از اینکه مقدار a چند باشد، حاصل حد راست، حد چپ و مقدار تابع در نقطهٔ $x = ۳$ برابر است. پس به ازای هر مقدار a، تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = ۳$ پیوسته است.

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۱۲ گزینه ۱

$$f'(x) = ۱ + \frac{۴ - ۲x}{۲\sqrt{۴x - x^۲}} = ۰$$

$$\Rightarrow -\frac{۲ - x}{\sqrt{۴x - x^۲}} = ۱ \Rightarrow \sqrt{۴x - x^۲} = x - ۲ \quad (*)$$

باتوجه‌به معادله باید $x - ۲ \geq ۰$ باشد، یعنی: $x \geq ۲$

حال معادلهٔ (*) را حل می‌کنیم. ابتدا به توان ۲ می‌رسانیم:

$$۴x - x^۲ = x^۲ - ۴x + ۴ \Rightarrow ۲x^۲ - ۸x + ۴ = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۴x + ۲ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۱۶ - ۸ = ۸$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۴ + ۲\sqrt{۲}}{۲} = ۲ + \sqrt{۲} & \text{قابل‌قبول} \\ x = \frac{۴ - ۲\sqrt{۲}}{۲} = ۲ - \sqrt{۲} & (x \geq ۲ \text{ غیرقابل‌قبول زیرا}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(۲ + \sqrt{۲}) = ۲ + \sqrt{۲} + \sqrt{۴(۲ + \sqrt{۲}) - (۲ + \sqrt{۲})^۲}$$

$$= ۲ + \sqrt{۲} + \sqrt{۲} = ۲ + ۲\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow A(۲ + \sqrt{۲}, ۲ + ۲\sqrt{۲}) \quad \text{ماکزیمم نسبی}$$

حال فاصلهٔ نقطهٔ A را از نیمساز ناحیهٔ اول یعنی $y = x$ به دست می‌آوریم:

$$x - y = ۰$$

$$\Rightarrow d = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۲ + \sqrt{۲} - ۲ - ۲\sqrt{۲}|}{\sqrt{۱ + ۱}} = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = ۱$$

۱۱۳ گزینه ۳

گام اول

الف) مشتق تابع $y = \sqrt{u}$ از رابطهٔ $y' = \frac{u'}{۲\sqrt{u}}$ به دست می‌آید.

ب) مشتق تابع کسری $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^۲(x)}$$

گام دوم

با استفاده از روابط گام اول، ابتدا $f'(x)$ و سپس $f'(۲)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{\frac{۳x - ۱}{۲x + ۱}} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{۳(۲x+۱) - ۲(۳x-۱)}{(۲x+۱)^۲}}{۲\sqrt{\frac{۳x-۱}{۲x+۱}}} = \frac{\frac{۵}{(۲x+۱)^۲}}{۲\sqrt{\frac{۳x-۱}{۲x+۱}}} \Rightarrow f'(۲) = \frac{\frac{۵}{(۴+۱)^۲}}{۲\sqrt{\frac{۶-۱}{۴+۱}}} = \frac{\frac{۵}{۵^۲}}{۲\sqrt{\frac{۵}{۵}}} = \frac{\frac{۱}{۵}}{۲} = \frac{۱}{۱۰}$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

گزینه ۳

گام اول:

نقاط بحرانی تابع $f(x)$، نقاطی از دامنهٔ تعریف آن است که $f'(x)$ برابر صفر باشد و یا در آن نقاط تعریف‌نشده باشد.

گام دوم:

ابتدا با تعیین علامت عبارت قدر مطلقی $|x^۲ + x - ۲|$، ضابطهٔ تابع را ساده‌تر می‌کنیم، داریم:

$$f(x) = (x-۱)|x^۲ + x - ۲| = (x-۱)|(x+۲)(x-۱)|$$

$x = -۲$ و $x = ۱$ ریشه‌های عبارت درون قدر مطلق هستند پس می‌توان نوشت:

$$f(x) = \begin{cases} (x-۱)^۲(x+۲) & ; x \geq ۱ \text{ یا } x \leq -۲ \\ -(x-۱)^۲(x+۲) & ; -۲ < x < ۱ \end{cases}$$

تابع در نقاط $x = -۲$ و $x = ۱$ پیوسته است پس ضابطهٔ $f'(x)$ برابر است با:

$$f'(x) = \begin{cases} (x-۱)(۳x+۳) & ; x > ۱ \text{ یا } x < -۲ \\ -(x-۱)(۳x+۳) & ; -۲ < x < ۱ \end{cases}$$

اکنون ریشه‌های معادلهٔ $f'(x) = ۰$ را به دست می‌آوریم:

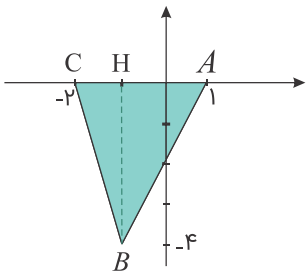
$$f'(x) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x > ۱,\ x < -۲ \ : \ (x-۱)(۳x+۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = -۱ \end{cases} \text{غ ق ق} \\ -۲ < x < ۱ \ : \ -(x-۱)(۳x+۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = -۱ \end{cases} \end{cases}$$

باتوجه‌به اینکه $f'_{-}(۱) = f'_{+}(۱) = ۰$ است پس $x = ۱$ نیز نقطهٔ بحرانی تابع $f(x)$ است. بررسی می‌کنیم $f'(x)$ در چه نقاطی تعریف‌نشده است. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} f'_{+}(-۲) = -(-۲-۱)(-۳) = -۹ \\ f'_{-}(-۲) = (-۲-۱)(-۳) = ۹ \end{array}\right\} \Rightarrow f'_{+}(-۲) \neq f'_{-}(-۲) \Rightarrow f'(-۲) \text{ وجود ندارد}$$

بنابراین تابع $f(x)$ دارای سه نقطهٔ بحرانی $A(۱, ۰)$، $B(-۱, -۴)$ و $C(-۲, ۰)$ است. مساحت مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ برابر است با:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲}BH \times AC = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۳ = \frac{۱۲}{۲} = ۶$$



وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۱۵ گزینه ۲

گام اول

آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ روی بازه‌ای از x تا $x+\Delta x$ چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

گام دوم

باتوجه‌به تعریف آهنگ متوسط تغییر داریم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع از } x=۵ \text{ تا } x=۹ = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(۹)-f(۵)}{۹-۵} = \frac{\sqrt{۹^۲+۱۴۴}-\sqrt{۵^۲+۱۴۴}}{۴}$$

$$= \frac{\sqrt{۸۱+۱۴۴}-\sqrt{۲۵+۱۴۴}}{۴} = \frac{\sqrt{۲۲۵}-\sqrt{۱۶۹}}{۴} = \frac{۱۵-۱۳}{۴} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲} = ۰/۵$$

۱۱۶ گزینه ۲

ابتدا ضابطهٔ $f'(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = x+۱+(g(x))^۵ \Rightarrow f'(x) = ۱+۵g'(x)(g(x))^۴$$

$$\Rightarrow f'(۰) = ۱+۵g'(۰)(g(۰))^۴$$

باتوجه‌به اطلاعات صورت سؤال داریم:

$$\xrightarrow{f'(۰)=g(۰)=۱} ۱ = ۱+۵g'(۰)(۱)^۴ \Rightarrow ۵g'(۰) = ۰ \Rightarrow g'(۰) = ۰$$

در محاسبهٔ ضابطهٔ تابع $f''(x)$ با عبارت $g'(x)(g(x))^۴$ روبه‌رو هستیم. چون $g'(۰)=۰$ است پس عبارت $g'(x)$ عامل صفرشوندهٔ تابع $f'(x)$ در نقطهٔ $x=۰$ می‌شود و داریم:

$$\Rightarrow f''(۰) = ۰+۵g''(۰)(g(۰))^۴$$

$$\xrightarrow[g(۰)=۱]{x=۰} f''(۰) = ۵g''(۰)(۱)^۴ = ۵g''(۰)$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۱۷ گزینه ۴

گام اول

الف) طبق تعریف مشتق داریم:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

ب) می‌دانیم: $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

گام دوم

باتوجه‌به اینکه می‌دانیم $(fg)(x) = f(x)g(x)$ است، می‌توان نوشت:

$$\lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(۲+\Delta x)\, g(۲+\Delta x) - f(۲)\, g(۲)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{(fg)(۲+\Delta x) - (fg)(۲)}{\Delta x} = (fg)'(۲)$$

باتوجه‌به قسمت ب از گام اول داریم:

$$(fg)'(x) = f'(x)\, g(x) + g'(x)\, f(x) = (۲x - ۱)\sqrt{۲x} + (x^۲ - x)\frac{۲}{۲\sqrt{۲x}}$$

$$\Rightarrow (fg)'(۲) = (۴ - ۱)\sqrt{۴} + (۲^۲ - ۲)\frac{۱}{\sqrt{۴}} = (۳ \times ۲) + \frac{۲}{۲} = ۶ + ۱ = ۷$$

۱۱۸ گزینه ۴

نقطهٔ $M(\alpha, \sqrt{۲\alpha + ۹})$ را بر روی منحنی $y = \sqrt{۲x + ۹}$ در نظر می‌گیریم. فاصلهٔ میان دو نقطهٔ A و M برابر است با:

$$MA = \sqrt{(\alpha - ۴)^۲ + (\sqrt{۲\alpha + ۹} - ۰)^۲} = \sqrt{\alpha^۲ - ۸\alpha + ۱۶ + ۲\alpha + ۹} = \sqrt{\alpha^۲ - ۶\alpha + ۲۵}$$

برای یافتن کمترین فاصله، ابتدا معادلهٔ $(MA)'_\alpha = ۰$ را حل می‌کنیم:

$$(MA)'_\alpha = \frac{۲\alpha - ۶}{۲\sqrt{\alpha^۲ - ۶\alpha + ۲۵}}$$

$$(MA)'_\alpha = ۰ \Rightarrow ۲\alpha - ۶ = ۰ \Rightarrow \alpha = ۳$$

بنابراین کمترین فاصلهٔ نقطهٔ A از منحنی $y = \sqrt{۲x + ۹}$ برابر است با:

$$(MA)_{min} = \sqrt{۹ - ۶(۳) + ۲۵} = \sqrt{۱۶} = ۴$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۱۹

گزینه ۲

گام اول

الف) با استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=f'(۲)$$

ب) اگر $y=f(u)$ باشد به‌طوری‌که u خود تابعی از x است، آنگاه داریم:

$$y'=u'f'(u)$$

گام دوم

مشتق تابع $f\left(\sqrt{|x|+۳}\right)$ در همسایگی نقطهٔ $x=-۱$ محاسبه می‌شود بنابراین داریم:

$$\xrightarrow{x=-۱}\quad |x|=-x\quad\Rightarrow\quad f\left(\sqrt{|x|+۳}\right)=f\left(\sqrt{۳-x}\right)$$

باتوجه‌به قسمت ب از گام اول می‌توان چنین نوشت:

$$y=f\left(\sqrt{۳-x}\right)\quad\Rightarrow\quad y'=\frac{-۱}{۲\sqrt{۳-x}}f'\left(\sqrt{۳-x}\right)$$

$$\Rightarrow\quad y'(-۱)=\frac{-۱}{۲\sqrt{۳+۱}}f'\left(\sqrt{۳+۱}\right)=\frac{-۱}{۲\times ۲}f'(۲)$$

$$\xrightarrow{f'(۲)=-\frac{۱}{۳}}\quad y'(-۱)=\left(-\frac{۱}{۴}\right)\left(-\frac{۱}{۳}\right)=\frac{۱}{۱۲}$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

گزینه ۴

روش اول:

تابع $y = [f(x)]$ به ازای مقادیری که عبارت درون جزء صحیح برابر عدد صحیح شود، ناپیوسته و درنتیجه مشتق‌ناپذیر است؛ بنابراین تابع روی بازه‌ای مشتق‌پذیر است که خروجی آن فقط یک مقدار باشد.

