



معین کرمی

# سوالات تالیفی هفتگی معارف درجه ۶، تقسین علامت و معادله کسری و ارایه

۱ به ازای کدام مقدار  $a$ ، معادله درجه دوم  $x^2 - 2(a-2)x + 14 - a = 0$ ، دارای دو ریشه مثبت است؟

- ①  $-2 < a < 2$       ②  $2 < a < 5$       ③  $2 < a < 14$       ④  $5 < a < 14$

۲ به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر  $m$ ، منحنی به معادله‌ی  $y = (m+2)x^2 + 3x + 1 - m$ ، محور  $x$ ها را در هر دو طرف مبدأ مختصات، قطع می‌کند؟

- ①  $m > 1$  یا  $m < -2$       ②  $-2 < m < 1$       ③ فقط  $m < -2$       ④ فقط  $m > 1$

۳ به ازای کدام مقدار  $m$ ، هر یک از ریشه‌های معادله درجه دوم  $8x^2 - mx - 8 = 0$ ، توان سوم ریشه‌های معادله  $2x^2 - x - 2 = 0$  می‌باشد؟

- ① ۹      ② ۱۱      ③ ۱۳      ④ ۱۵

۴ اگر عبارت  $(a-1)x^2 + (a-1)x + 1$  به ازای هر مقدار  $x$  منفی باشد،  $a$  به کدام مجموعه تعلق دارد؟

- ①  $\{a : 1 < a < 5\}$       ②  $\{a : a < 1\}$       ③  $\emptyset$       ④  $\mathbb{R}$

۵ به ازای کدام مقدار  $m$ ، مجموع جذر هر دو ریشه معادله درجه دوم  $2x^2 - (m+1)x + \frac{1}{8} = 0$  برابر ۲ می‌باشد؟

- ① ۳      ② ۴      ③ ۵      ④ ۶

۶ معادله  $(x^2 - 2x)^2 - (x^2 - 2x) = 2$ ، چند ریشه حقیقی متمایز دارد؟

- ① ۱      ② ۲      ③ ۳      ④ ۴

۷ به ازای کدام مقادیر  $m$ ، از معادله  $mx - 3\sqrt{x} + m - 2 = 0$  فقط یک جواب برای  $x$  حاصل می‌شود؟

- ①  $-\frac{3}{2} < m < 2$       ②  $0 < m < 2$       ③  $\frac{3}{2} < m < \frac{5}{2}$       ④  $\frac{3}{2} < m < 2$

۸ مجموعه جواب نامعادله  $3 < \frac{2x-3}{x+1} < 1$ ، به کدام صورت است؟

- ①  $\mathbb{R} - [-6, 4]$       ②  $\mathbb{R} - [-4, 6]$       ③  $x > 4$       ④  $x < -6$

۹ به ازای کدام مقادیر  $m$ ، معادله درجه دوم  $(m-6)x^2 - 2mx - 3 = 0$ ، دارای دو ریشه‌ی حقیقی منفی است؟

- ①  $m < -6$       ②  $m > 3$       ③  $0 < m < 3$       ④  $3 < m < 6$

۱۰ مجموع ریشه‌های حقیقی معادله‌ی  $(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$  کدام است؟

- ① ۴      ② -۲      ③ ۲      ④ -۴

۱۱ به ازای کدام مقدار  $m$ ، نمودار تابع  $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$ ، بر نیمساز ناحیه اول محورهای مختصات، مماس است؟

- ① -۴      ② -۱۲، ۴      ③ ۱۲، -۴      ④ ۱۲

۱۲ مجموعه جواب نامعادله  $\frac{7x-8}{x^2-x-2} > \frac{x}{x-2}$ ، به صورت بازه، کدام است؟

- ①  $(-4, 1) \cup (2, 3)$       ②  $(2, 4)$       ③  $(-1, 2) \cup (2, 4)$       ④  $(-1, 2)$



۱۳) به ازای کدام مقدار  $m$ ، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله‌ی  $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$  برابر ۶ می‌باشد؟

- ①  $-\frac{9}{5}$       ② ۱      ③  $-\frac{9}{5}, 1$       ④  $-1, \frac{9}{5}$

۱۴) بهروز یک مجله را به‌تنهایی ۹ ساعت زودتر از فرهاد تایپ می‌کند. اگر هر دو با هم کار کنند، در ۲۰ ساعت این کار انجام می‌شود. بهروز به‌تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می‌دهد؟

- ① ۳۲      ② ۳۳      ③ ۳۵      ④ ۳۶

۱۵) به ازای کدام مقادیر  $m$ ، منحنی  $y = (m+2)x^2 - 2x + 1$  از هر چهار ناحیهٔ محورهای مختصات می‌گذرد؟

- ①  $m < -2$       ②  $m < -1$       ③  $-2 < m < -1$       ④  $-4 < m < -2$

۱۶) ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم  $x^2 + ax + b = 0$  یک واحد از ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 + 7x + 1 = 0$  بیشتر است. مقدار  $b$  کدام است؟

- ①  $-2$       ②  $-1$       ③  $\frac{2}{3}$       ④  $\frac{4}{3}$

۱۷) به ازای کدام مجموعه مقادیر  $m$ ، معادلهٔ درجهٔ دوم  $2x^2 + (m+1)x + \frac{1}{m} + 2 = 0$  فاقد ریشهٔ حقیقی است؟ (بزرگ‌ترین بازه ممکن را در نظر بگیرید.)

- ①  $-3 < m < 5$       ②  $-3 < m < 4$       ③  $-2 < m < 4$       ④  $-1 < m < 5$

۱۸) اگر  $2a + \sqrt{3a+16} = 1$  باشد، عدد  $4a + 9$  کدام است؟

- ① ۴      ② ۶      ③ ۱۵      ④ ۲۱

۱۹) به ازای کدام مجموعه مقادیر  $m$ ، سهمی به معادلهٔ  $y = (1-m)x^2 + 2(m-3)x - 1$  همواره پایین محور  $x$ ها است؟

- ①  $1 < m < 5$       ②  $2 < m < 5$       ③  $2 < m < 4$       ④  $2 < m < 6$

۲۰) به ازای کدام مقدار  $m$ ، ریشه‌های حقیقی معادله‌ی  $mx^2 + 3x + m^2 = 2$  معکوس یک‌دیگرند؟

- ①  $-2$       ②  $-1$       ③ ۱      ④ ۲

۲۱) به ازای کدام مجموعه مقادیر  $m$ ، معادلهٔ درجهٔ دوم  $(2m-1)x^2 + 6x + m - 2 = 0$  دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است؟ (با تغییر)

- ①  $(-2, 2, 5) - \{0\}$       ②  $(-2, 3, 5) - \left\{\frac{1}{2}\right\}$       ③  $(-1, 3, 5) - \left\{\frac{1}{2}\right\}$       ④  $(-1, 2, 5) - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

۲۲) به ازای کدام مقدار  $m$ ، مجموع جذر هر دو ریشه‌ی معادله‌ی درجه‌ی دوم  $2x^2 - (m+1)x + \frac{1}{8} = 0$  برابر ۲ می‌باشد؟

- ① ۳      ② ۴      ③ ۵      ④ ۶

۲۳) به ازای کدام مقدار  $a$ ، معادله‌ی درجه‌ی دوم  $x^2 - 2(a-2)x + 14 - a = 0$  دارای دو ریشه‌ی متمایز مثبت است؟

- ①  $-2 < a < 2$       ②  $2 < a < 5$       ③  $2 < a < 14$       ④  $5 < a < 14$

۲۴) به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر  $a$  نمودار تابع  $f(x) = ax^2 + (a+3)x - 1$  محور  $x$ ها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟

- ①  $a < -9$       ②  $a < -3$       ③  $a > -1$       ④  $-3 < a < 0$

۲۵) مجموعه جواب نامعادلهٔ  $3 < \frac{2x-1}{x+1} < -1$ ، کدام است؟

- ①  $(0, +\infty)$       ②  $(4, +\infty)$       ③  $\mathbb{R} - [-4, 0]$       ④  $\mathbb{R} - [-4, -1]$

۲۶) اگر  $\alpha, \beta$  ریشه‌های معادله  $2x^2 - 3x - 4 = 0$  باشند، مجموعهٔ جواب‌های کدام معادله، به صورت  $\left\{\frac{1}{\alpha} + 1, \frac{1}{\beta} + 1\right\}$  است؟

- ①  $4x^2 - 5x + 1 = 0$       ②  $4x^2 - 3x + 1 = 0$       ③  $4x^2 - 5x - 1 = 0$       ④  $4x^2 - 3x - 1 = 0$



۲۷ به ازای کدام مقدار  $m$  هر یک از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم  $8x^2 - mx - 8 = 0$ ، توان سوم ریشه‌های معادله‌ی  $2x^2 - x - 2 = 0$  می‌باشد؟

- ۱ ۹      ۲ ۱۱      ۳ ۱۳      ۴ ۱۵

۲۸ معادله‌ی درجه‌ی دوم  $3x^2 + (2m - 1)x + 2 - m = 0$  دارای دو ریشه‌ی حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار  $m$  کدام است؟

- ۱  $\frac{7}{2}$       ۲ ۳      ۳ -۱      ۴  $-\frac{5}{2}$

۲۹ نمودار تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، محور  $x$ ها را در نقطه‌ای به طول ۱ و محور  $y$ ها را در نقطه‌ای به عرض -۶ قطع کرده و از نقطه  $(-2, -6)$  می‌گذرد.  $f(-1)$  کدام است؟

- ۱ -۸      ۲ -۷      ۳ -۵      ۴ -۴

۳۰ به ازای کدام مقدار  $a$ ، نمودار تابع  $y = (1 - a)x^2 + 2\sqrt{6}x - a$  همواره بالای محور  $x$ ها است؟

- ۱  $a < 1$       ۲  $a < -2$       ۳  $a > 3$       ۴  $-2 < a < 1$

۳۱ به ازای کدام مجموعه مقادیر  $m$ ، معادله‌ی درجه‌ی دوم  $x^2 + (m - 2)x + m + 1 = 0$  دارای دو ریشه‌ی حقیقی مثبت است؟

- ۱  $-1 < m < 0$       ۲  $m < 0$       ۳  $2 < m < 8$       ۴  $m > 8$

۳۲ معادله‌ی درجه‌ی دوم  $2x^2 + mx + m + 6 = 0$  دارای دو ریشه‌ی مثبت است. بازه‌ی مقادیر  $m$ ، کدام است؟

- ۱  $(-4, 0)$       ۲  $(-4, -2)$       ۳  $(-6, 0)$       ۴  $(-6, -4)$

۳۳ به ازای کدام مقدار  $a$ ، نمودار تابع  $y = (1 - a)x^2 + 2\sqrt{6}x - a$  همواره بالای محور  $x$ ها است؟

- ۱  $a < 1$       ۲  $a < -2$       ۳  $a > 3$       ۴  $-2 < a < 1$

۳۴ منحنی  $y = (2x + 1)(x + 8)$  با خطوط  $y = mx$  نقطه مشترک ندارد. مجموعه مقادیر  $m$  چگونه است؟

- ۱  $5 < m < 13$       ۲  $15 < m < 23$       ۳  $7 < m < 15$       ۴  $9 < m < 25$

۳۵ فرض کنید نقاط  $(-2, 5)$ ،  $(0, 5)$  و  $(1, 11)$ ، بر سهمی  $y = ax^2 + bx + c$  واقع باشند. این سهمی، از کدام یک از نقاط زیر می‌گذرد؟

