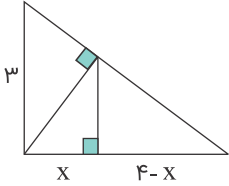




۱ در شکل زیر، ارتفاع هر دو مثلث قائم‌الزاویه رسم شده است. اندازه x کدام است؟



(۱) $1/96$

(۲) $1/56$

(۳) $1/64$

(۴) $1/44$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۲ در دوزنقه‌ای اندازه قاعده‌ها ۹ و ۴ واحد و طول ساق‌ها ۶ و ۵ واحد است. محیط مثلثی که از امتداد ساق‌ها در بیرون دوزنقه تشکیل شود، کدام است؟

(۲) $11/6$

(۱) $11/5$

(۴) $12/8$

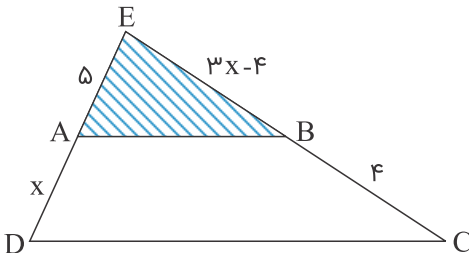
(۳) $12/2$

قلمچی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۷

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۳ در شکل زیر، مساحت دوزنقه $ABCD$ ، چندبرابر مساحت مثلث EAB است؟



(۱) $9/4$

(۲) $16/9$

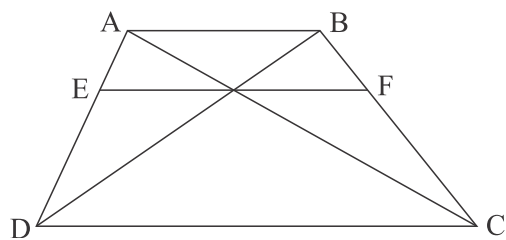
(۳) $25/16$

(۴) $36/25$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۴

در شکل زیر، $AB \parallel EF \parallel DC$ و اندازه پاره‌خط‌های AB و DC ، به ترتیب ۵ و ۹ واحد است. اندازه پاره‌خط EF ، کدام است؟

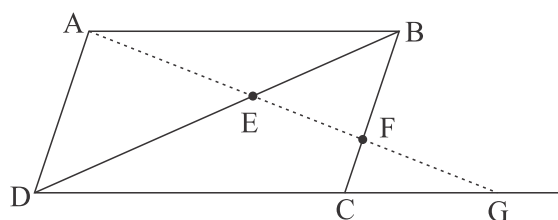


- (۱) $\frac{45}{7}$
- (۲) $\frac{45}{6}$
- (۳) $3\sqrt{5}$
- (۴) ۷

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۵

در شکل زیر، چهار ضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است. مقدار $EF \times EG$ کدام است؟

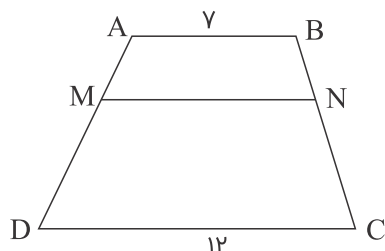


- (۱) EA^2
- (۲) ED^2
- (۳) $EB \times ED$
- (۴) $FB \times FC$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۶

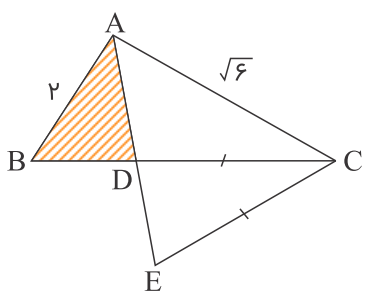
در ذوزنقه $ABCD$ ، پاره‌خط MN موازی قاعده‌ها و $\frac{MA}{MD} = \frac{2}{3}$ است. اندازه MN ، کدام است؟



- (۱) ۸
- (۲) $\frac{8}{75}$
- (۳) ۹
- (۴) $\frac{9}{5}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

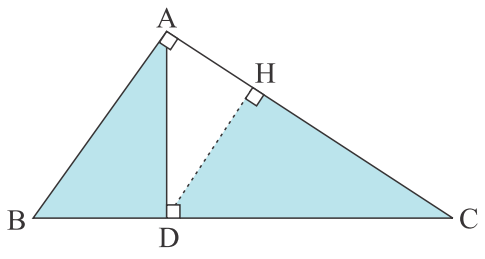
در شکل زیر، AD نیمساز زاویه A و $CE = CD$ است. نسبت مساحت‌های دو مثلث ABD و ACE، کدام است؟



- (1) $\frac{1}{3}$
- (2) $\frac{2}{3}$
- (3) $\frac{4}{3}$
- (4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

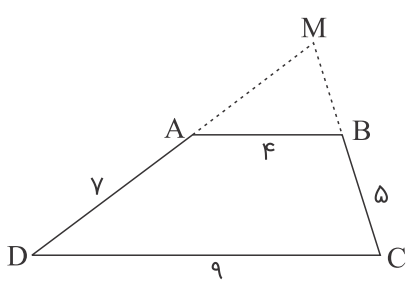
در مثلث قائم‌الزاویه ABC، طول اضلاع قائم $AB = \sqrt{3}$ و $AC = 2$ است. نسبت مساحت‌های دو مثلث قائم‌الزاویه HCD و ABD، کدام است؟



- (1) $\frac{3}{7}$
- (2) $\frac{4}{7}$
- (3) $\frac{16}{21}$
- (4) $\frac{8}{9}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

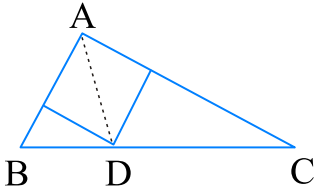
اندازه اضلاع دوزنقه ABCD مطابق شکل زیر داده شده است. محیط مثلث MAB، کدام است؟



- (1) $13/2$
- (2) $13/6$
- (3) $14/4$
- (4) $14/8$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

در مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم ۳ و ۷ واحد، طول نیمساز داخلی زاویه قائمه کدام است؟



(۱) $\frac{1}{4}\sqrt{2}$

(۲) $\frac{2}{1}$

(۳) $\frac{2}{8}$

(۴) $\frac{2}{1}\sqrt{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

در یک دوزنقه قائم‌الزاویه، اگر از نقطه O محل تلاقی قطرهای، خطی موازی قاعده‌ها رسم شود، ساق قائم را در A و ساق مایل را در B قطع می‌کند. نسبت $\frac{OA}{OB}$ چگونه است؟

(۲) مساوی ۱

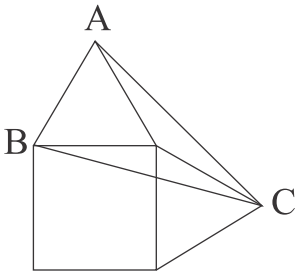
(۱) کوچک‌تر از ۱

(۴) متغیر نسبت به اضلاع

(۳) بزرگ‌تر از ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

در خارج یک مربع به ضلع ۲ واحد بر روی هر دو ضلع مجاور آن، مثلث متساوی‌الاضلاع ساخته شده است، مساحت مثلث ABC کدام است؟



(۱) ۴

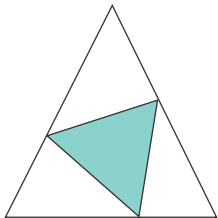
(۲) $2\sqrt{3}$

(۳) $2 + \sqrt{3}$

(۴) $1 + \sqrt{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع به نسبت‌های ۱ و ۲ تقسیم شده است. مساحت مثلث رنگی، چندبرابر مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع است؟



(۱) $\frac{1}{4}$

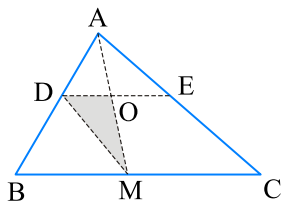
(۲) $\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{4}{9}$

(۴) $\frac{1}{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

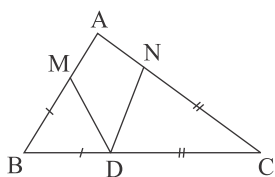
در شکل زیر، نقطه M وسط BC و $\frac{DA}{DB} = \frac{2}{3}$ و $DE \parallel BC$ است، مساحت مثلث ODM چند درصد مساحت مثلث ABC است؟



- (۱) ۱۲
- (۲) ۱۵
- (۳) ۱۶
- (۴) ۱۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

در شکل زیر $\hat{A} = 58^\circ$ ، $BM = BD$ و $CN = CD$ ، زاویه MDN چند درجه است؟



- (۱) ۵۸
- (۲) ۵۹
- (۳) ۶۱
- (۴) ۶۲

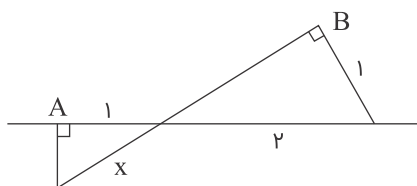
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

در یک ذوزنقه متساوی الساقین، قطر عمود بر ساق است. اگر اندازه قاعده بزرگتر و قطر آن به ترتیب ۱۰ و ۸ واحد باشند، اندازه قاعده کوچکتر چند واحد است؟

- (۱) ۲/۸
- (۲) ۳/۲
- (۳) ۳/۶
- (۴) ۴/۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

در شکل زیر دو زاویه \hat{A} و \hat{B} قائمه‌اند، مقدار x چقدر است؟



- (۱) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
- (۲) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$
- (۳) $\frac{4}{3}\sqrt{3}$
- (۴) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۱۸

در یک ذوزنقه، خطی که وسط ساقها را به هم وصل کند، مساحت آن را به نسبت ۳ به ۵ تقسیم می‌کند. نسبت قاعده‌های ذوزنقه کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$
- (۲) $\frac{1}{3}$
- (۳) $\frac{2}{5}$
- (۴) $\frac{3}{5}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۱۹

درون مثلثی به اضلاع ۹ و ۷ و ۵ واحد، مثلث دیگر طوری رسم می‌کنیم که اضلاع آن موازی اضلاع مثلث اصلی باشد، اگر بزرگ‌ترین ضلع این مثلث ۶ واحد باشد، مساحت محدود به این دو مثلث، چند برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است؟

- (۱) $0/75$
- (۲) ۱
- (۳) $1/25$
- (۴) $1/5$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۲۰

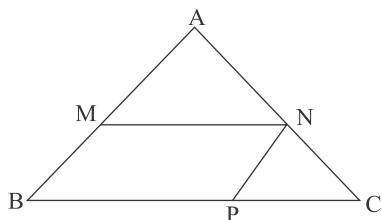
طول ضلع یک مربع برابر محیط مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین به ضلع قائم ۲ واحد است. با حذف گوشه‌های این مربع، بزرگ‌ترین هشت ضلعی منتظم ممکن داخل آن ساخته شده است. مساحت این هشت ضلعی، کدام است؟

- (۱) ۳۲
- (۲) $24\sqrt{2}$
- (۳) $24 + 8\sqrt{2}$
- (۴) $16 + 16\sqrt{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۲۱

در شکل زیر $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{2}$ است. مساحت متوازی‌الاضلاع MNPB چند درصد مساحت مثلث ABC است؟



- (۱) ۴۸
- (۲) ۵۲
- (۳) ۵۴
- (۴) ۵۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۲۲

مثلثی به اضلاع ۵ و ۴ و a با مثلثی به طول اضلاع ۹ و ۷ و b متشابه است. بیش‌ترین مقدار ممکن برای عدد a کدام است؟

- (۱) $\frac{36}{7}$
- (۲) $\frac{45}{7}$
- (۳) $\frac{36}{5}$
- (۴) $\frac{35}{4}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

مثلی به اضلاع a و b و 3 با مثلی به طول اضلاع 5 و 4 و 3 متشابه است و دو مثلث قابل انطباق نیستند. بیشترین محیط از مثلث اول کدام است؟

- (۱) $7/2$
- (۲) 9
- (۳) 10
- (۴) $13/5$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

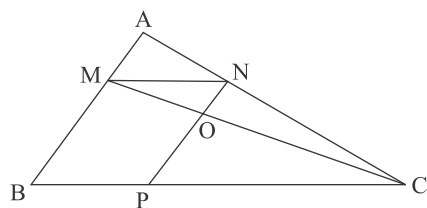
در یک مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، مثلث مفروض را به دو جزء تقسیم می‌کند. اگر مساحت مثلث کوچک‌تر $\frac{1}{5}$ مساحت مثلث اصلی باشد، نسبت فواصل پای ارتفاع از دو ضلع قائم مثلث مفروض کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) $\frac{2}{3}$
- (۳) $\frac{3}{4}$
- (۴) $\frac{4}{5}$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

در شکل زیر $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{5}$ و چهار ضلعی $MNPB$ متوازی‌الاضلاع است. مساحت مثلث OMN چند درصد مساحت مثلث AMN است؟



- (۱) 63
- (۲) 60
- (۳) 70
- (۴) 84

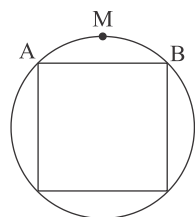
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

