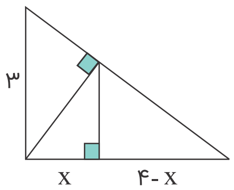
۱ در شکل زیر، ارتفاع هر دو مثلث قائم‌الزاویه رسم شده است. اندازهٔ x کدام است؟



۱) ۱/۹۶

۲) ۱/۵۶

۳) ۱/۶۴

۴) ۱/۴۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

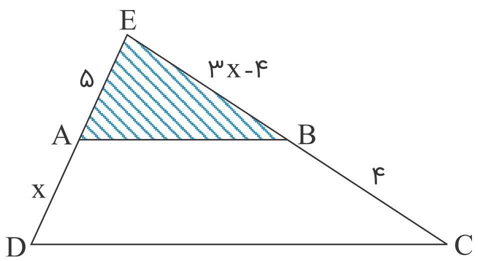
۲ در ذوزنقه‌ای اندازهٔ قاعده‌ها ۹ و ۴ واحد و طول ساق‌ها ۶ و ۵ واحد است. محیط مثلثی که از امتداد ساق‌ها در بیرون ذوزنقه تشکیل شود، کدام است؟

۱) ۱۱/۵   ۲) ۱۱/۶

۳) ۱۲/۲   ۴) ۱۲/۸

قلمچی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۷
قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۳ در شکل زیر، مساحت ذوزنقهٔ $ABCD$، چندبرابر مساحت مثلث EAB است؟



۱) $\frac{۹}{۴}$

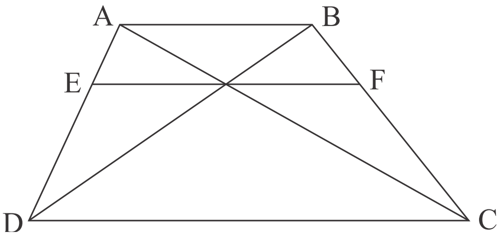
۲) $\frac{۱۶}{۹}$

۳) $\frac{۲۵}{۱۶}$

۴) $\frac{۳۶}{۲۵}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۴ در شکل زیر، $DC \parallel EF \parallel AB$ و اندازهٔ پاره‌خط‌های AB و DC، به ترتیب ۵ و ۹ واحد است. اندازهٔ پاره‌خط EF، کدام است؟



۱) $\frac{۴۵}{۷}$

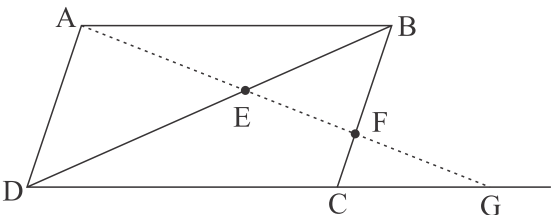
۲) $\frac{۴۵}{۶}$

۳) $۳\sqrt{۵}$

۴) ۷

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۵ در شکل زیر، چهار ضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است. مقدار $EF \times EG$ کدام است؟



۱) $EA^{۲}$

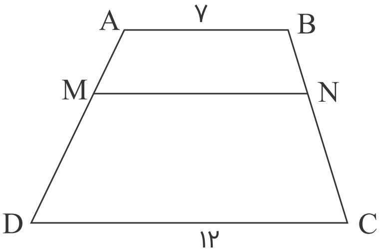
۲) $ED^{۲}$

۳) $EB \times ED$

۴) $FB \times FC$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۶ در ذوزنقهٔ $ABCD$، پاره‌خط MN موازی قاعده‌ها و $\frac{MA}{MD} = \frac{۲}{۳}$ است. اندازهٔ MN، کدام است؟



۱) ۸

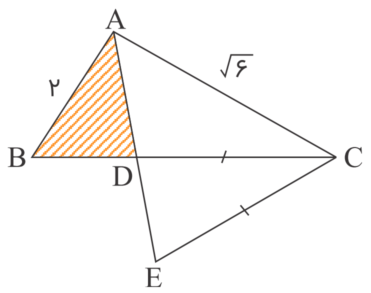
۲) ۸/۷۵

۳) ۹

۴) ۹/۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

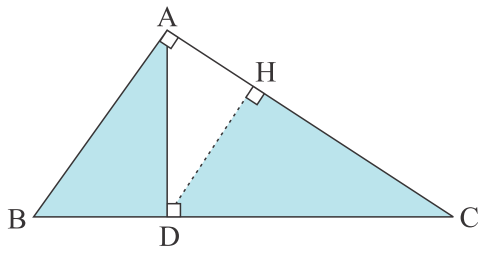
۷ در شکل زیر، AD نیمساز زاویهٔ A و $CD = CE$ است. نسبت مساحت‌های دو مثلث ABD و ACE، کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

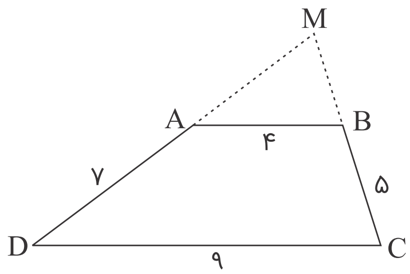
۸ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، طول اضلاع قائم $AB = \sqrt{۳}$ و $AC = ۲$ است. نسبت مساحت‌های دو مثلث قائم‌الزاویهٔ HCD و ABD، کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۷}$
۲) $\frac{۴}{۷}$
۳) $\frac{۱۶}{۲۱}$
۴) $\frac{۸}{۹}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

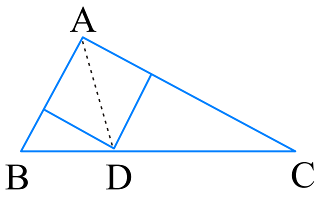
۹ اندازهٔ اضلاع ذوزنقهٔ $ABCD$ مطابق شکل زیر داده شده است. محیط مثلث MAB، کدام است؟



۱) $۱۳/۲$
۲) $۱۳/۶$
۳) $۱۴/۴$
۴) $۱۴/۸$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۰ در مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم ۳ و ۷ واحد، طول نیمساز داخلی زاویهٔ قائمه کدام است؟



۱) $۱/۴\sqrt{۲}$

۲) $۲/۱$

۳) $۲/۸$

۴) $۲/۱\sqrt{۲}$

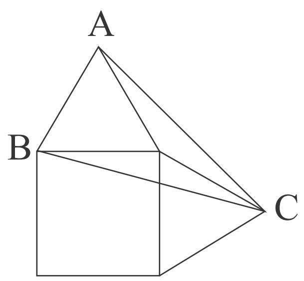
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۱۱ در یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه، اگر از نقطهٔ O محل تلاقی قطرها، خطی موازی قاعده‌ها رسم شود، ساق قائم را در A و ساق مایل را در B قطع می‌کند. نسبت $\frac{OA}{OB}$ چگونه است؟

۱) کوچک‌تر از ۱
۲) مساوی ۱
۳) بزرگ‌تر از ۱
۴) متغیر نسبت به اضلاع

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۱۲ در خارج یک مربع به ضلع ۲ واحد بر روی هر دو ضلع مجاور آن، مثلث متساوی‌الاضلاع ساخته‌شده است، مساحت مثلث ABC کدام است؟



۱) ۴

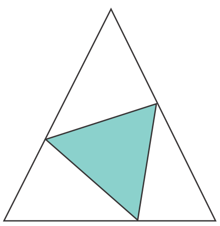
۲) $۲\sqrt{۳}$

۳) $۲+\sqrt{۳}$

۴) $۱+\sqrt{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۱۳ هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع به نسبت‌های ۱ و ۲ تقسیم‌شده است. مساحت مثلث رنگی، چندبرابر مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع است؟



۱) $\frac{۱}{۴}$

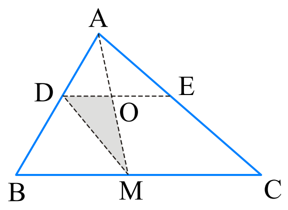
۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۴}{۹}$

۴) $\frac{۱}{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

۱۴ در شکل زیر، نقطهٔ M وسط BC و $\frac{DA}{DB}=\frac{۲}{۳}$ و $DE \| BC$ است، مساحت مثلث ODM چند درصد مساحت مثلث ABC است؟



۱) ۱۲

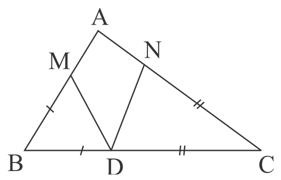
۲) ۱۵

۳) ۱۶

۴) ۱۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۱۵ در شکل زیر $\hat{A}=۵۸^\circ$، $BM=BD$ و $CN=CD$، زاویهٔ $M\hat{D}N$ چند درجه است؟



۱) ۵۸

۲) ۵۹

۳) ۶۱

۴) ۶۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

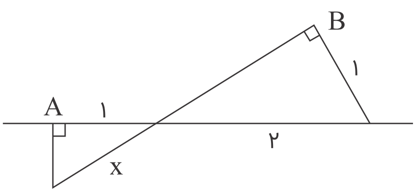
۱۶ در یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، قطر عمود بر ساق است. اگر اندازهٔ قاعدهٔ بزرگ‌تر و قطر آن به ترتیب ۱۰ و ۸ واحد باشند، اندازهٔ قاعدهٔ کوچک‌تر چند واحد است؟

۱) ۲/۸ ۲) ۳/۲

۳) ۳/۶ ۴) ۴/۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۱۷ در شکل زیر دو زاویهٔ $\hat{A}$ و $\hat{B}$ قائمه‌اند، مقدار x چقدر است؟



۱) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$

۲) $\frac{۲}{۳}\sqrt{۳}$

۳) $\frac{۴}{۳}$

۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۱۸ در یک ذوزنقه، خطی که وسط ساق‌ها را به هم وصل کند، مساحت آن را به نسبت ۳ به ۵ تقسیم می‌کند. نسبت قاعده‌های ذوزنقه کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۲}{۵}$
۴) $\frac{۳}{۵}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۱۹ درون مثلثی به اضلاع ۹ و ۷ و ۵ واحد، مثلث دیگر طوری رسم می‌کنیم که اضلاع آن موازی اضلاع مثلث اصلی باشد، اگر بزرگ‌ترین ضلع این مثلث ۶ واحد باشد، مساحت محدود به این دو مثلث، چند برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است؟

۱) ۰/۷۵
۲) ۱
۳) ۱/۲۵
۴) ۱/۵

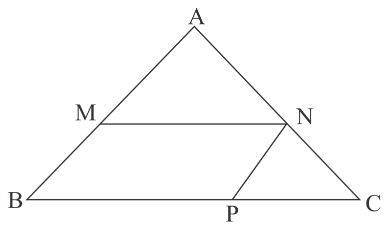
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۲۰ طول ضلع یک مربع برابر محیط مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین به ضلع قائم ۲ واحد است. با حذف گوشه‌های این مربع، بزرگ‌ترین هشت ضلعی منتظم ممکن داخل آن ساخته شده است. مساحت این هشت ضلعی، کدام است؟

۱) ۳۲
۲) $۲۴\sqrt{۲}$
۳) $۲۴ + ۸\sqrt{۲}$
۴) $۱۶ + ۱۶\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۲۱ در شکل زیر $\frac{۳}{۲} = \frac{MA}{MB}$ است. مساحت متوازی‌الاضلاع $MNPB$ چند درصد مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ است؟



۱) ۴۸
۲) ۵۲
۳) ۵۴
۴) ۵۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۲۲ مثلثی به اضلاع ۵ و ۴ و a با مثلثی به طول اضلاع ۹ و ۷ و b متشابه است. بیش‌ترین مقدار ممکن برای عدد a کدام است؟

۱) $\frac{۳۶}{۷}$
۲) $\frac{۴۵}{۷}$
۳) $\frac{۳۶}{۵}$
۴) $\frac{۳۵}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۲۳ مثلثی به اضلاع b و a و ۳ با مثلثی به طول اضلاع ۵ و ۴ و ۳ متشابه است و دو مثلث قابل انطباق نیستند. بیشترین محیط از مثلث اول کدام است؟

۱) ۷/۲

۲) ۹

۳) ۱۰

۴) ۱۳/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۲۴ در یک مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، مثلث مفروض را به دو جزء تقسیم می‌کند. اگر مساحت مثلث کوچک‌تر $\frac{۱}{۵}$ مساحت مثلث اصلی باشد، نسبت فواصل پای ارتفاع از دو ضلع قائم مثلث مفروض کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{۲}{۳}$

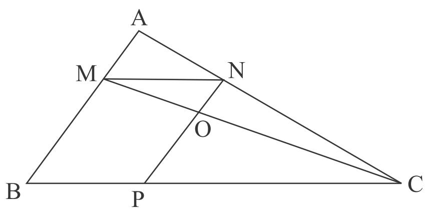
۳) $\frac{۳}{۴}$

۴) $\frac{۴}{۵}$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۲۵ در شکل زیر $\frac{۳}{۷} = \frac{MA}{MB}$ و چهار ضلعی $MNPB$ متوازی‌الاضلاع است. مساحت مثلث OMN چند درصد مساحت مثلث AMN است؟



۱) ۶۳

۲) ۶۰

۳) ۷۰

۴) ۸۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۲۶ در مثلث متساوی‌الساقین $\overset{\triangle}{ABC}$، $AB = AC = ۴$ و $BC = ۲\sqrt{۷}$ است. ضلع AC را به‌اندازهٔ خود تا نقطهٔ D امتداد می‌دهیم $(AD = AC)$. اندازهٔ BD کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۱۰}$

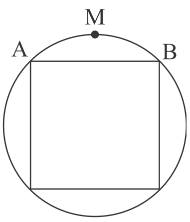
۲) $۴\sqrt{۲}$

۳) ۶

۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۲۷ در شکل زیر، ضلع مربع برابر ۲ واحد است. فاصلهٔ وسط کمان AB از نزدیک‌ترین رأس مربع چقدر است؟