- ۱  $(-1, 3)$       ۲  $(-1, 4)$       ۳  $(2, 9)$       ۴  $(2, 15)$

۳۶ فرض کنید رأس سهمی  $y = ax^2 + bx + c$  گذرا بر نقطه‌ی  $(3, 1)$  باشد. این سهمی از کدام یک از نقاط زیر، می‌گذرد؟

- ۱  $(5, -7)$       ۲  $(5, -9)$       ۳  $(2, 5)$       ۴  $(1, 5)$

۳۷ به ازای کدام مقادیر  $a$ ، معادله‌ی  $x^3 + (a - 1)x^2 + (4 - a)x = 4$  دارای سه ریشه‌ی حقیقی متمایز مثبت است؟

- ۱  $(-\infty, -4) - \{-5\}$       ۲  $(-\infty, -4)$       ۳  $(4, +\infty)$       ۴  $(4, +\infty) - \{5\}$

۳۸ ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم  $2x^2 - 3x - 1 = 0$ ، یک واحد کمتر است؟

- ۱  $x^2 - 3x + 1 = 0$       ۲  $x^2 + 3x + 1 = 0$       ۳  $x^2 - 5x + 2 = 0$       ۴  $x^2 + 5x + 2 = 0$

۳۹ سرعت یک قایق موتوری، در آب راکد ۱۰۰ متر در دقیقه است. این قایق فاصله‌ی ۱۲۰۰ متری در رودخانه را رفته و برگشته است. اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است. سرعت آب رودخانه، چند متر در دقیقه است؟

- ۱ ۱۲      ۲ ۱۵      ۳ ۲۰      ۴ ۲۵

۴۰ پرنده‌ای فاصله‌ی یک کیلومتر را در جهت موافق باد رفته و در جهت مخالف باد برگشته است. اگر سرعت باد ۵ کیلومتر در ساعت و مدت رفت و برگشت ۹ دقیقه باشد، سرعت پرنده در هوای آرام، چند کیلومتر در ساعت است؟

- ۱ ۱۲      ۲ ۱۲٫۵      ۳ ۱۳٫۵      ۴ ۱۵



۴۱) اگر یکی از ریشه‌های معادله  $(ax^2 - x - 5) = 2$  برابر ۲ باشد، مجموع دو ریشه دیگر آن کدام است؟

- ۱) -۲      ۲)  $-\frac{3}{2}$       ۳)  $\frac{1}{2}$       ۴)  $\frac{3}{2}$

۴۲) اگر  $3a + \sqrt{2a^2 + 4a} = 2$  باشد، حاصل  $\frac{a+1}{a}$  کدام است؟

- ۱) ۱٫۵      ۲) ۲٫۵      ۳) ۳٫۵      ۴) ۴٫۵

۴۳) به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر  $m$ ، از معادله  $x - 2\sqrt{x} + m - 1 = 0$ ، دو جواب متمایز برای  $x$  حاصل می‌شود؟

- ۱)  $m \geq 1$       ۲)  $m < 2$       ۳)  $1 \leq m < 2$       ۴) هیچ مقدار  $m$

۴۴) حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله  $x^2 + 4x + 3 = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$  کدام است؟

- ۱) -۲      ۲) ۱      ۳) ۲      ۴) ۴

۴۵) به ازای کدام مجموعه مقادیر  $a$ ، نمودار تابع  $f(x) = (a-3)x^2 + ax - 1$ ، از ناحیه اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

- ۱)  $a \leq 2$       ۲)  $0 < a \leq 2$       ۳)  $2 < a < 3$       ۴)  $0 < a < 3$

۴۶) اگر  $|x-2| = 1$  باشد، نمودارهای دو تابع  $f(x) = |x-3| - |x-4|$  و  $g(x) = 2x^2 + x - 17$ ، در چند نقطه مشترک هستند؟

[ ]، نماد جزء صحیح است.

- ۱) ۱      ۲) ۲      ۳) ۳      ۴) فاقد نقطه‌ی مشترک

۴۷) به ازای کدام مقادیر  $a$ ، منحنی  $y = ax^2 - (a+2)x$  از ناحیه دوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

- ۱)  $a \leq 2$       ۲)  $a \leq -2$       ۳)  $a > 0$       ۴)  $-2 \leq a < 0$

۴۸) فرض کنید  $a, b, c \in \{1, 2, \dots, 9\}$  باشد. چند معادله درجه دوم به صورت  $ax^2 + bx - c = 0$  می‌توان تشکیل داد به طوری که مجموع

ریشه‌های هر معادله از حاصل ضرب ریشه‌های همان معادله دو واحد بیشتر باشد؟

- ۱) ۱۴      ۲) ۱۵      ۳) ۱۶      ۴) ۱۸

۴۹) اگر نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + m$ ، محور  $x$ ها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند، طول‌های دو نقطه‌ی تلاقی دیگر آن

با محور  $x$ ها کدام است؟

- ۱)  $\frac{1}{2}$  و -۱      ۲) ۱ و  $-\frac{1}{2}$       ۳)  $\frac{3}{2}$  و -۱      ۴) ۳ و  $-\frac{1}{2}$

۵۰) فرض کنید  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 5x = (x_1 + 1)^3$  و  $\frac{1}{(x_2 + 1)^3}$  ریشه‌های کدام معادله هستند؟

- ۱)  $125x^2 + 16x = 1$       ۲)  $125x^2 = 16x + 1$       ۳)  $125x^2 = 12x + 1$       ۴)  $125x^2 + 12x = 1$

۵۱) فاصله نقطه تلاقی منحنی‌های  $2y = x^2$  و  $x = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3}$  با مبدأ مختصات کدام است؟

- ۱)  $\sqrt{3}$       ۲)  $\sqrt{6}$       ۳)  $2\sqrt{3}$       ۴)  $\sqrt{15}$

۵۲) فرض کنید  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 4x = x_1^3 + \frac{1}{x_1^3}$  و  $x_2^3 + \frac{1}{x_2^3}$  است؟

- ۱)  $4x^2 = 51x + 221$       ۲)  $4x^2 + 51x = 221$       ۳)  $4x^2 = 51x + 197$       ۴)  $4x^2 + 51x = 197$

۵۳) اگر یکی از ریشه‌های معادله  $(ax^2 - x - 5) = 2$  برابر ۲ باشد، مجموع دو ریشه دیگر آن کدام است؟

- ۱) -۲      ۲)  $-\frac{3}{2}$       ۳)  $\frac{1}{2}$       ۴)  $\frac{3}{2}$

۵۴) مجموعه جواب نامعادله  $1 < \frac{x+1}{2x-1} < 3$ ، کدام است؟

- ۱)  $(0, 8, 1, 5)$       ۲)  $(0, 8, 1, 2)$       ۳)  $(1, 2)$       ۴)  $(0, 8, 2)$



۵۵ اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $2x^2 - 3x = 1$  باشند، به ازای کدام مقدار  $k$  مجموعه جواب‌های معادله  $8x^2 + kx - 1 = 0$  به صورت  $\{\alpha^2\beta, \alpha\beta^2\}$  است؟

- ۵ ① ۶ ② ۷ ③ ۹ ④

۵۶ مجموعه جواب نامعادله  $3 < \frac{3x+1}{x-3} < -1$ ، به کدام صورت است؟

- $x < \frac{1}{2}$  ①  $x < 3$  ②  $-\frac{1}{2} < x < 3$  ③  $\frac{1}{2} < x < 3$  ④

۵۷ به ازای کدام مجموعه مقادیر  $m$ ، منحنی به معادله  $y = (m-2)x^2 - 2(m+1)x + 12$ ، محور  $x$ ها را در دو نقطه به طول‌های منفی، قطع می‌کند؟

- $m > 2$  ①  $-1 < m < 2$  ② هر مقدار  $m$  ③ هیچ مقدار  $m$  ④

۵۸ اگر منحنی به معادله  $y = 2x^2 - 4x + m - 3$  محور  $x$ ها را در دو نقطه به طول‌های مثبت قطع کند، آنگاه مجموعه مقادیر  $m$  به کدام صورت است؟

- $m > 3$  ①  $3 < m < 4$  ②  $3 < m < 5$  ③  $4 < m < 5$  ④

۵۹ در معادله  $3x^2 - 17x + m = 0$  یک ریشه از سه برابر ریشه دیگر ۳ واحد بیشتر است. مقدار  $m$  کدام است؟

- ۹ ① ۱۰ ② ۱۲ ③ ۱۵ ④

۶۰ اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x(5x+3) = 2$  باشند، به ازای کدام مقدار  $k$  مجموعه جواب‌های معادله  $4x^2 - kx + 25 = 0$  به صورت  $\left\{\frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2}\right\}$  است؟

- ۲۷ ① ۲۸ ② ۲۹ ③ ۳۱ ④

۶۱ در معادله  $x^2 - 8x + m = 0$  یک ریشه از نصف ریشه دیگر ۵ واحد بیشتر است.  $m$  کدام است؟

- ۱۰ ① ۱۲ ② ۱۴ ③ ۱۵ ④

۶۲ اگر مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله  $5 = x^2 - 7x^2 - 5 = 0$  به ترتیب  $s$  و  $p$  باشند حاصل عبارت  $2p^2 - 3sp + 2s$  کدام است؟

- $59 - 7\sqrt{69}$  ①  $7 + \sqrt{69}$  ②  $50$  ③  $59 + 7\sqrt{69}$  ④

۶۳ فرض کنید مجموعه جواب نامعادله  $\frac{((m^2-1)x^2 - 4mx + 4)(x - 3\sqrt{x} + 2)}{2x - 3} > 0$  به ازای  $x > \frac{3}{2}$  بازه  $[2, 4]$  باشد مقدار  $m$

کدام است؟

- $-2$  ①  $0$  ②  $1$  ③  $2$  ④

۶۴ سهمی  $y = -x^2 + 2x + 1$  خط راست گذرا از نقطه  $(1, 0)$  و با عرض از مبدأ  $-1$  را در نقاط  $A$  و  $B$  قطع می‌کند. اگر  $M$  وسط پاره‌خط  $AB$  باشد، فاصله رأس سهمی از نقطه  $M$ ، کدام مضرب  $\sqrt{26}$  است؟

- $2$  ①  $\sqrt{2}$  ②  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  ③  $\frac{1}{2}$  ④

۶۵ به ازای کدام مقادیر  $m$ ، عبارت  $(m-1)x^2 + 6x + 2m + 1$ ، برای هر مقدار دلخواه  $x$  مثبت است؟

- $m < -2$  ①  $m > 2,5$  ②  $1 < m < 2$  ③  $1 < m < 2,5$  ④

۶۶ به ازای کدام مجموعه مقادیر  $a$ ، هر نقطه از نمودار تابع  $f(x) = (a-1)x^2 + 2\sqrt{2}x + a$ ، بالای محور  $x$ ها است؟

- $a < -1$  ①  $a > 1$  ②  $a > 2$  ③  $1 < a < 2$  ④



۶۷) یازده کیلوگرم رنگ با غلظت ۴۰ درصد با چهار کیلوگرم رنگ از همان نوع با غلظت ۷۰ درصد مخلوط شده‌اند. با تبخیر چند کیلوگرم آن، غلظت محلول به ۵۰ درصد می‌رسد؟

۰٫۸ (۴)

۰٫۶ (۳)

۰٫۵ (۲)