در مثلث متساوی‌الساقین $\triangle ABC$ ، $AB = AC = 4$ و $BC = 2\sqrt{7}$ است. ضلع AC را به اندازه خود تا نقطه D امتداد می‌دهیم ($AD = AC$). اندازه BD کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{10}$
- (۲) $4\sqrt{2}$
- (۳) 6
- (۴) 7

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

در شکل زیر، ضلع مربع برابر ۲ واحد است. فاصله وسط کمان AB از نزدیک‌ترین رأس مربع چقدر است؟



- (۱) $\sqrt{2} - \sqrt{2}$
- (۲) $\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$
- (۳) $\sqrt{2}$
- (۴) $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

در یک مثلث قائم‌الزاویه، طول اضلاع قائم به نسبت ۱ و ۳ و مساحت آن ۶۰ واحد مربع است. ارتفاع وارد بر وتر چقدر است؟

- (۱) ۵
- (۲) $4\sqrt{2}$
- (۳) ۶
- (۴) ۸

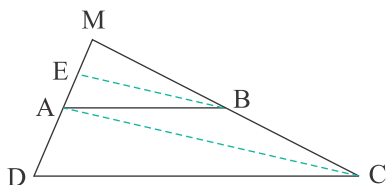
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

در مثلث ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، ارتفاع AH مثلث مفروض را به دو جزء تقسیم می‌کند. مساحت مثلث اصلی $6/76$ برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است. نسبت فواصل H از دو ضلع قائم کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{8}$
- (۲) $\frac{5}{12}$
- (۳) $\frac{7}{12}$
- (۴) $\frac{3}{8}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

در دوزنقه $ABCD$ ، پاره‌خط BE موازی قطر AC است. اگر $AD = 7$ و $AE = 3$ باشد، فاصله MD کدام است؟

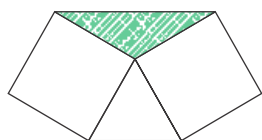


- (۱) ۱۲
- (۲) $12/25$
- (۳) $12/5$
- (۴) $12/75$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

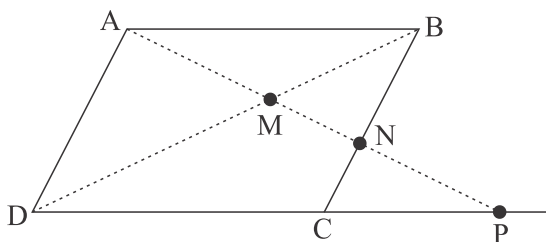
در یک مثلث متساوی‌الاضلاع، بر روی دو ضلع آن دو مربع ساخته شده است. مساحت مثلث سایه‌زده، چند برابر مساحت مثلث اصلی می‌باشد؟



- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (۲) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
- (۳) ۱
- (۴) $\sqrt{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

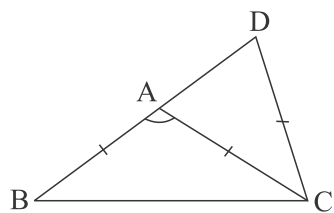
در شکل زیر، $ABCD$ متوازی‌الاضلاع می‌باشد. حاصل $MN \times MP$ برابر کدام است؟



- (۱) AB^2
- (۲) AD^2
- (۳) MD^3
- (۴) MA^2

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

در مثلث متساوی‌الساقین $(AB = AC)ABC$ ، ساق BA را از نقطه B به اندازه قاعده BC تا نقطه D ، امتداد می‌دهیم. اگر $CD = CA$ باشد، زاویه A چند درجه است؟



- (۱) ۱۰۲
- (۲) ۱۰۵
- (۳) ۱۰۸
- (۴) ۱۱۲

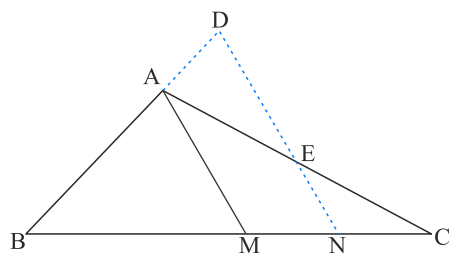
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

مساحت یک مثلث قائم‌الزاویه برابر با مساحت مربعی است که بر روی ضلع کوچک‌تر آن ساخته می‌شود. اندازه میانه وارد بر ضلع متوسط چند برابر ضلع متوسط این مثلث است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (۳) $\sqrt{2}$
- (۴) $\sqrt{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

در مثلث ABC که $AB = \frac{2}{3}AC$ ، پاره‌خط ND موازی میانه AM است. نسبت $\frac{AD}{AE}$ کدام است؟

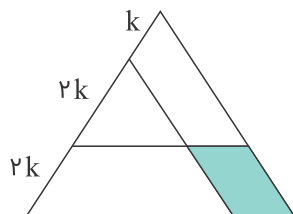


- (۱) $\frac{4}{9}$
- (۲) $\frac{5}{6}$
- (۳) $\frac{2}{3}$
- (۴) $\frac{4}{5}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۸

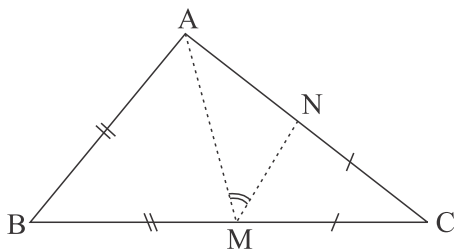
در شکل زیر، یک ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع به نسبت‌های ۱، ۲ و ۲ تقسیم شده است. مساحت متوازی‌الاضلاع سایه‌زده، چند درصد مساحت مثلث اصلی است؟



- (۱) ۱۶
- (۲) ۱۸
- (۳) ۲۰
- (۴) ۲۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

در شکل زیر، دو مثلث کناری متساوی الساقین اند و $\hat{M} = 43^\circ$ ، اندازه زاویه BAC چند درجه است؟



۹۳ (۱)

۹۴ (۲)

۹۶ (۳)

۹۷ (۴)

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

در مثلث ABC داریم $AB = AC$ و $\hat{A} = 80^\circ$ ، عمود منصف‌های دو ساق مثلث، قاعده BC را در M و N قطع می‌کند. کوچک‌ترین زاویه مثلث AMN چند درجه است؟

۲۰ (۲)

۱۵ (۱)

۳۰ (۴)

۲۵ (۳)

قلمچی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۷

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ تابستان ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

در یک مکعب به طول یال $4\sqrt{2}$ ، فاصله وسط هریک از دو وجه غیرموازی از یکدیگر چقدر است؟

$2\sqrt{3}$ (۲)

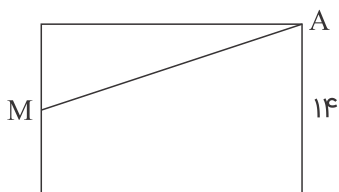
۳ (۱)

$3\sqrt{2}$ (۴)

۴ (۳)

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

در شکل زیر، پاره خط AM مساحت مستطیل را به دو جزء با نسبت مساحت‌های $\frac{5}{9}$ تقسیم کرده است. اگر قطر مستطیل ۲۵ واحد باشد، پاره خط AM چند واحد است؟



۲۱ (۱)

۲۳ (۲)

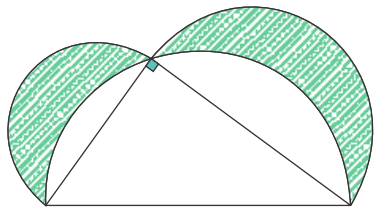
$9\sqrt{7}$ (۳)

$10\sqrt{6}$ (۴)

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۴۱

در مثلث قائم‌الزاویه زیر، طول اضلاع قائم ۳ و ۴ واحد است. نیم‌دایره‌ها به قطر اضلاع رسم شده‌اند. مجموع مساحت دو ناحیه سایه‌زده، کدام است؟



- (۱) 2π
- (۲) ۶
- (۳) ۷
- (۴) 3π

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۴۲

در مثلث متساوی‌الساقین $\triangle ABC$ ، قاعده BC را از دو طرف به اندازه ساق‌ها تا نقاط D و E امتداد می‌دهیم. در مثلث $\triangle ADE$ کوچک‌ترین زاویه خارجی، چند برابر کوچک‌ترین زاویه داخلی آن است؟

- (۱) ۱
- (۲) $\frac{3}{2}$
- (۳) ۲
- (۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۴۳

در چهار ضلعی محدب $ABCD$ ، رابطه $\frac{\hat{A}}{4} = \frac{\hat{B}}{3} = \frac{\hat{C} + \hat{D}}{11}$ ، بین زاویه‌ها برقرار است. زاویه حاده بین نیمسازهای داخلی دو زاویه مجاور \hat{A} و \hat{B} ، چند درجه است؟

- (۱) ۵۰
- (۲) ۶۰
- (۳) ۷۰
- (۴) ۷۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۴۴

در یک مستطیل با ابعاد ۱ و ۲ واحد، از انتهای یک قطر، خطی بر آن قطر عمود می‌کنیم تا امتداد ضلع کوچک‌تر مستطیل را در M قطع کند. فاصله نقطه M از سر دیگر این قطر چند واحد است؟

- (۱) ۴
- (۲) $4/5$
- (۳) ۵
- (۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۴۵

در مثلث ABC ، اضلاع $AB = 4$ و $AC = 6$ و $BC = 7$ است. از رأس C خطی موازی میانه AM رسم شده و امتداد BA را در نقطه D قطع کرده است. اندازه BD ، کدام است؟

- (۱) $7/5$
- (۲) ۸
- (۳) $8/5$
- (۴) ۹

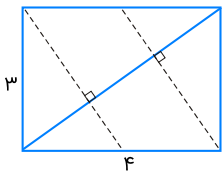
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

در مربعی به ضلع ۲ واحد، دایره‌ای به مرکز یک رأس آن و شعاع $\frac{2}{5}$ واحد، دو ضلع مربع را قطع می‌کند. فاصله نزدیک‌ترین رأس مربع تا نقطه تقاطع، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

در مستطیلی به طول اضلاع ۳ و ۴ واحد از هر دو رأس متقابل، عمودی بر قطر دیگر این مستطیل رسم شده است. مساحت متوازی‌الاضلاع حاصل کدام است؟



- (۱) $\frac{5}{25}$
- (۲) $\frac{5}{75}$
- (۳) ۶
- (۴) $\frac{7}{5}$

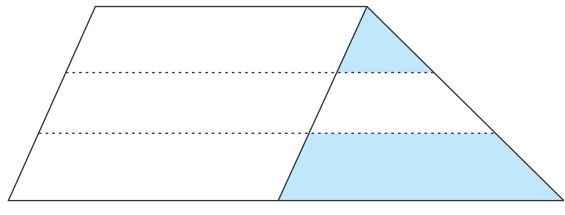
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

در مستطیلی به طول اضلاع $2\sqrt{7}$ و ۶ واحد، از هر دو رأس متقابل، عمودی بر قطر دیگر این مستطیل رسم شده است. فاصله این دو خط عمود کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) $\frac{1}{5}$
- (۳) $\frac{1}{75}$
- (۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

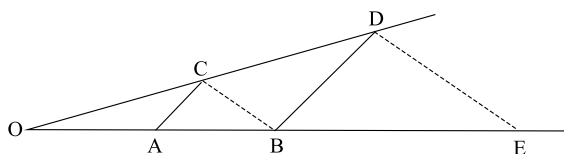
یک ساق دوزنقه به سه قسمت مساوی تقسیم شده است. هر چهار پاره‌خط موازی یکدیگرند. نسبت مساحت دو ناحیه رنگی، کدام است؟



- (۱) $\frac{1}{6}$
- (۲) $\frac{1}{5}$
- (۳) $\frac{2}{9}$
- (۴) $\frac{1}{4}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

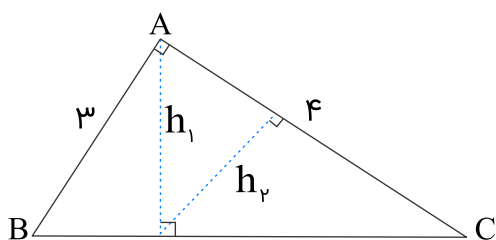
در شکل زیر، دو جفت پاره‌خط موازی‌اند. $OA = ۳$ و $AB = ۵$ ، اندازه BE ، کدام است؟



- (۱) $\frac{۱۳}{۳}$
- (۲) $\frac{۱۲}{۳}$
- (۳) $\frac{۱۱}{۳}$
- (۴) $\frac{۱۰}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

در شکل زیر، $h_۱$ و $h_۲$ ارتفاع‌های دو مثلث قائم‌الزاویه هستند. نسبت $\frac{h_۲}{h_۱}$ کدام است؟



- (۱) $\frac{۳}{۵}$
- (۲) $\frac{۴}{۵}$
- (۳) $\frac{۳}{۴}$
- (۴) $\frac{۴}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

در دوزنقه‌ای با طول قاعده‌های ۸ و ۱۲ و ارتفاع ۱۰ واحد، مساحت مثلث محدود به دو قطر و یک ساق آن، چند واحد مربع است؟

- (۱) ۱۸
- (۲) ۲۰
- (۳) ۲۴
- (۴) ۲۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

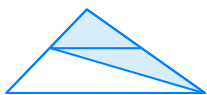
در دوزنقه‌ای اندازه قاعده‌ها ۹ و ۴ واحد و طول ساق‌ها ۶ و ۵ واحد است. محیط مثلثی که از امتداد ساق‌ها در بیرون دوزنقه تشکیل شود، کدام است؟