۱) $\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}$

۲) $\sqrt{۴ - ۲\sqrt{۲}}$

۳) $\sqrt{۲}$

۴) $\sqrt{۱ + \sqrt{۲}}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۲۸ در یک مثلث قائم‌الزاویه، طول اضلاع قائم به نسبت ۱ و ۳ و مساحت آن ۶۰ واحد مربع است. ارتفاع وارد بر وتر چقدر است؟

۱) ۵
۲) $۴\sqrt{۲}$
۳) ۶
۴) ۸

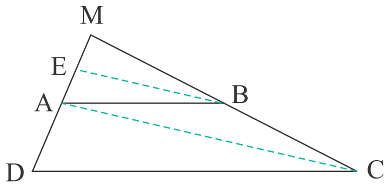
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۲۹ در مثلث ABC $\left(\hat{A}=۹۰^\circ\right)$، ارتفاع AH مثلث مفروض را به دو جزء تقسیم می‌کند. مساحت مثلث اصلی $۶/۷۶$ برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است. نسبت فواصل H از دو ضلع قائم کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۸}$
۲) $\frac{۵}{۱۲}$
۳) $\frac{۷}{۱۲}$
۴) $\frac{۳}{۸}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

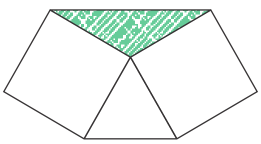
۳۰ در ذوزنقهٔ $ABCD$، پاره‌خط BE موازی قطر AC است. اگر $AD=۷$ و $AE=۳$ باشد، فاصلهٔ MD کدام است؟



۱) ۱۲
۲) ۱۲/۲۵
۳) ۱۲/۵
۴) ۱۲/۷۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳
قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

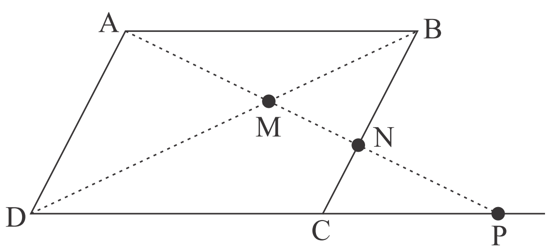
۳۱ در یک مثلث متساوی‌الاضلاع، بر روی دو ضلع آن دو مربع ساخته شده است. مساحت مثلث سایه‌زده، چند برابر مساحت مثلث اصلی می‌باشد؟



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۲) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$
۳) ۱
۴) $\sqrt{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

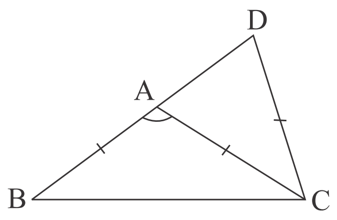
۳۲ در شکل زیر، $ABCD$ متوازی‌الاضلاع می‌باشد. حاصل $MN\times MP$ برابر کدام است؟



۱) $AB^۲$
۲) $AD^۲$
۳) $MD^۳$
۴) $MA^۲$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۳۳ در مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB = AC)$، ساق BA را از نقطهٔ B به‌اندازهٔ قاعدهٔ BC تا نقطهٔ D، امتداد می‌دهیم. اگر $CD = CA$ باشد، زاویهٔ A چند درجه است؟



۱) ۱۰۲

۲) ۱۰۵

۳) ۱۰۸

۴) ۱۱۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

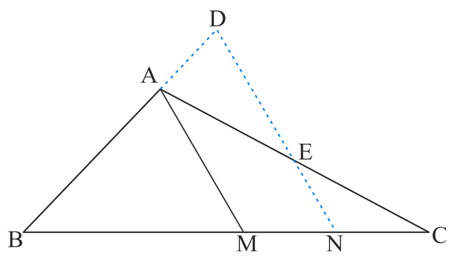
۳۴ مساحت یک مثلث قائم‌الزاویه برابر با مساحت مربعی است که بر روی ضلع کوچک‌تر آن ساخته می‌شود. اندازهٔ میانهٔ وارد بر ضلع متوسط چند برابر ضلع متوسط این مثلث است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۳۵ در مثلث ABC که $AB = \frac{۲}{۳}AC$، پاره‌خط ND موازی میانهٔ AM است. نسبت $\frac{AD}{AE}$ کدام است؟



۱) $\frac{۴}{۹}$

۲) $\frac{۵}{۹}$

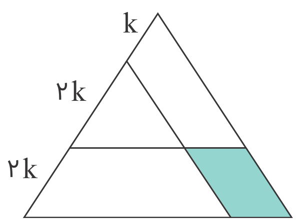
۳) $\frac{۲}{۳}$

۴) $\frac{۴}{۵}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۸

۳۶ در شکل زیر، یک ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع به نسبت‌های ۱، ۲ و ۲ تقسیم شده است. مساحت متوازی‌الاضلاع سایه‌زده، چند درصد مساحت مثلث اصلی است؟



۱) ۱۶

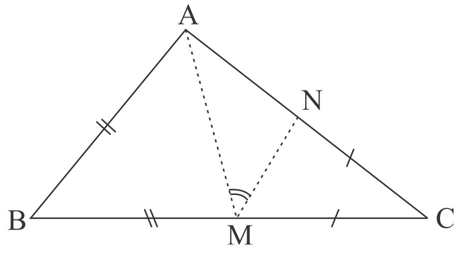
۲) ۱۸

۳) ۲۰

۴) ۲۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۳۷ در شکل زیر، دو مثلث کناری متساوی‌الساقین‌اند و $\hat{M} = ۴۳^\circ$، اندازهٔ زاویهٔ $B\hat{A}C$ چند درجه است؟



۱) ۹۳

۲) ۹۴

۳) ۹۶

۴) ۹۷

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۳۸ در مثلث ABC داریم $AB = AC$ و $\hat{A} = ۸۰^\circ$، عمودمنصف‌های دو ساق مثلث، قاعدهٔ BC را در M و N قطع می‌کنند. کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث AMN چند درجه است؟

۱) ۱۵   ۲) ۲۰

۳) ۲۵   ۴) ۳۰

قلمچی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۷

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ تابستان ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

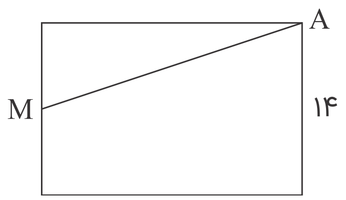
۳۹ در یک مکعب به طول یال $۴\sqrt{۲}$، فاصلهٔ وسط هریک از دو وجه غیرموازی از یکدیگر چقدر است؟

۱) ۳   ۲) $۲\sqrt{۳}$

۳) ۴   ۴) $۳\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۴۰ در شکل زیر، پاره‌خط AM مساحت مستطیل را به دو جزء با نسبت مساحت‌های $\frac{۵}{۹}$ تقسیم کرده است. اگر قطر مستطیل ۲۵ واحد باشد، پاره‌خط AM چند واحد است؟



۱) ۲۱

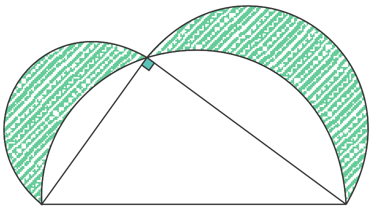
۲) ۲۳

۳) $۹\sqrt{۷}$

۴) $۱۰\sqrt{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۴۱ در مثلث قائم‌الزاویهٔ زیر، طول اضلاع قائم ۳ و ۴ واحد است. نیم‌دایره‌ها به قطر اضلاع رسم شده‌اند. مجموع مساحت دو ناحیهٔ سایه‌زده، کدام است؟



۱) ۲π

۲) ۶

۳) ۷

۴) ۳π

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۴۲ در مثلث متساوی‌الساقین $\overset{\triangle}{ABC}$، قاعدهٔ BC را از دو طرف به‌اندازهٔ ساق‌ها تا نقاط D و E امتداد می‌دهیم. در مثلث $\overset{\triangle}{ADE}$ کوچک‌ترین زاویهٔ خارجی، چند برابر کوچک‌ترین زاویهٔ داخلی آن است؟

۱) ۱   ۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) ۲   ۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۴۳ در چهار ضلعی محدب ABCD، رابطهٔ $\frac{\hat{C}+\hat{D}}{۱۱} = \frac{\hat{B}}{۳} = \frac{\hat{A}}{۴}$، بین زاویه‌ها برقرار است. زاویهٔ حادهٔ بین نیمسازهای داخلی دو زاویهٔ مجاور $\hat{A}$ و $\hat{B}$، چند درجه است؟

۱) ۵۰   ۲) ۶۰

۳) ۷۰   ۴) ۷۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۴۴ در یک مستطیل با ابعاد ۱ و ۲ واحد، از انتهای یک قطر، خطی بر آن قطر عمود می‌کنیم تا امتداد ضلع کوچک‌تر مستطیل را در M قطع کند. فاصلهٔ نقطهٔ M از سر دیگر این قطر چند واحد است؟

۱) ۴   ۲) ۴/۵

۳) ۵   ۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۴۵ در مثلث ABC، اضلاع $AB = ۴$ و $AC = ۶$ و $BC = ۷$ است. از رأس C خطی موازی میانهٔ AM رسم شده و امتداد BA را در نقطهٔ D قطع کرده است. اندازهٔ BD، کدام است؟

۱) ۷/۵   ۲) ۸

۳) ۸/۵   ۴) ۹

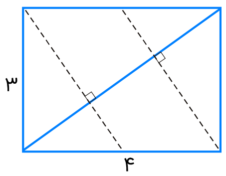
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۴۶ در مربعی به ضلع ۲ واحد، دایره‌ای به مرکز یک رأس آن و شعاع ۲/۵ واحد، دو ضلع مربع را قطع می‌کند. فاصلهٔ نزدیک‌ترین رأس مربع تا نقطهٔ تقاطع، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۴۷ در مستطیلی به طول اضلاع ۳ و ۴ واحد از هر دو رأس متقابل، عمودی بر قطر دیگر این مستطیل رسم شده است. مساحت متوازی‌الاضلاع حاصل کدام است؟



۱) ۵/۲۵
۲) ۵/۷۵
۳) ۶
۴) ۷/۵

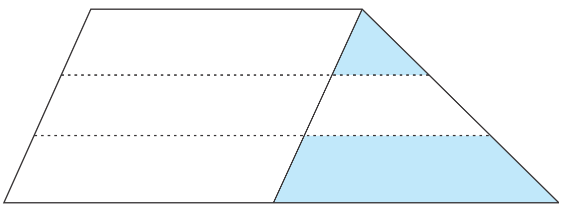
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۴۸ در مستطیلی به طول اضلاع $۲\sqrt{۷}$ و ۶ واحد، از هر دو رأس متقابل، عمودی بر قطر دیگر این مستطیل رسم شده است. فاصلهٔ این دو خط عمود کدام است؟

۱) ۱
۲) ۱/۵
۳) ۱/۷۵
۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

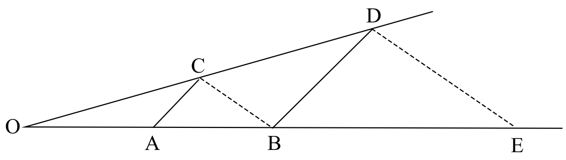
۴۹ یک ساق ذوزنقه به سه قسمت مساوی تقسیم شده است. هر چهار پاره‌خط موازی یکدیگرند. نسبت مساحت دو ناحیهٔ رنگی، کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۶}$
۲) $\frac{۱}{۵}$
۳) $\frac{۲}{۹}$
۴) $\frac{۱}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۵۰ در شکل زیر، دو جفت پاره‌خط موازی‌اند. $\text{OA} = ۳$ و $\text{AB} = ۵$، اندازهٔ BE، کدام است؟



۱) $۱۳\frac{۱}{۳}$

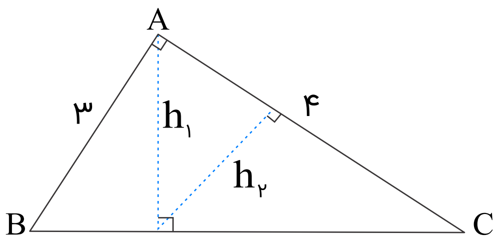
۲) $۱۲\frac{۲}{۳}$

۳) $۱۱\frac{۱}{۳}$

۴) $۱۰\frac{۲}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۵۱ در شکل زیر، $h_۱$ و $h_۲$ ارتفاع‌های دو مثلث قائم‌الزاویه هستند. نسبت $\frac{h_۲}{h_۱}$ کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۵}$

۲) $\frac{۴}{۵}$

۳) $\frac{۲}{۳}$

۴) $\frac{۳}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۵۲ در ذوزنقه‌ای با طول قاعده‌های ۸ و ۱۲ و ارتفاع ۱۰ واحد، مساحت مثلث محدود به دو قطر و یک ساق آن، چند واحد مربع است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۰

۳) ۲۴ ۴) ۲۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۵۳ در ذوزنقه‌ای اندازهٔ قاعده‌ها ۹ و ۴ واحد و طول ساق‌ها ۶ و ۵ واحد است. محیط مثلثی که از امتداد ساق‌ها در بیرون ذوزنقه تشکیل شود، کدام است؟

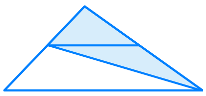
۱) $۱۱/۴$ ۲) $۱۱/۶$

۳) $۱۲/۲$ ۴) $۱۲/۸$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

۵۴ در شکل زیر، نسبت قاعده‌های ذوزنقه $\frac{۳}{۵}$ است. مساحت مثلث سایه‌زده، چند برابر مساحت ذوزنقه است؟