بررسی گزینهٔ اول:

$$x \in [0, 1] \quad \Rightarrow \quad 0 \le x \le 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} \in [1, \infty)$$

$x = 0$ ریشهٔ مخرج کسر است. به ازای $0 < x \le 1$، $\frac{1}{x}$ بی‌شمار مقدار صحیح می‌پذیرد پس تابع در این بازه ناپیوسته و درنتیجه مشتق‌ناپذیر است.

بررسی گزینهٔ دوم:

$$x \in (-1, 0) \quad \Rightarrow \quad -1 < x < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} \in (-\infty, -1)$$

در این بازه، $\frac{1}{x}$ بی‌شمار مقدار صحیح می‌پذیرد پس تابع ناپیوسته و درنتیجه مشتق‌ناپذیر است.

بررسی گزینهٔ سوم:

$$x \in [1, +\infty) \quad \Rightarrow \quad x \ge 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{x} \le 1 \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{1}{x}\right] = \begin{cases} 0 & ; 0 < \frac{1}{x} < 1 \\ 1 & ; \frac{1}{x} = 1 \end{cases}$$

تابع $f(x) = \left[\frac{1}{x}\right]$ در نقطهٔ $x = 1$ ناپیوسته است بنابراین روی بازهٔ $[1, +\infty)$ مشتق‌ناپذیر می‌شود.

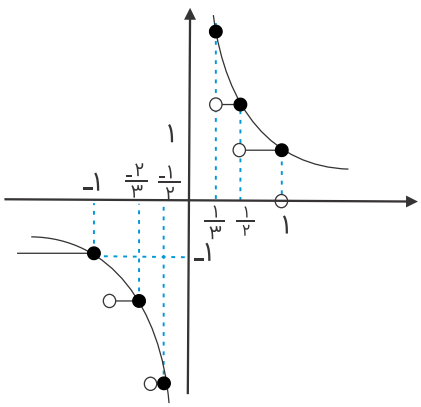
بررسی گزینهٔ چهارم:

$$x \in (-\infty, -1) \quad \Rightarrow \quad x < -1 \quad \Rightarrow \quad -1 < \frac{1}{x} < 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{1}{x}\right] = -1$$

تابع $f(x) = \left[\frac{1}{x}\right]$ روی بازهٔ $(-\infty, -1)$، یک تابع ثابت است پس روی این بازه پیوسته و مشتق‌پذیر می‌شود.

روش دوم:

با رسم نمودار تابع $f(x) = \left[\frac{1}{x}\right]$، بازهٔ مشتق‌پذیری آن را مشخص می‌کنیم:



وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

همان‌طوری که مشاهده می‌کنید از میان گزینه‌ها، تابع تنها در بازهٔ $(-\infty, -۱)$ برابر تابع ثابت $f(x) = -۱$ است، درنتیجه روی این بازه پیوسته و مشتق‌پذیر می‌شود.

۱۲۱ گزینه ۱

برای تعیین وضعیت یکنوایی (صعودی یا نزولی بودن) تابع در اطراف نقطهٔ $x = ۰$، تابع y' را قبل و بعد از این نقطه تعیین علامت می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{x^۲ + ۱}{x^۳ + ۱} \Rightarrow f'(x) = \frac{۲x(x^۳ + ۱) - ۳x^۲(x^۲ + ۱)}{(x^۳ + ۱)^۲} = \frac{-x^۴ - ۳x^۲ + ۲x}{(x^۳ + ۱)^۲}$$

باتوجه‌به اینکه $f'(۰) = ۰$ است پس تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = ۰$ دارای مماس افقی است. داریم:

x		۰	
$f'(x)$	$-$	۰	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

نقطهٔ $x = ۰$ مینیمم نسبی تابع $f(x)$ است پس گزینهٔ ۱ صحیح می‌باشد.

۱۲۲ گزینه ۳

باتوجه‌به اینکه تابع f در نقطهٔ $x = c$ مشتق راست دارد پس حتماً در همسایگی راست این نقطه تعریف شده است. نقطهٔ $x = c$ مینیمم نسبی تابع f است؛ بنابراین به ازای هر x عضو همسایگی راست این نقطه داریم:

$$\begin{cases} x > c \\ f(x) \geq f(c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - c > ۰ \\ f(x) - f(c) \geq ۰ \end{cases} \qquad (*)$$

طبق تعریف مشتق راست در نقطهٔ $x = c$ داریم:

$$f'_+(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \xrightarrow{(*)} f'_+(c) \geq ۰$$

بنابراین مشتق راست تابع f در نقطهٔ $x = c$ الزاماً نامنفی است.

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۲۳ گزینه ۲

گام اول

می‌دانیم $gof(x) = g(f(x))$ و $(gof)'(x) = g'(f(x))f'(x)$ است.

گام دوم

باتوجه‌به گام اول و فرض‌های صورت سؤال، مشتق تابع $y = fogoh(x)$ را در نقطهٔ $x = ۰$ به دست می‌آوریم:

$$y = fogoh(x) = f(g(h(x)))$$

$$\Rightarrow y' = (g(h(x)))' \times f'(g(h(x))) = h'(x) \times g'(h(x)) \times f'(g(h(x)))$$

$$\xrightarrow{x=۰} y'(۰) = h'(۰) \times g'(h(۰)) \times f'(g(h(۰)))$$

$$\xrightarrow{h(۰)=۱\ ,\ ۲h'(۰)=۱} y'(۰) = \frac{۱}{۲} \times g'(۱) f'(g(۱))$$

$$\xrightarrow{-g(۱)=۱\ ,\ -g'(۱)=۱} y'(۰) = \frac{۱}{۲} \times (-۱) f'(-۱)$$

$$\xrightarrow{f'(-۱)=۱} \quad y'(۰) = \frac{۱}{۲}(-۱)(۱) = -\frac{۱}{۲}$$

۱۲۴ گزینه ۱

نقطهٔ $B(x, \sqrt{۲x+۷})$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم. فاصلهٔ نقطهٔ $A(۵, ۰)$ را از نقطهٔ B محاسبه می‌کنیم:

$$AB = \sqrt{(x-۵)^۲ + (\sqrt{۲x+۷} - ۰)^۲}$$
$$= \sqrt{x^۲ - ۱۰x + ۲۵ + ۲x + ۷} = \sqrt{x^۲ - ۸x + ۳۲}$$

برای به دست آوردن کمترین فاصله، از AB مشتق می‌گیریم:

$$(AB)' = \frac{۲x - ۸}{۲\sqrt{x^۲ - ۸x + ۳۲}} = \frac{x - ۴}{\sqrt{x^۲ - ۸x + ۳۲}}$$
$$(AB)' = ۰ \Rightarrow x = ۴ \Rightarrow B(۴, \sqrt{۱۵})$$

کمترین فاصلهٔ نقطهٔ A از منحنی، برابر است با فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B. درنتیجه داریم:

$$A(۵, ۰), B(۴, \sqrt{۱۵}) \Rightarrow AB = \sqrt{(۵-۴)^۲ + (۰ - \sqrt{۱۵})^۲} = ۴$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۲۵ گزینه ۴

گام اول:

برد تابع $f(x)$ همان محدودهٔ تغییرات مقادیر $f(x)$ بر روی بازهٔ مشخص‌شده است. مقادیر $f(x)$ بر روی یک بازه بین ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع تغییر می‌کند.

گام دوم:

برای یافتن ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع پیوستهٔ $f(x)$ روی بازهٔ $[-۳, ۱]$، ابتدا نقاط بحرانی تابع $f(x)$ را بر روی این بازه یافته و مقدار تابع را در این نقاط و همچنین نقاط ابتدایی و انتهایی بازه می‌یابیم. می‌دانیم نقاط بحرانی تابع $f(x)$، نقاطی است که $f'(x) = ۰$ باشد یا $f'(x)$ موجود نباشد؛ بنابراین داریم:

$$f(x) = x^۳ - ۱۲x + ۸ \Rightarrow f'(x) = ۳x^۲ - ۱۲ = ۳(x^۲ - ۴) = ۰$$

$$\Rightarrow x = ۲\,,\ x = -۲ \xrightarrow{x\in[-۳,۱]} x = -۲$$

$$f(-۳) = (-۳)^۳ - ۱۲(-۳) + ۸ = -۲۷ + ۳۶ + ۸ = ۱۷$$

$$f(-۲) = (-۲)^۳ - ۱۲(-۲) + ۸ = -۸ + ۲۴ + ۸ = ۲۴ \Rightarrow \text{max مطلق}$$

$$f(۱) = ۱^۳ - ۱۲(۱) + ۸ = ۱ - ۱۲ + ۸ = -۳ \Rightarrow \text{min مطلق}$$

بنابراین برد تابع $f(x)$ به‌صورت $[-۳, ۲۴]$ است.

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

گزینه ۳

ابتدا عبارت درون قدر مطلق را تعیین علامت می‌کنیم:

$$x^۲ - ۳ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۳ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۳}$$

x		$-\sqrt{۳}$		$\sqrt{۳}$	
$x^۲-۳$	+	۰	-	۰	+

$$\Rightarrow |x^۲ - ۳| = \begin{cases} x^۲ - ۳ & ; x \geq \sqrt{۳} \text{ یا } x \leq -\sqrt{۳} \\ -x^۲ + ۳ & ; -\sqrt{۳} < x < \sqrt{۳} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^۳ - ۳x & ; x \geq \sqrt{۳} \text{ یا } x \leq -\sqrt{۳} \\ -x^۳ + ۳x & ; -\sqrt{۳} < x < \sqrt{۳} \end{cases}$$

برای یافتن نقاط اکسترمم نسبی تابع، نقاط بحرانی تابع را می‌یابیم؛ بنابراین مشتق تابع را محاسبه و معادلهٔ $f'(x) = ۰$ را حل می‌کنیم.

$$f'(x) = \begin{cases} ۳x^۲ - ۳ & ; x > \sqrt{۳} \text{ یا } x < -\sqrt{۳} \\ -۳x^۲ + ۳ & ; -\sqrt{۳} < x < \sqrt{۳} \end{cases}$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x > \sqrt{۳} \text{ یا } x < -\sqrt{۳} & : \ ۳x^۲ - ۳ = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ = ۳ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱ \quad \text{غ‌ق‌ق} \\ -\sqrt{۳} < x < \sqrt{۳} & : \ -۳x^۲ + ۳ = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ = ۳ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱ \end{cases}$$

حال مشتق‌پذیری تابع را در دو نقطهٔ $x = \sqrt{۳}$ و $x = -\sqrt{۳}$ نیز بررسی می‌کنیم:

$$f'_+(\sqrt{۳}) = ۶ \quad , \quad f'_-(\sqrt{۳}) = -۶ \Rightarrow f'_+(\sqrt{۳}) \neq f'_-(\sqrt{۳})$$

$$f'_+(-\sqrt{۳}) = -۶ \quad , \quad f'_-(-\sqrt{۳}) = ۶ \Rightarrow f'_+(-\sqrt{۳}) \neq f'_-(-\sqrt{۳})$$

تابع $f(x)$ در دو نقطهٔ $x = \sqrt{۳}$ و $x = -\sqrt{۳}$ مشتق‌پذیر نیست. داریم:

x	$-\infty$		$-\sqrt{۳}$		-۱		۱		$\sqrt{۳}$		$+\infty$
$f'(x)$		+		-		+		-		+	
$f(x)$		↗	max	↘	min	↗	max	↘	min	↗	

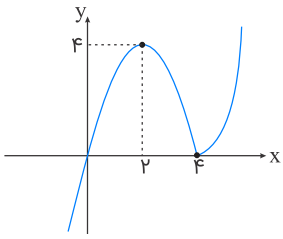
بنابراین مجموعه نقاط ماکسیمم نسبی تابع $f(x)$ به‌صورت $\{-\sqrt{۳}, ۱\}$ است.