- (۱) $\frac{۱۱}{۴}$
- (۲) $\frac{۱۱}{۶}$
- (۳) $\frac{۱۲}{۲}$
- (۴) $\frac{۱۲}{۸}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

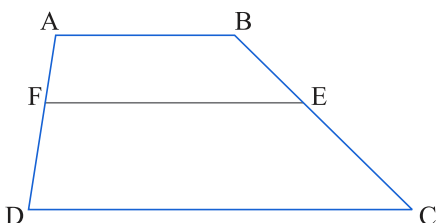
در شکل زیر، نسبت قاعده‌های دوزنقه $\frac{۳}{۵}$ است. مساحت مثلث سایه‌زده، چند برابر مساحت دوزنقه است؟



- (۱) $\frac{۳}{۴}$
 (۲) $\frac{۷}{۸}$
 (۳) $\frac{۱۴}{۱۵}$
 (۴) $\frac{۱۵}{۱۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

در دوزنقه ABCD، قاعده بزرگ $\frac{۵}{۲}$ قاعده کوچک است و $AF = \frac{۱}{۴}AD$ و EF موازی قاعده است. نسبت $\frac{EF}{CD}$ کدام است؟



- (۱) $\frac{۱۱}{۲۰}$
 (۲) $\frac{۷}{۱۵}$
 (۳) $\frac{۸}{۱۵}$
 (۴) $\frac{۳}{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

در مثلث ABC، ضلع AB بزرگ‌تر از ضلع AC است. هریک از میانه‌های BM و CN را از وسط اضلاع به اندازه خود تا E و D امتداد می‌دهیم. نسبت مساحت مثلث DBC به مساحت مثلث EBC کدام است؟

- (۱) کمتر از ۱
 (۲) بیشتر از ۱
 (۳) مساوی ۱
 (۴) بستگی به ضلع سوم دارد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

در یک دوزنقه، پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق را به هم وصل کند، مساحت آن را به نسبت‌های ۱ و ۲ تقسیم می‌کند. نسبت قاعده‌های آن دوزنقه کدام است؟

- (۱) $\frac{۱}{۶}$
 (۲) $\frac{۱}{۵}$
 (۳) $\frac{۱}{۴}$
 (۴) $\frac{۲}{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

در مثلث قائم‌الزاویه ABC، اضلاع قائم $AB = ۳\sqrt{۵}$ و $AC = ۶$ ، ارتفاع AH و میانه AM رسم شده است. مساحت مثلث ABC، چند برابر مساحت مثلث AMH است؟

- (۱) ۱۰
 (۲) ۱۲
 (۳) ۱۵
 (۴) ۱۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

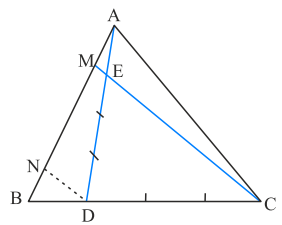
در مستطیل ABCD به طول $AB = 17$ ، از نقطه A عمود AH بر قطر BD رسم شده است. اگر $BH = 15$ باشد، طول قطر مستطیل از عدد ۱۹، چقدر بیشتر است؟

- (۲) $\frac{1}{3}$
- (۴) $\frac{3}{5}$

- (۱) $\frac{4}{15}$
- (۳) $\frac{7}{15}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

در شکل زیر، $BD = \frac{1}{4}BC$ و $AE = \frac{1}{4}AD$ و $DN \parallel CM$. اندازه AB چندبرابر AM است؟



(۱) ۴

(۲) ۴/۵

(۳) ۵

(۴) ۶

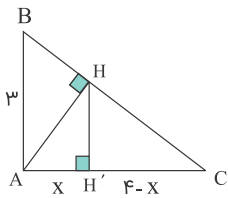
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷



گزینه ۴

۱

شکل را به صورت زیر نام گذاری می کنیم و داریم:



$$AC = AH' + CH' = 4 - x + x = 4$$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow 9 + 16 = BC^2 \Rightarrow BC^2 = 25 \Rightarrow BC = 5$$

اندازه AH را با استفاده از رابطه $AH \times BC = AB \times AC$ به دست می آوریم. سپس اندازه AH' یا همان x را با استفاده از رابطه $AH^2 = AH' \times AC$ در مثلث AHC ، به دست می آوریم.

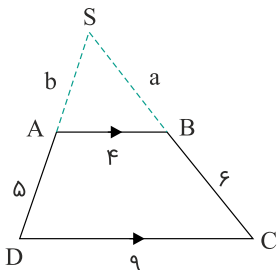
$$AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow 5AH = 12 \Rightarrow AH = \frac{12}{5}$$

$$AH^2 = AH' \times AC \Rightarrow \frac{144}{25} = x \times 4 \Rightarrow x = \frac{144}{100} = 1/44$$

گزینه ۴

۲

مطابق شکل، ساق های ذوزنقه $ABCD$ به طول اضلاع $AB = 4$ ، $CD = 9$ ، $AD = 5$ و $BC = 6$ را امتداد می دهیم تا همدیگر را در S قطع کنند.

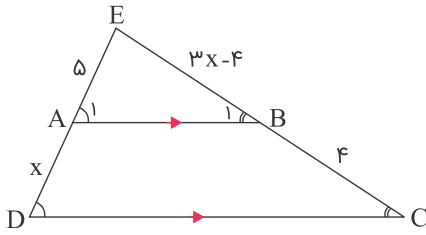


$$AB \parallel CD \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{SA}{SD} = \frac{SB}{SC} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{b}{b+5} = \frac{a}{a+6} = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{b+5} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9b = 4b + 20 \Rightarrow b = 4 \\ \frac{a}{a+6} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9a = 4a + 24 \Rightarrow a = 4/8 \end{cases}$$

$$SAB \text{ مثلث } = 4 + 4/8 + 4 = 12/8$$

طبق فرض، داریم:



$$AB \parallel DC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{EA}{AD} = \frac{EB}{BC} \Rightarrow \frac{5}{x} = \frac{3x-4}{4}$$

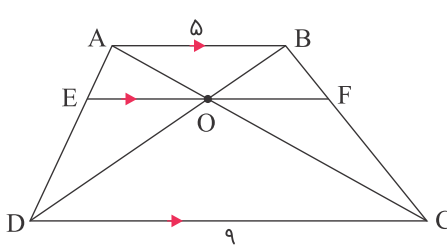
$$\Rightarrow 3x^2 - 4x - 20 = 0 \xrightarrow{x > 0} x = \frac{10}{3} (*)$$

$$AB \parallel DC \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{D}, \hat{B}_1 = \hat{C} \Rightarrow \triangle EAB \sim \triangle EDC$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle EAB}}{S_{\triangle EDC}} = \left(\frac{EA}{ED}\right)^2 = \left(\frac{5}{5 + \frac{10}{3}}\right)^2 = \left(\frac{15}{25}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle EAB} = 9S, S_{\triangle EDC} = 25S \Rightarrow S_{ABCD} = 25S - 9S = 16S$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABCD}}{S_{\triangle EAB}} = \frac{16S}{9S} = \frac{16}{9}$$



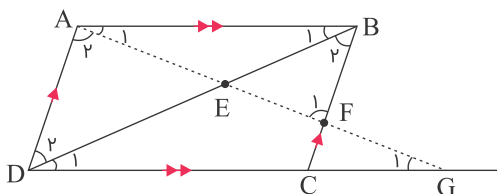
$$\begin{cases} \triangle ADC : EO \parallel DC \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{EO}{DC} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow \frac{EO}{9} = \frac{AE}{AD} \\ \triangle DAB : EO \parallel AB \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{EO}{AB} = \frac{DE}{AD} \Rightarrow \frac{EO}{5} = \frac{DE}{AD} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{EO}{9} + \frac{EO}{5} = \frac{\overbrace{AE + DE}^{AD}}{AD} = 1 \xrightarrow{\times 45} 5EO + 9EO = 45$$

$$\Rightarrow 14EO = 45 \Rightarrow EO = \frac{45}{14}$$

$$\text{به روش مشابه} \Rightarrow OF = \frac{45}{14} \Rightarrow EF = \frac{45}{14} + \frac{45}{14} = \frac{45}{7}$$

تذکر: در حالت کلی، O وسط EF است و $EF = \frac{2}{\frac{1}{AB} + \frac{1}{DC}}$. (طول EF واسطهٔ توافقی طول قاعده‌ها است)

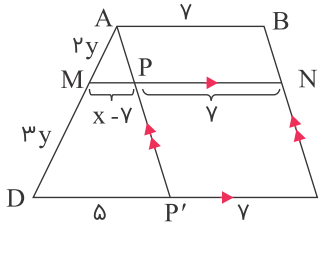
چون $BC \parallel AD$ و $AB \parallel DG$ است، داریم:

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_1 = \hat{G}_1, \hat{B}_1 = \hat{D}_1 &\Rightarrow \triangle EAB \sim \triangle EGD \Rightarrow \frac{EA}{EG} = \frac{EB}{ED} \\ \hat{B}_2 = \hat{D}_2, \hat{F}_1 = \hat{A}_2 &\Rightarrow \triangle EBF \sim \triangle EAD \Rightarrow \frac{EF}{EA} = \frac{EB}{ED} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{EA}{EG} = \frac{EF}{EA}$$

$$\Rightarrow EF \cdot EG = EA^2$$

در ذوزنقه ABCD از نقطه A خطی موازی با خط BC رسم می‌کنیم و محل برخورد آن را با MN و DC به ترتیب P و P' می‌نامیم.

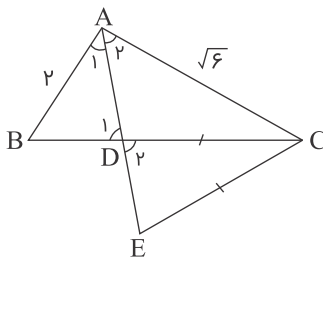
با استفاده از تعمیم تالس در مثلث ADP' داریم:



$$\frac{AM}{AD} = \frac{MP}{DP'}$$

$$\Rightarrow \frac{2y}{2y + 3y} = \frac{x - y}{5} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{x - y}{5} \Rightarrow x = 9 = MN$$

طبق شکل داریم:

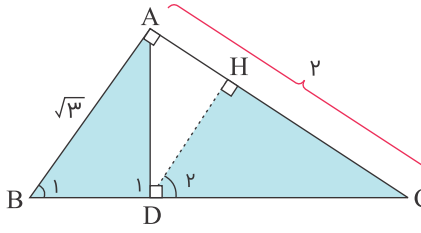


$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \text{ نیمساز AD} \\ \hat{D}_1 = \hat{D}_2 \text{ متقابل به رأس} \end{cases} \xrightarrow{DC=CE} \hat{D}_1 = \hat{E}$$

$$\xrightarrow{z.z} \triangle ABD \sim \triangle AEC \quad \left(k = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{\sqrt{6}} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACE}} = k^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}} \right)^2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

طبق قضیه فیثاغورس در مثلث $\triangle ABC$ داریم:



$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$\Rightarrow 3 + 16 = BC^2 \Rightarrow BC = \sqrt{19}$$

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel DH, \text{ مورب } BC \Rightarrow \widehat{D}_2 = \widehat{B}_1 \\ \widehat{D}_1 = \widehat{H} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle HCD$$

طبق روابط طولی در مثلث $\triangle ABC$ نتیجه می‌گیریم:

$$AC^2 = BC \times CD$$

$$\Rightarrow 16 = \sqrt{19} \times CD \Rightarrow CD = \frac{16}{\sqrt{19}}$$

بنابراین نسبت تشابه دو مثلث HCD و ABD برابر است با:

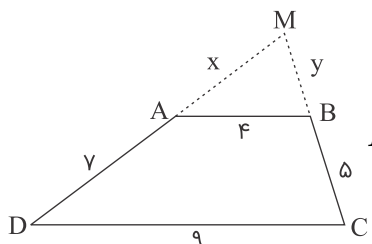
$$K = \frac{\frac{16}{\sqrt{19}}}{\sqrt{3}} = \frac{16}{\sqrt{57}}$$

می‌دانیم که نسبت مساحت دو مثلث متشابه برابر است با مجذور نسبت تشابه، پس داریم:

$$\frac{S_{\triangle HCD}}{S_{\triangle ABD}} = K^2 = \left(\frac{16}{\sqrt{57}} \right)^2 = \frac{16}{21}$$

می‌دانیم در ذوزنقه $ABCD$ ، دو قاعده AB و DC باهم موازی هستند، بنابراین طبق قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها، دو مثلث AMB و MDC متشابه هستند.