۰٫۴ (۱)

۶۸) فرض کنید  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $x = x^2 - 4$  باشند، ریشه‌های کدام معادله  $x_1^3 + \frac{1}{x_1}$  و  $x_2^3 + \frac{1}{x_2}$  است؟

$4x^2 + 51x = 197$  (۴)

$4x^2 = 51x + 197$  (۳)

$4x^2 + 51x = 221$  (۲)

$4x^2 = 51x + 221$  (۱)

۶۹) مجموع پول علی و اکرم ۱۰۰ تومان است. اگر علی ۱۰ تومان از پولش را به اکرم بدهد، آن‌گاه حاصل ضرب پول‌های باقیمانده آن‌ها ۴۷۵ تومان خواهد شد. پول اولیه اکرم کدام است؟

۹۱ (۴)

۸۵ (۳)

۱۵ (۲)

۹ (۱)



## پاسخنامه تشریحی

شرط وجود دو ریشه مثبت در معادله درجه دوم این است که  $\Delta, S, P > 0$  باشد: (1) (2) (3) (4) (5)

$$\begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow 4(a-2)^2 - 4(14-a) > 0 \Rightarrow 4a^2 - 12a - 40 > 0 \Rightarrow a^2 - 3a - 10 > 0 \Rightarrow (a-5)(a+2) > 0 \Rightarrow a < -2 \text{ یا } a > 5 & (I) \\ S > 0 \Rightarrow S = -\frac{-2(a-2)}{1} > 0 \Rightarrow a > 2 & (II) \\ P > 0 \Rightarrow P = \frac{14-a}{1} > 0 \Rightarrow a < 14 & (III) \end{cases}$$

$$I \cap II \cap III \Rightarrow 5 < a < 14$$

توجه: در معادله درجه دوم هرگاه  $\frac{c}{a} > 0$  باید شرط  $\Delta > 0$  بررسی گردد و اگر  $\frac{c}{a} < 0$  باشد، معادله دو ریشه حقیقی دارد و نیاز به بررسی  $\Delta > 0$  نیست.

2 1 2 3 4

یعنی این معادله‌ی درجه دوم باید دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت داشته باشد.

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{1-m}{m+2} < 0 \Rightarrow m < -2 \text{ یا } m > 1$$

توجه کنید که چون  $\frac{c}{a} < 0$  است، معادله قطعاً دو ریشه حقیقی دارد. پس  $\Delta > 0$  بررسی نمی‌گردد.

فرض کنیم  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $ax^2 - mx - 8 = 0$  و  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $2x^2 - x - 2 = 0$  باشند. (1) (2) (3) (4) (5)

$$x_1 = \alpha^r, \quad x_2 = \beta^r \quad S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{1}{2}, \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -1$$

$$x_1 + x_2 = \alpha^r + \beta^r = (\alpha + \beta)^r - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = S^r - 3PS = \frac{1}{8} + \frac{3}{2} = \frac{13}{8}$$

$$x_1 x_2 = \alpha^r \beta^r = (\alpha\beta)^r = -1$$

$$x^r - \frac{13}{8}x - 1 = 0 \xrightarrow{\times 8} 8x^r - 13x - 8 = 0$$

با مقایسه این معادله و معادله صورت سؤال، مشخص می‌شود که  $m = 13$  است.

1 2 3 4 5

عبارت درجه‌ی دوم  $f(x) = ax^2 + bx + c$  همواره منفی است هرگاه  $a < 0$  و  $\Delta < 0$  باشد.

باید  $\Delta < 0$  و ضریب  $x^2$  منفی باشد.

$$a - 1 < 0 \Rightarrow a < 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (a-1)^2 - 4(a-1) < 0 \Rightarrow (a-1)(a-5) < 0 \Rightarrow 1 < a < 5$$

واضح است که دو بازه بالا هیچ اشتراکی با هم ندارند.

می‌دانیم که در معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  مجموع جذر هر دو ریشه برابر است با: (1) (2) (3) (4) (5)

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}}, \quad S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

پس در این سؤال داریم:

$$2x^r - (m+1)x + \frac{1}{8} = 0 \Rightarrow S = -\frac{b}{a} = \frac{m+1}{2}, \quad P = \frac{c}{a} = \frac{1}{16}$$

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{\frac{m+1}{2} + 2\sqrt{\frac{1}{16}}} = 2 \xrightarrow{\text{به توان دو می‌رسانیم}} \frac{m+1}{2} + \frac{1}{2} = 4 \Rightarrow m = 6$$

با انتخاب تغییر متغیر  $t = x^r - 2x$  خواهیم داشت: (1) (2) (3) (4) (5) (6)

$$t^r - t = 2 \Rightarrow t^r - t - 2 = 0 \xrightarrow{a+c=b} t_1 = -1, t_2 = -\frac{c}{a} = 2$$

$$t_1 = -1 \Rightarrow x^r - 2x = -1 \Rightarrow (x-1)^r = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$t_2 = 2 \Rightarrow x^r - 2x = 2 \Rightarrow x^r - 2x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 + 8 = 12 > 0. \text{ ریشه } 2$$

جمعاً ۳ ریشه متمایز دارد.

1 2 3 4 5 6 7

$$mx - 3\sqrt{x} + m - 2 = 0 \Rightarrow m(\sqrt{x})^r - 3\sqrt{x} + m - 2 = 0 \quad (I)$$

$$\xrightarrow{\sqrt{x}=t} mt^r - 3t + m - 2 = 0$$



اگر این معادله دارای یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی باشد، معادله  $I$  فقط یک ریشه دارد (زیرا امکان ندارد  $\sqrt{x}$  برابر یک مقدار منفی باشد) و شرط آن که یک معادله درجه دوم دارای دو ریشه متمایز مختلف علامت باشد آن است که  $\frac{c}{a} < 0$  باشد.

$$\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{m-2}{m} < 0 \Rightarrow 0 < m < 2$$

دقت کنید اگر معادله  $mt^2 - 3t + m - 2 = 0$  دارای یک ریشه مضاعف مثبت باشد نیز معادله  $I$  فقط یک جواب دارد.

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow 9 - 4m(m-2) = 0 \Rightarrow 4m^2 - 8m - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{2 + \sqrt{13}}{2} \\ m = \frac{2 - \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

$$\frac{-b}{2a} > 0 \Rightarrow \frac{3}{2m} > 0 \Rightarrow m > 0$$

ریشه مضاعف

پس جواب می‌شود:  $0 < m < 2 \cup \left\{ \frac{2 + \sqrt{13}}{2} \right\}$  بنابراین گزینه دوم می‌تواند صحیح باشد.

هر نامعادله را جداگانه حل کرده و از جواب‌ها اشتراک می‌گیریم. **۱ ۲ ۳ ۴ ۸**

$$\frac{2x-3}{x+1} > 1 \Rightarrow \frac{2x-3}{x+1} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{x-4}{x+1} > 0 \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -\infty & -1 & 4 & +\infty \\ & & + & - & + \\ & & \text{ن} & \text{و} & \text{ن} \end{array} \rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 4 \quad (I)$$

$$\frac{2x-3}{x+1} < 3 \Rightarrow \frac{2x-3}{x+1} - 3 < 0 \Rightarrow \frac{-x-6}{x+1} < 0 \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -\infty & -6 & -1 & +\infty \\ & & - & + & - \\ & & \text{و} & \text{ن} & \text{و} \end{array}$$

$$\rightarrow x < -6 \text{ یا } x > -1 \quad (II)$$

از اشتراک  $(I)$  و  $(II)$  به جواب  $x > 4$  یا  $x < -6$  می‌رسیم که همان  $\mathbb{R} - [-6, 4]$  است.

شرط آنکه یک معادله درجه دوم دارای دو ریشه‌ی حقیقی منفی متمایز باشد آن است که  $\Delta > 0$ ,  $S < 0$ , و  $P > 0$  باشد. **۱ ۲ ۳ ۴ ۹**

$$\Delta > 0 \xrightarrow{b^2 - 4ac > 0} 4m^2 - 4(m-6)(-3) > 0 \Rightarrow m^2 + 3m - 18 > 0 \Rightarrow (m+6)(m-3) > 0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m < -6 \text{ یا } m > 3 \quad (I)$$

$$S < 0 \Rightarrow \frac{-b}{a} < 0 \Rightarrow \frac{2m}{m-6} < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0 < m < 6 \quad (II)$$

$$P > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{-3}{m-6} > 0 \Rightarrow m-6 < 0 \Rightarrow m < 6 \quad (III)$$

از اشتراک جواب‌های  $I$  و  $II$  و  $III$  به جواب  $3 < m < 6$  می‌رسیم.

از  $x^2 + x$  را متغیر جدید  $A$  در نظر می‌گیریم. معادله به صورت زیر خواهد شد: **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰**

$$A^2 - 18A + 72 = 0 \Rightarrow (A-12)(A-6) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=12 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -1 \\ A=6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \alpha' + \beta' = -\frac{b}{a} = -1 \end{cases} \Rightarrow \alpha + \beta + \alpha' + \beta' = -2$$

کافی است نمودار تابع درجه‌ی دوم داده شده را با نیمساز ناحیه اول  $(y=x)$  تلاقی دهیم و معادله تلاقی باید ریشه‌ی مضاعف داشته باشد. **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱**

$$\begin{cases} y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6 \\ y = x \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} 2x^2 + (m+1)x + m + 6 = x \Rightarrow \boxed{2x^2 + mx + m + 6 = 0} : \text{ معادله تلاقی}$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow m^2 - 4(2)(m+6) = 0 \Rightarrow m^2 - 8m - 48 = 0$$

$$\Rightarrow (m-12)(m+4) = 0 \Rightarrow m = 12, -4$$

حال باید بررسی کنیم به ازای کدام مقدار  $m$  طول نقطه تماس مثبت است (در ناحیه اول  $x$  مثبت است).

$$m = 12 : 2x^2 + 12x + 18 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x+3)^2 = 0 \Rightarrow x = -3$$
 غ ق

$$m = -4 : 2x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$
 ق ق

روش اول: **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲**

$$\frac{7x-8}{x^2-x-2} > \frac{x}{x-2} \rightarrow \frac{7x-8}{(x-2)(x+1)} - \frac{x}{x-2} > 0$$

$$\rightarrow \frac{7x-8-x^2-x}{(x-2)(x+1)} > 0 \rightarrow \frac{-x^2+6x-8}{(x-2)(x+1)} > 0$$





$$\rightarrow \frac{x^2 - 6x + 8}{(x-2)(x+1)} < 0 \rightarrow \frac{(x-4)(x-2)}{(x-2)(x+1)} < 0$$

$$\rightarrow \frac{x-4}{x+1} < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & -1 & & 2 & & 4 & & +\infty \\ \hline & & + & & - & & + & & - & & + \end{array}$$

توجه کنید  $x=2$  مخرج را صفر می‌کند.

$$\rightarrow -1 < x < 2 \text{ یا } 2 < x < 4 \rightarrow x \in (-1, 2) \cup (2, 4)$$

روش دوم:

به روش عددگذاری حل می‌کنیم.

$$x = 0 \rightarrow \frac{-8}{-2} > 0 : \text{ درست} \rightarrow \text{گزینه دوم حذف می‌شود}$$

$$x = 3 \rightarrow \frac{13}{4} > 3 : \text{ درست} \rightarrow \text{گزینه‌های اول و چهارم حذف می‌شوند}$$