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۲۷ گزینه ۴

$$f(x) = x|x-۴| = \begin{cases} x^۲ - ۴x & ; x \geq ۴ \\ ۴x - x^۲ & ; x < ۴ \end{cases}$$

نمودار این تابع به صورت زیر است:



این تابع در $(۴, ۰)$ مینیمم نسبی و در $(۲, ۴)$ ماکزیمم نسبی دارد. فاصلهٔ آن‌ها برابر است با:

$$\sqrt{(۲-۴)^۲ + (۴-۰)^۲} = \sqrt{۴+۱۶} = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$$

۱۲۸ گزینه ۲

$$g(x) = f(۴ - x^۲) \Rightarrow g'(x) = -۲xf'(۴ - x^۲)$$

$$\Rightarrow g''(x) = -۲(f'(۴ - x^۲) + x(-۲x)f''(۴ - x^۲))$$

$$\Rightarrow g''(\sqrt{۳}) = -۲(f'(۱) - ۶f''(۱)) = -۲(-۵ - ۶ \times (-۱)) = -۲$$

۱۲۹ گزینه ۴

به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ - x^۳ \geq -x^۳ \xrightarrow{\text{ریشهٔ سوم}} \sqrt[۳]{x^۲ - x^۳} \geq \sqrt[۳]{-x^۳}$$

$$\Rightarrow \sqrt[۳]{x^۲ - x^۳} \geq -x \Rightarrow x + \sqrt[۳]{x^۲ - x^۳} \geq ۰$$

بنابراین کمترین مقدار تابع $f(x)$ بر روی $\mathbb{R}$ برابر صفر است.

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۳۰ گزینه ۴

$$y=\sqrt{۲۱-x^{۲}+۴x}$$

آهنگ متوسط در بازهٔ $[۵\ ,\ ۶]$ برابر است با:

$$\frac{f(۶)-f(۵)}{۶-۵}=\frac{\sqrt{۲۱-۳۶+۲۴}-\sqrt{۲۱-۲۵+۲۰}}{۱}=\frac{\sqrt{۹}-\sqrt{۱۶}}{۱}=-۱$$

آهنگ لحظه‌ای نیز برابر است با:

$$y'=\frac{-۲x+۴}{۲\sqrt{۲۱-x^{۲}+۴x}}=\frac{\cancel{۲}(-x+۲)}{\cancel{۲}\sqrt{۲۱-x^{۲}+۴x}}=\frac{-x+۲}{\sqrt{۲۱-x^{۲}+۴x}}$$

با برابر قرار دادن این دو داریم:

$$\frac{-x+۲}{\sqrt{۲۱-x^{۲}+۴x}}=-۱\Rightarrow x-۲=\sqrt{۲۱-x^{۲}+۴x}\ \ (*)$$
$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^{۲}-۴x+۴=۲۱-x^{۲}+۴x\Rightarrow ۲x^{۲}-۸x-۱۷=۰$$
$$\Rightarrow x=\frac{۸\pm\sqrt{۲۰۰}}{۴}=۲\pm\frac{۵}{۲}\sqrt{۲}\xrightarrow[(*)]{x\geq ۲}x=۲+\frac{۵}{۲}\sqrt{۲}$$

۱۳۱ گزینه ۲

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر با مشتق تابع در آن نقطه است.

ب) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ $(x_۱, y_۱)$ عبور می‌کند، به‌صورت زیر است:

$$y-y_۱=m(x-x_۱)$$

ج) مختصات نقطهٔ تلاقی در هر دو معادله، صدق می‌کند.

گام دوم

باتوجه‌به قسمت "الف" و "ب" از گام اول، معادلهٔ خط مماس را به دست می‌آوریم:

$$y=x^{۳}-x^{۲}\Rightarrow y'=۳x^{۲}-۲x\Rightarrow m_{\text{مماس}}=y'(۱)=۳-۲=۱$$
$$x=۱\Rightarrow y(۱)=(۱)^{۳}-(۱)^{۲}=۱-۱=۰$$
$$y-y(۱)=y'(۱)(x-۱)\Rightarrow y-۰=x-۱\Rightarrow y=x-۱$$

سپس با مساوی قرار دادن معادلهٔ خط $y=x-۱$ و معادلهٔ منحنی، مختصات نقطهٔ تلاقی را محاسبه می‌کنیم:

$$x-۱=x^{۳}-x^{۲}\Rightarrow x-۱=x^{۲}(x-۱)\Rightarrow(x-۱)(۱-x^{۲})=۰$$
$$\Rightarrow(x-۱)(۱-x)(۱+x)=۰\xrightarrow{x\neq ۱}۱+x=۰\Rightarrow x=-۱$$

بنابراین $x_A=-۱$ است و داریم:

$$y_A=(-۱)^{۳}-(-۱)^{۲}=-۱-۱=-۲$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۳۲ گزینه ۱

یکی از اعداد را x و دیگری را y می‌نامیم. داریم: $y = ۲x - ۶$

می‌خواهیم $x.y$ مینیمم شود پس این حاصل‌ضرب را به‌صورت تابعی برحسب x نوشته و مشتق آن را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$f(x) = x.y = x(۲x - ۶) = ۲x^۲ - ۶x$$

$$\Rightarrow f'_x = ۴x - ۶ = ۰ \Rightarrow ۴x = ۶ \Rightarrow x = \frac{۳}{۲}$$

$$\xrightarrow{y=۲x-۶} y = ۲(\frac{۳}{۲}) - ۶ = ۳ - ۶ = -۳$$

مجموع دو عدد برابر است با:

$$x + y = \frac{۳}{۲} - ۳ = -\frac{۳}{۲}$$

۱۳۳ گزینه ۱

گام اول

الف) تابع در یک نقطه مشتق‌پذیر است؛ هرگاه مشتق چپ و راست تابع در آن نقطه موجود و باهم برابر باشد.

ب) مشتق تابع $gof(x)$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y = gof(x) = g(f(x)) \Rightarrow y' = f'(x)g'(f(x))$$

گام دوم

دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در نقطهٔ $x = ۰$ پیوسته‌اند؛ بنابراین مشتق چپ و راست تابع gof را در نقطهٔ $x = ۰$ به‌طور مستقیم تعیین می‌کنیم.

$$x \to ۰^+ \Rightarrow x > ۰ \Rightarrow |x| = x \Rightarrow \begin{cases} f(x) = ۴x \Rightarrow f'(x) = ۴ \\ g(x) = (\frac{۳}{۴} + a)x \Rightarrow g'(x) = \frac{۳}{۴} + a \end{cases}$$

$$\Rightarrow (gof)'_+(۰) = f'_+(۰)g'_+(f(۰)) = ۴(\frac{۳}{۴} + a) = ۳ + ۴a$$

$$x \to ۰^- \Rightarrow x < ۰ \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow \begin{cases} f(x) = ۲x \Rightarrow f'(x) = ۲ \\ g(x) = (\frac{۳}{۴} - a)x \Rightarrow g'(x) = \frac{۳}{۴} - a \end{cases}$$

$$\Rightarrow (gof)'_-(۰) = f'_-(۰)g'_-(f(۰)) = ۲(\frac{۳}{۴} - a) = \frac{۳}{۲} - ۲a$$

باتوجه‌به قسمت (الف) از گام اول، تابع gof در $x = ۰$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$(gof)'_+(۰) = (gof)'_-(۰) \Rightarrow ۳ + ۴a = \frac{۳}{۲} - ۲a \Rightarrow ۶a = -\frac{۳}{۲} \Rightarrow a = -\frac{۱}{۴}$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۳۴ گزینه ۱

گام اول

الف) تابع $f(x)$ در یک نقطه مشتق‌پذیر است درصورتی‌که اولاً در آن نقطه پیوسته باشد، ثانیاً مشتق راست و چپ تابع در آن نقطه، موجود و باهم برابر باشند.

ب) تابع دو ضابطه‌ای که روی اعداد گنگ و گویا تعریف‌شده، در نقاطی پیوسته است که ضابطه‌ها باهم برابر باشند و در نقاط پیوسته‌ای که ضابطهٔ مشتق باهم برابرند، مشتق‌پذیر است.

گام دوم

برای یافتن نقاط مشتق‌پذیر تابع $f(x)$ ابتدا دو ضابطهٔ آن را مساوی قرار می‌دهیم تا نقاط پیوسته را به دست آوریم:

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲} & ;\ x\text{گویا} \\ ۰ & ;\ x\text{گنگ} \end{cases} \Rightarrow x^{۲}=۰ \Rightarrow x=۰$$

تابع $f(x)$ فقط در نقطهٔ $x=۰$ پیوسته است. بررسی می‌کنیم که آیا در این نقطه مشتق‌پذیر نیز هست یا نه!

$$f'(x)=\begin{cases} ۲x & ;\ x\text{گویا} \\ ۰ & ;\ x\text{گنگ} \end{cases} \Rightarrow ۲x=۰ \Rightarrow x=۰$$

بنابراین تابع $f(x)$ فقط در نقطهٔ $x=۰$ مشتق دارد.

۱۳۵ گزینه ۱

به ازای هر $x\in\mathbb{R}$ داریم:

$$x^{۲}\geq ۰ \Rightarrow -x^{۲}\leq ۰ \Rightarrow x^{۳}-x^{۲}\leq x^{۳} \xrightarrow{\text{ریشهٔ سوم}} \sqrt[۳]{x^{۳}-x^{۲}}\leq \sqrt[۳]{x^{۳}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[۳]{x^{۳}-x^{۲}}\leq x \Rightarrow -x+\sqrt[۳]{x^{۳}-x^{۲}}\leq ۰$$

بنابراین ماکزیمم مطلق تابع $y=-x+\sqrt[۳]{x^{۳}-x^{۲}}$ روی $\mathbb{R}$ برابر صفر است.