بنابراین داریم:



$$\triangle AMB \sim \triangle MDC \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MB}{MC} = \frac{AB}{DC}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+7} = \frac{y}{y+5} = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{x+7} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9x = 4x + 28 \Rightarrow 5x = 28 \Rightarrow x = \frac{28}{5} \\ \frac{y}{y+5} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9y = 4y + 20 \Rightarrow 5y = 20 \Rightarrow y = \frac{20}{5} = 4 \end{cases}$$

حال محیط را به دست می‌آوریم:

$$\text{محیط } \triangle AMB = x + y + 4 = \frac{28}{5} + 4 + 4 = 8 + \frac{28}{5} = \frac{40 + 28}{5} = \frac{68}{5} = 13\frac{3}{5}$$

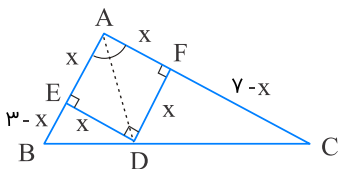
نقطه D روی نیمساز قرار دارد، بنابراین از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. پس: $DE = DF$

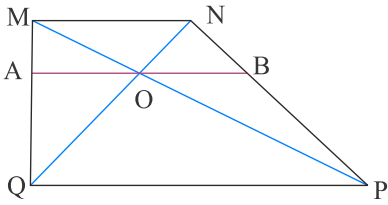
$\hat{A} = 90^\circ$ و $DE = DF$ ، بنابراین چهار ضلعی $AEDF$ مربع است. پس: $AE \parallel FD$

طبق تعمیم قضیه تالس در مثلث ABC ، داریم:

$$\frac{FD}{AB} = \frac{FC}{AC} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{7-x}{7} \Rightarrow 7x = 21 - 3x \Rightarrow 10x = 21 \Rightarrow x = \frac{21}{10}$$

$$\Rightarrow AD = \sqrt{2}x = \frac{21}{10}\sqrt{2}$$





نکته: طبق قضیه تالس در دوزنقه داریم $\frac{AQ}{AM} = \frac{BP}{BN}$ ، سپس با ترکیب نسبت در مخرج نتیجه می‌گیریم: $\frac{AQ}{QM} = \frac{BP}{PN}$
 باتوجه به تعمیم قضیه تالس در دو مثلث QMN و PMN داریم:

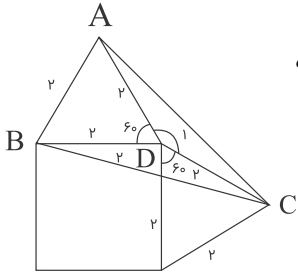
$$\left. \begin{array}{l} \frac{OA}{MN} = \frac{AQ}{QM} \\ \frac{OB}{MN} = \frac{BP}{PN} \end{array} \right\} \div \Rightarrow \frac{OA}{OB} = \underbrace{\frac{AQ}{QM} \times \frac{PN}{BP}}_1 \Rightarrow \frac{OA}{OB} = 1$$

گام اول

الف) زوایای داخلی هر مثلث متساوی‌الاضلاع 60° است.

ب) مثلث $\triangle ADC$ یک مثلث متساوی‌الساقین است. اندازه زاویه \hat{D}_1 برابر است با:

$$\hat{D}_1 = 360 - (90 + 60 + 60) = 360 - 210 = 150^\circ$$



ج) برای به دست آوردن مساحت مثلث $\triangle ABC$ ، مساحت سه مثلث $\triangle ADC$ ، $\triangle ABD$ و $\triangle BDC$ را به دست آورده و باهم جمع می‌کنیم.

د) مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a از رابطه $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ به دست می‌آید.

گام دوم

$$\triangle ADC \cong \triangle BDC \Rightarrow S_{\triangle ADC} = S_{\triangle BDC}$$

(ض ض ض)

با استفاده از مبحث کاربرد مثلثات مساحت دو مثلث $\triangle ADC$ و $\triangle BDC$ را تعیین می‌کنیم:

$$S_{\triangle ADC} = S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 150^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

مثلث $\triangle ABD$ متساوی‌الاضلاع است و داریم:

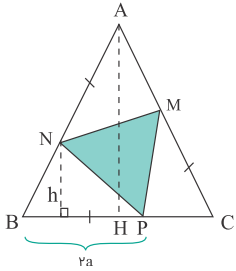
$$S_{\triangle ABD} = \frac{\sqrt{3}}{4}(2)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 = \sqrt{3}$$

بنابراین مساحت مثلث $\triangle ABC$ برابر است با:

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BDC} + S_{\triangle ADC} + S_{\triangle ABD} = 1 + 1 + \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}$$

گام اول

الف) اندازه هر یک از سه قسمت مشخص شده بر روی هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع را برابر a و هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع را برابر $3a$ در نظر می‌گیریم. هم‌چنین در مثلث‌های رنگ‌نشده ارتفاع وارد بر ضلع‌های با اندازه $2a$ را h فرض می‌کنیم. (ب) اگر ارتفاع مثلث اصلی را رسم کنیم طبق قضیه تالس اندازه آن برابر $3h$ به دست می‌آید (چون ارتفاع دو مثلث ABC و NBP موازی‌اند پس $\frac{h}{AH} = \frac{a}{3a}$ در نتیجه $AH = 3h$). پس می‌توان اندازه مساحت مثلث رنگی و مثلث متساوی‌الاضلاع اولیه را بر حسب h و a تعیین و در نهایت نسبت آن‌ها را محاسبه کنیم.



گام دوم

$$S_{\triangle ABC} = \frac{3h \times 3a}{2} = \frac{9ha}{2}$$

$$S_{\triangle BNP} = \frac{1}{2} \times h \times 2a = ha$$

$$S_{\triangle MNP} = S_{\triangle ABC} - 3S_{\triangle BNP} = \frac{9ha}{2} - 3ha = \frac{3ha}{2}$$

$$\frac{S_{\triangle MNP}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{3ha}{2}}{\frac{9ha}{2}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{DA}{DB} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{DB}{AB} = \frac{3}{5}, \frac{DA}{AB} = \frac{2}{5}$$

چون AM میانه نظیر ضلع BC است، پس: $\frac{S_{ABM}}{S_{ABC}} = \frac{1}{2}$

در دو مثلث ABM و AMD ، ارتفاع‌های رسم‌شده از رأس M یکسان هستند، پس نسبت مساحت‌ها برابر نسبت قاعده‌ها است؛ یعنی:

$$\frac{S_{ADM}}{S_{ABM}} = \frac{DA}{AB} = \frac{2}{5}$$

در دو مثلث ADM و ODM ، ارتفاع‌های رسم‌شده از رأس D یکسان هستند؛ پس نسبت مساحت‌ها برابر نسبت قاعده‌ها است؛ یعنی:

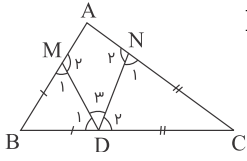
$$\frac{S_{ODM}}{S_{ADM}} = \frac{OM}{AM} = \frac{DB}{AB} = \frac{3}{5}$$

با ضرب کردن سه رابطه فوق داریم:

$$\frac{S_{ABM}}{S_{ABC}} \times \frac{S_{ADM}}{S_{ABM}} \times \frac{S_{ODM}}{S_{ADM}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{S_{ODM}}{S_{ABC}} = \frac{3}{25} = \frac{12}{100}$$

گام اول

الف) شکل را با جزئیات بیشتر رسم می‌کنیم:



$$BM = BD \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{M}_1 = \alpha, \quad CN = CD \Rightarrow \hat{D}_2 = \hat{N}_1 = \beta$$

ب) $\hat{A} = 58^\circ$ است، بنابراین در مثلث $\triangle ABC$ داریم:

$$\begin{aligned} \triangle ABC : \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} &= 180^\circ \xrightarrow{\hat{A}=58} 58 + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \\ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} &= 180 - 58 = 122^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 122^\circ \quad (I) \end{aligned}$$

گام دوم

دو مثلث $\triangle BMD$ و $\triangle CND$ را در نظر گرفته و مجموع زوایای این دو مثلث را به دست می‌آوریم. مجموع زوایای این دو مثلث باید 360° باشد. با تعیین $\alpha + \beta$ اندازه \hat{D}_3 یا همان \hat{MDN} را محاسبه می‌کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} \triangle CND : \hat{C} + 2\beta = 180^\circ \\ \triangle BMD : \hat{B} + 2\alpha = 180^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{(+)} \hat{B} + \hat{C} + 2(\alpha + \beta) = 360^\circ$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{(I)} 122^\circ + 2(\alpha + \beta) &= 360^\circ \Rightarrow 2(\alpha + \beta) = 360^\circ - 122^\circ \\ \Rightarrow 2(\alpha + \beta) &= 238^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{238}{2} = 119^\circ \quad (II) \end{aligned}$$

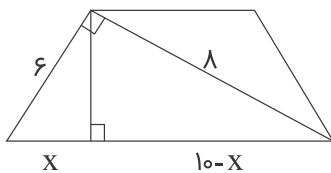
از طرفی:

$$\begin{aligned} \hat{D}_1 + \hat{D}_2 + \hat{D}_3 &= 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta + \hat{MDN} = 180^\circ \\ \xrightarrow{(II)} 119^\circ + \hat{MDN} &= 180^\circ \Rightarrow \hat{MDN} = 61^\circ \end{aligned}$$

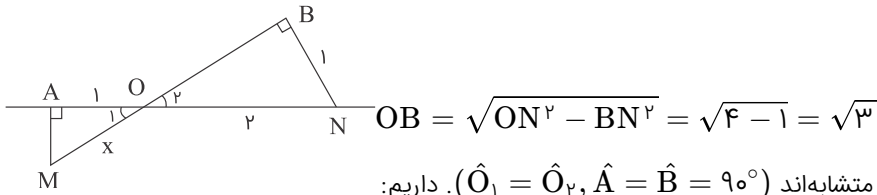
در هر مثلث قائم‌الزاویه هر ضلع زاویه قائمه واسطه هندسی بین وتر و تصویر آن ضلع روی وتر است.

$$6^2 = 10x \Rightarrow x = 3/6$$

$$\text{طول قاعده کوچک} = 10 - 2x = 10 - 7/2 = 2/8$$



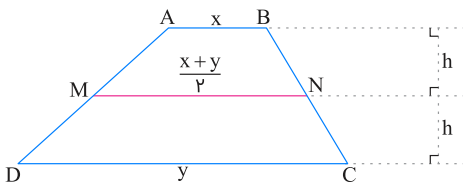
طبق قضیه فیثاغورس در مثلث OBN داریم:



دو مثلث OAM و OBN به حالت تساوی دو زاویه، متشابه‌اند ($\hat{O}_1 = \hat{O}_2, \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$). داریم:

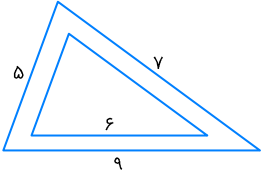
$$\frac{OM}{ON} = \frac{OA}{OB} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

می‌دانیم در دوزنقه طول خط واصل وسط‌های دو ساق، میانگین دو قاعده است.
باتوجه به شکل و فرض سؤال، داریم:



$$\begin{aligned} \frac{S_{ABNM}}{S_{MNCD}} = \frac{3}{5} &\Rightarrow \frac{\frac{1}{2} \left(x + \frac{x+y}{2} \right) (h)}{\frac{1}{2} \left(\frac{x+y}{2} + y \right) (h)} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{\frac{3x+y}{2}}{\frac{x+3y}{2}} = \frac{3}{5} \\ \Rightarrow \frac{3x+y}{x+3y} = \frac{3}{5} &\Rightarrow 15x + 5y = 3x + 9y \Rightarrow 12x = 4y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

طبق توضیحات صورت سؤال، شکلی به صورت زیر رسم می‌کنیم:



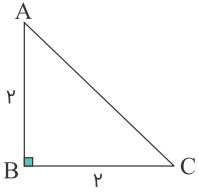
چون اضلاع دو مثلث موازی یکدیگرند، پس دو مثلث متشابه هستند. می‌دانیم نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر مجذور نسبت تشابه آنها است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{\text{مساحت مثلث بزرگ تر}}{\text{مساحت مثلث کوچک تر}} = \frac{S}{S'} = \left(\frac{9}{6}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

نسبت مساحت محدود به این دو مثلث به مساحت مثلث کوچک‌تر برابر است با:

$$\frac{S - S'}{S'} = \frac{S}{S'} - \frac{S'}{S'} = \frac{S}{S'} - 1 = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4} = 1/25$$

ابتدا مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین $\triangle ABC$ به ضلع قائم ۲ واحد را رسم می‌کنیم.



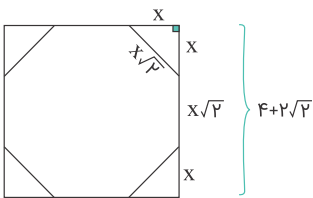
محیط این مثلث برابر طول ضلع یک مربع است. با استفاده از قضیه فیثاغورس اندازه ضلع AC و سپس محیط مثلث $\triangle ABC$ را محاسبه می‌کنیم.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC^2 = 4 + 4 = 8 \Rightarrow AC = 2\sqrt{2}$$

$$\text{محیط مثلث } \triangle ABC = 2 + 2 + 2\sqrt{2} = 4 + 2\sqrt{2}$$

پس طول ضلع مربع موردنظر برابر $4 + 2\sqrt{2}$ است.

می‌خواهیم با حذف گوشه‌های این مربع، یک هشت ضلعی منتظم را درون آن محاط کنیم. اگر اندازه اضلاع قائمه چهار مثلث گوشه‌ای را x در نظر بگیریم، طول ضلع هشت ضلعی منتظم با استفاده از قضیه فیثاغورس برابر $x\sqrt{2}$ می‌شود.