۱) $\frac{۳}{۴}$

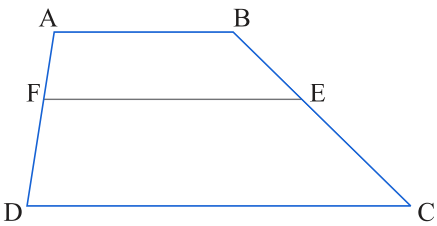
۲) $\frac{۷}{۸}$

۳) $\frac{۱۴}{۱۵}$

۴) $\frac{۱۵}{۱۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۵۵ در ذوزنقهٔ ABCD، قاعدهٔ بزرگ $\frac{۵}{۲}$ قاعدهٔ کوچک است و $\mathrm{AF} = \frac{۱}{۴}\mathrm{AD}$ و EF موازی قاعده است. نسبت $\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{CD}}$ کدام است؟



۱) $\frac{۱۱}{۲۰}$

۲) $\frac{۷}{۱۵}$

۳) $\frac{۸}{۱۵}$

۴) $\frac{۳}{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۵۶ در مثلث ABC، ضلع AB بزرگ‌تر از ضلع AC است. هریک از میانه‌های BM و CN را از وسط اضلاع به‌اندازهٔ خود تا D و E امتداد می‌دهیم. نسبت مساحت مثلث DBC به مساحت مثلث EBC کدام است؟

۱) کمتر از ۱ | ۲) بیشتر از ۱

۳) مساوی ۱ | ۴) بستگی به ضلع سوم دارد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۵۷ در یک ذوزنقه، پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق را به هم وصل کند، مساحت آن را به نسبت‌های ۱ و ۲ تقسیم می‌کند. نسبت قاعده‌های آن ذوزنقه کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ | ۲) $\frac{۱}{۵}$

۳) $\frac{۱}{۴}$ | ۴) $\frac{۲}{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۵۸ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، اضلاع قائم $\mathrm{AB} = ۳\sqrt{۵}$ و $\mathrm{AC} = ۶$، ارتفاع AH و میانهٔ AM رسم شده است. مساحت مثلث ABC، چندبرابر مساحت مثلث AMH است؟

۱) ۱۰ | ۲) ۱۲

۳) ۱۵ | ۴) ۱۸

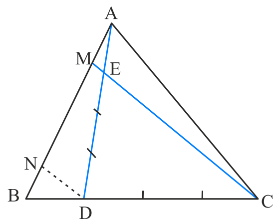
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۵۹ در مستطیل ABCD به طول $\mathrm{AB} = ۱۷$، از نقطهٔ A عمود AH بر قطر BD رسم شده است. اگر $\mathrm{BH} = ۱۵$ باشد، طول قطر مستطیل از عدد ۱۹، چقدر بیشتر است؟

۱) $\frac{۴}{۱۵}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۷}{۱۵}$
۴) $\frac{۳}{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۶۰ در شکل زیر، $\mathrm{BD} = \frac{۱}{۴}\mathrm{BC}$ و $\mathrm{AE} = \frac{۱}{۴}\mathrm{AD}$ و $\mathrm{DN} || \mathrm{CM}$. اندازهٔ AB چندبرابر AM است؟



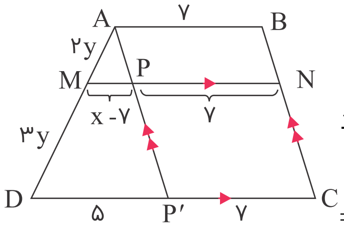
۱) ۴
۲) ۴/۵
۳) ۵
۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۶ گزینه ۳

در ذوزنقهٔ $ABCD$ از نقطهٔ A خطی موازی با خط BC رسم می‌کنیم و محل برخورد آن را با MN و DC به ترتیب P و P' می‌نامیم.

با استفاده از تعمیم تالس در مثلث ADP' داریم:

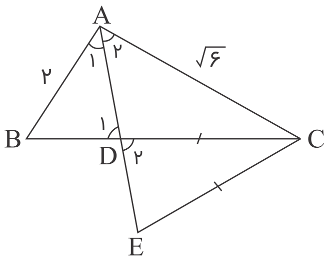


$$\frac{AM}{AD}=\frac{MP}{DP'}$$

$$\Rightarrow \frac{۲y}{۲y+۳y}=\frac{x-۷}{۵} \Rightarrow \frac{۲}{۵}=\frac{x-۷}{۵} \Rightarrow x=۹=MN$$

۷ گزینه ۲

طبق شکل داریم:



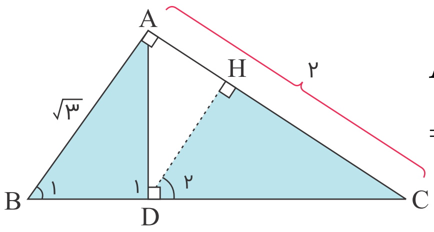
$$\begin{cases}\hat{A}_۱=\hat{A}_۲ \quad \text{نیمساز } AD\\ \hat{D}_۱=\hat{D}_۲ \quad \text{متقابل به رأس}\end{cases} \xrightarrow{DC=CE} \hat{D}_۱=\hat{E}$$

$$\xrightarrow{\text{ز ز}} A\overset{\Delta}{B}D \sim A\overset{\Delta}{E}C \qquad (k=\frac{AB}{AC}=\frac{۲}{\sqrt{۶}})$$

$$\Rightarrow \frac{S_{A\overset{\Delta}{B}D}}{S_{A\overset{\Delta}{C}E}}=k^۲=\left(\frac{۲}{\sqrt{۶}}\right)^۲=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$$

۸ گزینه ۳

طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث $A\overset{\Delta}{B}C$ داریم:



$$AB^۲ + AC^۲ = BC^۲$$

$$\Rightarrow ۳ + ۴ = BC^۲ \Rightarrow BC = \sqrt{۷}$$

$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel DH\,,\ \text{مورب } BC \Rightarrow \widehat{D}_۲ = \widehat{B}_۱ \\ \hat{D}_۱ = \widehat{H} = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\Delta}{B}D \sim H\overset{\Delta}{C}D$$

طبق روابط طولی در مثلث $A\overset{\Delta}{B}C$ نتیجه می‌گیریم:

$$AC^۲ = BC \times CD$$

$$\Rightarrow ۴ = \sqrt{۷} \times CD \Rightarrow CD = \frac{۴}{\sqrt{۷}}$$

بنابراین نسبت تشابه دو مثلث ABD و HCD برابر است با:

$$K = \frac{\frac{۴}{\sqrt{۷}}}{\sqrt{۳}} = \frac{۴}{\sqrt{۲۱}}$$

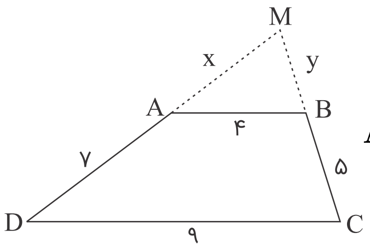
می‌دانیم که نسبت مساحت دو مثلث متشابه برابر است با مجذور نسبت تشابه، پس داریم:

$$\frac{S_{H\overset{\Delta}{C}D}}{S_{A\overset{\Delta}{B}D}} = K^۲ = \left(\frac{۴}{\sqrt{۲۱}}\right)^۲ = \frac{۱۶}{۲۱}$$

۹ گزینه ۲

می‌دانیم در ذوزنقهٔ $ABCD$، دو قاعدهٔ AB و DC باهم موازی هستند، بنابراین طبق قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها، دو مثلث AMB و MDC متشابه هستند.

بنابراین داریم:



$$\overset{\triangle}{AMB} \sim \overset{\triangle}{MDC} \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MB}{MC} = \frac{AB}{DC}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+۷} = \frac{y}{y+۵} = \frac{۴}{۹}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{x+۷} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow ۹x = ۴x + ۲۸ \Rightarrow ۵x = ۲۸ \Rightarrow x = \frac{۲۸}{۵} \\ \frac{y}{y+۵} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow ۹y = ۴y + ۲۰ \Rightarrow ۵y = ۲۰ \Rightarrow y = \frac{۲۰}{۵} = ۴ \end{cases}$$

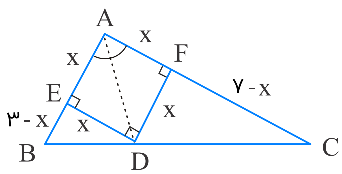
حال محیط را به دست می‌آوریم:

$$\text{محیط } \overset{\triangle}{AMB} = x + y + ۴ = \frac{۲۸}{۵} + ۴ + ۴ = ۸ + \frac{۲۸}{۵} = \frac{۴۰ + ۲۸}{۵} = \frac{۶۸}{۵} = ۱۳/۶$$

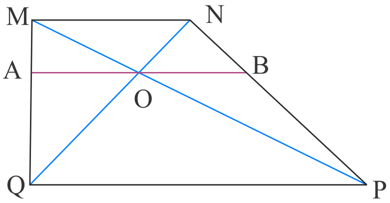
۱۰ گزینه ۴

نقطهٔ D روی نیمساز قرار دارد، بنابراین از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. پس: $DE = DF$
$\hat{A} = ۹۰^\circ$ و $DE = DF$، بنابراین چهار ضلعی $AEDF$ مربع است. پس: $AE || FD$
طبق تعمیم قضیه تالس در مثلث ABC، داریم:

$$\frac{FD}{AB} = \frac{FC}{AC} \Rightarrow \frac{x}{۳} = \frac{۷-x}{۷} \Rightarrow ۷x = ۲۱ - ۳x \Rightarrow ۱۰x = ۲۱ \Rightarrow x = ۲/۱$$
$$\Rightarrow AD = \sqrt{۲}x = ۲/۱\sqrt{۲}$$



۱۱ گزینه ۲



نکته: طبق قضیهٔ تالس در ذوزنقه داریم $\frac{BP}{BN} = \frac{AQ}{AM}$، سپس با ترکیب نسبت در مخرج نتیجه می‌گیریم: $\frac{BP}{PN} = \frac{AQ}{QM}$

باتوجه‌به تعمیم قضیهٔ تالس در دو مثلث QMN و PMN داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{OA}{MN} = \frac{AQ}{QM} \\ \frac{OB}{MN} = \frac{BP}{PN} \end{array}\right\} \xrightarrow{\div} \frac{OA}{OB} = \underbrace{\frac{AQ}{QM} \times \frac{PN}{BP}}_{۱} \Rightarrow \frac{OA}{OB} = ۱$$

۱۲

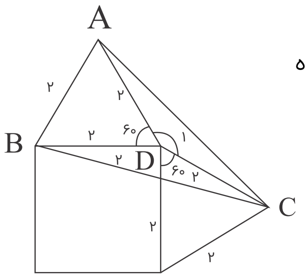
گزینه ۳

گام اول

الف) زوایای داخلی هر مثلث متساوی‌الاضلاع ۶۰° است.

ب) مثلث $\overset{\triangle}{ADC}$ یک مثلث متساوی‌الساقین است. اندازهٔ زاویهٔ $\hat{D}_۱$ برابر است با:

$$\hat{D}_۱ = ۳۶۰ - (۹۰ + ۶۰ + ۶۰) = ۳۶۰ - ۲۱۰ = ۱۵۰^\circ$$



ج) برای به دست آوردن مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$، مساحت سه مثلث $\overset{\triangle}{ACD}$، $\overset{\triangle}{ABD}$ و $\overset{\triangle}{BDC}$ را به دست آورده و باهم جمع می‌کنیم.

د) مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a از رابطهٔ $S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ به دست می آید.

گام دوم

$$\overset{\triangle}{ADC} \underset{(\text{ض ز ض})}{\cong} \overset{\triangle}{BDC} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ADC}} = S_{\overset{\triangle}{BDC}}$$

با استفاده از مبحث کاربرد مثلثات مساحت دو مثلث $\overset{\triangle}{ADC}$ و $\overset{\triangle}{BDC}$ را تعیین می‌کنیم:

$$S_{\overset{\triangle}{ADC}} = S_{\overset{\triangle}{BDC}} = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲ \times \sin ۱۵۰^\circ = ۲ \times \frac{۱}{۲} = ۱$$

مثلث $\overset{\triangle}{ABD}$ متساوی الاضلاع است و داریم:

$$S_{\overset{\triangle}{ABD}} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۲)^۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۴} \times ۴ = \sqrt{۳}$$

بنابراین مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ برابر است با:

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = S_{\overset{\triangle}{BDC}} + S_{\overset{\triangle}{ADC}} + S_{\overset{\triangle}{ABD}} = ۱ + ۱ + \sqrt{۳} = ۲ + \sqrt{۳}$$

۱۳

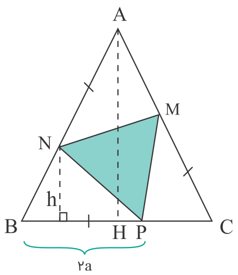
گزینه ۴

گام اول

الف) اندازهٔ هر یک از سه قسمت مشخص‌شده بر روی هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع را برابر a و هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع را برابر $۳a$ در نظر می‌گیریم. همچنین در مثلث‌های رنگ‌نشده ارتفاع وارد بر ضلع های با اندازهٔ $۲a$ را h فرض می‌کنیم.

ب) اگر ارتفاع مثلث اصلی را رسم کنیم طبق قضیهٔ تالس اندازهٔ آن برابر $۳h$ به دست می آید (چون ارتفاع دو مثلث ABC و NBP موازی‌اند پس $\frac{a}{۳a} = \frac{h}{AH}$ درنتیجه $AH = ۳h$). پس می‌توان اندازهٔ مساحت مثلث رنگی و مثلث متساوی‌الاضلاع اولیه را برحسب a و h تعیین و درنهایت نسبت آن‌ها را محاسبه کنیم.