۱۳۶ گزینه ۳

حاصل $f'(\frac{۱}{۴})$ را می‌خواهیم:

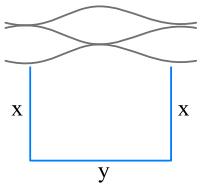
$$f(x)=\frac{-x-۱}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x)=\frac{-۱(\sqrt{x})-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(-x-۱)}{x}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{۱}{۴}} \frac{-\frac{۱}{۲}-۱(-\frac{۵}{۴})}{\frac{۱}{۴}}=\frac{-\frac{۱}{۲}+\frac{۵}{۴}}{\frac{۱}{۴}}=۳$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۳۷ گزینه ۲

اگر طول و عرض زمین را به ترتیب y و x بنامیم آنگاه داریم:



$$y + ۲x = ۸۸ \Rightarrow y = ۸۸ - ۲x$$

مساحت مستطیل برابر با حاصل‌ضرب طول در عرض آن است پس تعریف می‌کنیم:

$$S = xy = x(۸۸ - ۲x) = ۸۸x - ۲x^۲$$

برای محاسبهٔ بیشترین مساحت، معادلهٔ $S'_x = ۰$ را حل می‌کنیم:

$$S'_x = ۸۸ - ۴x \Rightarrow S'_x = ۰ \Rightarrow ۴x = ۸۸ \Rightarrow x = ۲۲ \ , \ y = ۸۸ - ۴۴ = ۴۴$$

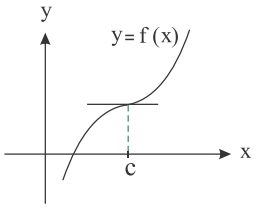
بنابراین:

$$S_{max} = xy = ۲۲ \times ۴۴ = ۹۶۸$$

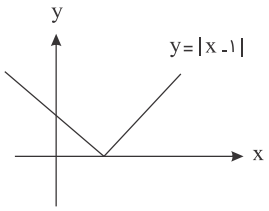
۱۳۸ گزینه ۲

با آوردن مثال نقض، گزینه‌های نادرست را رد می‌کنیم.

گزینهٔ اول: نقطهٔ $x = c$ در نمودار زیر، یک نقطهٔ بحرانی است اما اکسترمم نسبی نیست.



گزینهٔ سوم: نقطهٔ $x = ۱$ در تابع $y = |x - ۱|$ یک نقطهٔ بحرانی است اما مشتق تابع در این نقطه تعریف‌نشده است.



گزینهٔ چهارم: نقطهٔ $x = ۱$ اکسترمم نسبی تابع $y = |x - ۱|$ است اما مشتق تابع در این نقطه برابر با صفر نیست.

بنابراین هر نقطهٔ اکسترمم نسبی، قطعاً یک نقطهٔ بحرانی تابع است.

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۳۹

گزینه ۲

نقاط بحرانی تابع را در فاصلهٔ $[-۴,۳]$ به دست می‌آوریم.

$$f(x)=\frac{۱}{۳}x^{۳}-x^{۲}-۱۵x \Rightarrow f'(x)=x^{۲}-۲x-۱۵$$

$$\xrightarrow{f'(x)=۰} x^{۲}-۲x-۱۵=(x-۵)(x+۳)=۰$$

x		-۳		۵	
f'	$+$	۰	$-$	۰	$+$
	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

نقاط بحرانی تابع در بازهٔ $[-۴,۳]$ $=-۳,-۴,۳$

$$\left.\begin{aligned} f(-۴)&=-\frac{۶۴}{۳}-۱۶+۶۰=\frac{۶۸}{۳}\\ f(-۳)&=\frac{(-۳)^{۳}}{۳}-۹+۴۵=۲۷\\ f(۳)&=\frac{۳^{۳}}{۳}-۹-۴۵=-۴۵\end{aligned}\right\}\xrightarrow{x\in[-۴,۳]}\begin{cases} y_{min}=-۴۵\\ y_{max}=۲۷\end{cases}$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۴۰

گزینه ۳

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ از $x_۱$ تا $x_۲$ چنین تعریف می‌شود:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_۲) - f(x_۱)}{x_۲ - x_۱}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = a$ برابر $f'(a)$ است.

گام دوم

$f'(\alpha)$ و $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ را محاسبه و باهم برابر قرار می‌دهیم، سپس مقدار α را تعیین می‌کنیم.

$$x_۲ = ۵ \text{ تا } x_۱ = ۲ \text{ آهنگ متوسط تغییر تابع از } = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$= \frac{f(۵) - f(۲)}{۵ - ۲} = \frac{\frac{۵}{۵-۱} - \frac{۲}{۲-۱}}{۳} = \frac{\frac{۵}{۴} - ۲}{۳} = \frac{\frac{۵-۸}{۴}}{۳} = \frac{-\frac{۳}{۴}}{۳} = \frac{-۱}{۴}$$

$$f(x) = \frac{x}{x-۱} \Rightarrow f'(x) = \frac{x - ۱ - x}{(x-۱)^۲} = \frac{-۱}{(x-۱)^۲}$$

$$x = \alpha \text{ آهنگ لحظه‌ای در } = f'(\alpha) = \frac{-۱}{(\alpha - ۱)^۲}$$

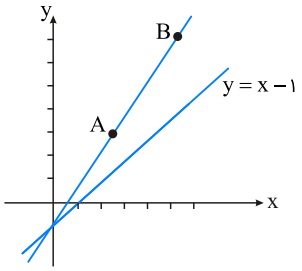
$$\Rightarrow f'(\alpha) = \frac{\Delta f}{\Delta x} \Rightarrow -\frac{۱}{(\alpha-۱)^۲} = -\frac{۱}{۴} \Rightarrow (\alpha - ۱)^۲ = ۴ \Rightarrow \begin{cases} \alpha - ۱ = ۲ \Rightarrow \alpha = ۳ \\ \alpha - ۱ = -۲ \Rightarrow \alpha = -۱ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۴۱

گزینه ۲

دو نقطهٔ A و B و خط داده‌شده را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



همان‌طور که مشاهده می‌کنید دو نقطهٔ A و B در یک طرف خط $y = x - ۱$ قرار دارند؛ بنابراین نقطه‌ای از این خط که تفاضل فاصله‌اش از A و B بیشترین مقدار را دارد، همان محل برخورد خط $y = x - ۱$ و خط گذرنده از نقاط A و B است. ابتدا معادلهٔ خط گذرنده از نقاط A و B را تعیین می‌کنیم:

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$$

$$y - ۳ = \frac{۷ - ۳}{۴ - ۲}(x - ۲) \Rightarrow y - ۳ = ۲(x - ۲) \Rightarrow y - ۳ = ۲x - ۴ \Rightarrow y = ۲x - ۱$$

با مساوی قرار دادن معادلهٔ دو خط، نقطهٔ برخورد آن‌ها را مشخص می‌کنیم:

$$۲x - ۱ = x - ۱ \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow y = -۱ \Rightarrow M(۰, -۱)$$

بنابراین طول نقطهٔ M برابر با صفر است.

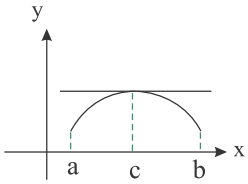
وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

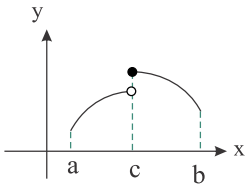
گزینه ۳

با بررسی گزینه‌ها، جواب سؤال را مشخص می‌کنیم.

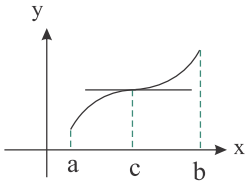
گزینهٔ اول: اگر c نقطهٔ اکسترمم نسبی f و $f'(c)$ موجود باشد آنگاه تابع f در این نقطه پیوسته و خط مماس موجود است بنابراین قطعاً خط مماس در این نقطه افقی است.

گزینهٔ دوم: اگر c نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع f باشد، باتوجه‌به اینکه f روی $[a, b]$ تعریف شده و $a < c < b$ است، یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد که در هر دو حالت c نقطهٔ بحرانی f نیز می‌باشد.





گزینهٔ سوم: فرض می‌کنیم c نقطهٔ بحرانی تابع f باشد، باتوجه‌به نمودار زیر درستی این گزینه را رد می‌کنیم:



گزینهٔ چهارم: باتوجه‌به اینکه c یک نقطه درون بازه است، پس اگر c نقطهٔ اکسترمم مطلق تابع f باشد، قطعاً اکسترمم نسبی تابع نیز می‌باشد؛ بنابراین بر اساس دلیل درستی گزینهٔ دوم، این نقطه یک نقطهٔ بحرانی تابع f است.

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۴۳ گزینه ۴

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه روی آن، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

ب) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ $(x_۱, y_۱)$ عبور می‌کند به‌صورت زیر است:

$$y - y_۱ = m(x - x_۱)$$

گام دوم

فرض می‌کنیم نقطهٔ $A\left(\alpha, \frac{۲\alpha - ۱}{\alpha + ۱}\right)$ بر روی منحنی قرار داشته باشد. با محاسبهٔ مشتق تابع در این نقطه، معادلهٔ خط مماس را تشکیل می‌دهیم.

$$y' = \frac{۲(x+۱) - (۲x - ۱)}{(x+۱)^۲}$$

$$\xrightarrow{A\left(\alpha, \frac{۲\alpha-۱}{\alpha+۱}\right)} y'_A = \frac{۲(\alpha+۱) - (۲\alpha - ۱)}{(\alpha+۱)^۲} = \frac{۲\alpha + ۲ - ۲\alpha + ۱}{(\alpha+۱)^۲} = \frac{۳}{(\alpha+۱)^۲}$$

$$y - y_A = y'_A(x - x_A) \Rightarrow y - \frac{۲\alpha - ۱}{\alpha + ۱} = \frac{۳}{(\alpha+۱)^۲}(x - \alpha)$$

خط مماس از نقطهٔ $(-۱, ۰)$ می‌گذرد و بنابراین مختصات این نقطه در معادلهٔ خط صدق می‌کند:

$$\xrightarrow{x=-۱, y=۰} ۰ - \frac{۲\alpha - ۱}{\alpha + ۱} = \frac{۳}{(\alpha+۱)^۲}(-۱ - \alpha)$$

$$\Rightarrow -\frac{۲\alpha - ۱}{\alpha + ۱} = -\frac{۳(\alpha+۱)}{(\alpha+۱)^۲} \Rightarrow \frac{۲\alpha - ۱}{\alpha + ۱} = \frac{۳}{\alpha + ۱}$$

دقت کنید که نقطهٔ $x = -۱$ عضو دامنهٔ تابع $y = \frac{۲x - ۱}{x + ۱}$ نیست و تابع در این نقطه تعریف نشده است بنابراین $\alpha \neq -۱$ است (زیرا نقطه $A\left(\alpha, \frac{۲\alpha - ۱}{\alpha + ۱}\right)$ روی منحنی تابع قرار دارد) پس می‌توان عبارت $\alpha + ۱$ را در کسر فوق ساده کرد. داریم:

$$۲\alpha - ۱ = ۳ \Rightarrow ۲\alpha = ۴ \Rightarrow \alpha = ۲$$

۱۴۴ گزینه ۴

طبق تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{h \to ۰} \frac{f(-۲ + h) + ۳}{h} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} f(-۲) = -۳ \\ f'(-۲) = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$(x^۲ f(x))' = ۲xf(x) + x^۲ f'(x)$$

$$\xrightarrow{x=-۲} -۴f(-۲) + ۴f'(-۲) = -۴(-۳) + ۴(\frac{۱}{۲}) = ۱۲ + ۲ = ۱۴$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۴۵