باتوجه به اینکه طول ضلع مربع برابر $4 + 2\sqrt{2}$ است، مقدار x را حساب می‌کنیم:

$$x + x + x\sqrt{2} = 4 + 2\sqrt{2} \Rightarrow 2x + x\sqrt{2} = 4 + 2\sqrt{2} \Rightarrow x = 2$$

برای محاسبه مساحت هشت ضلعی منتظم، کافی است مساحت چهار مثلث گوشه‌ای را از مساحت مربع کم کنیم:

$$S_{\text{مربع}} = (4 + 2\sqrt{2})^2$$

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$

پس مساحت هشت ضلعی برابر است با:

$$S_{\text{هشت ضلعی}} = S_{\text{مربع}} - (4 \times S_{\text{مثلث}}) = (4 + 2\sqrt{2})^2 - 8 = 16 + 16\sqrt{2} + 8 - 8 = 16 + 16\sqrt{2}$$

گام اول

الف) چهار ضلعی $MNPB$ متوازی‌الاضلاع است پس داریم:

$$MN \parallel BP \Rightarrow MN \parallel BC \Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC$$

$$NP \parallel MB \Rightarrow NP \parallel AB \Rightarrow \triangle NPC \sim \triangle ABC$$

ب) در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها برابر مجذور نسبت تشابه اضلاع است.

گام دوم

طبق گام اول، $\triangle AMN \sim \triangle ABC$ است. با توجه به اینکه $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{2}$ ، نسبت تشابه دو مثلث و سپس نسبت مساحت آن‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{MA}{AB} = \frac{MA}{MA + MB} = \frac{1}{\frac{MA + MB}{MA}} = \frac{1}{1 + \frac{MB}{MA}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow S_{\triangle AMN} = \frac{9}{25} S_{\triangle ABC}$$

چون $MN \parallel BC$ است، با استفاده از قضیه تالس داریم:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{AN}{NC} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{NC}{AN} = \frac{2}{3}$$

$$\triangle NPC \sim \triangle ABC$$

است پس نسبت تشابه آن‌ها برابر است با:

$$\frac{NC}{AC} = \frac{NC}{AN + NC} = \frac{1}{\frac{AN + NC}{NC}} = \frac{1}{\frac{NC}{AN} + 1} = \frac{1}{\frac{2}{3} + 1} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$$

حال نسبت مساحت‌های این دو مثلث را به دست می‌آوریم:

$$\frac{S_{\triangle NPC}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow S_{\triangle NPC} = \frac{9}{25} S_{\triangle ABC}$$

با توجه به نسبت‌های بالا، مساحت متوازی‌الاضلاع $MNPB$ را بر حسب مساحت مثلث $\triangle ABC$ می‌نویسیم. داریم:

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AMN} + S_{\triangle NPC} + S_{MNPB}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{9}{25} S_{\triangle ABC} + \frac{9}{25} S_{\triangle ABC} + S_{MNPB}$$

$$\Rightarrow S_{MNPB} = \frac{12}{25} S_{\triangle ABC} = \frac{48}{100} S_{\triangle ABC}$$

پس مساحت متوازی‌الاضلاع ۴۸ درصد مساحت مثلث $\triangle ABC$ است.

گام اول

در دو مثلث متشابه، نسبت اضلاع متناظر برابر است.

گام دوم

با توجه به اینکه دو مثلث متشابه‌اند و $\frac{5}{9} \equiv \frac{4}{9}$ و $\frac{4}{9} \equiv \frac{5}{9}$ است، دو ضلع به طول‌های a و b از دو مثلث نمی‌توانند متناظر باشند؛ بنابراین ضلع به طول a از مثلث اول یا با ضلع به طول 7 از مثلث دوم متناظر است یا با ضلع به طول 9 . هریک از این دو حالت را بررسی و مقدار a را محاسبه می‌کنیم.

حالت اول: ضلع به طول a از مثلث اول با ضلع به طول 9 از مثلث دوم متناظر باشد.

$$\frac{a}{9} = \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \Rightarrow \frac{a}{9} = \frac{5}{9} \Rightarrow a = \frac{45}{9} \quad \text{یا} \quad \frac{a}{9} = \frac{4}{9} = \frac{5}{b} \Rightarrow \frac{a}{9} = \frac{4}{9} \Rightarrow a = \frac{36}{9}$$

حالت دوم: ضلع به طول a از مثلث اول با ضلع به طول 7 از مثلث دوم متناظر باشد.

$$\frac{a}{7} = \frac{4}{9} = \frac{5}{b} \Rightarrow \frac{a}{7} = \frac{4}{9} \Rightarrow a = \frac{28}{9} \quad \text{یا} \quad \frac{a}{7} = \frac{5}{9} = \frac{4}{b} \Rightarrow \frac{a}{7} = \frac{5}{9} \Rightarrow a = \frac{35}{9}$$

از بین مقادیر به دست آمده، بیشترین مقدار $a = \frac{45}{9}$ است.

گام اول

الف) دو مثلث قابل انطباق نیستند یعنی دو مثلث با هم برابر یا همنهشت نیستند؛ بنابراین حق نداریم کوچک‌ترین ضلع مثلث با اضلاع b و a و 3 را برابر 3 در نظر بگیریم (اگر کوچک‌ترین ضلع مثلث اول را 3 در نظر بگیریم، با توجه به اینکه دو مثلث متشابه‌اند، نسبت تشابه آن‌ها برابر $1 = \frac{3}{3}$ می‌شود و باید مقدار a و b برابر 4 و 5 باشد که در این صورت دو مثلث برهم منطبق می‌شوند) پس کوچک‌ترین ضلع این مثلث a یا b است.

ب) می‌دانیم نسبت محیط‌های دو مثلث متشابه برابر نسبت تشابه است.

گام دوم

محیط مثلث دوم برابر است با:

$$3 + 4 + 5 = 12$$

نسبت تشابه دو مثلث می‌تواند $\frac{3}{4}$ یا $\frac{3}{5}$ باشد. اگر نسبت تشابه برابر $\frac{3}{4}$ باشد، محیط مثلث اول برابر است با:

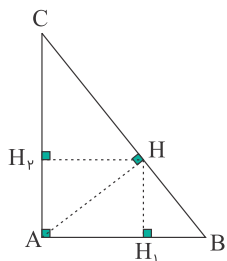
$$\text{محیط مثلث اول} = 12 \times \frac{3}{4} = 3 \times 3 = 9$$

و اگر نسبت تشابه برابر $\frac{3}{5}$ باشد، داریم:

$$\text{محیط مثلث اول} = 12 \times \frac{3}{5} = 7\frac{2}{5}$$

بنابراین بیشترین محیط مثلث اول برابر 9 است.

در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، ارتفاع وارد بر وتر، مثلث را به دو مثلث متشابه تقسیم می‌کند؛ یعنی مثلث‌های ABH و ACH باهم متشابه‌اند.



$$\frac{S(\triangle ABH)}{S(\triangle ABC)} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{S(\triangle ABH)}{S(\triangle ABC) - S(\triangle ABH)} = \frac{1}{5-1} \Rightarrow \frac{S(\triangle ABH)}{S(\triangle ACH)} = \frac{1}{4}$$

بنابراین نسبت مساحت دو مثلث متشابه $\frac{1}{4}$ و نسبت تشابه دو مثلث $\frac{1}{2}$ است. در دو مثلث متشابه، نسبت ارتفاع‌ها همان نسبت تشابه است.

$$\frac{HH_1}{HH_2} = \frac{1}{2} \text{ داریم}$$

چهار ضلعی $MNPB$ متوازی الاضلاع است؛ بنابراین $MN \parallel PB$ است. با استفاده از قضیه تالس می‌توان نوشت:

$$MN \parallel BP \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{۳}{۱۰} \Rightarrow \frac{NC}{AC} = \frac{۷}{۱۰}$$

همچنین $NO \parallel AM$ است پس دو مثلث $\triangle NOC$ و $\triangle AMC$ نیز متشابه می‌شود. می‌دانیم نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر مجذور نسبت تشابه است؛ بنابراین:

$$\frac{S_{\triangle NOC}}{S_{\triangle AMC}} = \frac{۴۹}{۱۰۰} \Rightarrow S_{\triangle NOC} = \frac{۴۹}{۱۰۰} S_{\triangle AMC} \quad (I)$$

مساحت دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle AMC$ را می‌توان چنین نوشت:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A}$$

$$S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2} AM \cdot AC \cdot \sin \hat{A}$$

بنابراین:

$$\frac{S_{\triangle AMC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AM}{AB} = \frac{۳}{۱۰} \Rightarrow S_{\triangle AMC} = \frac{۳}{۱۰} S_{\triangle ABC} \quad (II)$$

با استفاده از دو رابطه (I) و (II) داریم:

$$S_{\triangle NOC} = \frac{۴۹}{۱۰۰} \times \frac{۳}{۱۰} S_{\triangle ABC} = \frac{۱۴۷}{۱۰۰۰} S_{\triangle ABC} \quad (III)$$

از طرفی چون $MN \parallel BP$ است پس دو مثلث $\triangle AMN$ و $\triangle ABC$ متشابه می‌شود و نسبت مساحت آن‌ها برابر مجذور نسبت تشابه است؛ بنابراین:

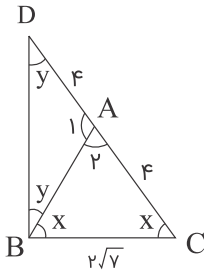
$$\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AM}{AB}\right)^2 = \frac{۹}{۱۰۰} \Rightarrow S_{\triangle AMN} = \frac{۹}{۱۰۰} S_{\triangle ABC} \quad (IV)$$

اکنون با استفاده از روابط (II) و (III) و (IV) داریم:

$$\frac{S_{\triangle OMN}}{S_{\triangle AMN}} = \frac{S_{\triangle AMC} - S_{\triangle AMN} - S_{\triangle NOC}}{S_{\triangle AMN}} = \frac{\left(\frac{۳}{۱۰} - \frac{۹}{۱۰۰} - \frac{۱۴۷}{۱۰۰۰}\right) S_{\triangle ABC}}{\frac{۹}{۱۰۰} S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{۶۳}{۱۰۰۰}}{\frac{۹}{۱۰۰}} = \frac{۶۳}{۹۰} = \frac{۷}{۱۰}$$

پس مساحت مثلث $\triangle OMN$ ، ۷۰ درصد مساحت مثلث $\triangle AMN$ است.

ابتدا بر اساس توضیحات صورت سؤال، یک شکل دقیق رسم می‌کنیم:



مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle ABD$ متساوی‌الساقین هستند پس:

$$\hat{A}BC = \hat{A}CB = x \quad , \quad \hat{A}BD = \hat{A}DB = y$$

زاویه \hat{A}_1 زاویه خارجی مثلث $\triangle ABC$ است و اندازه آن برابر مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاورش می‌شود؛ یعنی:

$$\hat{A}_1 = x + x = 2x$$

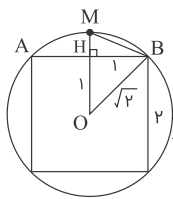
با توجه به اینکه مجموع زوایای داخلی هر مثلث برابر 180° است، داریم:

$$\hat{A}_1 + y + y = 180^\circ \Rightarrow 2x + 2y = 180^\circ \Rightarrow 2(x + y) = 180^\circ \Rightarrow x + y = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

بنابراین مثلث $\triangle DBC$ در رأس B قائمه است و می‌توان اندازه ضلع BD را با استفاده از قضیه فیثاغورس محاسبه کرد.

$$CD = AD + AC = 4 + 4 = 8 \quad , \quad BC = 2\sqrt{7}$$

$$CD^2 = BD^2 + BC^2 \Rightarrow 8^2 = BD^2 + (2\sqrt{7})^2 \Rightarrow 64 = BD^2 + 28 \\ \Rightarrow BD^2 = 64 - 28 = 36 \Rightarrow BD = \sqrt{36} = 6$$



$$HB = 1, \quad MH = OM - OH$$

هدف محاسبه اندازه MB است. در مثلث قائم‌الزاویه $\triangle MHB$ داریم:

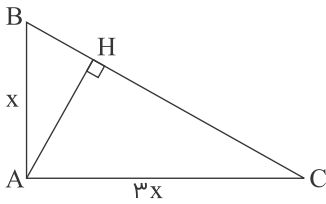
برای محاسبه MH، ابتدا لازم است با استفاده از قضیه فیثاغورس شعاع دایره را به دست آوریم:

$$OB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow OM = OB = \sqrt{2} \Rightarrow MH = \sqrt{2} - 1$$

اکنون با استفاده از قضیه فیثاغورس اندازه MB را محاسبه می‌کنیم:

$$MB^2 = MH^2 + HB^2 \Rightarrow MB^2 = (\sqrt{2} - 1)^2 + 1^2 = 2 - 2\sqrt{2} + 1 + 1 = 4 - 2\sqrt{2} \\ \Rightarrow MB = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

الف) طول اضلاع قائمه مثلث $\triangle ABC$ را x و $3x$ در نظر می‌گیریم.
 ب) می‌دانیم: "ارتفاع \times قاعده $\times \frac{1}{2}$ = مساحت مثلث"



با استفاده از قضیه فیثاغورس اندازه BC را محاسبه می‌کنیم:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow x^2 + 9x^2 = BC^2 \Rightarrow BC^2 = 10x^2 \Rightarrow BC = \sqrt{10}x$$

با توجه به اینکه مساحت مثلث $\triangle ABC$ برابر 60 واحد مربع است، مقدار x را تعیین می‌کنیم.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{1}{2} x(3x) = 60 \Rightarrow x^2 = 40 \Rightarrow x = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

می‌توان مساحت مثلث $\triangle ABC$ را با تعریف BC و AH به ترتیب به‌عنوان قاعده و ارتفاع آن چنین نوشت:

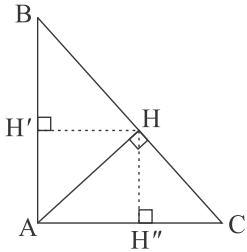
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC = 60$$

بنابراین:

$$\frac{1}{2} AH \times \sqrt{10}(2\sqrt{10}) = 60 \Rightarrow 10AH = 60 \Rightarrow AH = 6$$

گام اول

الف) مثلث $\triangle ABC$ قائم‌الزاویه است.
 ب) با فرض اینکه $HC < HB$ باشد داریم: $S_{\triangle ABC} = \frac{6}{\sqrt{6}} S_{\triangle AHC}$
 ج) $HH' = ?$ و $HH'' = ?$



گام دوم

سه مثلث قائم‌الزاویه $\triangle AHC$ ، $\triangle AHB$ و $\triangle ABC$ باهم متشابه‌اند. می‌دانیم در مثلث‌های متشابه نسبت تشابه برابر جذر نسبت مساحت‌ها است.