گام دوم



$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۳h \times ۳a}{۲} = \frac{۹ha}{۲}$$

$$S_{\overset{\triangle}{BNP}} = \frac{۱}{۲} \times h \times ۲a = ha$$

$$S_{\overset{\triangle}{MNP}} = S_{\overset{\triangle}{ABC}} - ۳S_{\overset{\triangle}{BNP}} = \frac{۹ha}{۲} - ۳ha = \frac{۳ha}{۲}$$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{MNP}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \frac{\frac{۳ha}{۲}}{\frac{۹ha}{۲}} = \frac{۳}{۹} = \frac{۱}{۳}$$

۱۴

گزینه ۱

$$\frac{DA}{DB} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{DB}{AB} = \frac{۳}{۵}, \frac{DA}{AB} = \frac{۲}{۵}$$

چون AM میانهٔ نظیر ضلع BC است، پس: $\frac{S_{ABM}}{S_{ABC}} = \frac{۱}{۲}$

در دو مثلث ABM و AMD، ارتفاع‌های رسم‌شده از رأس M یکسان هستند، پس نسبت مساحت‌ها برابر نسبت قاعده‌ها است؛ یعنی:

$$\frac{S_{ADM}}{S_{ABM}} = \frac{DA}{AB} = \frac{۲}{۵}$$

در دو مثلث ODM و ADM، ارتفاع‌های رسم‌شده از رأس D یکسان هستند؛ پس نسبت مساحت‌ها برابر نسبت قاعده‌ها است؛ یعنی:

$$\frac{S_{ODM}}{S_{ADM}} = \frac{OM}{AM} = \frac{DB}{AB} = \frac{۳}{۵}$$

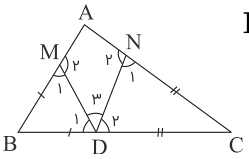
با ضرب کردن سه رابطهٔ فوق داریم:

$$\frac{S_{ABM}}{S_{ABC}} \times \frac{S_{ADM}}{S_{ABM}} \times \frac{S_{ODM}}{S_{ADM}} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۵} \times \frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{S_{ODM}}{S_{ABC}} = \frac{۳}{۲۵} = \frac{۱۲}{۱۰۰}$$

۱۵ گزینه ۳

گام اول

الف) شکل را با جزئیات بیشتر رسم می‌کنیم:



$$BM = BD \Rightarrow \hat{D}_۱ = \hat{M}_۱ = \alpha,\ \ CN = CD \Rightarrow \hat{D}_۲ = \hat{N}_۱ = \beta$$

ب) $\hat{A} = ۵۸^\circ$ است، بنابراین در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ داریم:

$$\overset{\Delta}{ABC}\ : \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\hat{A}=۵۸} ۵۸ + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰ - ۵۸ = ۱۲۲^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = ۱۲۲^\circ \qquad (I)$$

گام دوم

دو مثلث $\overset{\Delta}{CND}$ و $\overset{\Delta}{BMD}$ را در نظر گرفته و مجموع زوایای این دو مثلث را به دست می‌آوریم. مجموع زوایای این دو مثلث باید ۳۶۰° باشد. با تعیین $\alpha + \beta$ اندازهٔ $\hat{D}_۳$ یا همان $M\hat{D}N$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{CND}\ : \hat{C} + ۲\beta = ۱۸۰^\circ \\ \overset{\Delta}{BMD}\ : B + ۲\alpha = ۱۸۰^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{(+)} \hat{B} + \hat{C} + ۲(\alpha + \beta) = ۳۶۰^\circ$$

$$\xrightarrow{(I)} ۱۲۲^\circ + ۲(\alpha + \beta) = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۲(\alpha + \beta) = ۳۶۰^\circ - ۱۲۲^\circ$$
$$\Rightarrow ۲(\alpha + \beta) = ۲۳۸^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{۲۳۸^\circ}{۲} = ۱۱۹^\circ \qquad (II)$$

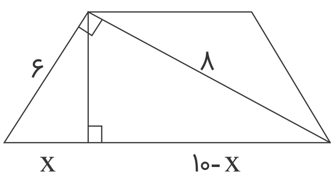
ازطرفی:

$$\hat{D}_۱ + \hat{D}_۲ + \hat{D}_۳ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha + \beta + M\hat{D}N = ۱۸۰^\circ$$
$$\xrightarrow{(II)} ۱۱۹^\circ + M\hat{D}N = ۱۸۰^\circ \Rightarrow M\hat{D}N = ۶۱^\circ$$

۱۶ گزینه ۱

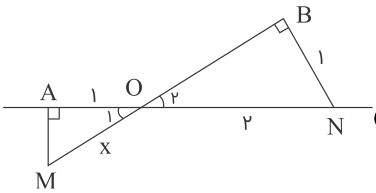
در هر مثلث قائم‌الزاویه هر ضلع زاویهٔ قائمه واسطهٔ هندسی بین وتر و تصویر آن ضلع روی وتر است.

$$۶^۲ = ۱۰x \Rightarrow x = ۳/۶$$
$$\text{طول قاعدهٔ کوچک} = ۱۰ - ۲x = ۱۰ - ۷/۲ = ۲/۸$$



۱۷ گزینه ۲

طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث OBN داریم:



$$\mathrm{OB} = \sqrt{\mathrm{ON}^۲ - \mathrm{BN}^۲} = \sqrt{۴ - ۱} = \sqrt{۳}$$

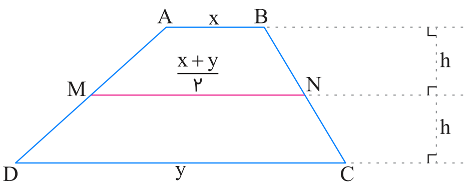
دو مثلث OAM و OBN به حالت تساوی دو زاویه، متشابه‌اند $(\hat{\mathrm{O}}_۱ = \hat{\mathrm{O}}_۲, \hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{B}} = ۹۰^\circ)$. داریم:

$$\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{ON}} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}} \Rightarrow \frac{\mathrm{x}}{۲} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \Rightarrow \mathrm{x} = \frac{۲}{\sqrt{۳}} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

۱۸ گزینه ۲

می‌دانیم در ذوزنقه طول خط واصل وسط‌های دو ساق، میانگین دو قاعده است.

باتوجه‌به شکل و فرض سؤال، داریم:



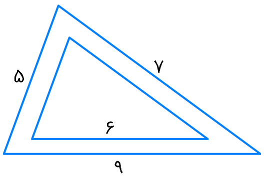
$$\frac{\mathrm{S_{ABNM}}}{\mathrm{S_{MNCD}}} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{\frac{۱}{۲}(\mathrm{x} + \frac{\mathrm{x}+\mathrm{y}}{۲})\,(\mathrm{h})}{\frac{۱}{۲}(\frac{\mathrm{x}+\mathrm{y}}{۲} + \mathrm{y})\,(\mathrm{h})} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{\frac{۳\mathrm{x}+\mathrm{y}}{۲}}{\frac{\mathrm{x}+۳\mathrm{y}}{۲}} = \frac{۳}{۵}$$

$$\Rightarrow \frac{۳\mathrm{x}+\mathrm{y}}{\mathrm{x}+۳\mathrm{y}} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow ۱۵\mathrm{x} + ۵\mathrm{y} = ۳\mathrm{x} + ۹\mathrm{y} \Rightarrow ۱۲\mathrm{x} = ۴\mathrm{y} \Rightarrow \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}} = \frac{۱}{۳}$$

۱۹

گزینه ۳

طبق توضیحات صورت سؤال، شکلی به‌صورت زیر رسم می‌کنیم:



چون اضلاع دو مثلث موازی یکدیگرند، پس دو مثلث متشابه هستند. می‌دانیم نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر مجذور نسبت تشابه آن‌ها است؛ بنابراین داریم:

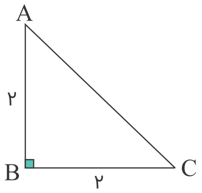
$$\frac{\text{مساحت مثلث بزرگ تر}}{\text{مساحت مثلث کوچک تر}} = \frac{S}{S'} = \left(\frac{۹}{۶}\right)^{۲} = \left(\frac{۳}{۲}\right)^{۲} = \frac{۹}{۴}$$

نسبت مساحت محدود به این دو مثلث به مساحت مثلث کوچک‌تر برابر است با:

$$\frac{S - S'}{S'} = \frac{S}{S'} - \frac{S'}{S'} = \frac{S}{S'} - ۱ = \frac{۹}{۴} - ۱ = \frac{۵}{۴} = ۱/۲۵$$

۲۰ گزینه ۴

ابتدا مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین $\overset{\triangle}{ABC}$ به ضلع قائم ۲ واحد را رسم می‌کنیم.



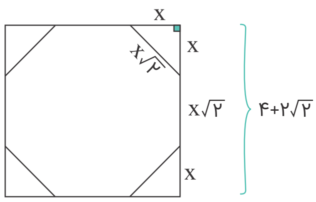
محیط این مثلث برابر طول ضلع یک مربع است. با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس اندازهٔ ضلع AC و سپس محیط مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ \Rightarrow AC^۲ = ۴ + ۴ = ۸ \Rightarrow AC = ۲\sqrt{۲}$$

$$\text{محیط مثلث } \overset{\triangle}{ABC} = ۲ + ۲ + ۲\sqrt{۲} = ۴ + ۲\sqrt{۲}$$

پس طول ضلع مربع موردنظر برابر $۴ + ۲\sqrt{۲}$ است.

می‌خواهیم با حذف گوشه‌های این مربع، یک هشت ضلعی منتظم را درون آن محاط کنیم. اگر اندازهٔ اضلاع قائمه چهار مثلث گوشه‌ای را x در نظر بگیریم، طول ضلع هشت ضلعی منتظم با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس برابر $x\sqrt{۲}$ می‌شود.



باتوجه‌به اینکه طول ضلع مربع برابر $۴ + ۲\sqrt{۲}$ است، مقدار x را حساب می‌کنیم:

$$x + x + x\sqrt{۲} = ۴ + ۲\sqrt{۲} \Rightarrow ۲x + x\sqrt{۲} = ۴ + ۲\sqrt{۲} \Rightarrow x = ۲$$

برای محاسبهٔ مساحت هشت ضلعی منتظم، کافی است مساحت چهار مثلث گوشه‌ای را از مساحت مربع کم کنیم:

$$S_{\text{مربع}} = (۴ + ۲\sqrt{۲})^۲$$

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲ = ۲$$

پس مساحت هشت ضلعی برابر است با:

$$S_{\text{هشت ضلعی}} = S_{\text{مربع}} - (۴ \times S_{\text{مثلث}}) = (۴ + ۲\sqrt{۲})^۲ - ۸ = ۱۶ + ۱۶\sqrt{۲} + ۸ - ۸ = ۱۶ + ۱۶\sqrt{۲}$$

۲۱

گزینه ۱

گام اول

الف) چهار ضلعی $MNPB$ متوازی‌الاضلاع است پس داریم:

$$MN||BP \Rightarrow MN||BC \Rightarrow \overset{\triangle}{AMN} \sim \overset{\triangle}{ABC}$$
$$NP||MB \Rightarrow NP||AB \Rightarrow \overset{\triangle}{NPC} \sim \overset{\triangle}{ABC}$$

ب) در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها برابر مجذور نسبت تشابه اضلاع است.

گام دوم

طبق گام اول، $\overset{\triangle}{AMN} \sim \overset{\triangle}{ABC}$ است. با توجه به اینکه $\frac{MA}{MB} = \frac{۳}{۲}$، نسبت تشابه دو مثلث و سپس نسبت مساحت آن‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{MA}{AB} = \frac{MA}{MA+MB} = \frac{۱}{\frac{MA+MB}{MA}} = \frac{۱}{۱+\frac{MA}{MB}} = \frac{۱}{۱+\frac{۲}{۳}} = \frac{۱}{\frac{۵}{۳}} = \frac{۳}{۵}$$
$$\Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{AMN}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = (\frac{۳}{۵})^{۲} = \frac{۹}{۲۵} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{AMN}} = \frac{۹}{۲۵}S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

چون $MN||BC$ است، با استفاده از قضیه تالس داریم:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{AN}{NC} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{NC}{AN} = \frac{۲}{۳}$$

$\overset{\triangle}{NPC} \sim \overset{\triangle}{ABC}$

است پس نسبت تشابه آن‌ها برابر است با:

$$\frac{NC}{AC} = \frac{NC}{AN+NC} = \frac{۱}{\frac{AN+NC}{NC}} = \frac{۱}{\frac{NC}{AN}+۱} = \frac{۱}{\frac{۳}{۲}+۱} = \frac{۱}{\frac{۵}{۲}} = \frac{۲}{۵}$$

حال نسبت مساحت‌های این دو مثلث را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{NPC}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = (\frac{۲}{۵})^{۲} = \frac{۴}{۲۵} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{NPC}} = \frac{۴}{۲۵}S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

با توجه به نسبت‌های بالا، مساحت متوازی‌الاضلاع $MNPB$ را برحسب مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ می‌نویسیم. داریم:

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = S_{\overset{\triangle}{AMN}} + S_{\overset{\triangle}{NPC}} + S_{MNPB}$$
$$\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۹}{۲۵}S_{\overset{\triangle}{ABC}} + \frac{۴}{۲۵}S_{\overset{\triangle}{ABC}} + S_{MNPB}$$
$$\Rightarrow S_{MNPB} = \frac{۱۲}{۲۵}S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۴۸}{۱۰۰}S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

پس مساحت متوازی‌الاضلاع ۴۸ درصد مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ است.

۲۲

گزینه ۲

گام اول

در دو مثلث متشابه، نسبت اضلاع متناظر برابر است.

گام دوم

با توجه به اینکه دو مثلث متشابه‌اند و $\frac{۵}{۹} \neq \frac{۴}{۷}$ و $\frac{۴}{۹} \neq \frac{۵}{۷}$ است، دو ضلع به طول‌های a و b از دو مثلث نمی‌توانند متناظر باشند؛ بنابراین ضلعِ به طول a از مثلث اول یا با ضلعِ به طول ۷ از مثلث دوم متناظر است یا با ضلعِ به طول ۹. هریک از این دو حالت را بررسی و مقدار a را محاسبه می‌کنیم.