اگر  $x'$  و  $x''$  ریشه های معادله باشند داریم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳**

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} = \frac{m+3}{m}, \quad x'x'' = \frac{c}{a} = \frac{5}{m}$$

$$\text{مسئله فرض: } x'^2 + x''^2 = 6 \Rightarrow (x' + x'')^2 - 2x'x'' = 6 \Rightarrow \left(\frac{m+3}{m}\right)^2 - \frac{10}{m} - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{m^2 + 6m + 9}{m^2} - \frac{10}{m} - 6 = 0 \xrightarrow{\times m^2} m^2 + 6m + 9 - 10m - 6m^2 = 0$$

$$\Rightarrow 5m^2 + 4m - 9 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} m = 1 \xrightarrow{\text{معادله}} x^2 - 4x + 5 = 0 : \Delta = 16 - 20 < 0 \\ m = -\frac{9}{5} \rightarrow \Delta > 0 \text{ است و نیازی به چک کردن گزینه ها نیست} \end{cases}$$

غ ق ق

اگر بهروز بتواند به تنهایی این کار را در  $k$  ساعت انجام دهد، فرهاد همان کار را به تنهایی در  $k+9$  ساعت انجام می‌دهد: آنگاه داریم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴**

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k+9} = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{2k+9}{k \cdot (k+9)} = \frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow k^2 + 9k = 40k + 180 \Rightarrow k^2 - 31k - 180 = (k-36)(k+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 36 \\ k = -5 \end{cases}$$

غ ق ق

اگر در تابع  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ،  $\frac{c}{a} < 0$  باشد. (یعنی  $a$  و  $c$  مختلف علامه باشند)، تابع درجه دوم از ۴ ناحیه می‌گذرد. بنابراین باید  $m+2 < 0$  و نتیجه  $m < -2$  باشد. **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵**

**۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶**

معادله درجه دومی که ریشه‌هایش  $k$  واحد بیشتر از ریشه های معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  باشد، به صورت زیر است:

$$a(x-k)^2 + b(x-k) + c = 0$$

پس کافی است  $x$  را به  $x-1$  تبدیل کنیم.

$$3(x-1)^2 + 7(x-1) + 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x + 3 + 7x - 7 + 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 + x - 3 = 0$$

برای مقایسه با  $x^2 + ax + b = 0$  معادله را بر ۳ تقسیم می‌کنیم.

$$x^2 + \frac{1}{3}x - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = -1$$

شرط آنکه معادله درجه دوم  $x^2 + (m+1)x + \frac{1}{3}m + 2 = 0$  فاقد ریشه حقیقی باشد، آن است که دلتای معادله، منفی باشد. پس داریم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷**

$$\Delta < 0 \Rightarrow b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow (m+1)^2 - 4\left(\frac{1}{3}m+2\right) = (m^2 + 2m + 1) - 4m - 16 = m^2 - 2m - 15 = (m-5)(m+3) < 0$$

$$= m^2 - 2m - 15 = (m-5)(m+3) < 0$$

با توجه به جدول تعیین علامت زیر پاسخ مسئله بازه  $(-3, 5)$  است:

$$\begin{array}{c|ccccccc} m & -\infty & & -3 & & 5 & & +\infty \\ \hline (m-5)(m+3) & & + & & - & & + & \end{array} \Rightarrow -3 < m < 5$$

**۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸**

$$2a + \sqrt{3a+16} = 1 \rightarrow \sqrt{3a+16} = 1 - 2a \xrightarrow{\text{توان } 2} 3a + 16 = 1 + 4a^2 - 4a$$



$$\rightarrow 4a^2 - 7a - 15 = 0 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac = 49 + 240 = 289} \begin{cases} a = \frac{7 + 17}{8} = 3 \text{ (در معادله صدق نمی‌کند)} \\ a = \frac{7 - 17}{8} = -\frac{5}{4} \text{ قیق} \end{cases}$$

پس :  $4a + 9 = 4\left(\frac{-5}{4}\right) + 9 = 4$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۹

شرط آنکه سهمی همواره پایین محور  $x$ ها باشد، آن است که:  $a < 0$  و  $\Delta < 0$

$$a < 0 \Rightarrow 1 - m < 0 \Rightarrow m > 1 \quad (I)$$

$$\Delta < 0 \xrightarrow{b^2 - 4ac < 0} 4(m - 3)^2 - 4(1 - m)(-1) < 0 \xrightarrow{\div 4} (m - 3)^2 + (1 - m) < 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 6m + 9 + 1 - m < 0 \Rightarrow m^2 - 7m + 10 < 0 \Rightarrow (m - 2)(m - 5) < 0 \Rightarrow 2 < m < 5 \quad (II)$$

از اشتراک  $I$  و  $II$  به جواب  $2 < m < 5$  می‌رسیم.

معادله را به صورت  $m^2 + 3x + m^2 - 2 = 0$  مرتب می‌کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۰

$$x' = \frac{1}{x''} \Rightarrow x'x'' = 1 \Rightarrow \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow \frac{m^2 - 2}{m} = 1 \Rightarrow m^2 - 2 = m \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (m - 2)(m + 1) = 0 \Rightarrow m = 2, m = -1$$

معادله  $m = 2 \rightarrow 2x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 - 16 = -7 < 0$  غیر قابل قبول.

معادله  $m = -1 \rightarrow -x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 = 5 > 0$  قابل قبول.

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۱

برای اینکه یک معادله درجه دوم دارای دو ریشه حقیقی متمایز باشد باید  $\Delta > 0$  باشد بنابراین:

$$\Delta \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow 36 - 4(2m - 1)(m - 2) > 0 \Rightarrow 9 - (2m^2 - 4m - m + 2) > 0$$

$$\Rightarrow 2m^2 - 5m - 7 = (m + 1)(2m - 7) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 < m < 3,5$$

در ضمن ضریب  $x^2$  نباید صفر باشد یعنی  $m \neq \frac{1}{2}$  است.

$$m \in (-1, 3,5) - \frac{1}{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۲

اگر ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  را  $\alpha$  و  $\beta$  بنامیم در این صورت  $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}}$  است.  $(\alpha, \beta > 0)$

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{m+1}{2} \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{16} \end{cases} \rightarrow \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 2 \rightarrow \sqrt{S + 2\sqrt{P}} = 2 \xrightarrow{\text{توان ۲}} S + 2\sqrt{P} = 4$$

$$\rightarrow \frac{m+1}{2} + 2\left(\frac{1}{4}\right) = 4 \rightarrow \frac{m+1}{2} + \frac{1}{2} = 4 \rightarrow \frac{m+2}{2} = 4 \rightarrow m+2 = 8 \rightarrow m = 6$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۳

شرط آنکه یک معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی متمایز مثبت باشد آن است که  $\Delta > 0$  و  $\frac{c}{a} > 0$  و  $-\frac{b}{a} > 0$  باشد.

$$\Delta > 0 \rightarrow b^2 - 4ac > 0 \rightarrow 4(a - 2)^2 - 4(14 - a) > 0 \rightarrow (a - 2)^2 - (14 - a) > 0$$

$$\rightarrow a^2 + 4 - 4a - 14 + a > 0 \rightarrow a^2 - 3a - 10 > 0 \rightarrow (a - 5)(a + 2) > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} a < -2 \text{ یا } a > 5 : I$$

$$\frac{c}{a} > 0 \rightarrow 14 - a > 0 \rightarrow a < 14 : II$$

$$-\frac{b}{a} > 0 \rightarrow 2(a - 2) > 0 \rightarrow a - 2 > 0 \rightarrow a > 2 : III$$

از اشتراک  $I$  و  $II$  و  $III$  به جواب  $5 < a < 14$  می‌رسیم.

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۴

معادله دو ریشه منفی دارد بنابراین  $\Delta > 0$  ,  $\frac{c}{a} > 0$  ,  $S < 0$  است.

$$f(x) = ax^2 + (a + 3)x - 1$$



$$\begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow (a+3)^2 - 4(-1)(a) = a^2 + 10a + 9 > 0 \Rightarrow a > -1 \text{ یا } a < -9 \\ \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{-1}{a} > 0 \Rightarrow a < 0 \\ S < 0 \Rightarrow -\frac{a+3}{a} < 0 \xrightarrow{a < 0} a+3 < 0 \Rightarrow a < -3 \end{cases}$$

اشتراک جواب‌های سه شرط:  $a < -9$ 

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۵

روش اول: هر نامعادله را جداگانه حل کرده و سپس از جواب‌ها اشتراک می‌گیریم.

$$\frac{2x-1}{x+1} > -1 \rightarrow \frac{2x-1}{x+1} + \frac{1}{1} > 0 \rightarrow \frac{2x-1+x+1}{x+1} > 0 \rightarrow \frac{3x}{x+1} > 0$$

$$\rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -\infty & -1 & 0 & +\infty \\ \hline & + & - & 0 & + \end{array} \rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 0 \quad (I)$$

$$\frac{2x-1}{x+1} < 3 \rightarrow \frac{2x-1}{x+1} - \frac{3}{1} < 0 \rightarrow \frac{2x-1-3x-3}{x+1} < 0 \rightarrow \frac{-x-4}{x+1} > 0$$

$$\rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -\infty & -4 & -1 & +\infty \\ \hline & - & 0 & + & - \end{array} \rightarrow x < -4 \text{ یا } x > -1 \quad (II)$$

اشتراک II, I

$$\rightarrow \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array}$$

$$\rightarrow x < -4 \text{ یا } x > 0 \rightarrow x \in \mathbb{R} - [-4, 0]$$

روش دوم: تست را به روش عددگذاری حل می‌کنیم.

گزینه‌های اول و دوم حذف می‌شوند.  $\rightarrow$  درست:  $x = -5 \xrightarrow{\text{نامعادله}} -1 < \frac{11}{4} < 3$

گزینه چهارم حذف می‌شود.  $\rightarrow$  نادرست:  $x = 0 \xrightarrow{\text{نامعادله}} -1 < -1 < 3$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۶

روش اول: ریشه‌های معادله‌ی جدید از معکوس ریشه‌های معادله‌ی قبلی یک واحد بیشتر است.

$$2x^2 - 3x - 4 = 0 \xrightarrow{\text{یک واحد به ریشه‌ها اضافه شده}} -4x^2 - 3x + 2 = 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها معکوس شده}} -4(x-1)^2 - 3(x-1) + 2 = 0$$

$$-4x^2 + 8x - 4 - 3x + 3 + 2 = 0 \Rightarrow -4x^2 + 5x + 1 = 0 \Rightarrow 4x^2 - 5x - 1 = 0$$

روش دوم:

ریشه‌های معادله قدیم را  $\alpha$  و  $\beta$  و ریشه‌های معادله جدید را  $\alpha'$  و  $\beta'$  می‌نامیم

$$\alpha + \beta = \frac{3}{2}, \alpha\beta = -2, \alpha' = \frac{1}{\alpha} + 1, \beta' = \frac{1}{\beta} + 1$$

$$S' = \alpha' + \beta' = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 2 = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + 2 = \frac{5}{4}$$

$$P' = \alpha'\beta' = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 1 = -\frac{1}{4}$$

$$x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow 4x^2 - 5x - 1 = 0$$

اگر ریشه‌های معادله‌ی  $2x^2 - x - 2 = 0$  را  $\alpha$  و  $\beta$  در نظر بگیریم در این صورت ریشه‌های معادله‌ی  $\lambda x^2 - mx - \lambda = 0$  برابر  $\alpha^3$  و  $\beta^3$  هستند. ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۷