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AHC}} = \frac{6}{\sqrt{6}} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABH} + S_{\triangle AHC}}{S_{\triangle AHC}} = \frac{6}{\sqrt{6}} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABH}}{S_{\triangle AHC}} + 1 = \frac{6}{\sqrt{6}} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABH}}{S_{\triangle AHC}} = \frac{5}{\sqrt{6}}$$

همچنین می‌دانیم در مثلث‌های متشابه، نسبت تشابه با نسبت ارتفاع‌ها برابر است. چون دو مثلث $\triangle ABH$ و $\triangle ACH$ باهم متشابه‌اند، داریم:

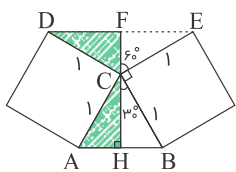
$$\frac{HH'}{HH''} = \sqrt{\frac{5}{\sqrt{6}}} = \frac{2}{4} \Rightarrow \frac{HH'}{HH''} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5} \Rightarrow \frac{HH''}{HH'} = \frac{5}{12}$$

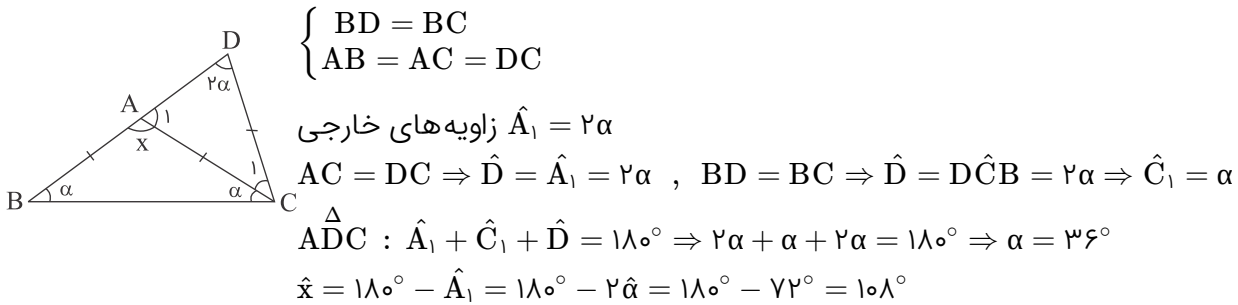
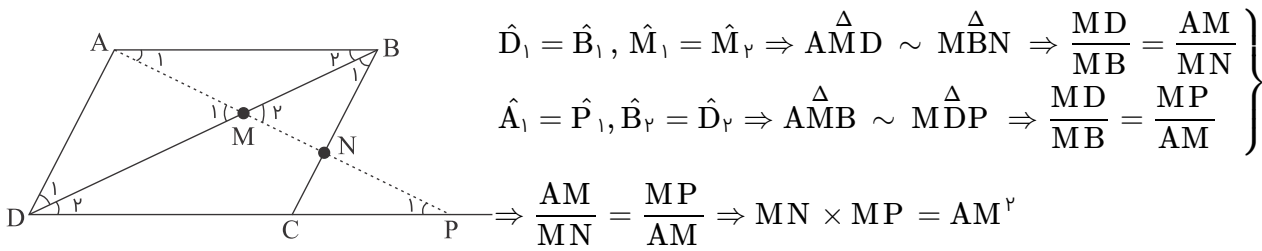
طبق قضیه تالس می‌توان نوشت $(ME = x)$:

$$\left. \begin{array}{l} BE \parallel AC \Rightarrow \frac{ME}{AE} = \frac{MB}{BC} \\ AB \parallel DC \Rightarrow \frac{MA}{AD} = \frac{MB}{BC} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{ME}{AE} = \frac{MA}{AD} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{x+3}{7} \Rightarrow x = \frac{2}{25}$$

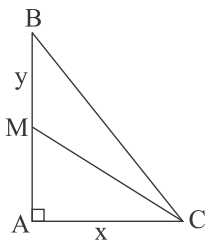
$$\Rightarrow MD = ME + AE + AD = \frac{2}{25} + 3 + 7 = \frac{12}{25}$$

باتوجه به شکل واضح است که مثلث‌های $\triangle ACH$ و $\triangle CDF$ همنهشت هستند؛ بنابراین مساحت مثلث $\triangle ABC$ دو برابر مساحت مثلث $\triangle DCF$ و مساوی با مساحت مثلث $\triangle DCE$ است.





مثلث قائم‌الزاویه $\triangle ABC$ را با فرض اینکه طول اضلاع قائمه‌اش x و y ($x < y$) باشد، رسم می‌کنیم. AB ضلع متوسط این مثلث و CM میانه وارد بر آن است. هدف محاسبه نسبت $\frac{CM}{AB}$ است.



مساحت مثلث $\triangle ABC$ برابر مساحت مربعی به طول ضلع x است؛ بنابراین:

$$\frac{xy}{2} = x^2 \Rightarrow xy = 2x^2 \xrightarrow{x,y>0} y = 2x \Rightarrow AB = 2x$$

$$AM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}(2x) = x$$

اکنون با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث $\triangle AMC$ ، اندازه CM را به دست می‌آوریم:

$$CM^2 = AM^2 + AC^2 \Rightarrow CM^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 \Rightarrow CM = \sqrt{2}x$$

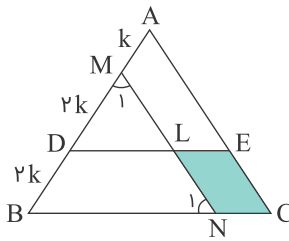
پس نسبت $\frac{CM}{AB}$ برابر است با:

$$\frac{CM}{AB} = \frac{\sqrt{2}x}{2x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow CM = \frac{\sqrt{2}}{2}AB$$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle BDN : AM \parallel DN \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{MN}{BM} \\ \triangle ACM : EN \parallel AM \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{MN}{CM} \end{array} \right\} \xrightarrow{BM=CM} \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$$

شکل را به صورت زیر نام گذاری می کنیم:
مثلث $\triangle ABC$ متساوی الاضلاع است؛ بنابراین:



$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$$

چون $NLEC$ متوازی الاضلاع است، داریم:

$$MN \parallel AC \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{A} = 60^\circ, \hat{N}_1 = \hat{C} = 60^\circ \Rightarrow \triangle MBN \text{ متساوی الاضلاع است} \Rightarrow BN = 4k$$

هر دو مثلث $\triangle MBN$ و $\triangle ABC$ متساوی الاضلاع هستند در نتیجه با هم متشابه اند. می دانیم نسبت مساحت های دو مثلث متشابه برابر مجذور نسبت تشابه آن دو مثلث است؛ بنابراین:

$$\triangle MBN \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{S_{\triangle MBN}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{4k}{4k}\right)^2 = \left(\frac{4}{4}\right)^2 = \frac{16}{16} \Rightarrow S_{\triangle MBN} = \frac{16}{16} S_{\triangle ABC}$$

همچنین

$$DL \parallel BN \Rightarrow \hat{D} = \hat{B} = 60^\circ, \hat{L} = \hat{N}_1 = 60^\circ \Rightarrow \triangle MDL \text{ متساوی الاضلاع است} \Rightarrow ML = 2k$$

به طریق مشابه ثابت می شود که $\triangle ADE$ نیز متساوی الاضلاع و $AE = 3k$ است؛ بنابراین دو مثلث $\triangle MDL$ و $\triangle MBN$ و دو مثلث $\triangle MDL$ و $\triangle ADE$ با هم متشابه اند و داریم:

$$\triangle MDL \sim \triangle MBN \Rightarrow \frac{S_{\triangle MDL}}{S_{\triangle MBN}} = \left(\frac{2k}{4k}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{\triangle MDL} = \frac{1}{4} S_{\triangle MBN} = \frac{4}{16} S_{\triangle ABC}$$

$$\triangle MDL \sim \triangle ADE \Rightarrow \frac{S_{\triangle MDL}}{S_{\triangle ADE}} = \left(\frac{2k}{3k}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow S_{\triangle ADE} = \frac{9}{4} S_{\triangle MDL} = \frac{9}{16} S_{\triangle ABC}$$

با استفاده از نسبت های بالا، نسبت خواسته شده را محاسبه می کنیم:

$$S_{AMLE} = S_{\triangle ADE} - S_{\triangle MDL} = \frac{9}{16} S_{\triangle ABC} - \frac{4}{16} S_{\triangle ABC} = \frac{5}{16} S_{\triangle ABC}$$

$$S_{LECN} = S_{\triangle ABC} - (S_{\triangle BMN} + S_{AMLE}) = S_{\triangle ABC} - \left(\frac{16}{16} S_{\triangle ABC} + \frac{5}{16} S_{\triangle ABC}\right) = \frac{4}{16} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}$$

بنابراین مساحت متوازی الاضلاع هاشورزده ۱۶ درصد مساحت مثلث $\triangle ABC$ است.

گام اول

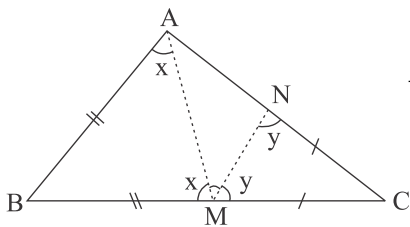
الف) مثلث $\triangle MNC$ متساوی الساقین است، پس $\widehat{NM}C = \widehat{MNC}$.
 ب) مثلث $\triangle ABM$ متساوی الساقین است، پس $\widehat{AMB} = \widehat{BAM}$.
 ج) مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.

گام دوم

با توجه به گام اول، شکل را تکمیل می‌کنیم:
 می‌دانیم \widehat{M} یک زاویه نیم‌صفحه است، داریم:

$$\widehat{AMB} + \widehat{AMN} + \widehat{NMC} = x + 43^\circ + y = 180^\circ \Rightarrow x + y = 180^\circ - 43^\circ = 137^\circ \quad (I)$$

از طرفی:



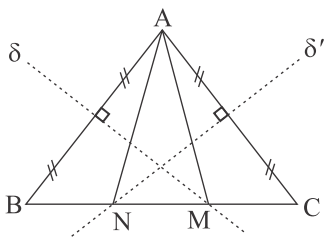
$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABM : \widehat{B} + 2x = 180^\circ \\ \triangle CNM : \widehat{C} + 2y = 180^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{+} \widehat{B} + 2x + \widehat{C} + 2y = \widehat{B} + \widehat{C} + 2(x+y) = 360^\circ$$

$$\stackrel{(I)}{\Rightarrow} \widehat{B} + \widehat{C} + 274^\circ = 360^\circ \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 360^\circ - 274^\circ = 86^\circ$$

همچنین در مثلث $\triangle ABC$ داریم:

$$\widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{BAC} = 180^\circ \Rightarrow 86^\circ + \widehat{BAC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 180^\circ - 86^\circ = 94^\circ$$

$$\widehat{A} = 80^\circ, AB = AC \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2} = 50^\circ$$



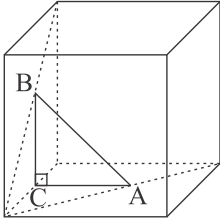
هر نقطه واقع بر عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است، پس:

$$\begin{cases} M \in \delta \Rightarrow MA = MB \Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{B} = 50^\circ \Rightarrow \widehat{AMB} = 80^\circ \\ N \in \delta' \Rightarrow NA = NC \Rightarrow \widehat{CAN} = \widehat{C} = 50^\circ \Rightarrow \widehat{ANC} = 80^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \widehat{MAN} = 180^\circ - (\widehat{AMB} + \widehat{ANC}) = 20^\circ$$

بنابراین، کوچک‌ترین زاویه مثلث AMN ، زاویه $\widehat{MAN} = 20^\circ$ است.