حالت اول: ضلعِ به طول a از مثلث اول با ضلعِ به طول ۹ از مثلث دوم متناظر باشد.

$$\frac{a}{۹} = \frac{۴}{b} = \frac{۵}{۷} \Rightarrow \frac{a}{۹} = \frac{۵}{۷} \Rightarrow a = \frac{۴۵}{۷} \text{ یا } \frac{a}{۹} = \frac{۴}{۷} = \frac{۵}{b} \Rightarrow \frac{a}{۹} = \frac{۴}{۷} \Rightarrow a = \frac{۳۶}{۷}$$

حالت دوم: ضلعِ به طول a از مثلث اول با ضلعِ به طول ۷ از مثلث دوم متناظر باشد.

$$\frac{a}{۷} = \frac{۴}{۹} = \frac{۵}{b} \Rightarrow \frac{a}{۷} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow a = \frac{۲۸}{۹} \text{ یا } \frac{a}{۷} = \frac{۵}{۹} = \frac{۴}{b} \Rightarrow \frac{a}{۷} = \frac{۵}{۹} \Rightarrow a = \frac{۳۵}{۹}$$

از بین مقادیر به‌دست‌آمده، بیشترین مقدار $a = \frac{۴۵}{۷}$ است.

۲۳

گزینه ۲

گام اول

الف) دو مثلث قابل‌انطباق نیستند یعنی دو مثلث باهم برابر یا همنهشت نیستند؛ بنابراین حق نداریم کوچک‌ترین ضلع مثلث با اضلاع b و a و ۳ را برابر ۳ در نظر بگیریم (اگر کوچک‌ترین ضلع مثلث اول را ۳ در نظر بگیریم، با توجه به اینکه دو مثلث متشابه‌اند، نسبت تشابه آن‌ها برابر $۱ = \frac{۳}{۳}$ می‌شود و باید مقدار a و b برابر ۴ و ۵ باشد که دراین‌صورت دو مثلث برهم منطبق می‌شوند) پس کوچک‌ترین ضلع این مثلث a یا b است.

ب) می‌دانیم نسبت محیط‌های دو مثلث متشابه برابر نسبت تشابه است.

گام دوم

محیط مثلث دوم برابر است با:

$$۳ + ۴ + ۵ = ۱۲$$

نسبت تشابه دو مثلث می‌تواند $\frac{۳}{۴}$ یا $\frac{۳}{۵}$ باشد. اگر نسبت تشابه برابر $\frac{۳}{۴}$ باشد، محیط مثلث اول برابر است با:

$$\text{محیط مثلث اول} = ۱۲ \times \frac{۳}{۴} = ۳ \times ۳ = ۹$$

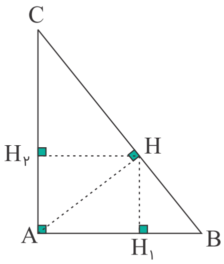
و اگر نسبت تشابه برابر $\frac{۳}{۵}$ باشد، داریم:

$$\text{محیط مثلث اول} = ۱۲ \times \frac{۳}{۵} = ۷/۲$$

بنابراین بیشترین محیط مثلث اول برابر ۹ است.

۲۴ گزینه ۱

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، ارتفاع وارد بر وتر، مثلث را به دو مثلث متشابه تقسیم می‌کند؛ یعنی مثلث‌های ABH و ACH باهم متشابه‌اند.



$$\frac{S(\overset{\Delta}{ABH})}{S(\overset{\Delta}{ABC})} = \frac{۱}{۵} \Rightarrow \frac{S(\overset{\Delta}{ABH})}{S(\overset{\Delta}{ABC}) - S(\overset{\Delta}{ABH})} = \frac{۱}{۵-۱} \Rightarrow \frac{S(\overset{\Delta}{ABH})}{S(\overset{\Delta}{ACH})} = \frac{۱}{۴}$$

بنابراین نسبت مساحت دو مثلث متشابه $\frac{۱}{۴}$ و نسبت تشابه دو مثلث $\frac{۱}{۲}$ است. در دو مثلث متشابه، نسبت ارتفاع‌ها همان نسبت تشابه است.

درنتیجه داریم: $\frac{HH_۱}{HH_۲} = \frac{۱}{۲}$

۲۵ گزینه ۳

چهار ضلعی $MNPB$ متوازی‌الاضلاع است؛ بنابراین $MN||PB$ است. با استفاده از قضیهٔ تالس می‌توان نوشت:

$$MN||BP \Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{۳}{۱۰}\Rightarrow \frac{NC}{AC}=\frac{۷}{۱۰}$$

همچنین $NO||AM$ است پس دو مثلث $\overset{\triangle}{NOC}$ و $\overset{\triangle}{AMC}$ نیز متشابه می‌شود. می‌دانیم نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر مجذور نسبت تشابه است؛ بنابراین:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{NOC}}}{S_{\overset{\triangle}{AMC}}}=\frac{۴۹}{۱۰۰}\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{NOC}}=\frac{۴۹}{۱۰۰}S_{\overset{\triangle}{AMC}}\qquad (I)$$

مساحت دو مثلث $\overset{\triangle}{AMC}$ و $\overset{\triangle}{ABC}$ را می‌توان چنین نوشت:

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۱}{۲}AB\cdot AC\cdot \sin\hat{A}$$

$$S_{\overset{\triangle}{AMC}}=\frac{۱}{۲}AM\cdot AC\cdot \sin\hat{A}$$

بنابراین:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{AMC}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=\frac{AM}{AB}=\frac{۳}{۱۰}\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{AMC}}=\frac{۳}{۱۰}S_{\overset{\triangle}{ABC}}\qquad (II)$$

با استفاده از دو رابطهٔ (I) و (II) داریم:

$$S_{\overset{\triangle}{NOC}}=\frac{۴۹}{۱۰۰}\times\frac{۳}{۱۰}S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۱۴۷}{۱۰۰۰}S_{\overset{\triangle}{ABC}}\qquad (III)$$

از طرفی چون $MN||BP$ است پس دو مثلث $\overset{\triangle}{AMN}$ و $\overset{\triangle}{ABC}$ متشابه می‌شود و نسبت مساحت آن‌ها برابر مجذور نسبت تشابه است؛ بنابراین:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{AMN}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=\left(\frac{AM}{AB}\right)^{۲}=\frac{۹}{۱۰۰}\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{AMN}}=\frac{۹}{۱۰۰}S_{\overset{\triangle}{ABC}}\qquad (IV)$$

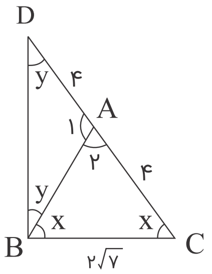
اکنون با استفاده از روابط (II) و (III) و (IV) داریم:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{OMN}}}{S_{\overset{\triangle}{AMN}}}=\frac{S_{\overset{\triangle}{AMC}}-S_{\overset{\triangle}{AMN}}-S_{\overset{\triangle}{NOC}}}{S_{\overset{\triangle}{AMN}}}=\frac{(\frac{۳}{۱۰}-\frac{۹}{۱۰۰}-\frac{۱۴۷}{۱۰۰۰})S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{\frac{۹}{۱۰۰}S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=\frac{\frac{۶۳}{۱۰۰۰}}{\frac{۹}{۱۰۰}}=\frac{۶۳}{۹۰}=\frac{۷}{۱۰}$$

پس مساحت مثلث $\overset{\triangle}{OMN}$، ۷۰ درصد مساحت مثلث $\overset{\triangle}{AMN}$ است.

۲۶ گزینه ۳

ابتدا بر اساس توضیحات صورت سؤال، یک شکل دقیق رسم می‌کنیم:



مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{ABD}$ متساوی‌الساقین هستند پس:

$$A\hat{B}C = A\hat{C}B = x \quad , \quad A\hat{B}D = A\hat{D}B = y$$

زاویهٔ $\hat{A}_۱$ زاویهٔ خارجی مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ است و اندازهٔ آن برابر مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاورش می‌شود؛ یعنی:

$$\hat{A}_۱ = x + x = ۲x$$

با توجه به اینکه مجموع زوایای داخلی هر مثلث برابر ۱۸۰° است، داریم:

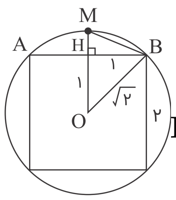
$$\hat{A}_۱ + y + y = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲x + ۲y = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲(x+y) = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x + y = \frac{۱۸۰^\circ}{۲} = ۹۰^\circ$$

بنابراین مثلث $\overset{\triangle}{DBC}$ در رأس B قائمه است و می‌توان اندازهٔ ضلع BD را با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس محاسبه کرد.

$$CD = AD + AC = ۴ + ۴ = ۸ \ , \ BC = ۲\sqrt{۷}$$

$$CD^۲ = BD^۲ + BC^۲ \quad \Rightarrow ۸^۲ = BD^۲ + (۲\sqrt{۷})^۲ \quad \Rightarrow ۶۴ = BD^۲ + ۲۸$$
$$\Rightarrow BD^۲ = ۶۴ - ۲۸ = ۳۶ \quad \Rightarrow BD = \sqrt{۳۶} = ۶$$

۲۷ گزینه ۲



هدف محاسبهٔ اندازهٔ MB است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\triangle}{MHB}$ داریم:

$$HB = ۱ \ , \ \ MH = OM - OH$$

برای محاسبهٔ MH، ابتدا لازم است با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس شعاع دایره را به‌دست آوریم:

$$OB = \sqrt{۱^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۲} \quad \Rightarrow \quad OM = OB = \sqrt{۲} \quad \Rightarrow \quad MH = \sqrt{۲} - ۱$$

اکنون با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس اندازهٔ MB را محاسبه می‌کنیم:

$$MB^۲ = MH^۲ + HB^۲ \ \Rightarrow \ MB^۲ = (\sqrt{۲} - ۱)^۲ + ۱^۲ = ۲ - ۲\sqrt{۲} + ۱ + ۱ = ۴ - ۲\sqrt{۲}$$
$$\Rightarrow MB = \sqrt{۴ - ۲\sqrt{۲}}$$

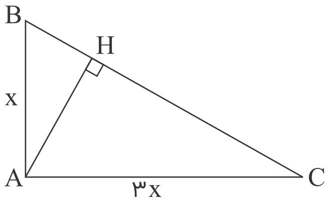
۲۸

گزینه ۳

گام اول

الف) طول اضلاع قائمهٔ مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ را x و $۳x$ در نظر می‌گیریم.

ب) می‌دانیم: "ارتفاع × قاعده × $\frac{۱}{۲}$ = مساحت مثلث"



گام دوم

با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس اندازهٔ BC را محاسبه می‌کنیم:

$$AB^{۲} + AC^{۲} = BC^{۲} \Rightarrow x^{۲} + ۹x^{۲} = BC^{۲} \Rightarrow BC^{۲} = ۱۰x^{۲} \Rightarrow BC = \sqrt{۱۰}x$$

با توجه به اینکه مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ برابر ۶۰ واحد مربع است، مقدار x را تعیین می‌کنیم.

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲}AB \times AC = \frac{۱}{۲}x(۳x) = ۶۰ \Rightarrow x^{۲} = ۴۰ \Rightarrow x = \sqrt{۴۰} = ۲\sqrt{۱۰}$$

می‌توان مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ را با تعریف BC و AH به ترتیب به‌عنوان قاعده و ارتفاع آن چنین نوشت:

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲}AH \times BC = ۶۰$$

بنابراین:

$$\frac{۱}{۲}AH \times \sqrt{۱۰}(۲\sqrt{۱۰}) = ۶۰ \Rightarrow ۱۰AH = ۶۰ \Rightarrow AH = ۶$$

۲۹

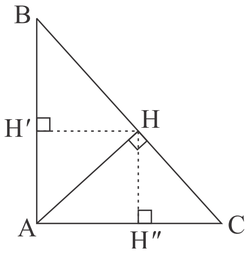
گزینه ۲

گام اول

الف) مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ قائم‌الزاویه است.

ب) با فرض اینکه $HC < HB$ باشد داریم: $S_{\overset{\triangle}{ABC}} = ۶/۷۶\, S_{\overset{\triangle}{AHC}}$

ج) $HH' = ?$ و $HH'' = ?$



گام دوم

سه مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\triangle}{AHC}$، $\overset{\triangle}{AHB}$ و $\overset{\triangle}{ABC}$ باهم متشابه‌اند. می‌دانیم در مثلث‌های متشابه نسبت تشابه برابر جذر نسبت مساحت‌ها است.

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{S_{\overset{\triangle}{AHC}}} = ۶/۷۶ \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{ABH}} + S_{\overset{\triangle}{AHC}}}{S_{\overset{\triangle}{AHC}}} = ۶/۷۶ \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{ABH}}}{S_{\overset{\triangle}{AHC}}} + ۱ = ۶/۷۶ \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{ABH}}}{S_{\overset{\triangle}{AHC}}} = ۵/۷۶$$

همچنین می‌دانیم در مثلث‌های متشابه، نسبت تشابه با نسبت ارتفاع‌ها برابر است. چون دو مثلث $\overset{\triangle}{ABH}$ و $\overset{\triangle}{ACH}$ باهم متشابه‌اند، داریم:

$$\frac{HH'}{HH''} = \sqrt{۵/۷۶} = ۲/۴ \Rightarrow \frac{HH'}{HH''} = \frac{۲۴}{۱۰} = \frac{۱۲}{۵} \Rightarrow \frac{HH''}{HH'} = \frac{۵}{۱۲}$$

۳۰

گزینه ۲

طبق قضیهٔ تالس می‌توان نوشت $(ME = x)$:

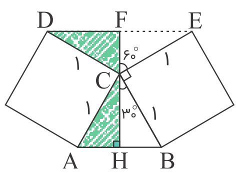
$$\left.\begin{array}{l} BE \| AC \Rightarrow \dfrac{ME}{AE} = \dfrac{MB}{BC} \\ AB \| DC \Rightarrow \dfrac{MA}{AD} = \dfrac{MB}{BC} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{ME}{AE} = \frac{MA}{AD} \Rightarrow \frac{x}{۳} = \frac{x+۳}{۷} \Rightarrow x = ۲/۲۵$$

$$\Rightarrow MD = ME + AE + AD = ۲/۲۵ + ۳ + ۷ = ۱۲/۲۵$$

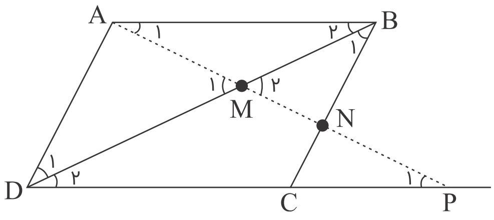
۳۱

گزینه ۳

باتوجه‌به شکل واضح است که مثلث‌های ACH و CDF همنهشت هستند؛ بنابراین مساحت مثلث ABC دو برابر مساحت مثلث DCF و مساوی با مساحت مثلث DCE است.