گزینه ۳

گام اول

می‌دانیم: $y = f(u) \quad \Rightarrow \quad y' = u'f'(u)$

گام دوم

با تعریف $u = xf(x)$ و باتوجه‌به گام اول، مشتق $f(xf(x))$ را تعیین و مقدار آن را در $x = ۲$ محاسبه می‌کنیم.

$$u = xf(x) \quad \Rightarrow \quad u' = f(x) + xf'(x)$$

$$y = f(xf(x)) \quad \Rightarrow \quad y' = (f(x) + xf'(x))\, f'(xf(x))$$

اکنون ضابطهٔ $f'(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{۳}{۲} - \sqrt{x+۲} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{۱}{۲\sqrt{x+۲}}$$

بنابراین داریم:

$$y' = \left(\frac{۳}{۲} - \sqrt{x+۲} - \frac{x}{۲\sqrt{x+۲}}\right)\left(-\frac{۱}{۲\sqrt{xf(x)+۲}}\right)$$

$$= \left(\frac{۳}{۲} - \sqrt{x+۲} - \frac{x}{۲\sqrt{x+۲}}\right)\left(-\frac{۱}{۲\sqrt{\frac{۳}{۲}x - x\sqrt{x+۲}+۲}}\right)$$

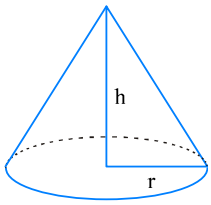
$$\Rightarrow \quad y'(۲) = \left(\frac{۳}{۲} - ۲ - \frac{۱}{۲}\right)\left(-\frac{۱}{۲\sqrt{۳-۴+۲}}\right) = (-۱)\left(-\frac{۱}{۲}\right) = \frac{۱}{۲}$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۴۶

گزینه ۱

مخروطی به شعاع r و ارتفاع h در نظر می‌گیریم. داریم:



$$r + h = ۱ \Rightarrow r = ۱ - h$$

حجم این مخروط برابر است با:

$$V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h \xrightarrow{r=۱-h} V = \frac{۱}{۳}\pi(۱-h)^۲ h = \frac{۱}{۳}\pi(h^۳ - ۲h^۲ + h)$$

برای ماکسیمم کردن حجم مخروط، ابتدا معادلهٔ $V'_h = ۰$ را حل می‌کنیم:

$$V'_h = \frac{۱}{۳}\pi(۳h^۲ - ۴h + ۱)$$

$$V'_h = ۰ \Rightarrow ۳h^۲ - ۴h + ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} h_۱ = ۱ & \text{غ ق ق (زیرا } r + h = ۱\text{)} \\ h_۲ = \frac{۱}{۳} \end{cases}$$

بنابراین به ازای $h = \frac{۱}{۳}$، بزرگ‌ترین حجم مخروط به دست می‌آید:

$$V_{max} = \frac{۱}{۳}\pi\left((\frac{۱}{۳})^۳ - ۲(\frac{۱}{۳})^۲ + \frac{۱}{۳}\right) = \frac{۴\pi}{۸۱}$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۴۷ گزینه ۲

گام اول

می‌دانیم $gof(x) = g(f(x))$ و $(gof)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ است. توجه کنید که دامنهٔ تعریف تابع $gof(x)$ به‌صورت زیر است:

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، ابتدا ضابطهٔ $gof(x)$ را تعیین کرده و مشتق آن را به دست می‌آوریم. برای تعیین ضابطهٔ $g(f(x))$ کافی است در ضابطهٔ $g(x)$ به‌جای متغیر x، ضابطهٔ $f(x)$ را قرار دهیم.

$$D_f = (-۱, ۱), D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_{gof} = (-۱, ۱)$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{۱ - x^۲}}, g(x) = \frac{x}{\sqrt{۱ + x^۲}}$$

$$gof(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)}{\sqrt{۱ + (f(x))^۲}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}}{\sqrt{۱ + \frac{x^۲}{۱-x^۲}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}}{\sqrt{\frac{۱-x^۲}{۱-x^۲} + \frac{x^۲}{۱-x^۲}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}}{\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}} = x \quad ; \ -۱ < x < ۱$$

$$\Rightarrow y = gof(x) = x \Rightarrow f'(x)\, g'(f(x)) = y' = ۱ \ ; -۱ < x < ۱$$

۱۴۸ گزینه ۱

نقطهٔ $M(\alpha, \alpha\sqrt{\alpha})$ را بر روی منحنی $y = x\sqrt{x}$ در نظر می‌گیریم. فاصلهٔ میان دو نقطهٔ A و M برابر است با:

$$MA = \sqrt{(\alpha - ۸)^۲ + (\alpha\sqrt{\alpha} - ۰)^۲} = \sqrt{\alpha^۲ - ۱۶\alpha + ۶۴ + \alpha^۳} = \sqrt{\alpha^۳ + \alpha^۲ - ۱۶\alpha + ۶۴}$$

برای مینیمم کردن فاصلهٔ MA، ابتدا معادلهٔ $(MA)'_\alpha = ۰$ را حل می‌کنیم. داریم:

$$(MA)'_\alpha = \frac{۳\alpha^۲ + ۲\alpha - ۱۶}{۲\sqrt{\alpha^۳ + \alpha^۲ - ۱۶\alpha + ۶۴}}$$

$$(MA)'_\alpha = ۰ \Rightarrow ۳\alpha^۲ + ۲\alpha - ۱۶ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \alpha = ۲ \\ \alpha = -\frac{۱۶}{۶} \quad (*)\text{غ ق ق} \end{cases}$$

* دامنهٔ تابع $y = x\sqrt{x}$ به‌صورت بازهٔ $[۰, +\infty)$ است.

بنابراین کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ A از منحنی $y = x\sqrt{x}$ برابر است با:

$$(MA)_{min} = \sqrt{(۲ - ۸)^۲ + (۲\sqrt{۲})^۲} = \sqrt{۳۶ + ۸} = \sqrt{۴۴} = ۲\sqrt{۱۱}$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۴۹

گزینه ۳

گام اول

آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ از x به $x+\Delta x$ چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

گام دوم

طبق تعریف آهنگ متوسط تغییر داریم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر از ۲ به } ۲+h = \frac{f(۲+h)-f(۲)}{۲+h-۲} = \frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}$$

بنابراین:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر از ۲ به } ۲+h = \frac{\left(۲+h+\frac{۱}{۲+h}\right)-\left(۲+\frac{۱}{۲}\right)}{h} = \frac{h+\frac{۱}{۲+h}-\frac{۱}{۲}}{h} = \frac{۸}{۹}$$

$$\Rightarrow h+\frac{۱}{۲+h}-\frac{۱}{۲} = \frac{۸}{۹}h \xrightarrow{\times ۹} ۹h+\frac{۹}{۲+h}-\frac{۹}{۲} = ۸h$$

$$\Rightarrow h+\frac{۹}{۲+h} = \frac{۹}{۲} \Rightarrow \frac{h(h+۲)+۹}{۲+h} = \frac{۹}{۲} \Rightarrow \frac{h^۲+۲h+۹}{۲+h} = \frac{۹}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲h^۲+۴h+۱۸ = ۹h+۱۸ \Rightarrow ۲h^۲-۵h = ۰ \Rightarrow h(۲h-۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} h = ۰ & \text{غ ق ق} \\ h = \frac{۵}{۲} = ۲/۵ \end{cases}$$

اگر $h = ۰$ باشد، متغیر اصلاً تغییری نکرده و آهنگ متوسط تغییر آن برابر صفر می‌شود.

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۵۰ گزینه ۱

گام اول

الف) دو خط موازی‌اند اگر و تنها اگر شیب آن‌ها باهم برابر باشد.

ب) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر مقدار مشتق تابع در آن نقطه است.

گام دوم

برای یافتن شیب خط، ابتدا معادلهٔ آن را به‌صورت استاندارد بازنویسی می‌کنیم:

$$(m+۲)\,y = mx \quad \Rightarrow \quad y = \left(\frac{m}{m+۲}\right)x$$

شیب این خط برابر $\left(\frac{m}{m+۲}\right)$ است. کافی است ضابطهٔ $f'(x)$ را تعیین کنیم و مساوی شیب خط قرار دهیم:

$$f(x) = \sqrt{۱+x^۲} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{۲x}{۲\sqrt{۱+x^۲}} = \frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}$$

$$f'(x_۰) = \frac{m}{m+۲} \quad \Rightarrow \quad \frac{x_۰}{\sqrt{۱+x_۰^۲}} = \frac{m}{m+۲}$$

می‌دانیم $-۱ < \frac{x_۰}{\sqrt{۱+x_۰^۲}} < ۱$ همواره برقرار است بنابراین:

$$\begin{cases} \frac{m}{m+۲} > -۱ \Rightarrow \frac{m}{m+۲} + ۱ > ۰ \Rightarrow \frac{m+m+۲}{m+۲} > ۰ \Rightarrow m < -۲ \text{ یا } m > -۱ \\ \frac{m}{m+۲} < ۱ \Rightarrow \frac{m}{m+۲} - ۱ < ۰ \Rightarrow \frac{m-m-۲}{m+۲} < ۰ \Rightarrow m > -۲ \end{cases}$$

از اشتراک جواب‌های دو معادلهٔ فوق داریم: $m > -۱$

۱۵۱ گزینه ۱

به ازای $x = ۱$ عبارت $(x-۱)$ برابر صفر می‌شود (عامل صفرشونده)، همچنین تابع $g(x) = \frac{\sqrt[۵]{۳x-۲}}{(۵x-۳)^۴}$ نیز در نقطهٔ $x = ۱$ پیوسته است؛ بنابراین برای به دست آوردن مقدار $f'(۱)$ کافی است مشتق عبارت $(x-۱)$ را در تابع $g(x)$ ضرب و حاصل را به ازای $x = ۱$ محاسبه می‌کنیم:

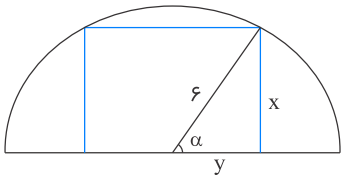
$$f(x) = \frac{(x-۱)\sqrt[۵]{۳x-۲}}{(۵x-۳)^۴} \xrightarrow[\text{در نقطهٔ } x=۱]{\text{عبارت } (x-۱) \text{ عامل صفرشونده}} f'(x) = ۱ \times \frac{\sqrt[۵]{۳x-۲}}{(۵x-۳)^۴}$$

$$\Rightarrow \quad f'(۱) = \frac{\sqrt[۵]{۳-۲}}{(۵-۳)^۴} = \frac{۱}{۲^۴} = \frac{۱}{۱۶} \quad \Rightarrow \quad f'(۱) = \frac{۱}{۱۶}$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۵۲ گزینه ۴

راه‌حل اول:

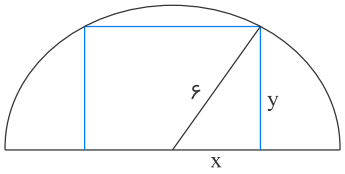


$$\sin\alpha = \frac{x}{۶} \Rightarrow x = ۶\sin\alpha$$
$$\cos\alpha = \frac{y}{۶} \Rightarrow y = ۶\cos\alpha$$