مکعبی به طول یال $4\sqrt{2}$ به صورت زیر رسم کرده و وسط دو وجه غیرموازی آن را A و B می‌نامیم. هدف محاسبه اندازه AB است.



اندازه AC و BC نصف یال مکعب است؛ بنابراین:

$$AC = BC = \frac{1}{2}(4\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

با استفاده از رابطه فیثاغورس، اندازه AB را تعیین می‌کنیم:

$$BC^2 + AC^2 = AB^2 \Rightarrow 2(2\sqrt{2})^2 = AB^2 \Rightarrow AB^2 = 2 \times 8 = 16 \Rightarrow AB = \sqrt{16} = 4$$

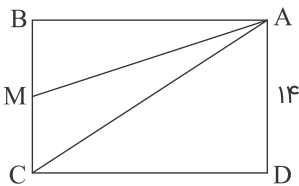
گام اول

الف) عرض مستطیل ۱۴ واحد و قطر آن ۲۵ واحد است.

$$\frac{S_{ABM}}{S_{AMCD}} = \frac{5}{9} \quad \text{ب)}$$

ج) $AM = ?$

گام دوم



با استفاده از رابطه فیثاغورس، طول مستطیل را به دست می‌آوریم.

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 \xrightarrow[\substack{AD=14 \\ AC=25}]{\substack{AC=25 \\ AD=14}} 25^2 = 14^2 + CD^2 \\ \Rightarrow 625 = 196 + CD^2 \Rightarrow CD^2 = 625 - 196 = 429 \Rightarrow AB^2 = 429$$

$$\frac{S_{\triangle ABM}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle ABM} + S_{AMCD}} = \frac{5}{5+9} = \frac{5}{14}$$

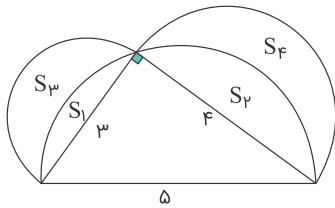
$$\frac{S_{\triangle ABM}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} \times AB \times BM}{AB \times AD} = \frac{BM}{2AD} = \frac{5}{14} \Rightarrow \frac{BM}{28} = \frac{5}{14} \Rightarrow BM = 10$$

رابطه فیثاغورس را برای مثلث $\triangle ABM$ نوشته و اندازه AM را تعیین می‌کنیم:

$$AB^2 + BM^2 = AM^2 \Rightarrow 429 + 100 = AM^2 \Rightarrow AM^2 = 529 \Rightarrow AM = \sqrt{529} = 23$$

مساحت قسمت‌های مختلف شکل را به صورت زیر نام‌گذاری می‌کنیم. هدف ما محاسبه $S_3 + S_4$ است. با استفاده از قضیه فیثاغورس طول وتر مثلث برابر است با:

$$\text{وتر مثلث} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$



داریم:

مساحت مثلث قائم‌الزاویه - مساحت نیم‌دایره به قطر ۵ $S_1 + S_2 = 5$

$$S_3 + S_4 = (S_1 + S_2) - (\text{مساحت نیم‌دایره به قطر ۳} + \text{مساحت نیم‌دایره به قطر ۴})$$

بنابراین:

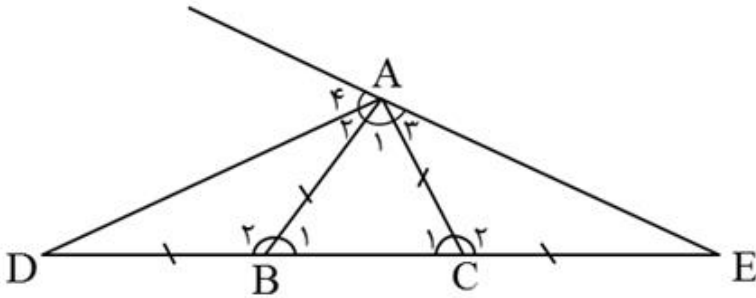
$$S_1 + S_2 = \frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{25}{4}\right) - 6 = \frac{25\pi}{8} - 6$$

$$S_3 + S_4 = \frac{1}{2} \times \pi \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \pi \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{25\pi}{8} - 6\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\frac{9}{4}\right) + \frac{\pi}{2} (4) - \frac{25\pi}{8} + 6 = \frac{25\pi}{8} - \frac{25\pi}{8} + 6 = 6$$

گام اول

الف) مثلث $\triangle ADE$ را بر اساس توضیحات صورت سؤال رسم می‌کنیم:



ب) $AB = AC = CE = BD$

ج) کوچک‌ترین زاویه خارجی در هر مثلث، مکمل بزرگ‌ترین زاویه داخلی است.

گام دوم

مثلث $\triangle ABC$ متساوی‌الساقین است؛ بنابراین $\hat{B}_1 = \hat{C}_1$ ، در نتیجه مکمل آن‌ها نیز برابر است؛ یعنی $\hat{B}_2 = \hat{C}_2$ است. از طرفی طبق قسمت (ب) از گام اول، $AB = AC$ و $CE = BD$ است؛ بنابراین دو مثلث $\triangle ABD$ و $\triangle ACE$ به حالت (ض‌ض) هم‌نهشت هستند.

$$\left. \begin{array}{l} CE = BD \\ \hat{B}_2 = \hat{C}_2 \\ AB = AC \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض‌ض}} \triangle ABD \cong \triangle ACE$$

در نتیجه زوایای \hat{D} و \hat{E} با هم برابر و هردو زوایای کوچک داخلی مثلث $\triangle ADE$ محسوب می‌شوند.

$$\triangle ABD \text{ متساوی‌الساقین} \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{D} = \alpha \xrightarrow{\hat{D}=\hat{E}} \hat{D} = \hat{E} = \alpha$$

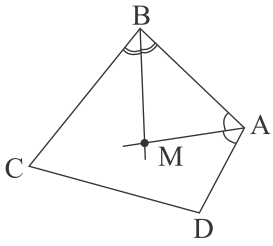
\hat{A}_4 کوچک‌ترین زاویه خارجی مثلث $\triangle ADE$ است پس اندازه آن با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاورش برابر می‌شود:

$$\hat{A}_4 = \hat{D} + \hat{E} = \alpha + \alpha = 2\alpha$$

بنابراین کوچک‌ترین زاویه خارجی مثلث، ۲ برابر کوچک‌ترین زاویه داخلی آن است.

$$\hat{A} = \frac{۴}{۳}\hat{B}, \hat{C} + \hat{D} = \frac{۱۱}{۳}\hat{B}, \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = ۳۶^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{۴}{۳}\hat{B} + \hat{B} + \frac{۱۱}{۳}\hat{B} = ۳۶^\circ \Rightarrow ۶\hat{B} = ۳۶^\circ \Rightarrow \hat{B} = ۶^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۸^\circ$$

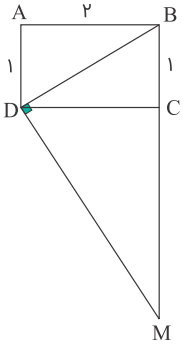


اگر M زاویه بین نیمسازهای دو زاویه A و B باشد، داریم:

$$\hat{M} = ۱۸۰ - \frac{\hat{A}}{۲} - \frac{\hat{B}}{۲} \Rightarrow \hat{M} = ۱۸۰ - ۳۰ - ۴۰ = ۱۱۰$$

$$\Rightarrow \text{زاویه حاده} = ۱۸۰^\circ - ۱۱۰^\circ = ۷۰^\circ$$

راه حل اول: باتوجه به توضیحات صورت سؤال، شکلی ساده و دقیق رسم می‌کنیم:



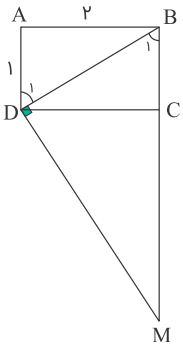
هدف محاسبه MB است. BD قطر مستطیل است، با استفاده از قضیه فیثاغورس داریم:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5 \Rightarrow BD = \sqrt{5}$$

با استفاده از رابطه طولی در مثلث BDM داریم:

$$BD^2 = MB^2 \cdot BC^2 \Rightarrow (\sqrt{5})^2 = MB^2 \times 1 \Rightarrow MB = 5$$

راه حل دوم:



هدف محاسبه MB است. BD قطر مستطیل است، با استفاده از قضیه فیثاغورس داریم:

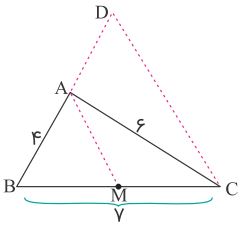
$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5 \Rightarrow BD = \sqrt{5}$$

دو مثلث قائم‌الزاویه $\hat{\Delta} B\hat{A}D$ و $\hat{\Delta} B\hat{D}M$ متشابه هستند، زیرا:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{BDM} = 90^\circ \\ AD \parallel BC \\ \text{مورب BD} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{B}_1 \Rightarrow \hat{\Delta} B\hat{A}D \sim \hat{\Delta} B\hat{D}M$$

در دو مثلث متشابه، نسبت اضلاع متناظر برابر است بنابراین:

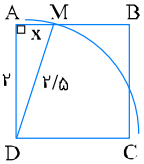
$$\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{MB} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{MB} \Rightarrow MB = (\sqrt{5})^2 = 5$$



در مثلث BDC می‌دانیم $AM \parallel CD$ است. به کمک رابطهٔ تعمیم قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{BA}{BD} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow \frac{4}{BD} = \frac{1}{2} \Rightarrow BD = 8$$

مربع ABCD را در نظر بگیرید. دایره‌ای به مرکز D و شعاع $2/5$ واحد رسم می‌کنیم. این دایره دو ضلع AB و BC را قطع می‌کند.



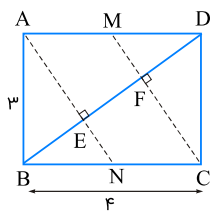
با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه $\triangle DAM$ ، فاصلهٔ نقطهٔ M را از دو رأس A و B محاسبه می‌کنیم:

$$AM^2 + 2^2 = (2/5)^2 \Rightarrow AM^2 + 4 = 4/25 \Rightarrow AM^2 = 2/25$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{2/25} = 1/5, \quad MB = 2 - 1/5 = 9/5$$

بنابراین فاصلهٔ نزدیک‌ترین رأس مربع تا نقاط تقاطع برابر $1/5 = \frac{1}{5}$ است.

در مثلث قائم‌الزاویه ABD داریم:



$$\begin{aligned} \Delta ABD : BD^2 &= AB^2 + AD^2 \\ \Rightarrow BD^2 &= 9 + 16 = 25 \Rightarrow BD = 5 \end{aligned}$$

کاملاً واضح است که مثلث‌های ABN و CDM همنهشت‌اند، لذا $DF = EB$. همچنین ABD قائم‌الزاویه است، بنابراین:

$$\begin{aligned} AB^2 &= BE \times BD \Rightarrow 9 = BE \times 5 \Rightarrow BE = DF = \frac{9}{5} \\ \Rightarrow EF &= 5 - 2 \times \frac{9}{5} = \frac{7}{5} \end{aligned}$$

همچنین در مثلث BFC داریم:

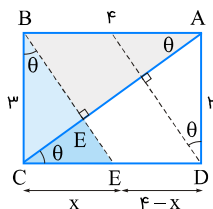
$$EN \parallel CF \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{BE}{BF} = \frac{BN}{BC} \Rightarrow \frac{\frac{9}{5}}{\frac{9}{5} + \frac{7}{5}} = \frac{BN}{4} \Rightarrow BN = \frac{36}{16} = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow NC = 4 - \frac{9}{4} = \frac{7}{4}$$

$$S_{ANCM} = AB \times NC = 3 \times \frac{7}{4} = \frac{21}{4} = 5/25$$

راه‌حل دوم:

در شکل زیر تمام زوایای مشخص شده با یکدیگر برابرند که آن‌ها را θ می‌نامیم.