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{1}{2}, P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -1$$

$$\text{داریم: } \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = \frac{1}{8} + \frac{3}{2} = \frac{13}{8}$$

$$\alpha^3 \cdot \beta^3 = (\alpha \cdot \beta)^3 = (-1)^3 = -1$$

$$\text{معادله‌ی درجه‌ی دوم: } x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow x^2 - \frac{13}{8}x - 1 = 0 \rightarrow 8x^2 - 13x - 8 = 0$$

$$\lambda x^2 - mx - \lambda = 0 \xrightarrow{\text{مقایسه با } \lambda x^2 - mx - \lambda = 0} m = 13$$

اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های حقیقی معادله درجه‌ی دوم داده شده باشند طبق فرض داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۸



$$\alpha + \beta = \frac{1}{\alpha\beta} \rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{1}{\frac{c}{a}} \rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{a}{c} \rightarrow a^2 = -bc \rightarrow a^2 + bc = 0 \rightarrow 9 + (2m-1)(2-m) = 0 \rightarrow 9 + 4m - 2m^2 - 2 + m = 0$$

$$\rightarrow 2m^2 - 5m - 7 = 0 \xrightarrow{a+c=b} m = -1, m = -\frac{c}{a} = \frac{7}{2}$$

معادله  $m = -1 \rightarrow 3x^2 - 3x + 3 = 0 \rightarrow \Delta = 9 - 36 < 0$  ریشه حقیقی ندارد.

$$m = \frac{7}{2} \xrightarrow{\text{معادله}} 3x^2 + 6x - \frac{3}{2} = 0 \rightarrow \Delta = 36 + 18 > 0$$
 قابل قبول.

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۹

$$(1, 0) \in f \Rightarrow 0 = a + b + c \quad (1)$$

$$(0, -6) \in f \Rightarrow -6 = c \quad (2)$$

$$(-2, -6) \in f \Rightarrow -6 = 4a - 2b + c \quad (3)$$

حال از دستگاه شامل معادلات (1) و (2) و (3) مقادیر  $a, b, c$  را مشخص می‌کنیم:

$$(1), (2), (3) \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ c=-6 \\ 4a-2b+c=-6 \end{cases} \xrightarrow{c=-6} \begin{cases} a+b+(-6)=0 \\ 4a-2b+(-6)=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=6 \\ 4a-2b=0 \end{cases} \Rightarrow a=2, b=4$$

$$f(x) = 2x^2 + 4x - 6 \Rightarrow f(-1) = 2(-1)^2 + 4(-1) - 6 = -8$$

شرط آنکه یک تابع درجه‌ی دوم همواره مثبت باشد (بالای محور  $x$  باشد) آن است که  $a > 0$  (ضریب  $x^2$ ) و  $\Delta < 0$  باشد. ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۰

$$a > 0 \rightarrow 1 - a > 0 \rightarrow a < 1 : I$$

$$\Delta < 0 \rightarrow b^2 - 4ac < 0 \rightarrow 24 - 4(1-a)(-6) < 0 \rightarrow 24 + 4a - 4a^2 < 0$$

$$\xrightarrow{\div(-4)} a^2 - a - 6 > 0 \rightarrow (a-3)(a+2) > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} a < -2 \text{ یا } a > 3 : II$$

از اشتراک  $I$  و  $II$  به جواب  $a < -2$  می‌رسیم.

شرط آنکه یک معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز مثبت باشد آن است که  $\Delta > 0$  و  $S > 0$  و  $P > 0$  باشد. ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۱

$$S > 0 \rightarrow \frac{-b}{a} > 0 \rightarrow -(m-2) > 0 \rightarrow m-2 < 0 \rightarrow m < 2$$

بنابراین گزینه‌های سوم و چهارم حذف می‌شوند.

$$P > 0 \rightarrow \frac{c}{a} > 0 \rightarrow m+1 > 0 \rightarrow m > -1 \rightarrow \text{گزینه‌ی دوم حذف می‌شود}$$

بنابراین بدون اینکه شرط  $\Delta > 0$  را اعمال کنیم گزینه‌ی اول انتخاب می‌شود.

برای این منظور باید  $\Delta > 0, S > 0, P > 0$  باشد. ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۲

$$\Delta > 0 \rightarrow b^2 - 4ac > 0 \rightarrow m^2 - 8(m+6) > 0 \rightarrow m^2 - 8m - 48 > 0 \rightarrow (m-12)(m+4) > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m < -4 \text{ یا } m > 12 \quad (I)$$

$$S > 0 \rightarrow \frac{-b}{a} > 0 \rightarrow -\frac{m}{2} > 0 \rightarrow -m > 0 \rightarrow m < 0 \quad (II)$$

$$P > 0 \rightarrow \frac{c}{a} > 0 \rightarrow \frac{m+6}{2} > 0 \rightarrow m+6 > 0 \rightarrow m > -6 \quad (III)$$

از اشتراک  $I, II, III$  به جواب  $-6 < m < -4$  می‌رسیم.

توجه: تابع درجه‌ی دوم  $y = Ax^2 + Bx + C$  همواره بالای محور  $x$  قرار دارد. هرگاه  $\begin{cases} A > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$  باشد. ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۳

$$\begin{cases} 1 - a > 0 \rightarrow a < 1 \quad (1) \\ \Delta < 0 \rightarrow 24 + 4a(1-a) < 0 \rightarrow 4a^2 - 4a - 24 > 0 \rightarrow a^2 - a - 6 > 0 \\ \rightarrow (a-3)(a+2) > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} a < -2 \text{ یا } a > 3 \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \cap (2) = a < -2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۴

معادله‌ی حاصل از تلاقی دو منحنی ریشه ندارد، پس  $\Delta$ ی آن باید منفی باشد:

$$(2x+1)(x+8) = mx \Rightarrow 2x^2 + 16x + x + 8 = mx \Rightarrow 2x^2 + (17-m)x + 8 = 0$$

$$\Delta = (17-m)^2 - 64 < 0 \Rightarrow |m-17| < 8 \Rightarrow -8 < m-17 < 8 \Rightarrow 9 < m < 25$$

کافی است که مختصات سه نقطه داده شده را در تابع صدق دهیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۵

$$A \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{صدق}} 5 = 0 + 0 + c \rightarrow c = 5$$



$$\left. \begin{array}{l} B \left| \begin{array}{l} -2 \\ 5 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{صنق}} 5 = 4a - 2b + 5 \rightarrow 4a - 2b = 0 \\ C \left| \begin{array}{l} 1 \\ 11 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{صنق}} 11 = a + b + 5 \rightarrow a + b = 6 \end{array} \right\} \rightarrow a = 2, b = 4$$

بنابراین ضابطه تابع به صورت  $f(x) = 2x^2 + 4x + 5$  است که نقطه  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{17}{2}\right)$  روی این تابع قرار دارد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۶

در تابع درجه دوم  $y = ax^2 + bx + c$  رأس سهمی از رابطه  $x_S = -\frac{b}{2a}$  به دست می آید و این طول را در تابع قرار می دهیم عرض آن به دست می آید.

$$-\frac{b}{2a} = -1 \rightarrow 2a = b$$

$$f(-1) = 9 \rightarrow a - b + c = 9 \xrightarrow{b=2a} -a + c = 9$$

$$\left| \begin{array}{l} 3 \\ 1 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{صنق}} 1 = 9a + 3b + c \xrightarrow{b=2a} 15a + c = 1 \rightarrow \begin{cases} -a + c = 9 \\ 15a + c = 1 \end{cases} \rightarrow 16a = -8 \rightarrow a = -\frac{1}{2}, b = -1, c = \frac{17}{2}$$

بنابراین ضابطه تابع به صورت  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{17}{2}$  است که نقطه  $\left(\frac{5}{-9}, \dots\right)$  روی این تابع قرار دارد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۷

$$x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x - 4 = 0$$

چون جمع ضرایب این معادله صفر است پس حتماً یک ریشه ی معادله  $x = 1$  است و داریم:

$$(x-1)(x^2 + ax + 4) = 0$$

بنابراین عبارت درجه سوم به صورت  $(x-1)(x^2 + ax + 4) = 0$  تجزیه می شود یک ریشه ی این معادله  $x = 1$  است پس معادله ی درجه ی دوم در پرانتز دوم باید دارای ۲ ریشه ی متمایز مثبت باشد (چون سوال گفته معادله دارای ۳ ریشه ی حقیقی متمایز مثبت باشد)

$$\Delta > 0 \rightarrow b^2 - 4ac > 0 \rightarrow a^2 - 16 > 0 \rightarrow a^2 > 16 \rightarrow a > 4 \text{ یا } a < -4 \quad (I)$$

$$S > 0 \rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \rightarrow -a > 0 \rightarrow a < 0 \quad (II)$$

$$P > 0 \rightarrow \frac{c}{a} > 0 \rightarrow 4 > 0 \text{ همواره برقرار است } (III)$$

از اشتراک  $I, II, III$  به جواب  $a < -4$  می رسیم.

توجه نمایید که به ازای  $a = -5$  معادله دارای دو ریشه خواهد بود.

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۸ روش اول:

می دانیم برای نوشتن معادله درجه دومی که ریشه هایش عکس ریشه های معادله درجه دوم داده شده ای باشد باید جای  $a$  و  $c$  را عوض کنیم و برای نوشتن معادله درجه دومی که ریشه هایش  $k$  واحد کمتر از ریشه های معادله درجه دوم داده شده ای باشد، باید  $x$  را به  $x+k$  تبدیل کنیم.

$$2x^2 - 3x - 1 = 0 \xrightarrow[\text{جای } a, c \text{ عوض}]{\text{معکوس}} -x^2 - 3x + 2 = 0 \xrightarrow[\text{یک واحد کمتر}]{x \rightarrow x+1} -(x+1)^2 - 3(x+1) + 2 = 0$$

$$\Rightarrow -x^2 - 2x - 1 - 3x - 3 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 5x + 2 = 0$$

می دانیم که  $x = vt$  و از آنجا  $t = \frac{x}{v}$  است. اگر سرعت جریان آب را  $v$  در نظر بگیریم سرعت قایق در جهت حرکت آب  $100 + v$  و در خلاف جهت حرکت آب  $100 - v$  است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۹

$$\begin{cases} t_1 = \frac{1200}{100+v} \\ t_2 = \frac{1200}{100-v} \end{cases} \Rightarrow t_2 - t_1 = 5 \Rightarrow \frac{1200}{100-v} - \frac{1200}{100+v} = 5$$

$$\Rightarrow \frac{1200(100+v) - 1200(100-v)}{(100-v)(100+v)} = 5 \Rightarrow \frac{120000 + 1200v - 120000 + 1200v}{10000 - v^2} = 5$$

$$\Rightarrow 2400v = 5(10000 - v^2) \Rightarrow 480v = 10000 - v^2$$

$$\Rightarrow v^2 + 480v - 10000 = 0 \Rightarrow (v-20)(v+500) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v = 20 \text{ قی} \\ v = -500 \text{ غقی} \end{cases}$$

البته اصلاً نیازی به این همه محاسبات نمی باشد و می توانید گزینه ها را چک کنید و به راحتی به جواب  $v = 20$  برسید.