مساحت مستطیل : $S = x(۲y) = ۲(۳۶)\sin\alpha\cos\alpha = ۳۶\sin ۲\alpha$

مساحت وقتی ماکزیمم است که $\sin ۲\alpha = ۱$ باشد. بنابراین: $S_{max} = ۳۶$

راه‌حل دوم:



$$x^۲ + y^۲ = ۳۶ \Rightarrow y = \sqrt{۳۶ - x^۲}$$
$$S = ۲xy = ۲x\sqrt{۳۶ - x^۲}$$
$$S' = ۲\sqrt{۳۶ - x^۲} + \frac{-۴x^۲}{۲\sqrt{۳۶ - x^۲}} = ۰$$
$$\Rightarrow x^۲ = ۳۶ - x^۲ \Rightarrow x^۲ = ۱۸ \Rightarrow x = ۳\sqrt{۲}$$
$$\Rightarrow y = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$$
$$S_{max} = ۲ \times ۳\sqrt{۲} \times ۳\sqrt{۲} = ۳۶$$

۱۵۳ گزینه ۴

آهنگ لحظه‌ای در $x = ۳$ $= f'(۳)$

$$f(x) = x^۳ \Rightarrow f'(x) = ۳x^۲ \Rightarrow f'(۳) = ۲۷ \quad (۱)$$

آهنگ متوسط تغییر $= \dfrac{f(۳ + \Delta x) - f(۳)}{\Delta x} = \dfrac{f(۳/۱) - f(۳)}{۰/۱} = \dfrac{(۳/۱)^۳ - ۳^۳}{۰/۱} = ۲۷/۹۱ \quad (۲)$

$$\xrightarrow{(۲)\ ,\ (۱)} ۲۷/۹۱ - ۲۷ = ۰/۹۱$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۵۴

گزینه ۲

گام اول

الف) باتوجه‌به خواص تابع جزء صحیح می‌دانیم: $۰ \leq x - [x] < ۱$

ب) هرگاه f تابعی اکیداً صعودی باشد، به ازای هر $x < y$ داریم: $f(x) < f(y)$

گام دوم

باتوجه‌به قسمت "الف" از گام اول می‌توان نوشت:

$$۰ \leq x - [x] < ۱ \xrightarrow{\times(-۱)} -۱ < [x] - x \leq ۰ \Rightarrow -۱ < f(x) \leq ۰$$

$$gof(x) = g(f(x)) = ۲^{[x]-x}$$

چون g تابعی اکیداً صعودی است، پس داریم:

$$-۱ < f(x) \leq ۰ \xrightarrow{\text{g اکیداً صعودی}} g(-۱) < g(f(x)) \leq g(۰)$$

$$\Rightarrow ۲^{-۱} < ۲^{[x]-x} \leq ۲^{۰} \Rightarrow \frac{۱}{۲} < ۲^{[x]-x} \leq ۱ \quad \Rightarrow \frac{۱}{۲} < gof \leq ۱$$

بنابراین تابع gof دارای ماکسیمم و فاقد مینیمم است.

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۵۵ گزینه ۱

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع در بازه‌ای از x تا $x+\Delta x$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

ب) منظور از نمو متغیر همان Δx است، پس داریم: $\Delta x=۰/۲۱$

ج) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در یک نقطه برابر مقدار مشتق تابع در آن نقطه است.

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطهٔ $x=۱$ را به دست می‌آوریم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع از } x_۱=۱ \text{ تا } x_۲=۱/۲۱=\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(۱/۲۱)-f(۱)}{۱/۲۱-۱}$$

$$=\frac{\sqrt{۱/۲۱}-\sqrt{۱}}{۰/۲۱}=\frac{۱/۱-۱}{۰/۲۱}=\frac{۰/۱}{۰/۲۱}=\frac{\frac{۱}{۱۰}}{\frac{۲۱}{۱۰۰}}=\frac{۱۰}{۲۱}$$

برای به دست آوردن آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در $x=۱$، ابتدا باید ضابطهٔ مشتق تابع را به دست آوریم:

$$f(x)=\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

بنابراین:

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در } x=۱=f'(۱)=\frac{۱}{۲\sqrt{۱}}=\frac{۱}{۲}$$

درنهایت، اختلاف آهنگ لحظه‌ای و آهنگ متوسط برابر است با:

$$f'(۱)-\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{۱}{۲}-\frac{۱۰}{۲۱}=\frac{۲۱-۲۰}{۴۲}=\frac{۱}{۴۲}$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

گزینه ۴

گام اول

الف) تابع $y=[f(x)]$ به ازای مقادیری که تابع $f(x)$ برابر یک عدد صحیح می‌شود، ناپیوسته و درنتیجه مشتق‌ناپذیر است.

ب) هرکدام از دو تابع $\left[x+\frac{۱}{۳}\right]$ و $[x]$ روی بازهٔ $(۰,۳)$ مشتق‌ناپذیر شوند، کل تابع $f(x)=\left[x+\frac{۱}{۳}\right]+[x]$ مشتق‌ناپذیر خواهد شد.

گام دوم

روش اول:

بررسی می‌کنیم در چه نقاطی از بازهٔ $(۰,۳)$، عبارت درون جزء صحیح برابر یک عدد صحیح می‌شود:

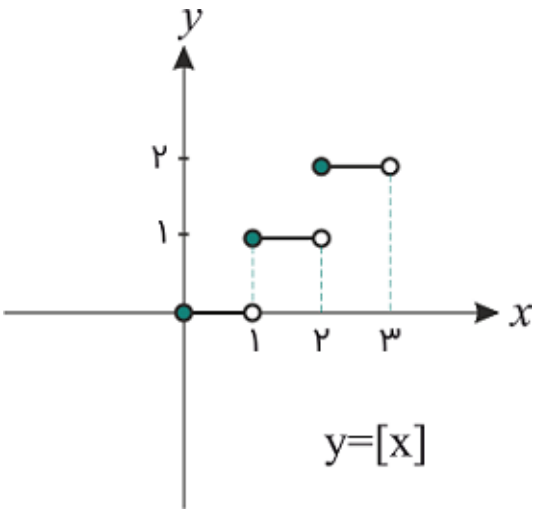
$$۱)\quad y=[x]:\quad x\in\mathbb{Z}\ ,\ x\in(۰,۳)\ \Rightarrow\ x=۱\ ,\ x=۲$$

$$۲)\quad y=\left[x+\frac{۱}{۳}\right]:\quad x+\frac{۱}{۳}\in\mathbb{Z}\ ,\ x\in(۰,۳)\ \Rightarrow x=\frac{۲}{۳}\ ,\ x=\frac{۵}{۳}\ ,\ x=\frac{۸}{۳}$$

بنابراین تابع $f(x)$ درمجموع در ۵ نقطه ناپیوسته و درنتیجه مشتق‌ناپذیر است.

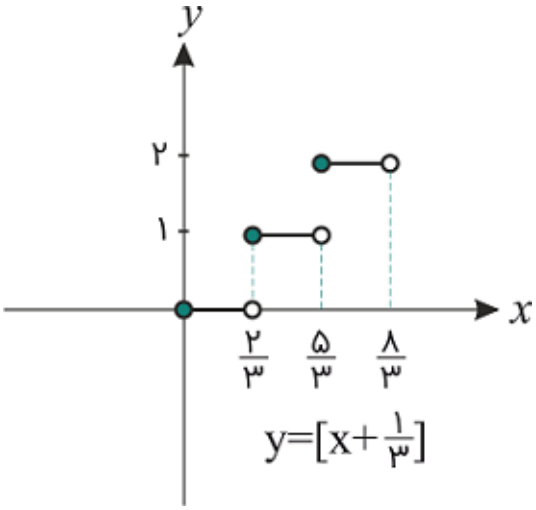
روش دوم:

با رسم نمودار توابع $y=\left[x+\frac{۱}{۳}\right]$ و $y=[x]$، نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)$ را مشخص می‌کنیم:



نقاط ناپیوستگی: $x=۱\ ,\ x=۲$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com



نقاط ناپیوستگی: $x = \frac{۸}{۳}$, $x = \frac{۵}{۳}$, $x = \frac{۲}{۳}$

بنابراین تابع $f(x)$ در ۵ نقطه ناپیوسته و درنتیجه مشتق‌ناپذیر است.

۱۵۷ گزینه ۱

گام اول

الف) فرض کنیم c نقطهٔ بحرانی تابع f باشد؛ همچنین فرض کنیم f بر بازهٔ I شامل c پیوسته و بر این بازه به‌جز احتمالاً در c مشتق‌پذیر باشد. در اینصورت c طول نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع f است، هرگاه $f'(x)$ قبل و بعد از c تغییر علامت داده باشد.

ب) نقطهٔ $c \in D_f$، نقطهٔ بحرانی تابع f است؛ هرگاه $f'(c) = ۰$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

گام دوم

$$f(x) = \frac{x^۲ - ۲x}{x + a} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-a\}$$

$$f'(x) = \frac{(۲x - ۲)(x + a) - (x^۲ - ۲x)}{(x + a)^۲} = \frac{x^۲ + ۲ax - ۲a}{(x + a)^۲}$$

بررسی می‌کنیم به‌ازای چه مقادیری از a، معادلهٔ $f'(x) = ۰$ دارای ریشهٔ ساده است.

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow \frac{x^۲ + ۲ax - ۲a}{(x + a)^۲} = ۰ \Rightarrow x^۲ + ۲ax - ۲a = ۰$$

این معادلهٔ درجه‌دو ریشهٔ ساده خواهد داشت هرگاه $\Delta > ۰$ باشد، پس داریم:

$$(۲a)^۲ - ۴(۱)(-۲a) > ۰ \Rightarrow ۴a^۲ + ۸a = ۴a(a + ۲) > ۰$$

a		-۲		۰	
$۴a(a+۲)$	$+$	۰	$-$	۰	$+$

بنابراین به‌ازای $a < -۲$ یا $a > ۰$، تابع f دارای اکسترمم نسبی است.

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۵۸ گزینه ۳

برای یافتن مینیمم مطلق یک تابع پیوسته، مقدار تابع را در نقاط بحرانی آن یافته و کمترین آن‌ها را مشخص می‌کنیم. نقطهٔ بحرانی تابع، نقاطی از دامنهٔ تعریف آن است که به‌ازای آن‌ها $f'(x) = ۰$ یا $f'(x)$ موجود نباشد.

چون دامنهٔ تابع چندجمله‌ای $f(x)$ برابر $\mathbb{R}$ است، کافی است ریشه‌های معادلهٔ $f'(x) = ۰$ را به دست آوریم:

$$f(x) = \frac{x^۴}{۴} - \frac{x^۳}{۳} - x^۲ \Rightarrow f'(x) = x^۳ - x^۲ - ۲x = x(x-۲)(x+۱)$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow x(x-۲)(x+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲ \\ x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \end{cases}$$

هر سه مقدار فوق عضو بازهٔ $[-۱, ۳]$ هستند. کمترین مقدار تابع را به‌ازای چهار مقدار $x = ۰, ۲, -۱, ۳$ به دست می‌آوریم:

$$f(-۱) = \frac{(-۱)^۴}{۴} - \frac{(-۱)^۳}{۳} - (-۱)^۲ = -\frac{۵}{۱۲}$$

$$f(۰) = ۰$$

$$f(۲) = \frac{۲^۴}{۴} - \frac{۲^۳}{۳} - ۲^۲ = -\frac{۸}{۳}$$

$$f(۳) = \frac{۳^۴}{۴} - \frac{۳^۳}{۳} - ۳^۲ = \frac{۹}{۴}$$

کمترین مقدار تابع روی بازهٔ $[-۱, ۳]$ برابر $y = -\frac{۸}{۳}$ است.