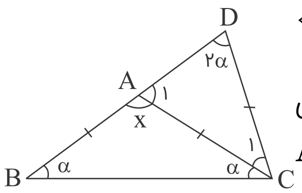
۳۲ گزینه ۴



$$\left.\begin{array}{l}\hat{D}_۱=\hat{B}_۱\,,\ \hat{M}_۱=\hat{M}_۲ \Rightarrow \overset{\triangle}{AMD} \sim \overset{\triangle}{MBN} \Rightarrow \dfrac{MD}{MB}=\dfrac{AM}{MN}\\ \hat{A}_۱=\hat{P}_۱,\hat{B}_۲=\hat{D}_۲ \Rightarrow \overset{\triangle}{AMB} \sim \overset{\triangle}{MDP} \Rightarrow \dfrac{MD}{MB}=\dfrac{MP}{AM}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{MN}=\frac{MP}{AM} \Rightarrow MN \times MP = AM^۲$$

۳۳ گزینه ۳



$$\begin{cases} BD=BC \\ AB=AC=DC \end{cases}$$

زاویه‌های خارجی $\hat{A}_۱=۲\alpha$

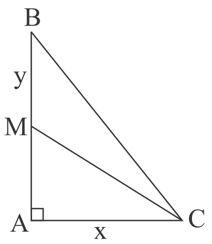
$AC=DC \Rightarrow \hat{D}=\hat{A}_۱=۲\alpha \quad , \quad BD=BC \Rightarrow \hat{D}=D\hat{C}B=۲\alpha \Rightarrow \hat{C}_۱=\alpha$

$\overset{\triangle}{ADC}:\ \hat{A}_۱+\hat{C}_۱+\hat{D}=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\alpha+\alpha+۲\alpha=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha=۳۶^\circ$

$\hat{x}=۱۸۰^\circ-\hat{A}_۱=۱۸۰^\circ-۲\hat{\alpha}=۱۸۰^\circ-۷۲^\circ=۱۰۸^\circ$

۳۴ گزینه ۱

مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\triangle}{ABC}$ را با فرض اینکه طول اضلاع قائمه‌اش x و y $(x<y)$ باشد، رسم می‌کنیم. AB ضلع متوسط این مثلث و CM میانهٔ وارد بر آن است. هدف محاسبهٔ نسبت $\frac{CM}{AB}$ است.



مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ برابر مساحت مربعی به طول ضلع x است؛ بنابراین:

$$\frac{xy}{۲}=x^۲ \Rightarrow xy=۲x^۲ \xrightarrow{x,y>۰} y=۲x \Rightarrow AB=۲x$$

$$AM=\frac{۱}{۲}AB=\frac{۱}{۲}(۲x)=x$$

اکنون با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث $\overset{\triangle}{AMC}$، اندازهٔ CM را به دست می‌آوریم:

$$CM^۲=AM^۲+AC^۲ \Rightarrow CM^۲=x^۲+x^۲=۲x^۲ \Rightarrow CM=\sqrt{۲}x$$

پس نسبت $\frac{CM}{AB}$ برابر است با:

$$\frac{CM}{AB}=\frac{\sqrt{۲}x}{۲x}=\frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow CM=\frac{\sqrt{۲}}{۲}AB$$

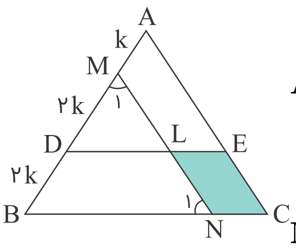
۳۵ گزینه ۳

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\triangle}{BDN}: AM||DN \Rightarrow \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{MN}{BM}\\ \overset{\triangle}{ACM}: EN||AM \Rightarrow \dfrac{AE}{AC}=\dfrac{MN}{CM}\end{array}\right\} \xrightarrow{BM=CM} \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}=\frac{۲}{۳}$$

۳۶ گزینه ۱

شکل را به‌صورت زیر نام‌گذاری می‌کنیم:



مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی‌الاضلاع است؛ بنابراین:

$$\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=۶۰^\circ$$

چون $NLEC$ متوازی‌الاضلاع است، داریم:

$MN||AC \Rightarrow \hat{M}_۱=\hat{A}=۶۰^\circ\,,\ \hat{N}_۱=\hat{C}=۶۰^\circ \Rightarrow$ متساوی الاضلاع است $\overset{\triangle}{MBN} \Rightarrow BN=۴k$

هردو مثلث $\overset{\triangle}{MBN}$ و $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی‌الاضلاع هستند درنتیجه باهم متشابه‌اند. می‌دانیم نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر مجذور نسبت تشابه آن دو مثلث است؛ بنابراین:

$$\overset{\triangle}{MBN} \sim \overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{MBN}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=\left(\frac{۴k}{۵k}\right)^۲=\left(\frac{۴}{۵}\right)^۲=\frac{۱۶}{۲۵} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{MBN}}=\frac{۱۶}{۲۵}S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

همچنین

$DL||BN \Rightarrow \hat{D}=\hat{B}=۶۰^\circ\,,\ \hat{L}=\hat{N}_۱=۶۰^\circ \Rightarrow$ متساوی الاضلاع است $\overset{\triangle}{MDL} \Rightarrow ML=۲k$

به طریق مشابه ثابت می‌شود که $\overset{\triangle}{ADE}$ نیز متساوی‌الاضلاع و $AE=۳k$ است؛ بنابراین دو مثلث $\overset{\triangle}{MDL}$ و $\overset{\triangle}{MBN}$ و دو مثلث $\overset{\triangle}{MDL}$ و $\overset{\triangle}{ADE}$ باهم متشابه‌اند و داریم:

$$\overset{\triangle}{MDL} \sim \overset{\triangle}{MBN} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{MDL}}}{S_{\overset{\triangle}{MBN}}}=\left(\frac{۲k}{۴k}\right)^۲=\frac{۱}{۴} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{MDL}}=\frac{۱}{۴}S_{\overset{\triangle}{MBN}}=\frac{۴}{۲۵}S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

$$\overset{\triangle}{MDL} \sim \overset{\triangle}{ADE} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{MDL}}}{S_{\overset{\triangle}{ADE}}}=\left(\frac{۲k}{۳k}\right)^۲=\frac{۴}{۹} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ADE}}=\frac{۹}{۴}S_{\overset{\triangle}{MDL}}=\frac{۹}{۲۵}S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

با استفاده از نسبت‌های بالا، نسبت خواسته‌شده را محاسبه می‌کنیم:

$$S_{AMLE}=S_{\overset{\triangle}{ADE}}-S_{\overset{\triangle}{MDL}}=\frac{۹}{۲۵}S_{\overset{\triangle}{ABC}}-\frac{۴}{۲۵}S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۵}{۲۵}S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

$$S_{LECN}=S_{\overset{\triangle}{ABC}}-(S_{\overset{\triangle}{BMN}}+S_{AMLE})=S_{\overset{\triangle}{ABC}}-\left(\frac{۱۶}{۲۵}S_{\overset{\triangle}{ABC}}+\frac{۵}{۲۵}S_{\overset{\triangle}{ABC}}\right)=\frac{۴}{۲۵}S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\%۱۶S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

بنابراین مساحت متوازی‌الاضلاع هاشورزده ۱۶ درصد مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ است.

۳۷

گزینه ۲

گام اول

الف) مثلث $\overset{\triangle}{MNC}$ متساوی‌الساقین است، پس $N\hat{M}C = M\hat{N}C$.

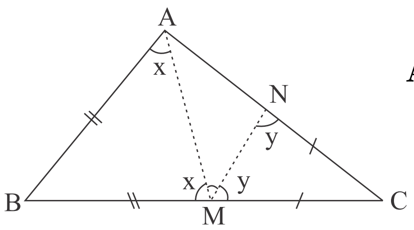
ب) مثلث $\overset{\triangle}{ABM}$ متساوی‌الساقین است، پس $A\hat{M}B = B\hat{A}M$.

ج) مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰° است.

گام دوم

با توجه به گام اول، شکل را تکمیل می‌کنیم:

می‌دانیم $\hat{M}$ یک زاویهٔ نیم‌صفحه است، داریم:



$$A\hat{M}B + A\hat{M}N + N\hat{M}C = x + ۴۳^\circ + y = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x + y = ۱۸۰^\circ - ۴۳^\circ = ۱۳۷^\circ \quad (I)$$

ازطرفی:

$$\left.\begin{array}{ll} \overset{\triangle}{ABM} : & \hat{B} + ۲x = ۱۸۰^\circ \\ \overset{\triangle}{CNM} : & \hat{C} + ۲y = ۱۸۰^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{+} \hat{B} + ۲x + \hat{C} + ۲y = \hat{B} + \hat{C} + ۲(x+y) = ۳۶۰^\circ$$

$$\xrightarrow{(I)} \hat{B} + \hat{C} + ۲۷۴^\circ = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = ۳۶۰^\circ - ۲۷۴^\circ = ۸۶^\circ$$

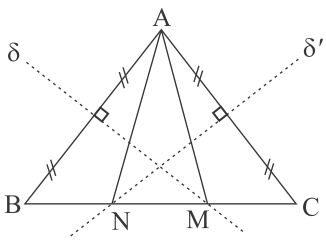
همچنین در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ داریم:

$$\hat{B} + \hat{C} + B\hat{A}C = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۸۶^\circ + B\hat{A}C = ۱۸۰^\circ \Rightarrow B\hat{A}C = ۱۸۰^\circ - ۸۶^\circ = ۹۴^\circ$$

۳۸

گزینه ۲

$$\hat{A} = ۸۰^\circ, AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = \frac{۱۸۰^\circ - \hat{A}}{۲} = ۵۰^\circ$$



هر نقطه واقع بر عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است، پس:

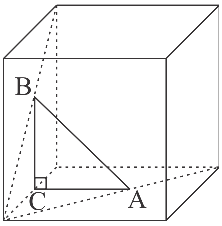
$$\begin{cases} M \in \delta \Rightarrow MA = MB \Rightarrow B\hat{A}M = \hat{B} = ۵۰^\circ \Rightarrow A\hat{M}B = ۸۰^\circ \\ N \in \delta' \Rightarrow NA = NC \Rightarrow C\hat{A}N = \hat{C} = ۵۰^\circ \Rightarrow A\hat{N}C = ۸۰^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow M\hat{A}N = ۱۸۰^\circ - (A\hat{M}B + A\hat{N}C) = ۲۰^\circ$$

بنابراین، کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث AMN، زاویهٔ $M\hat{A}N = ۲۰^\circ$ است.

۳۹ گزینه ۳

مکعبی به طول یال $۴\sqrt{۲}$ به‌صورت زیر رسم کرده و وسط دو وجه غیرموازی آن را A و B می‌نامیم. هدف محاسبهٔ اندازهٔ AB است.



اندازهٔ AC و BC نصف یال مکعب است؛ بنابراین:

$$AC = BC = \frac{۱}{۲}(۴\sqrt{۲}) = ۲\sqrt{۲}$$

با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس، اندازهٔ AB را تعیین می‌کنیم:

$$BC^{۲} + AC^{۲} = AB^{۲} \Rightarrow ۲(۲\sqrt{۲})^{۲} = AB^{۲} \Rightarrow AB^{۲} = ۲ \times ۸ = ۱۶ \Rightarrow AB = \sqrt{۱۶} = ۴$$

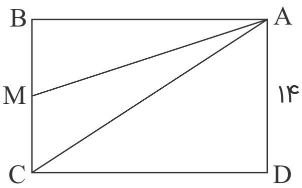
۴۰ گزینه ۲

گام اول

الف) عرض مستطیل ۱۴ واحد و قطر آن ۲۵ واحد است.