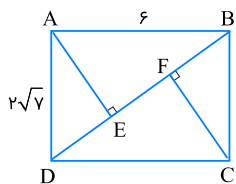


در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم $\tan \theta = \frac{3}{4}$ و همچنین در مثلث قائم‌الزاویه BCE داریم $\tan \theta = \frac{x}{3}$ ، در نتیجه:

$$\Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{9}{4} = 2/25$$

$$\begin{aligned} S = \text{متوازی‌الاضلاع} &= \text{ارتفاع} \times \text{قاعده} = (4 - x) \times 3 = (4 - 2/25) \times 3 \\ &= 1/25 \times 3 = 5/25 \end{aligned}$$

از دو رأس A و C، دو عمود AE و CF را بر قطر BD رسم می‌کنیم.



$$\triangle ABD : BD^2 = AB^2 + AD^2 = 36 + 28 = 64 \Rightarrow BD = 8$$

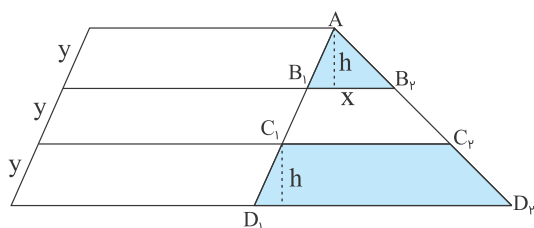
طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$\triangle ABD : AD^2 = DE \cdot BD \Rightarrow 28 = DE \times 8 \Rightarrow DE = \frac{28}{8} = \frac{7}{2}$$

به طور مشابه $BF = \frac{3}{5}$ است و داریم:

$$EF = BD - (DE + BF) = 8 - 7 = 1$$

فرض کنید $B_1B_2 = x$ باشد. در این صورت داریم:

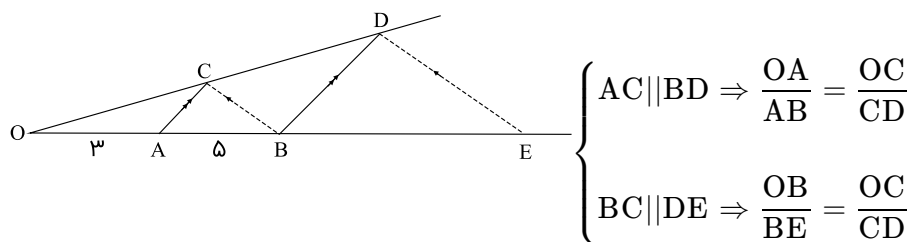


$$\triangle AC_1C_2 : \frac{AB_1}{AC_1} = \frac{x}{C_1C_2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{C_1C_2} \Rightarrow C_1C_2 = 2x$$

$$\triangle AD_1D_2 : \frac{AB_1}{AD_1} = \frac{x}{D_1D_2} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{x}{D_1D_2} \Rightarrow D_1D_2 = 3x$$

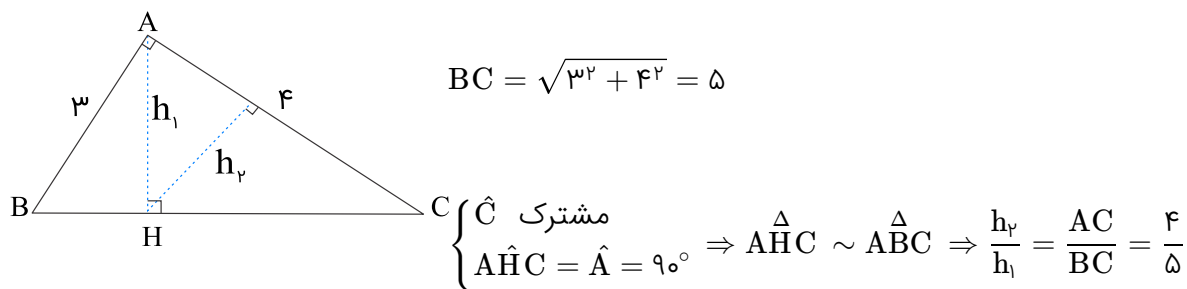
$$\frac{S_{AB_1B_2}}{S_{C_1C_2D_1D_2}} = \frac{\frac{1}{2} \times x \times h}{\frac{1}{2} (2x + 3x)h} = \frac{1}{5}$$

باتوجه به شکل و با کمک قضیه تالس داریم:



طرف راست تساوی‌ها باهم برابر است پس طرف چپ آن نیز باهم برابر است.

$$\Rightarrow \frac{OA}{AB} = \frac{OB}{BE} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{8}{BE} \Rightarrow BE = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$$



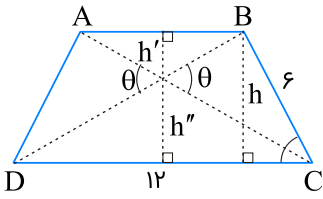
راه حل اول:

راه حل دوم:

$$\triangle ABC : \begin{cases} h_1 \times BC = AB \times AC \Rightarrow 5h_1 = 3 \times 4 \Rightarrow h_1 = \frac{12}{5} \\ AC^2 = HC \times BC \Rightarrow 16 = 5HC \Rightarrow HC = \frac{16}{5} \end{cases}$$

$$\triangle AHC : h_2 \times AC = h_1 \times HC \Rightarrow \frac{h_2}{h_1} = \frac{HC}{AC} = \frac{\frac{16}{5}}{4} = \frac{4}{5}$$

دو مثلث $\triangle OAB$ و $\triangle OCD$ باهم متشابه‌اند.



$$\frac{h'}{h''} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{h'}{h''} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \Rightarrow h'' = \frac{3}{2}h'$$

$$h' + h'' = 10 \Rightarrow h' + \frac{3}{2}h' = 10 \Rightarrow h' = 4 \Rightarrow h'' = 6$$

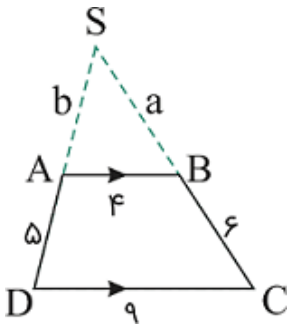
$$\triangle OAB \sim \triangle OCD \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \Rightarrow OB \times OC = OA \times OD (*)$$

مساحت دو مثلث $\triangle OAD$ و $\triangle OBC$ باهم برابرند زیرا:

$$\begin{cases} S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2}OB \times OC \times \sin \theta \\ S_{\triangle OAD} = \frac{1}{2}OA \times OD \times \sin \theta \end{cases} \xrightarrow{(*)} S_{\triangle OBC} = S_{\triangle OAD}$$

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{\triangle ODC} + S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OAD} \\ &\Rightarrow \frac{(8 + 12) \times 10}{2} = \frac{6 \times 12}{2} + \frac{4 \times 8}{2} + 2S_{\triangle OBC} \\ &\Rightarrow 100 = 36 + 16 + 2S_{\triangle OBC} \Rightarrow S_{\triangle OBC} = \frac{48}{2} = 24 \end{aligned}$$

مطابق شکل، ساق‌های دوزنقه ABCD به طول اضلاع $AB = ۴$ ، $CD = ۹$ ، $AD = ۵$ و $BC = ۶$ را امتداد می‌دهیم تا همدیگر را در S قطع کنند.

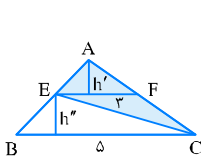


$$AB \parallel CD \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{SA}{SD} = \frac{SB}{SC} = \frac{AB}{CD}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{b+5} = \frac{a}{a+6} = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{b+5} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9b = 4b + 20 \Rightarrow b = 4 \\ \frac{a}{a+6} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9a = 4a + 24 \Rightarrow a = 4/5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{محیط مثلث SAB} = 4 + 4/5 + 4 = 12/5$$



$$\frac{EF}{BC} = \frac{3}{5}$$

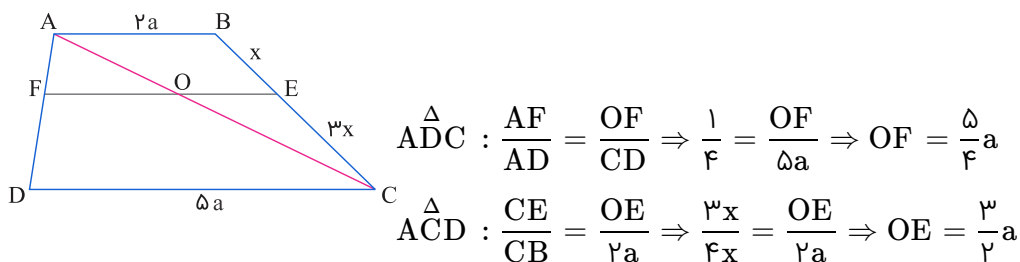
$$\frac{S_{\triangle BEC}}{S_{\triangle BCFE}} = \frac{\frac{1}{2} \times 5 \times h''}{\frac{1}{2} \times (3+5) \times h''} = \frac{5}{8} \Rightarrow \frac{S_{\triangle EFC}}{S_{\triangle BCFE}} = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

$$\text{نسبت تشابه: } \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle BCFE}} = \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AEF}}$$

$$= \frac{S_{\triangle AEF}}{\frac{25}{9}S_{\triangle AEF} - S_{\triangle AEF}} = \frac{1}{\frac{25}{9} - 1} = \frac{1}{\frac{16}{9}} = \frac{9}{16}$$

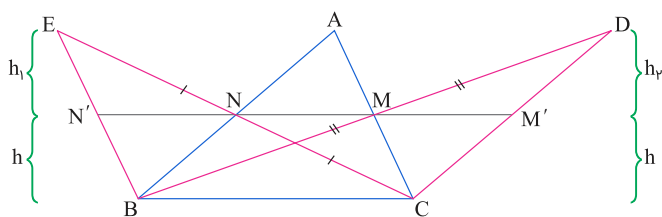
$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle AEC}}{S_{\triangle BCFE}} = \frac{S_{\triangle EFC}}{S_{\triangle BCFE}} + \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle BCFE}} = \frac{3}{8} + \frac{9}{16} = \frac{15}{16}$$

رأس A را به C وصل می‌کنیم:



$$EF = OF + OE = \frac{5}{4}a + \frac{3}{2}a = \frac{11}{4}a$$

$$\frac{EF}{CD} = \frac{\frac{11}{4}a}{5a} = \frac{11}{20}$$



مثلث‌های EBC و DCB دارای قاعده‌های یکسان BC هستند پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت ارتفاع‌ها است. پاره‌خط NM را از طرفین امتداد می‌دهیم تا ضلع‌های DC و EB را قطع کند.

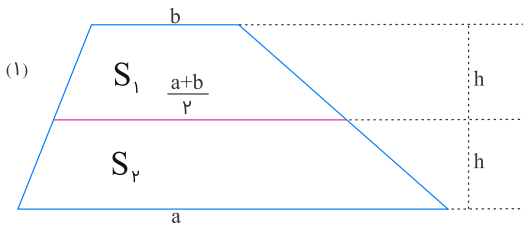
$$\triangle EBC : \frac{EN}{EC} = \frac{NN'}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h_1}{h + h_1} \Rightarrow 2h_1 = h + h_1 \Rightarrow h_1 = h$$

$$\triangle DCB : \frac{DM}{DB} = \frac{MM'}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h_2}{h + h_2} \Rightarrow 2h_2 = h + h_2 \Rightarrow h_2 = h$$

$$\Rightarrow h_1 = h_2$$

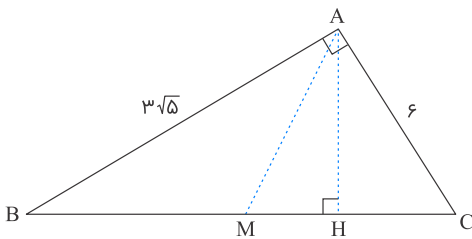
پس این دو مثلث ارتفاع‌های برابری دارند و مساحت آن‌ها باهم برابر است.

پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق یک ذوزنقه را به هم وصل می‌کند، برابر است با میانگین طول دو قاعده. بنابراین طول پاره‌خط وسط برابر $\frac{a+b}{۲}$ است.



$$S_2 = 2S_1 \Rightarrow \frac{1}{۲}h\left(a + \frac{a+b}{۲}\right) = 2 \times \frac{1}{۲}h\left(b + \frac{a+b}{۲}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{۳a+b}{۲} = ۳b+a \Rightarrow ۳a+b = ۶b+۲a \Rightarrow a = ۵b \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{۱}{۵}$$

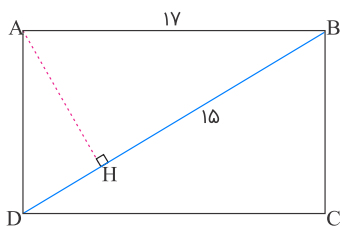


$$BC^2 = AC^2 + AB^2 \Rightarrow BC = \sqrt{6^2 + (3\sqrt{5})^2} = 9 \Rightarrow MC = MB = 4/5$$

$$\triangle ABC : AB^2 = BH \times BC \Rightarrow ۴۵ = BH \times ۹$$

$$\Rightarrow BH = ۵ \Rightarrow HM = BH - MB = ۵ - ۴/۵ = ۹/۵$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AHM}} = \frac{\frac{AH \times BC}{۲}}{\frac{AH \times HM}{۲}} = \frac{AH \times ۹}{AH \times \frac{۹}{۵}} = ۱۸$$



$$AB^2 = BH \times BD$$

$$17^2 = 15 \times BD \Rightarrow BD = \frac{17^2}{15}$$

میزان اختلاف طول قطر از عدد ۱۹ را می‌خواهیم:

$$\frac{17^2}{15} - 19 = \frac{17^2 - 15 \times 19}{15} = \frac{289 - 285}{15} = \frac{4}{15}$$

فرض کنیم $AE = x$ ، $ED = 3x$ ، $BD = y$ و $DC = 3y$. داریم:

$$\begin{aligned} \triangle AND : ME \parallel DN &\xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AM}{MN} = \frac{AE}{ED} = \frac{1}{3} \\ \Rightarrow AM = z \text{ و } MN = 3z \\ \triangle BCM : DN \parallel CM &\xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BN}{NM} = \frac{BD}{DC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{BN}{3z} = \frac{1}{3} \Rightarrow BN = z \\ \Rightarrow \frac{AB}{AM} &= \frac{z + 3z + z}{z} = \frac{5z}{z} = 5 \end{aligned}$$