۱۵۹ گزینه ۱

$$y = fog(x) \Rightarrow y' = g'(x)f'(g(x))$$

$$\xrightarrow{x=۲} y'(۲) = g'(۲)f'(g(۲)) \Rightarrow ۶ = g'(۲)f'(\frac{۴+۱}{۲-۱}) \Rightarrow ۶ = g'(۲)f'(۵) \quad (۱)$$

$$g(x) = \frac{۲x+۱}{x-۱} \Rightarrow g'(x) = \frac{۲(x-۱) - (۲x+۱)}{(x-۱)^۲} = \frac{-۳}{(x-۱)^۲}$$

$$\Rightarrow g'(۲) = -۳$$

$$(۱) : ۶ = -۳f'(۵) \Rightarrow f'(۵) = -۲$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۶۰ گزینه ۳

گام اول

الف) $f'_+(۰)$ بیانگر مشتق راست تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=۰$ و $f'_-(۰)$ بیانگر مشتق چپ تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=۰$ است.

ب) می‌دانیم: $|x| = \begin{cases} x & ; x \geq ۰ \\ -x & ; x < ۰ \end{cases}$

گام دوم

ابتدا ضابطهٔ تابع $f(x)$ را به ازای $x > ۰$ و $x < ۰$ تعیین و مشتق چپ و راست آن را در نقطهٔ $x=۰$ محاسبه می‌کنیم.

$$x > ۰ : |x| = x \ , \ [x] = ۰ \Rightarrow f(x) = x \times ۰ = ۰ \Rightarrow f'_+(۰) = ۰$$
$$x < ۰ : |x| = -x \ , \ [x] = -۱ \Rightarrow f(x) = (-x)(-۱) = x \Rightarrow f'_-(۰) = ۱$$

بنابراین:

$$f'_-(۰) - f'_+(۰) = ۱ - ۰ = ۱$$

۱۶۱ گزینه ۴

چون خط $y = ۳x - ۵$ در $x=۲$ بر $g(x)$ مماس است، پس $g'(۲) = ۳$ و $A(۲,۱) \in g$ خواهد بود.

ازطرفی چون $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{f(x)-f(۱)}{۲(x-۱)} = \frac{۲}{۳}$ است، پس:

$$\frac{۱}{۲}f'(۱) = \frac{۲}{۳} \Rightarrow f'(۱) = \frac{۴}{۳}$$
$$y = fog(x) \Rightarrow y' = g'(x)f'(g(x)) \Rightarrow y'(۲) = g'(۲)f'(g(۲))$$

$$\Rightarrow y'(۲) = ۳f'(۱) = ۳ \times \frac{۴}{۳} = ۴$$

۱۶۲ گزینه ۴

$$\begin{cases} f(۲) = \frac{۲+۲}{۲-۱} = ۴ \\ g(۲) = ۴a + ۲b \end{cases} \xrightarrow{f(۲)=g(۲)} ۴a + ۲b = ۴ \quad (۱)$$

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{x-۱-(x+۲)}{(x-۱)^۲} = \frac{-۳}{(x-۱)^۲} \Rightarrow f'(۲) = -۳ \\ g'(x) = ۲ax + b \Rightarrow g'(۲) = ۴a + b \end{cases}$$

$$\xrightarrow{f'(۲)=g'(۲)} ۴a + b = -۳ \quad (۲)$$

باتوجه‌به (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} ۴a + ۲b = ۴ \\ ۴a + b = -۳ \end{cases} \Rightarrow b = ۷$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۶۳ گزینه ۳

$$f(x)=\frac{|x|\,|x^{۲}-۲|}{x}$$

دامنهٔ تابع f، $\mathbb{R}-\{۰\}$ است. تابع f در ریشه‌های سادهٔ داخل قدرمطلق یعنی $\pm\sqrt{۲}$ مشتق ندارد. همچنین در ریشهٔ مخرج یعنی $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست.

دقت کنید که تعداد نقاط مشتق‌ناپذیری روی دامنه دو نقطه و روی $\mathbb{R}$ سه نقطه است. منظور سؤال بررسی مشتق‌ناپذیری روی $\mathbb{R}$ است.

۱۶۴ گزینه ۱

گام اول

می‌دانیم مشتق تابع $y=u^{n}$ که u تابعی برحسب x است، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y'=nu'u^{n-۱}$$

گام دوم

با استفاده از گام اول مشتق را محاسبه می‌کنیم:

$$y=\left(\frac{۱۶}{x}-\sqrt[۳]{x^{۲}}\right)^{۲}\quad\Rightarrow\quad y=\left(\frac{۱۶}{x}-x^{\frac{۲}{۳}}\right)^{۲}$$

$$\Rightarrow y'=۲\times\left(-\frac{۱۶}{x^{۲}}-\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}\right)\left(\frac{۱۶}{x}-x^{\frac{۲}{۳}}\right)\quad\Rightarrow\quad y'=۲\left(-\frac{۱۶}{x^{۲}}-\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}\right)\left(\frac{۱۶}{x}-x^{\frac{۲}{۳}}\right)$$

$$\xrightarrow{x=-۸} y'=۲\left(-\frac{۱۶}{۶۴}-\frac{۲}{۳\times(-۲)}\right)\left(\frac{۱۶}{-۸}-۴\right)=۲\left(-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۳}\right)(-۲-۴)=۲\left(\frac{۱}{۱۲}\right)(-۶)=-\frac{۱۲}{۱۲}=-۱$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۶۵ گزینه ۲

برای تعیین ماکزیمم مطلق یک تابع پیوسته، مقدار تابع را در نقاط بحرانی می‌یابیم. بیشترین مقدار ماکزیمم مطلق تابع خواهد بود. نقاط بحرانی، نقاطی از دامنهٔ تعریف تابع هستند که به‌ازای آن‌ها $f'(x) = ۰$ یا $f'(x)$ موجود نباشد.

$$f(x) = \frac{۱}{x^۴ - ۴x^۳ + ۴x^۲ + ۵} \Rightarrow f'(x) = \frac{۰ - (۴x^۳ - ۱۲x^۲ + ۸x)}{(x^۴ - ۴x^۳ + ۴x^۲ + ۵)^۲} = \frac{-۴x(x-۲)(x-۱)}{(x^۴ - ۴x^۳ + ۴x^۲ + ۵)^۲}$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow -۴x(x-۲)(x-۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲ \\ x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \end{cases}$$

هیچ‌یک از سه مقدار به‌دست‌آمده مخرج تابع $f'(x)$ را صفر نمی‌کنند، بنابراین هر سه طول نقطهٔ بحرانی تابع $f(x)$ هستند. همچنین ابتدا و انتهای بازه هم نقاط بحرانی محسوب می‌شوند، پس داریم:

$$f(۰) = \frac{۱}{۰ + ۵} = \frac{۱}{۵}$$

$$f(۱) = \frac{۱}{۱ - ۴ + ۴ + ۵} = \frac{۱}{۶}$$

$$f(۲) = \frac{۱}{۱۶ - ۳۲ + ۱۶ + ۵} = \frac{۱}{۵}$$

بنابراین ماکزیمم مطلق تابع $f(x)$ برابر $\frac{۱}{۵}$ است.

۱۶۶ گزینه ۱

$$f'(x) = \frac{(۲x+۲)(x^۲+۱) - ۲x(x^۲+۲x-۳)}{(x^۲+۱)^۲} = ۰$$

$$\Rightarrow (۲x+۲)(x^۲+۱) - ۲x(x^۲+۲x-۳) = ۰$$

$$\Rightarrow \cancel{۲x^۳} + ۲x + ۲x^۲ + ۲ - \cancel{۲x^۳} - ۴x^۲ + ۶x = ۰$$

$$\Rightarrow -۲x^۲ + ۸x + ۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۴x - ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow \Delta = ۲۰ \Rightarrow x = \frac{۴ \pm ۲\sqrt{۵}}{۲} = ۲ \pm \sqrt{۵}$$

x	$-\infty$		$۲-\sqrt{۵}$		$۲+\sqrt{۵}$		$+\infty$
f′		−		+		−	
f		↘	min	↗	$-۱+\sqrt{۵}$ max	↘	

$$f(۲+\sqrt{۵}) = \frac{(۲+\sqrt{۵})^۲ + ۴ + ۲\sqrt{۵} - ۳}{(۲+\sqrt{۵})^۲ + ۱}$$

$$= \frac{۹ + ۴\sqrt{۵} + ۲\sqrt{۵} + ۱}{۹ + ۴\sqrt{۵} + ۱} = \frac{۱۰ + ۶\sqrt{۵}}{۱۰ + ۴\sqrt{۵}} = \frac{۵ + ۳\sqrt{۵}}{۵ + ۲\sqrt{۵}} \times \frac{۵ - ۲\sqrt{۵}}{۵ - ۲\sqrt{۵}} = -۱ + \sqrt{۵}$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۶۷ گزینه ۱

برای آنکه نمودار تابع $y = ۲x^۲ + (m+۱)x + m + ۶$ بر نیمساز ناحیهٔ اول مماس باشد، باید معادلهٔ تقاطع تابع را با خط $y = x$ نوشته و Δ را برابر صفر قرار دهیم.

$$\begin{cases} y = x \\ y = ۲x^۲ + (m+۱)x + m + ۶ \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = ۲x^۲ + (m+۱)x + m + ۶ \Rightarrow ۲x^۲ + mx + m + ۶ = ۰$$

$$\Delta = ۰ \;\Rightarrow\; m^۲ - ۸(m+۶) = ۰ \Rightarrow m^۲ - ۸m - ۴۸ = ۰$$

$$\Rightarrow (m-۱۲)(m+۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = ۱۲ \\ m = -۴ \end{cases}$$

شیب نمودار در نقطهٔ برخورد برابر ۱ است. از معادلهٔ کلی، مشتق می‌گیریم. داریم:

$$y' = ۴x + m + ۱ \xrightarrow{y'=۱} ۱ = ۴x + m + ۱ \Rightarrow x = -\frac{m}{۴}$$

چون نمودار بر نیمساز ناحیهٔ اول مماس می‌باشد، بنابراین $x > ۰$ لذا $m = -۴$ قابل‌قبول است.