ب) $\frac{S_{ABM}}{S_{AMCD}} = \frac{۵}{۹}$

ج) $AM = ?$



گام دوم

با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس، طول مستطیل را به دست می‌آوریم.

$$AC^{۲} = AD^{۲} + CD^{۲} \xrightarrow[AD=۱۴]{AC=۲۵} ۲۵^{۲} = ۱۴^{۲} + CD^{۲}$$
$$\Rightarrow ۶۲۵ = ۱۹۶ + CD^{۲} \Rightarrow CD^{۲} = ۶۲۵ - ۱۹۶ = ۴۲۹ \Rightarrow AB^{۲} = ۴۲۹$$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABM}}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{\overset{\triangle}{ABM}}}{S_{\overset{\triangle}{ABM}} + S_{AMCD}} = \frac{۵}{۵+۹} = \frac{۵}{۱۴}$$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABM}}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{۱}{۲} \times AB \times BM}{AB \times AD} = \frac{BM}{۲AD} = \frac{۵}{۱۴} \Rightarrow \frac{BM}{۲۸} = \frac{۵}{۱۴} \Rightarrow BM = ۱۰$$

رابطهٔ فیثاغورس را برای مثلث $\overset{\triangle}{ABM}$ نوشته و اندازهٔ AM را تعیین می‌کنیم:

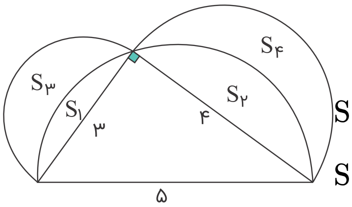
$$AB^{۲} + BM^{۲} = AM^{۲} \Rightarrow ۴۲۹ + ۱۰۰ = AM^{۲} \Rightarrow AM^{۲} = ۵۲۹ \Rightarrow AM = \sqrt{۵۲۹} = ۲۳$$

۴۱ گزینه ۲

مساحت قسمت‌های مختلف شکل را به‌صورت زیر نام‌گذاری می‌کنیم. هدف ما محاسبهٔ $S_۳ + S_۴$ است. با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس طول وتر مثلث برابر است با:

$$\text{وتر مثلث} = \sqrt{۳^۲ + ۴^۲} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

داریم:



$$S_۱ + S_۲ = \text{مساحت نیم‌دایره به قطر ۵} - \text{مساحت مثلث قائم‌الزاویه}$$

$$S_۳ + S_۴ = (\text{مساحت نیم‌دایره به قطر ۳} + \text{مساحت نیم‌دایره به قطر ۴}) - (S_۱ + S_۲)$$

بنابراین:

$$S_۱ + S_۲ = \frac{۱}{۲} \times \pi \times (\frac{۵}{۲})^۲ - \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۴ = \frac{\pi}{۲}(\frac{۲۵}{۴}) - ۶ = \frac{۲۵\pi}{۸} - ۶$$

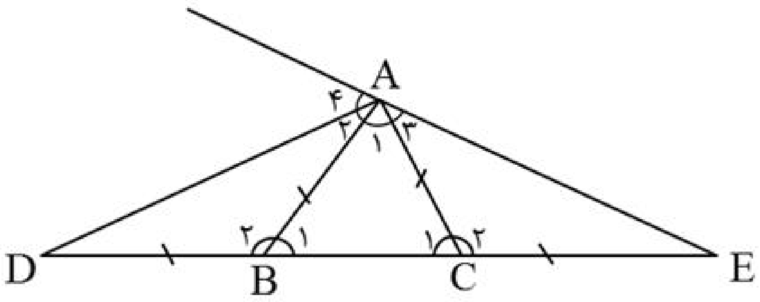
$$S_۳ + S_۴ = \frac{۱}{۲} \times \pi(\frac{۳}{۲})^۲ + \frac{۱}{۲} \times \pi(\frac{۴}{۲})^۲ - (\frac{۲۵\pi}{۸} - ۶)$$

$$= \frac{\pi}{۲}(\frac{۹}{۴}) + \frac{\pi}{۲}(۴) - \frac{۲۵\pi}{۸} + ۶ = \frac{۲۵\pi}{۸} - \frac{۲۵\pi}{۸} + ۶ = ۶$$

گزینه ۳

گام اول

الف) مثلث $\overset{\triangle}{ADE}$ را بر اساس توضیحات صورت سؤال رسم می‌کنیم:



ب) $AB = AC = CE = BD$

ج) کوچک‌ترین زاویهٔ خارجی در هر مثلث، مکمل بزرگ‌ترین زاویهٔ داخلی است.

گام دوم

مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی‌الساقین است؛ بنابراین $\hat{B}_۱ = \hat{C}_۱$، درنتیجه مکمل آن‌ها نیز برابر است؛ یعنی $\hat{B}_۲ = \hat{C}_۲$ است. ازطرفی طبق قسمت (ب) از گام اول، $CE = BD$ و $AB = AC$ است؛ بنابراین دو مثلث $\overset{\triangle}{ABD}$ و $\overset{\triangle}{ACE}$ به حالت (ض‌زض) هم‌نهشت هستند.

$$\left.\begin{array}{l} CE = BD \\ \hat{B}_۲ = \hat{C}_۲ \\ AB = AC \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{ABD} \cong \overset{\triangle}{ACE}$$

درنتیجه زوایای $\hat{D}$ و $\hat{E}$ باهم برابر و هردو زوایای کوچک داخلی مثلث $\overset{\triangle}{ADE}$ محسوب می‌شوند.

$$\overset{\triangle}{ABD}\text{متساوی الساقین} \Rightarrow \hat{A}_۲ = \hat{D} = \alpha \xrightarrow{\hat{D}=\hat{E}} \hat{D} = \hat{E} = \alpha$$

$\hat{A}_۴$ کوچک‌ترین زاویهٔ خارجی مثلث $\overset{\triangle}{ADE}$ است پس اندازهٔ آن با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاورش برابر می‌شود:

$$\hat{A}_۴ = \hat{D} + \hat{E} = \alpha + \alpha = ۲\alpha$$

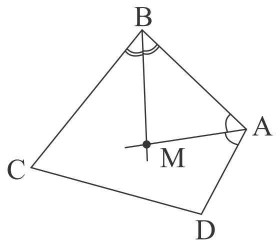
بنابراین کوچک‌ترین زاویهٔ خارجی مثلث، ۲ برابر کوچک‌ترین زاویهٔ داخلی آن است.

۴۳

گزینه ۳

$$\hat{A} = \frac{۴}{۳}\hat{B}\ ,\ \hat{C} + \hat{D} = \frac{۱۱}{۳}\hat{B}\ ,\ \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = ۳۶۰^{\circ}$$

$$\Rightarrow \frac{۴}{۳}\hat{B} + \hat{B} + \frac{۱۱}{۳}\hat{B} = ۳۶۰^{\circ} \Rightarrow ۶\hat{B} = ۳۶۰^{\circ} \Rightarrow \hat{B} = ۶۰^{\circ} \Rightarrow \hat{A} = ۸۰^{\circ}$$



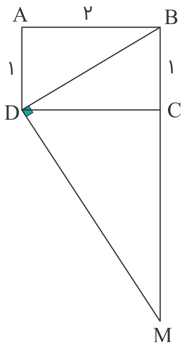
اگر M زاویهٔ بین نیمسازهای دو زاویهٔ A و B باشد، داریم:

$$\hat{M} = ۱۸۰ - \frac{\hat{A}}{۲} - \frac{\hat{B}}{۲} \Rightarrow \hat{M} = ۱۸۰ - ۳۰ - ۴۰ = ۱۱۰$$

$$\Rightarrow \text{زاویهٔ حاده} = ۱۸۰^{\circ} - ۱۱۰^{\circ} = ۷۰^{\circ}$$

۴۴ گزینه ۳

راه‌حل اول: باتوجه‌به توضیحات صورت سؤال، شکلی ساده و دقیق رسم می‌کنیم:



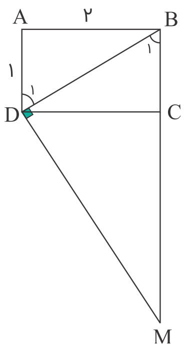
هدف محاسبهٔ MB است. BD قطر مستطیل است، با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$BD^{۲} = AB^{۲} + AD^{۲} = ۲^{۲} + ۱^{۲} = ۴ + ۱ = ۵ \quad \Rightarrow \quad BD = \sqrt{۵}$$

با استفاده از رابطه طولی در مثلث BDM داریم:

$$BD^{۲} = MB^{۲}.BC^{۲} \Rightarrow (\sqrt{۵})^{۲} = MB^{۲} \times ۱ \Rightarrow MB = ۵$$

راه‌حل دوم:



هدف محاسبهٔ MB است. BD قطر مستطیل است، با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$BD^{۲} = AB^{۲} + AD^{۲} = ۲^{۲} + ۱^{۲} = ۴ + ۱ = ۵ \quad \Rightarrow \quad BD = \sqrt{۵}$$

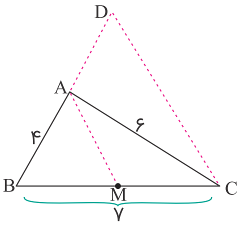
دو مثلث قائم‌الزاویهٔ $B\overset{\triangle}{A}D$ و $B\overset{\triangle}{D}M$ متشابه هستند، زیرا:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = B\hat{D}M = ۹۰^{\circ} \\ \left.\begin{array}{l} AD || BC \\ \text{مورب}BD \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{D}_{۱} = \hat{B}_{۱} \end{array}\right\} \Rightarrow B\overset{\triangle}{A}D \sim B\overset{\triangle}{D}M$$

در دو مثلث متشابه، نسبت اضلاع متناظر برابر است بنابراین:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{MB} \quad \Rightarrow \quad \frac{۱}{\sqrt{۵}} = \frac{\sqrt{۵}}{MB} \quad \Rightarrow \quad MB = (\sqrt{۵})^{۲} = ۵$$

۴۵ گزینه ۲

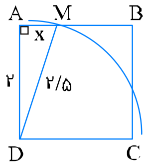


در مثلث BDC می‌دانیم $AM || CD$ است. به کمک رابطهٔ تعمیم قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{BA}{BD} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow \frac{۴}{BD} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow BD = ۸$$

۴۶ گزینه ۲

مربع $ABCD$ را در نظر بگیرید. دایره‌ای به مرکز D و شعاع $۲/۵$ واحد رسم می‌کنیم. این دایره دو ضلع AB و BC را قطع می‌کند.



با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ $D\overset{\Delta}{A}M$، فاصلهٔ نقطهٔ M را از دو رأس A و B محاسبه می‌کنیم:

$$AM^۲ + ۲^۲ = (۲/۵)^۲ \quad \Rightarrow \quad AM^۲ + ۴ = ۶/۲۵ \quad \Rightarrow \quad AM^۲ = ۲/۲۵$$

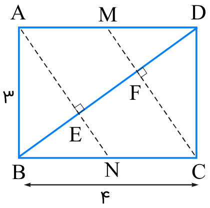
$$\Rightarrow \quad AM = \sqrt{۲/۲۵} = ۱/۵ \qquad , \qquad MB = ۲ - ۱/۵ = ۰/۵$$

بنابراین فاصلهٔ نزدیک‌ترین رأس مربع تا نقاط تقاطع برابر $\frac{۱}{۲} = ۰/۵$ است.

۴۷

گزینه ۱

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD داریم:



$$\overset{\Delta}{ABD} : BD^{۲} = AB^{۲} + AD^{۲}$$
$$\Rightarrow BD^{۲} = ۹ + ۱۶ = ۲۵ \Rightarrow BD = ۵$$

کاملا واضح است که مثلث‌های ABN و CDM همنهشت‌اند، لذا $EB = DF$. همچنین ABD قائم‌الزاویه است، بنابراین:

$$AB^{۲} = BE \times BD \Rightarrow ۹ = BE \times ۵ \Rightarrow BE = DF = \frac{۹}{۵}$$
$$\Rightarrow EF = ۵ - ۲ \times \frac{۹}{۵} = \frac{۷}{۵}$$

همچنین در مثلث BFC داریم:

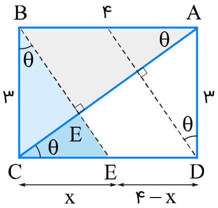
$$EN \parallel CF \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{BE}{BF} = \frac{BN}{BC} \Rightarrow \frac{\frac{۹}{۵}}{\frac{۹}{۵} + \frac{۷}{۵}} = \frac{BN}{۴} \Rightarrow BN = \frac{۳۶}{۱۶} = \frac{۹}{۴}$$

$$\Rightarrow NC = ۴ - \frac{۹}{۴} = \frac{۷}{۴}$$

$$S_{ANCM} = AB \times NC = ۳ \times \frac{۷}{۴} = \frac{۲۱}{۴} = ۵/۲۵$$

راه‌حل دوم:

در شکل زیر تمام زوایای مشخص‌شده با یکدیگر برابرند که آن‌ها را θ می‌نامیم.



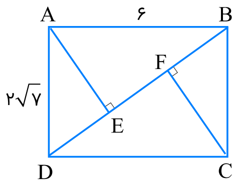
در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم $\tan\theta = \frac{۳}{۴}$ و همچنین در مثلث قائم‌الزاویهٔ BCE داریم $\tan\theta = \frac{x}{۳}$، درنتیجه:

$$\Rightarrow \frac{x}{۳} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow x = \frac{۹}{۴} = ۲/۲۵$$

$$S_{\text{متوازی‌الاضلاع}} = \text{قاعده} \times \text{ارتفاع} = (۴ - x) \times ۳ = (۴ - ۲/۲۵) \times ۳$$
$$= ۱/۷۵ \times ۳ = ۵/۲۵$$

۴۸ گزینه ۱

از دو رأس A و C، دو عمود AE و CF را بر قطر BD رسم می‌کنیم.



$$\overset{\Delta}{ABD}: BD^{۲} = AB^{۲} + AD^{۲} = ۳۶ + ۲۸ = ۶۴ \Rightarrow BD = ۸$$

طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

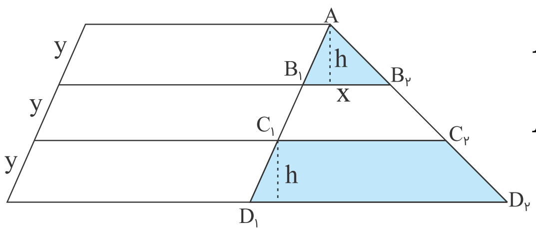
$$\overset{\Delta}{ABD}: AD^{۲} = DE.BD \Rightarrow ۲۸ = DE \times ۸ \Rightarrow DE = \frac{۲۸}{۸} = ۳/۵$$

به طور مشابه $BF = ۳/۵$ است و داریم:

$$EF = BD - (DE + BF) = ۸ - ۷ = ۱$$

۴۹ گزینه ۲

فرض کنید $B_{۱}B_{۲} = x$ باشد. در این صورت داریم:



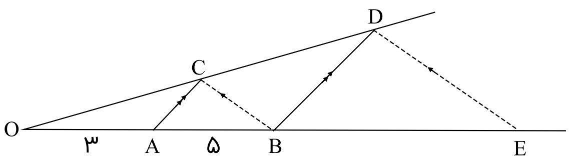
$$\overset{\Delta}{AC_{۱}C_{۲}}: \frac{AB_{۱}}{AC_{۱}} = \frac{x}{C_{۱}C_{۲}} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{x}{C_{۱}C_{۲}} \Rightarrow C_{۱}C_{۲} = ۲x$$

$$\overset{\Delta}{AD_{۱}D_{۲}}: \frac{AB_{۱}}{AD_{۱}} = \frac{x}{D_{۱}D_{۲}} \Rightarrow \frac{۱}{۳} = \frac{x}{D_{۱}D_{۲}} \Rightarrow D_{۱}D_{۲} = ۳x$$

$$\frac{S_{AB_{۱}B_{۲}}}{S_{C_{۱}C_{۲}D_{۲}D_{۱}}} = \frac{\frac{۱}{۲} \times x \times h}{\frac{۱}{۲}(۲x + ۳x)h} = \frac{۱}{۵}$$