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۰

می دانیم که  $x = vt$  و از آنجا  $t = \frac{x}{v}$  است. اگر سرعت پرواز پرنده را  $v$  در نظر بگیریم، در این صورت سرعت رفت  $v + 5$  و سرعت برگشت  $v - 5$  است.



$$\begin{cases} \text{رفت } t_1 = \frac{1}{v+5} \\ \text{مسیر برگشت } t_2 = \frac{1}{v-5} \end{cases} \Rightarrow t_1 + t_2 = 9 \Rightarrow \frac{1}{v+5} + \frac{1}{v-5} = \frac{9}{60}$$

$$\Rightarrow \frac{v-5+v+5}{(v+5)(v-5)} = \frac{2v}{v^2-25} = \frac{3}{20} \Rightarrow 3v^2 - 75 = 40v$$

$$\Rightarrow 3v^2 - 40v - 75 = 0 \xrightarrow{\Delta=b^2-4ac=1600+900=2500} \begin{cases} v_1 = \frac{40+50}{6} = 15 \text{ قق} \\ v_2 = \frac{40-50}{6} = -\frac{5}{3} \text{ غق} \end{cases}$$

البته اصلاً نیازی به این همه محاسبات نمی‌باشد و می‌توانید گزینه‌ها را چک کنید و به راحتی به جواب  $v = 15$  برسید.

ابتدا با قرار دادن  $x = 2$  در معادله داده شده،  $a$  را می‌یابیم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۴۱**

$$x(ax^2 - x - 5) = 2 \xrightarrow{x=2} 2(4a - 2 - 5) = 2 \Rightarrow 4a - 7 = 1 \Rightarrow a = 2$$

پس معادله به صورت  $2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$  می‌شود. حال با تقسیم معادله بر  $x - 2$  آن را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(2x^2 + 3x + 1) = 0$$

می‌دانیم مجموع دو ریشه دیگر که ریشه‌های معادله درجه دوم داخل پرانتز می‌باشند، برابر با  $-\frac{3}{2} = -\frac{b}{a}$  می‌شود.

برای حل معادلات گنگ طرفین را به توان مناسب می‌رسانیم تا رادیکال‌ها از بین بروند. **۱ ۲ ۳ ۴ ۴۲**

$$3a + \sqrt{2a^2 + 4a} = 2 \Rightarrow \sqrt{2a^2 + 4a} = 2 - 3a \xrightarrow{\text{توان ۲}} 2a^2 + 4a = 4 + 9a^2 - 12a \rightarrow 7a^2 - 16a + 4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 256 - 112 = 144 \rightarrow \begin{cases} a = \frac{16+12}{14} = 2 \text{ (در معادله صدق نمی‌کند)} \\ a = \frac{16-12}{14} = \frac{2}{7} \text{ قق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a+1}{a} = \frac{\frac{2}{7}+1}{\frac{2}{7}} = \frac{\frac{9}{7}}{\frac{2}{7}} = \frac{9}{2} = 4,5$$

**۱ ۲ ۳ ۴ ۴۳**

برای حل معادله  $x - 2\sqrt{x} + m - 1 = 0$  از روش تغییر متغیر بهره می‌گیریم. اگر به جای عبارت  $\sqrt{x}$ ،  $t$  قرار دهیم، داریم:

$$(\sqrt{x})^2 - 2(\sqrt{x}) + m - 1 = 0 \xrightarrow{\sqrt{x}=t} t^2 - 2t + m - 1 = 0$$

برای این که معادله  $t^2 - 2t + m - 1 = 0$  دو جواب متمایز برای  $x$  داشته باشد، باید در معادله  $t^2 - 2t + m - 1 = 0$  یکی از حالات زیر اتفاق بیفتد:

۱- دارای دو ریشه  $t$  حقیقی متمایز مثبت باشد، برای این منظور داریم:

$$\text{شرط وجود دو ریشه ی مثبت} \Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow 4 - 4(m-1) > 0 \Rightarrow 8 - 4m > 0 \Rightarrow m < 2 \\ \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{m-1}{1} > 0 \Rightarrow m-1 > 0 \Rightarrow m > 1 \\ -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow -\frac{-2}{1} > 0 \Rightarrow 2 > 0 \text{ برقرار است} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 1 < m < 2$$

۲- دارای یک ریشه  $t$  صفر و یک ریشه  $t$  مثبت باشد. برای این منظور باید  $c = 0$  و  $-\frac{b}{a} > 0$  باشد. داریم:

$$m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$$

حال از اجتماع مقادیر به دست آمده در (۱) و (۲)، حدود  $m$  برابر است با:  $1 \leq m < 2$

با استفاده از تغییر متغیر  $x^2 + 4x + 5 = t$  **۱ ۲ ۳ ۴ ۴۴**

$$x^2 + 4x + 5 - 2 = \sqrt{x^2 + 4x + 5} \Rightarrow t - 2 = \sqrt{t} \quad (I)$$

چون عبارت سمت راست همواره مثبت است باید عبارت سمت چپ هم همواره مثبت باشد.

$$t - 2 \geq 0 \Rightarrow t \geq 2$$

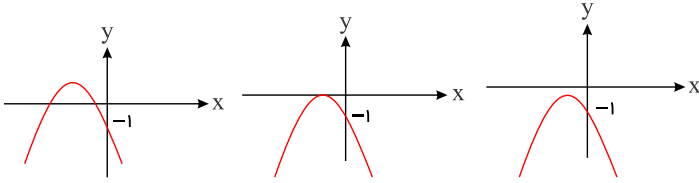
$$(t - 2)^2 = (\sqrt{t})^2 \Rightarrow t^2 - 4t + 4 = t \Rightarrow t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 1 \rightarrow \text{با توجه به اینکه } t \geq 2 \text{ است پس غیر قابل قبول است} \\ t = \frac{c}{a} = 4 \rightarrow x^2 + 4x + 5 = 4 \rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \rightarrow \Delta = 16 - 4 = 12 > 0 \end{cases}$$



حاصلضرب ریشه‌ها:  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 1$

در سه حالت زیر نمودار سهمی داده شده در ناحیه اول نمی‌گذرد: **۱ ۲ ۳ ۴ ۴۵**



$x^2$  ضریب  $< 0 \Rightarrow a - 3 < 0 \Rightarrow a < 3$  (۱)

$\Delta = a^2 + 4a - 12 > 0 \Rightarrow (a - 2)(a + 6) > 0 \Rightarrow a > 2$  یا  $a < -6$  (۲)

$P = \alpha\beta > 0 \Rightarrow P = \frac{-1}{a - 3} > 0 \Rightarrow a - 3 < 0 \Rightarrow a < 3$  (۱)

$S = \alpha + \beta < 0 \Rightarrow S = \frac{-a}{a - 3} < 0 \Rightarrow a > 3$  یا  $a < 0$  (۳)

اگر دو ریشه داشته باشد (شکل ۱) باید هر دو منفی باشد که داریم:

که اشتراک (۱) و (۲) و (۳) برابر  $a < -6$  می‌شود.

حال اگر سهمی ریشه مضاعف داشته باشد (شکل ۲) یا ریشه حقیقی نداشته باشد (شکل ۳)، داریم:

$\Delta = (a - 2)(a + 6) \leq 0 \Rightarrow -6 \leq a \leq 2$  (۴)

که اشتراک (۱) و (۴) برابر  $-6 \leq a \leq 2$  است و اجتماع دو بازه جواب برابر  $a \leq 2$  می‌باشد.

$[x] = n, n \in \mathbb{Z} \rightarrow n \leq x < n + 1$  می‌دانیم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۴۶**

$[x - 2] = 1 \rightarrow [x] - 2 = 1 \rightarrow [x] = 3 \rightarrow 3 \leq x < 4$

در این بازه، قدر مطلق اول مثبت و قدر مطلق دوم منفی است.

$f(x) = x - 3 - (-x + 4) = 2x - 7$

اکنون باید توابع  $f(x)$  و  $g(x)$  را تلاقی دهیم.

$2x^2 + x - 17 = 2x - 7 \rightarrow 2x^2 - x - 10 = 0 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac} \Delta = 1 + 80 = 81$

$\rightarrow \begin{cases} x = \frac{1+9}{4} = \frac{5}{2} \text{ غنق} \\ x = \frac{1-9}{4} = -2 \text{ غنق} \end{cases}$

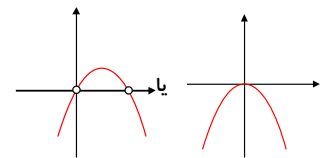
هیچ کدام از دو  $x$  بدست آمده در بازه‌ی  $3 \leq x < 4$  نمی‌باشند. بنابراین دو تابع فاقد نقطه‌ی مشترک در بازه‌ی داده شده هستند.

برای اینکه سهمی از ناحیه‌ی دوم عبور نکند، دهانه آن باید رو به پائین رسم شود یعنی  $a < 0$  باشد و برای این تابع داریم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۴۷**

$y = ax^2 - (a + 2)x = x(ax - a - 2) = 0$

$\Rightarrow \boxed{x = 0}, \boxed{x = \frac{a + 2}{a}}$

چون یکی از ریشه‌ها  $x = 0$  است پس باید از مبدأ عبور کند و برای اینکه از ناحیه‌ی دوم عبور نکند ریشه بعدی باید نامنفی باشد، یعنی شکل سهمی به یکی از این صورت‌ها باشد



دقت کنید که به ازای  $a = 0$  نیز خط  $y = -2x$  از ربع دوم می‌گذرد.

$x = \frac{a + 2}{a} \geq 0 \xrightarrow{a < 0} a + 2 \leq 0 \Rightarrow a \leq -2$

**۱ ۲ ۳ ۴ ۴۸**

$S = P + 2 \Rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{-c}{a} + 2 \xrightarrow{\times a} -b = -c + 2a \Rightarrow c - b = 2a$

دقت کنید صورت سؤال  $ax^2 + bx - c = 0$  داده شده است و با فرض مثبت بودن  $c$  معادله همواره جواب دارد ( $\Delta > 0$ ) در ضمن  $P = \frac{-c}{a}$  می‌شود.

$if a = 1 \Rightarrow c$  باید ۲ واحد بزرگتر از  $b$  باشد  $\Rightarrow \begin{cases} c = 3, 4, \dots, 9 \\ b = 1, 2, \dots, 7 \end{cases}$  حالت ۷

$if a = 2 \Rightarrow c$  باید ۴ واحد بزرگتر از  $b$  باشد.  $\Rightarrow \begin{cases} c = 5, 6, 7, 8, 9 \\ b = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases}$  حالت ۵



۳ حالت  $c = 7, 8, 9$   $\Rightarrow c$  باید ۶ واحد بزرگتر از  $b$  باشد.  $\Rightarrow \begin{cases} c = 7, 8, 9 \\ b = 1, 2, 3 \end{cases}$

۱ حالت  $c = 9$   $\Rightarrow c$  باید ۸ واحد بزرگتر از  $b$  باشد.  $\Rightarrow \begin{cases} c = 9 \\ b = 1 \end{cases}$

در مجموع ۱۶ حالت یا ۱۶ معادله خواهیم داشت.