۱۶۸ گزینه ۴

$$f(x) = \left(\frac{۲x - x^۲}{۳x + ۵}\right)^{\frac{۲}{۳}}$$

$$f'(x) = \frac{۲}{۳}\left(\frac{۲x - x^۲}{۳x + ۵}\right)^{\frac{-۱}{۳}} \left(\frac{(۲-۲x)(۳x+۵) - ۳(۲x - x^۲)}{(۳x+۵)^۲}\right)$$

$$\Rightarrow f'(-۲) = \frac{۲}{۳}\left(\frac{-۴-۴}{-۶+۵}\right)^{-\frac{۱}{۳}} \left(\frac{۶(-۱) - ۳(-۴-۴)}{(-۶+۵)^۲}\right)$$

$$= \frac{۲}{۳}(۸)^{\frac{-۱}{۳}}(-۶ + ۲۴) = \frac{۲ \times ۱۸}{۳\sqrt[۳]{۸}} = ۶$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۶۹ گزینه ۱

برای تعیین اکسترمم‌های نسبی تابع $f(x)$ و نوع آن‌ها از آزمون مشتق اول استفاده می‌کنیم.
ابتدا از تابع $f(x)$ مشتق گرفته و با حل معادلهٔ $f'(x) = ۰$، نقاط بحرانی تابع را تعیین می‌کنیم.

$$f(x) = x^۴ - ۶x^۲ + ۸x \Rightarrow f'(x) = ۴x^۳ - ۱۲x + ۸$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow ۴(x^۳ - ۳x + ۲) = ۰ \Rightarrow ۴(x-۱)(x^۲ + x - ۲) = ۰$$

$$\Rightarrow ۴(x-۱)(x+۲)(x-۱) = ۰ \Rightarrow ۴(x-۱)^۲(x+۲) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \\ x + ۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲ \end{cases}$$

اکنون با تعیین علامت $f'(x)$، اکسترمم‌های نسبی تابع $f(x)$ را مشخص می‌کنیم.

x	$+\infty$		-۲		۱		$+\infty$
$f'(x)$		-	۰	+	۰	+	
$f(x)$		↘	min	↗		↗	

باتوجه‌به جدول فوق، تابع $f(x)$ فقط دارای یک نقطهٔ مینیمم نسبی در نقطهٔ $x = -۲$ می‌باشد زیرا علامت $f'(x)$ قبل و بعد از این نقطه عوض شده است. دقت کنید که $x = ۱$ ریشهٔ معادلهٔ $f'(x) = ۰$ است اما چون $f'(x)$ قبل و بعد از این نقطه تغییر علامت نداده پس این نقطه اکسترمم نسبی تابع محسوب نمی‌شود.

۱۷۰ گزینه ۳

گام اول

تابع f در $x = ۴$ مشتق‌پذیر است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\lim_{x \to ۴} \frac{f(x) + ۷}{x - ۴} = -\frac{۳}{۲} \Rightarrow f'(۴) = -\frac{۳}{۲} \ , \ f(۴) = -۷$$

گام دوم

$$\left(\frac{f(۲x)}{x}\right)' = \frac{۲f'(۲x)x - f(۲x)}{x^۲}$$

$$\xrightarrow{x=۲} \frac{۲f'(۴) \times ۲ - f(۴)}{۴} = \frac{۲(-\frac{۳}{۲})(۲) - (-۷)}{۴}$$

$$= \frac{-۶ + ۷}{۴} = \frac{۱}{۴}$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

گزینه ۳

گام اول

توابع شامل قدر مطلق در ریشه‌های سادهٔ عبارت درون قدر مطلق مشتق ندارند؛ بنابراین تابع $f(x) = \sqrt{1+|x|}$ در $x = 0$ مشتق ندارد پس $\alpha = 0$ است.

گام دوم

به ازای $x > 0$ و $x < 0$ ضابطهٔ مشتق تابع $f(x)$ و مقادیر $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ را تعیین می‌کنیم سپس حاصل عبارت $f'_+(0) - f'_-(0)$ را به دست می‌آوریم:

$$x > 0 \ : \ |x| = x \ \Rightarrow \ f(x) = \sqrt{1+x} \ \Rightarrow \ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

$$\Rightarrow \ f'_+(0) = \frac{1}{2\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2\times 1} = \frac{1}{2}$$

$$x < 0 \ : \ |x| = -x \ \Rightarrow \ f(x) = \sqrt{1-x} \ \Rightarrow \ f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$$

$$\Rightarrow \ f'_-(0) = \frac{-1}{2\sqrt{1-0}} = \frac{-1}{2\times 1} = -\frac{1}{2}$$

بنابراین:

$$f'_+(0) - f'_-(0) = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۷۲

گزینه ۲

گام اول

الف) تابع $f(x)$ بر روی یک مجموعه مشتق‌پذیر است هرگاه در تمام نقاط این مجموعه مشتق‌پذیر باشد.

ب) تابع $f(x)$ در یک نقطه مشتق‌پذیر است درصورتی‌که اولاً در این نقطه پیوسته باشد، ثانیاً مشتق راست و چپ تابع در این نقطه، موجود و باهم برابر باشند.

گام دوم

تابع $f(x)$ به ازای نقاط $x > ۱$ و $x < ۱$ پیوسته و مشتق‌پذیر است. کافی است پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع را در نقطهٔ $x = ۱$ بررسی کنیم.

بررسی شرط پیوستگی:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^+} ۲\sqrt{۴x-۳} = ۲\sqrt{۴-۳} = ۲ \\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-} ax^۳ + bx = a+b \\ f(۱) = ۲\sqrt{۴-۳} = ۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = f(۱)} a+b = ۲ \qquad (I)$$

بررسی شرط مشتق‌پذیری:

$$f'(x) = \begin{cases} ۳ax^۲ + b & ; \quad x < ۱ \\ ۲ \times \frac{۴}{۲\sqrt{۴x-۳}} & ; \quad x > ۱ \end{cases}$$

تابع در نقطهٔ $x = ۱$ مشتق‌پذیر است درصورتی‌که $f'_-(۱)$ و $f'_+(۱)$ موجود و باهم برابر باشند، داریم:

$$f'_-(۱) = f'_+(۱) \quad \Rightarrow \quad ۳a + b = \frac{۴}{\sqrt{۴-۳}} \quad \Rightarrow \quad ۳a + b = ۴ \qquad (II)$$

دو معادلهٔ I و II را در یک دستگاه حل کرده و مجهول‌های a و b را می‌یابیم:

$$\begin{cases} ۳a + b = ۴ \\ a + b = ۲ \end{cases} \xrightarrow{(-)} ۲a = ۲ \quad \Rightarrow \quad a = ۱ \xrightarrow{(I)} ۱ + b = ۲ \quad \Rightarrow \quad b = ۱$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۷۳

گزینه ۴

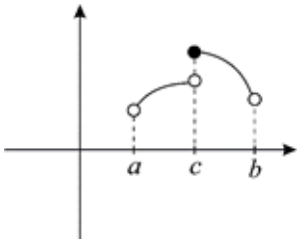
گام اول

الف) نقطه‌ای از دامنهٔ تعریف تابع f که به ازای آن تابع بیشترین (کمترین) مقدارش را می‌پذیرد، اکسترمم مطلق این تابع نامیده می‌شود.

ب) وقتی تابع f در همسایگی یک نقطه از دامنه تعریف شود آنگاه آن نقطه، یک نقطهٔ درونی دامنه است.

گام دوم

باتوجه‌به نمودار زیر، نقطهٔ $x = c$ اکسترمم مطلق تابع f است و تابع در همسایگی این نقطه تعریف شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید تابع f در این نقطه ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است، همچنین مماس افقی ندارد.



بنابراین نقطهٔ $x = c$ تنها می‌تواند یک نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع f باشد.

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۷۴ گزینه ۲

گام اول:

برد تابع $f(x)$ همان محدودهٔ تغییر مقادیر $f(x)$ بر روی دامنهٔ تعریف آن است. مقادیر $f(x)$ میان ماکسیمم و مینیمم مطلق این تابع تغییر می‌کند.

گام دوم:

ابتدا دامنهٔ تعریف تابع $f(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=(x+|x|)\sqrt{\frac{۲-x}{x}} \quad : \quad \frac{۲-x}{x}\geq ۰ \Rightarrow ۰<x\leq ۲ \Rightarrow D_f=(۰,۲]$$

به ازای $۰<x\leq ۲$، $|x|=x$ است پس ضابطهٔ تابع $f(x)$ را می‌توان چنین ساده کرد:

$$f(x)=(x+|x|)\sqrt{\frac{۲-x}{x}}=(x+x)\sqrt{\frac{۲-x}{x}}=۲x\sqrt{\frac{۲-x}{x}}\overset{(*)}{=}۲\sqrt{\frac{x^۲(۲-x)}{x}}=۲\sqrt{۲x-x^۲}$$

(*) چون $x>۰$ است پس می‌توان توان دوم آن را زیر رادیکال برد.

تابع $f(x)$ بر روی دامنه‌اش پیوسته است. برای یافتن ماکسیمم و مینیمم مطلق $f(x)$، ابتدا نقاط بحرانی تابع را یافته و مقدار تابع را در این نقاط و همچنین در نقطهٔ $x=۲$ محاسبه می‌کنیم. ضابطهٔ تابع $f'(x)$ و ریشه‌های معادلهٔ $f'(x)=۰$ را به دست می‌آوریم.

$$f(x)=۲\sqrt{۲x-x^۲}\Rightarrow f'(x)=\frac{۲-۲x}{\sqrt{۲x-x^۲}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۲-۲x=۰\Rightarrow ۲x=۲\Rightarrow x=۱$$

$$f(۱)=۲\sqrt{۲-۱}=۲$$

$$f(۲)=۲\sqrt{۴-۴}=۰$$

بنابراین برد تابع $f(x)$ بازهٔ $[۰,۲]$ است.

۱۷۵ گزینه ۲

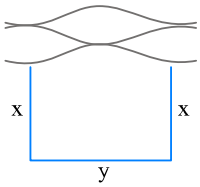
$$f(x)=x\sqrt[۳]{\frac{۳x+۱}{x+۲}}\Rightarrow f'(x)=\sqrt[۳]{\frac{۳x+۱}{x+۲}}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۳(x+۲)-(۳x+۱)}{(x+۲)^۲}\times\frac{۱}{\sqrt[۳]{(\frac{۳x+۱}{x+۲})^۲}}\times x$$

$$=\sqrt[۳]{\frac{۳x+۱}{x+۲}}+\frac{۵x}{۳(x+۲)^۲\sqrt[۳]{(\frac{۳x+۱}{x+۲})^۲}}\xrightarrow{x=-۳}=۲-\frac{۵}{۴}=\frac{۳}{۴}$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com

۱۷۶ گزینه ۴

طول و عرض زمین را به ترتیب y و x و طول طناب را l می‌نامیم، در این صورت داریم:



$$l = ۲x + y \Rightarrow y = l - ۲x$$

بیشترین مساحت این زمین مستطیلی‌شکل ۶۴۸ متر مربع است پس:

$$S_{max} = xy = ۶۴۸ \xrightarrow{y=l-۲x} S = x(l - ۲x) = xl - ۲x^۲$$

$$\Rightarrow S'_x = l - ۴x \Rightarrow S'_x = ۰ \Rightarrow l - ۴x = ۰ \Rightarrow x = \frac{l}{۴}$$

$$S_{max} = x(l - ۲x) = \frac{l}{۴}(l - \frac{l}{۲}) = ۶۴۸ \Rightarrow \frac{l^۲}{۸} = ۶۴۸ \Rightarrow l^۲ = ۵۱۸۴ \Rightarrow l = ۷۲$$

وبسایت آموزشی نمره یار - Nomreyar.com