۵۰ گزینه ۱

باتوجه‌به شکل و با کمک قضیهٔ تالس داریم:

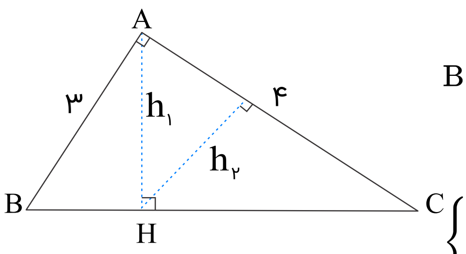


$$\begin{cases} AC||BD \Rightarrow \dfrac{OA}{AB} = \dfrac{OC}{CD} \\ BC||DE \Rightarrow \dfrac{OB}{BE} = \dfrac{OC}{CD} \end{cases}$$

طرف راست تساوی‌ها باهم برابر است پس طرف چپ آن نیز باهم برابر است.

$$\Rightarrow \frac{OA}{AB} = \frac{OB}{BE} \Rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{۸}{BE} \Rightarrow BE = \frac{۴۰}{۳} = ۱۳\frac{۱}{۳}$$

۵۱ گزینه ۲



$$BC = \sqrt{۳^۲ + ۴^۲} = ۵$$

راه‌حل اول:

$$\begin{cases} \hat{C} \ \text{مشترک} \\ A\hat{H}C = \hat{A} = ۹۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{AHC} \sim \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \frac{h_۲}{h_۱} = \frac{AC}{BC} = \frac{۴}{۵}$$

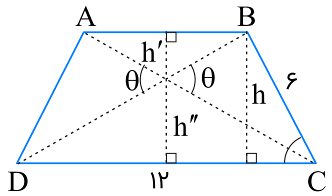
راه‌حل دوم:

$$\overset{\Delta}{ABC} : \begin{cases} h_۱ \times BC = AB \times AC \Rightarrow ۵h_۱ = ۳ \times ۴ \Rightarrow h_۱ = \dfrac{۱۲}{۵} \\ AC^۲ = HC \times BC \Rightarrow ۱۶ = ۵HC \Rightarrow HC = \dfrac{۱۶}{۵} \end{cases}$$

$$\overset{\Delta}{AHC} : h_۲ \times AC = h_۱ \times HC \Rightarrow \frac{h_۲}{h_۱} = \frac{HC}{AC} = \frac{\frac{۱۶}{۵}}{۴} = \frac{۴}{۵}$$

۵۲ گزینه ۳

دو مثلث $\overset{\Delta}{OAB}$ و $\overset{\Delta}{OCD}$ باهم متشابه‌اند.



$$\frac{h'}{h''}=\frac{AB}{CD}\Rightarrow\frac{h'}{h''}=\frac{۸}{۱۲}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow h''=\frac{۳}{۲}h'$$

$$h'+h''=۱۰\Rightarrow h'+\frac{۳}{۲}h'=۱۰\Rightarrow h'=۴\Rightarrow h''=۶$$

$$\overset{\Delta}{OAB}\sim\overset{\Delta}{OCD}\Rightarrow\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}\Rightarrow OB\times OC=OA\times OD\ (*)$$

مساحت دو مثلث $\overset{\Delta}{OBC}$ و $\overset{\Delta}{OAD}$ باهم برابرند زیرا:

$$\begin{cases}S_{\overset{\Delta}{OBC}}=\frac{۱}{۲}OB\times OC\times\sin\theta\\ S_{\overset{\Delta}{OAD}}=\frac{۱}{۲}OA\times OD\times\sin\theta\end{cases}\xrightarrow{(*)}S_{\overset{\Delta}{OBC}}=S_{\overset{\Delta}{OAD}}$$

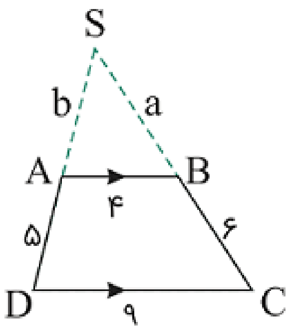
$$S_{\overset{\Delta}{ABCD}}=S_{\overset{\Delta}{ODC}}+S_{\overset{\Delta}{OBC}}+S_{\overset{\Delta}{OAB}}+S_{\overset{\Delta}{OAD}}$$

$$\Rightarrow\frac{(۸+۱۲)\times۱۰}{۲}=\frac{۶\times۱۲}{۲}+\frac{۴\times۸}{۲}+۲S_{\overset{\Delta}{OBC}}$$

$$\Rightarrow ۱۰۰=۳۶+۱۶+۲S_{\overset{\Delta}{OBC}}\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{OBC}}=\frac{۴۸}{۲}=۲۴$$

۵۳ گزینه ۴

مطابق شکل، ساق‌های ذوزنقه $ABCD$ به طول اضلاع $AB = ۴$، $CD = ۹$، $AD = ۵$ و $BC = ۶$ را امتداد می‌دهیم تا همدیگر را در S قطع کنند.



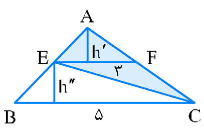
$$AB \| CD \xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{SA}{SD} = \frac{SB}{SC} = \frac{AB}{CD}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{b+۵} = \frac{a}{a+۶} = \frac{۴}{۹}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{b}{b+۵} = \dfrac{۴}{۹} \Rightarrow ۹b = ۴b + ۲۰ \Rightarrow b = ۴ \\ \dfrac{a}{a+۶} = \dfrac{۴}{۹} \Rightarrow ۹a = ۴a + ۲۴ \Rightarrow a = ۴/۸ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{SAB محیط مثلث} = ۴ + ۴/۸ + ۴ = ۱۲/۸$$

۵۴ گزینه ۴



$$\frac{EF}{BC} = \frac{۳}{۵}$$

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{BEC}}}{S_{BCFE}} = \frac{\frac{۱}{۲} \times ۵ \times h''}{\frac{۱}{۲} \times (۳+۵) \times h''} = \frac{۵}{۸} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{EFC}}}{S_{BCFE}} = ۱ - \frac{۵}{۸} = \frac{۳}{۸}$$

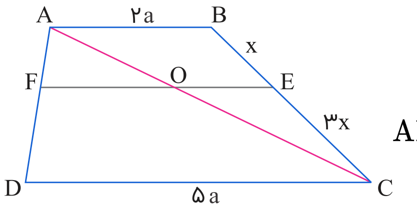
$$\text{نسبت تشابه} : \frac{S_{\overset{\Delta}{AEF}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \left(\frac{۳}{۵}\right)^{۲} = \frac{۹}{۲۵} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{AEF}}}{S_{BCFE}} = \frac{S_{\overset{\Delta}{AEF}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}} - S_{\overset{\Delta}{AEF}}}$$

$$= \frac{S_{\overset{\Delta}{AEF}}}{\frac{۲۵}{۹} S_{\overset{\Delta}{AEF}} - S_{\overset{\Delta}{AEF}}} = \frac{۱}{\frac{۲۵}{۹} - ۱} = \frac{۱}{\frac{۱۶}{۹}} = \frac{۹}{۱۶}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{AEC}}}{S_{\overset{\Delta}{BCFE}}} = \frac{S_{\overset{\Delta}{EFC}}}{S_{\overset{\Delta}{BCFE}}} + \frac{S_{\overset{\Delta}{AEF}}}{S_{\overset{\Delta}{BCFE}}} = \frac{۳}{۸} + \frac{۹}{۱۶} = \frac{۱۵}{۱۶}$$

۵۵ گزینه ۱

رأس A را به C وصل می‌کنیم:



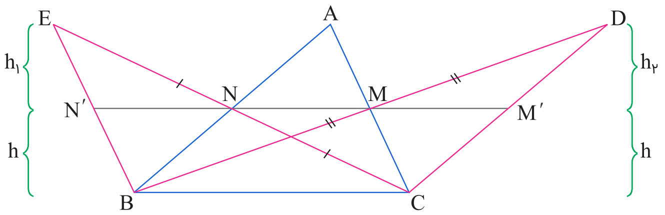
$$\overset{\Delta}{ADC}: \frac{AF}{AD} = \frac{OF}{CD} \Rightarrow \frac{۱}{۴} = \frac{OF}{۵a} \Rightarrow OF = \frac{۵}{۴}a$$

$$\overset{\Delta}{ACD}: \frac{CE}{CB} = \frac{OE}{۲a} \Rightarrow \frac{۳x}{۴x} = \frac{OE}{۲a} \Rightarrow OE = \frac{۳}{۲}a$$

$$EF = OF + OE = \frac{۵}{۴}a + \frac{۳}{۲}a = \frac{۱۱}{۴}a$$

$$\frac{EF}{CD} = \frac{\frac{۱۱}{۴}a}{۵a} = \frac{۱۱}{۲۰}$$

۵۶ گزینه ۳



مثلث‌های DBC و EBC دارای قاعده‌های یکسان BC هستند.پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت ارتفاع‌ها است. پاره‌خط NM را از طرفین امتداد می‌دهیم تا ضلع‌های DC و EB را قطع کند.

$$\overset{\Delta}{EBC}: \frac{EN}{EC} = \frac{NN'}{BC} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{h_۱}{h+h_۱} \Rightarrow ۲h_۱ = h + h_۱ \Rightarrow h_۱ = h$$

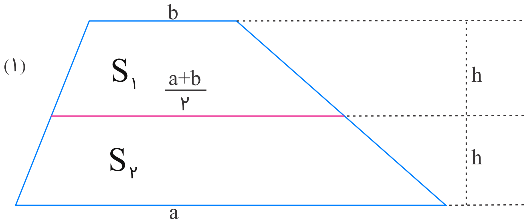
$$\overset{\Delta}{DBC}: \frac{DM}{DB} = \frac{MM'}{BC} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{h_۲}{h+h_۲} \Rightarrow ۲h_۲ = h + h_۲ \Rightarrow h_۲ = h$$

$$\Rightarrow h_۱ = h_۲$$

پس این دو مثلث ارتفاع‌های برابری دارند و مساحت آن‌ها باهم برابر است.

۵۷ گزینه ۲

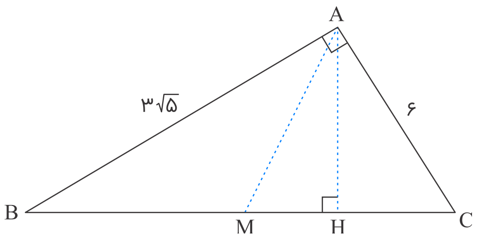
پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق یک ذوزنقه را به هم وصل می‌کند، برابر است با میانگین طول دو قاعده. بنابراین طول پاره‌خط وسط برابر $\frac{a+b}{۲}$ است.



$$S_۲ = ۲S_۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲}h(a+\frac{a+b}{۲}) = ۲\times\frac{۱}{۲}h(b+\frac{a+b}{۲})$$

$$\Rightarrow \frac{۳a+b}{۲} = ۳b+a \Rightarrow ۳a+b = ۶b+۲a \Rightarrow a = ۵b \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{۱}{۵}$$

۵۸ گزینه ۴



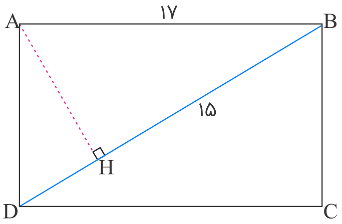
$$BC^۲ = AC^۲ + AB^۲ \Rightarrow BC = \sqrt{۶^۲ + (۳\sqrt{۵})^۲} = ۹ \Rightarrow MC = MB = ۴/۵$$

$$\overset{\Delta}{ABC} : AB^۲ = BH \times BC \Rightarrow ۴۵ = BH \times ۹$$

$$\Rightarrow BH = ۵ \Rightarrow HM = BH - MB = ۵ - ۴/۵ = ۰/۵$$

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{AHM}}} = \frac{\frac{AH\times BC}{۲}}{\frac{AH\times HM}{۲}} = \frac{\frac{AH\times ۹}{۲}}{\frac{AH\times\frac{۱}{۲}}{۲}} = ۱۸$$

۵۹ گزینه ۱



$$AB^{۲} = BH \times BD$$

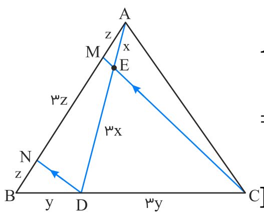
$$۱۷^{۲} = ۱۵ \times BD \Rightarrow BD = \frac{۱۷^{۲}}{۱۵}$$

میزان اختلاف طول قطر از عدد ۱۹ را می‌خواهیم:

$$\frac{۱۷^{۲}}{۱۵} - ۱۹ = \frac{۱۷^{۲} - ۱۵ \times ۱۹}{۱۵} = \frac{۲۸۹ - ۲۸۵}{۱۵} = \frac{۴}{۱۵}$$

۶۰ گزینه ۳

فرض کنیم $AE = x$، $ED = ۳x$، $BD = y$ و $DC = ۳y$. داریم:



$$\overset{\Delta}{AND} : ME || DN \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AM}{MN} = \frac{AE}{ED} = \frac{۱}{۳}$$

$\Rightarrow AM = z$ و $MN = ۳z$

$$\overset{\Delta}{BCM} : DN || CM \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BN}{NM} = \frac{BD}{DC} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{BN}{۳z} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow BN = z$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AM} = \frac{z + ۳z + z}{z} = \frac{۵z}{z} = ۵$$