نقطه به طول  $x = 2$  ریشه تابع  $f$  است، بنابراین  $f(2) = 0$  می‌باشد. داریم: (۱) (۲) (۳) (۴) (۴۹)

$$f(2) = 2(2)^3 - 5(2)^2 - (2) + m = 0 \Rightarrow m = 6$$

بنابراین ضابطه تابع  $f$  به صورت  $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$  است. با توجه به این که  $x = 2$  یک ریشه تابع  $f$  است، بنابراین می‌توان گفت که چند جمله‌ای  $f(x)$  بر  $(x - 2)$  بخشپذیر است، با تقسیم  $f(x)$  بر  $(x - 2)$ ، سایر عامل‌ها (فاکتورها) را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = (x - 2)(2x^2 - x - 3) = (x - 2)(2x - 3)(x + 1)$$

بنابراین دو عامل دیگر چند جمله‌ای  $f(x)$ ، عبارتند از  $(x + 1)$  و  $(2x - 3)$ ، لذا ریشه‌های تابع  $f$  را به دست می‌آوریم. داریم:

$$f(x) = (x - 2)(2x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ یا } x = \frac{3}{2} \text{ یا } x = -1$$

بنابراین دو ریشه‌ی دیگر تابع  $f$ ،  $x = -1$ ،  $x = \frac{3}{2}$  است.

توجه کنیم که در سطح دبیرستان روشی برای حل معادله‌ی درجه‌ی ۳ مطرح نشده است و چنانچه دانش آموز با معادله‌ی درجه‌ی ۳ روبرو شود پیشنهاد می‌کنیم که یکی از اعداد ۱، ۰، -۱ را در معادله چک کند. احتمالاً یکی از این اعداد یکی از ریشه‌های معادله است.

معادله به صورت  $x^2 + x = 5$  است که در آن  $S = x_1 + x_2 = -1$  و  $P = x_1 x_2$  است. از طرفی  $x(x + 1) = 5$  است. (۱) (۲) (۳) (۴) (۵۰)

$$\Rightarrow \frac{1}{x_1 + 1} = \frac{x_1}{5}, \frac{1}{x_2 + 1} = \frac{x_2}{5}$$

پس معادله‌ای پیدا می‌کنیم که ریشه‌هایش  $\frac{x_1^3}{125}$  و  $\frac{x_2^3}{125}$  باشد:

$$\begin{cases} S' = \frac{1}{125}(x_1^3 + x_2^3) = \frac{1}{125}(S^3 - 3SP) = \frac{-16}{125} \\ P' = \frac{1}{5^6}(x_1 x_2)^3 = \frac{1}{5^6}P^3 = -\frac{1}{125} \end{cases}$$

پس معادله موردنظر به صورت  $x^3 + \frac{16}{125}x - 1 = 0$  است:

$$\Rightarrow 125x^3 + 16x = 1$$

کافی است دو معادله را در یک دستگاه حل کنیم تا محل تلاقی به دست آید. دقت کنید  $y \geq 3$  است. (۱) (۲) (۳) (۴) (۵۱)

$$\begin{cases} 2y = x^2 \\ x = \sqrt{y + 3} - \sqrt{y - 3} \end{cases} \xrightarrow{\text{توان } 2} x^2 = y + 3 + y - 3 - 2\sqrt{y^2 - 9} \xrightarrow{x^2 = 2y} \sqrt{y^2 - 9} = 0 \Rightarrow y = \pm 3 \xrightarrow{y \geq 3} y = 3 \Rightarrow x = \sqrt{6}$$

$\Rightarrow$  محل تلاقی:  $A(\sqrt{6}, 3)$

نکته: فاصله هر نقطه با فرم  $A(x, y)$  تا مبدأ مختصات برابر است با:  $\sqrt{x^2 + y^2}$ .

$$\xrightarrow{\text{فاصله}} d = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + 3^2} = \sqrt{15}$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۵۲)

$$x^2 - x - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 1 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -4 \end{cases}$$

$$S_{جدید} = x_1^3 + \frac{1}{x_1} + x_2^3 + \frac{1}{x_2} = x_1^3 + x_2^3 + \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \underbrace{(x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)}_{S^3 - 3PS} + \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = 1 + 12 + \frac{1}{-4} = \frac{51}{4}$$

$$P_{جدید} = (x_1^3 + \frac{1}{x_1})(x_2^3 + \frac{1}{x_2}) = x_1^3 x_2^3 + x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{x_1 x_2} = (x_1 x_2)^3 + \underbrace{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}_{S^2 - 2P} + \frac{1}{x_1 x_2} = -64 + 1 + 8 - \frac{1}{4} = -\frac{221}{4}$$

$$\text{پس } x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow x^2 - \frac{51}{4}x - \frac{221}{4} = 0 \rightarrow 4x^2 - 51x - 221 = 0$$

توجه: هرگاه  $x = k$  یکی از ریشه‌های معادله  $P(x) = 0$  باشد، آنگاه تابع  $P(x)$  بر  $(x - k)$  بخش‌پذیر است. (۱) (۲) (۳) (۴) (۵۳)

ابتدا با قرار دادن  $x = 2$  در معادله داده شده،  $a$  را می‌یابیم:

$$x(ax^2 - x - 5) = 2 \xrightarrow{x=2} 2(4a - 2 - 5) = 2 \Rightarrow 4a - 7 = 1 \Rightarrow a = 2$$

پس معادله به صورت  $2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$  می‌شود. حال با تقسیم معادله بر  $x - 2$  آن را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(2x^2 + 3x + 1) = 0$$





می‌دانیم مجموع دو ریشه دیگر که ریشه‌های معادله درجه دوم داخل پراتنز می‌باشند، برابر با  $-\frac{3}{2}$  می‌شود.

روش اول: هر نامعادله را جداگانه حل کرده و سپس از جواب‌ها اشتراک می‌گیریم. (۵۴) ۱ ۲ ۳ ۴

$$\frac{x+1}{2x-1} > 1 \rightarrow \frac{x+1}{2x-1} = 1 > 0 \rightarrow \frac{x+1-2x+1}{2x-1} > 0 \rightarrow \frac{-x+2}{2x-1} > 0 \rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -\infty & \frac{1}{2} & 2 & +\infty \\ \hline & - & 0 & + & - \end{array} \rightarrow \frac{1}{2} < x < 2 \quad (I)$$

$$\frac{x+1}{2x-1} < 3 \rightarrow \frac{x+1}{2x-1} - 3 < 0 \rightarrow \frac{x+1-6x+3}{2x-1} < 0 \rightarrow \frac{-5x+4}{2x-1} < 0 \rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -\infty & \frac{1}{2} & \frac{4}{5} & +\infty \\ \hline & - & 0 & + & - \end{array} \rightarrow x < \frac{1}{2} \text{ یا } x > \frac{4}{5} \quad (II)$$

از اشتراک I و II به جواب  $\frac{4}{5} < x < 2$  می‌رسیم ( $0,8 < x < 2$ )

روش دوم: تست را به روش عددگذاری حل می‌کنیم

گزینه‌های اول و دوم حذف می‌شوند  $\rightarrow$  درست:  $1 < \frac{2,5}{2} < 3$  نامعادله

گزینه سوم حذف می‌شود  $\rightarrow$  درست:  $1 < 2 < 3$  نامعادله

(۵۵) ۱ ۲ ۳ ۴

اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  باشند، داریم:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$$

با مرتب کردن معادله داده شده به معادله  $2x^2 - 3x - 1 = 0$  می‌رسیم. بنابراین:

$$S = \alpha + \beta = \frac{3}{2}, \quad P = \alpha \cdot \beta = -\frac{1}{2}$$

هم چنین اگر  $S$  و  $P$  به ترتیب حاصل جمع و حاصل ضرب ریشه‌ها باشند، معادله مورد نظر را می‌توان به صورت  $x^2 - Sx + P = 0$  نوشت.

ریشه‌های معادله  $0 = \alpha^2 \beta + \alpha \beta^2 + kx - 1 = 0$  هستند، داریم:

$$S' = \alpha^2 \beta + \alpha \beta^2 = \alpha \beta (\alpha + \beta) = P \cdot S = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}$$

$$P' = \alpha^2 \beta \times \alpha \beta^2 = \alpha^3 \beta^3 = (\alpha \beta)^3 = P^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$$

بنابراین معادله متناظر به صورت  $0 = x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8} = 0$  می‌باشد. با ضرب طرفین معادله در عدد ۸، این معادله به صورت  $8x^2 + 6x - 1 = 0$  درمی‌آید و لذا  $k = 6$  است.

روش اول: (۵۶) ۱ ۲ ۳ ۴

نامعادله داده شده را به دو نامعادله تبدیل کرده و از جواب‌های آن‌ها اشتراک می‌گیریم.

$$\frac{3x+1}{x-3} > -1 \rightarrow \frac{3x+1}{x-3} + 1 > 0 \rightarrow \frac{3x+1+x-3}{x-3} > 0 \rightarrow \frac{4x-2}{x-3} > 0$$

$$\rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -\infty & \frac{1}{2} & 3 & +\infty \\ \hline & - & 0 & + & - \end{array} \rightarrow x < \frac{1}{2} \text{ یا } x > 3 \quad (I)$$

$$\frac{3x+1}{x-3} < 3 \rightarrow \frac{3x+1}{x-3} - 3 < 0 \rightarrow \frac{3x+1-3x+9}{x-3} < 0 \rightarrow \frac{10}{x-3} < 0 \rightarrow x-3 < 0 \rightarrow x < 3 \quad (II)$$

از اشتراک I و II به جواب  $x < \frac{1}{2}$  می‌رسیم.

روش دوم:

تست را به روش عددگذاری حل می‌کنیم.

نادرست است (گزینه‌های دوم و سوم و چهارم حذف می‌شوند).  $-1 < \frac{4}{-2} < 3$  نامعادله

(۵۷) ۱ ۲ ۳ ۴

سه‌می موردنظر محور  $x$ ها را در دو نقطه به طول منفی قطع می‌کند، یعنی معادله زیر دو ریشه منفی دارد. پس باید سه شرط  $\Delta > 0$  (زیرا دو ریشه دارد) و  $\frac{c}{a} > 0$  (ضرب دو عدد منفی، مثبت

است) و  $-\frac{b}{a} < 0$  (جمع دو عدد منفی، منفی است) را لحاظ کنیم.



$$(m-2)x^2 - 2(m+1)x + 12 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow (-2(m+1))^2 - 4(m-2)(12) > 0$$

$$\Rightarrow 4(m^2 + 2m + 1 - 12m + 24) > 0 \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر 4}} (m^2 - 10m + 25) > 0 \Rightarrow (m-5)^2 > 0$$

$$\Rightarrow m \in \mathbb{R} - \{5\}$$

$$\frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{12}{m-2} > 0 \Rightarrow m-2 > 0 \Rightarrow m > 2 \quad (1)$$

$$-\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow \frac{2(m+1)}{m-2} < 0 \xrightarrow{m-2 > 0} m+1 < 0 \Rightarrow m < -1 \quad (2)$$

$$1 \cap 2 \rightarrow \emptyset$$

مجموعه‌های (1) و (2) هیچ اشتراکی ندارد.

58 باید معادله  $2x^2 - 4x + m - 3 = 0$  دارای دو ریشه حقیقی مثبت باشد. 1 2 3 4 5

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4(m-3) = 40 - 4m$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow 40 - 4m > 0 \Rightarrow m < 10$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ضرب دو ریشه مثبت است} &\Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow m-3 > 0 \Rightarrow m > 3 \\ \text{جمع دو ریشه مثبت است} &\Rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow 2 > 0 \end{aligned} \right\}$$

1 2 3 4 5

اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  باشند، آنگاه:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$$

در اینگونه تست‌ها ابتدا با توجه به صورت سوال رابطه‌ای بین  $x_1$  و  $x_2$  می‌نویسیم و سپس یک رابطه‌ی دیگر بین  $x_1$  و  $x_2$  از خود معادله می‌یابیم:

$$x_1 = 3x_2 + 3 \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 3x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = \frac{17}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + 3x_2 = -3 \\ x_1 + x_2 = \frac{17}{3} \end{cases} \Rightarrow x_1 = 5$$
  
$$4x_2 = \frac{8}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{2}{3}$$

$x_1 = 5$  را در معادله جای گذاری می‌کنیم:

$$f(5) = 3(5)^2 - 17(5) + m = 75 - 85 + m = 0 \Rightarrow m = 10$$

59 اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  باشند، آنگاه: 1 2 3 4 5

$$\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}, \quad \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

می‌توانیم معادله داده شده را حل کنیم و ریشه‌های آن را به سادگی به دست آوریم:

$$5x^2 + 3x = 2 \Rightarrow 5x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow a + c = b \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha = -1 \\ x_2 = \beta = \frac{-c}{a} = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\alpha^2} = 1 \\ \frac{1}{\beta^2} = \frac{25}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = 1 + \frac{25}{4} = \frac{29}{4} \\ P = \frac{1}{\alpha^2} \times \frac{1}{\beta^2} = \frac{25}{4} \end{cases} \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

$$x^2 - \frac{29}{4}x + \frac{25}{4} = 0 \xrightarrow{\times 4} 4x^2 - 29x + 25 = 0 \Rightarrow k = 29$$

60 اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  باشند، آنگاه: 1 2 3 4 5

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$$

با فرض این که  $x'$  و  $x''$  ریشه‌های معادله باشند، رابطه  $\frac{x''}{x'} = \frac{5}{2}$  بین آنها برقرار است.

$$x^2 - 8x + m = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = x' + x'' = 8 \Rightarrow \frac{3x''}{2} + 5 = 8 \Rightarrow \frac{3x''}{2} = 3 \Rightarrow x'' = 2 \Rightarrow x' = \frac{2}{2} + 5 = 6 \\ P = x'x'' = m \Rightarrow 6 \times 2 = m \Rightarrow m = 12 \end{cases}$$

1 2 3 4 5

برای حل معادله دو مجذور از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم:

$$x^2 = t \Rightarrow t^2 - 7t - 5 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = \sqrt{69} \Rightarrow t = \frac{7 \pm \sqrt{69}}{2} \xrightarrow{t=x^2 > 0} x^2 = \frac{7 + \sqrt{69}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{\frac{7 + \sqrt{69}}{2}} \\ x_2 = \sqrt{\frac{7 + \sqrt{69}}{2}} \end{cases}$$

چون دو ریشه قرینه یکدیگرند پس جمع آنها صفر است و برای حاصلضرب داریم:



$$P = x_1 \cdot x_2 = -\frac{7 + \sqrt{69}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s = 0 \\ p = -\frac{7 + \sqrt{69}}{2} \end{cases} \Rightarrow p^2 = \frac{49 + 69 + 14\sqrt{69}}{4} = \frac{59 + 7\sqrt{69}}{2} \Rightarrow 2p^2 = 59 + 7\sqrt{69}$$

توجه: چون  $S = 0$  است بنابراین  $2P^2 - 3(0)P + 2(0) = 2P^2$

البته مجموعه نامعادله باید بازه  $(2, 4)$  باشد نه  $[2, 4]$  از طرفی مخرج کسر به ازای  $x > \frac{3}{2}$  همواره مثبت است. (۱) (۲) (۳) (۴) (۶۳)

$$x - 3\sqrt{x} + 2 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

در بازه  $(1, 4)$  عبارت فوق، منفی است و برای آن که جواب نامعادله  $(2, 4)$  باشد در این بازه پراتنز اول نیز باید منفی باشد. در ضمن  $x = 2$  ریشه این عبارت است.

$$x = 2 \Rightarrow 4m^2 - 4 - 8m + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$$

$$\text{if } m = 0 \Rightarrow (-x^2 + 4)$$

این عبارت در بازه  $(2, 4)$  همواره منفی است و قابل قبول است.

$$\text{if } m = 2 \Rightarrow (3x^2 - 8x + 4)$$

این عبارت در بازه  $(2, 4)$  مثبت است و قابل قبول نیست. بنابراین فقط  $m = 0$  مورد قبول است.

(۱) (۲) (۳) (۴) (۶۴)

$$y = -x^2 + 2x + 1 \rightarrow S \left| \begin{array}{c} -b \\ 2a \\ \frac{4ac - b^2}{4a} \end{array} \right. = S \left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right.$$

معادله خط گذرنده از نقطه  $\left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right.$  و عرض از مبدأ  $-1$  به صورت  $y = x - 1$  است.

$$\text{تلاقی: } x - 1 = -x^2 + 2x + 1 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0 \rightarrow x = 2, x = -1 \rightarrow x_M = \frac{2 - 1}{2} = \frac{1}{2} \xrightarrow{y = x - 1} y_M = -\frac{1}{2}$$

$$S \left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right., M \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{array} \right. \rightarrow SM = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{26}{4}} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

بنابراین این اندازه  $\frac{1}{2}$  برابر  $\sqrt{26}$  است.

برای این که عبارت درجه دوم  $ax^2 + bx + c$  همواره مثبت باشد، باید  $a > 0$  و  $\Delta < 0$  بنابراین داریم: (۱) (۲) (۳) (۴) (۶۵)

$$\begin{cases} m - 1 > 0 \Rightarrow m > 1 \quad (I) \\ 8 < 0 \Rightarrow 6^2 - 4(m - 1)(2m + 1) = -4(2m^2 - m - 10) < 0 \\ \Rightarrow 2m^2 - m - 10 = (2m - 5)(m + 2) > 0 \Rightarrow m < -2 \text{ or } m > \frac{5}{2} \quad (II) \end{cases}$$

از اشتراک روابط  $(I)$  و  $(II)$ ،  $m > \frac{5}{2}$  یا  $m > 2,5$  به دست می آید.

می دانیم تابع درجه دوم  $y = ax^2 + bx + c$  همواره بالای محور  $x$  قرار دارد، اگر  $a > 0$  و  $\Delta < 0$  باشد داریم: (۱) (۲) (۳) (۴) (۶۶)

$$\begin{cases} a - 1 > 0 \Rightarrow a > 1 \quad (I) \\ \Delta < 0 \Rightarrow (2\sqrt{2})^2 - 4(a - 1)a < 0 \Rightarrow 8 - 4a^2 + 4a < 0 \Rightarrow a^2 - a - 2 = (a - 2)(a + 1) > 0 \\ \Rightarrow a > 2 \text{ یا } a < -1 \quad (II) \end{cases} \\ (I) \cap (II) \Rightarrow a > 2$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۶۷)

$$\begin{cases} 11 \times \frac{40}{100} = 4,4 \\ 4 \times \frac{70}{100} = 2,8 \end{cases} \rightarrow 4,4 + 2,8 = 7,2 \text{ جرم کل رنگها}$$

با فرض اینکه با تبخیر شدن  $x$  کیلوگرم رنگ، غلظت رنگ به  $50\%$  می رسد، داریم:

$$\frac{7,2}{15 - x} = \frac{50}{100} \Rightarrow 15 - x = 14,4 \Rightarrow x = 0,6 \text{ کیلوگرم}$$

در معادله اولیه  $x^2 - x - 4 = 0$  و  $S = 1$  و  $P = -4$  (۱) (۲) (۳) (۴) (۶۸)

$$S' = x_1^2 + \frac{1}{x_2} + x_2^2 + \frac{1}{x_1} = (x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = (S^2 + 3PS) + \frac{S}{P} \xrightarrow{S=1, P=-4} S' = 1 + 12 - \frac{1}{4} = \frac{51}{4}$$

نکته: اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه های یک معادله درجه ۲ باشند داریم:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P \\ x_1^2 + x_2^2 = S - 3PS \end{cases}$$



$$P' = (x_1^3 + \frac{1}{x_2})(x_2^3 + \frac{1}{x_1}) = (x_1 x_2)^3 + x_1^3 + x_2^3 = P^3 + S^3 - 2P + \frac{1}{P} = -64 + 1 + 8 - \frac{1}{4} = -\frac{221}{4}$$

$$x^2 - \frac{51}{4} - \frac{221}{4} = 0 \xrightarrow{\times 4} 4x^2 - 51x - 221 = 0$$

پول علی را  $x$  و پول اکرم را  $y$  فرض می‌کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۶۹

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ (x - 10)(y + 10) = 475 = 5 \times 95 \rightarrow x = 15, y = 85 \end{cases}$$

بنابراین پول اکرم ۸۵ تومان بوده است.

البته می‌توانید از رابطه اول  $y = 100 - x$  را حساب کرده و در رابطه پایین قرار دهید که محاسبات وقت‌گیر و دشوار می‌شود.

# پاسخنامه کاپری

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴

۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴
۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴

۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴
۴۱	۱	۲	۳	۴
۴۲	۱	۲	۳	۴
۴۳	۱	۲	۳	۴
۴۴	۱	۲	۳	۴
۴۵	۱	۲	۳	۴
۴۶	۱	۲	۳	۴
۴۷	۱	۲	۳	۴
۴۸	۱	۲	۳	۴
۴۹	۱	۲	۳	۴
۵۰	۱	۲	۳	۴
۵۱	۱	۲	۳	۴
۵۲	۱	۲	۳	۴
۵۳	۱	۲	۳	۴
۵۴	۱	۲	۳	۴

۵۵	۱	۲	۳	۴
۵۶	۱	۲	۳	۴
۵۷	۱	۲	۳	۴
۵۸	۱	۲	۳	۴
۵۹	۱	۲	۳	۴
۶۰	۱	۲	۳	۴
۶۱	۱	۲	۳	۴
۶۲	۱	۲	۳	۴
۶۳	۱	۲	۳	۴
۶۴	۱	۲	۳	۴
۶۵	۱	۲	۳	۴
۶۶	۱	۲	۳	۴
۶۷	۱	۲	۳	۴
۶۸	۱	۲	۳	۴
۶۹	۱	۲	۳	۴



معین کرمی

# سوالات سراسری هفته دوم قدرمطلق، حیز ذریع، لگاریتم

۱ در بازه  $(a, b)$ ، نمودار تابع  $y = -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$ ، بالاتر از نمودار تابع  $y = 2x + |x|$  است. طول نقطه‌ی وسط این بازه کدام است؟

- ۱)  $-2$       ۲)  $-1.5$       ۳)  $-1$       ۴)  $-0.5$

۲ مجموعه‌ی جواب نامعادله  $|x^2 + 1| > |x - 2| + 2x + 1$ ، به صورت کدام بازه‌ها است؟

- ۱)  $(-2, 1)$       ۲)  $(-1, 1)$       ۳)  $(-1, 2)$       ۴)  $(1, 2)$

۳ مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی  $1 < \left| \frac{2-x}{2x-3} \right|$ ، به صورت کدام بازه است؟ (با تغییر)

- ۱)  $(1, \frac{3}{2})$       ۲)  $(1, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, \frac{5}{3})$       ۳)  $(1, \frac{5}{3})$       ۴)  $(\frac{5}{3}, 2)$

۴ مجموع جواب‌های معادله  $|2x - 1| + |x + 2| = 3$ ، کدام است؟

- ۱)  $-\frac{2}{3}$       ۲)  $\frac{2}{3}$       ۳)  $1$       ۴)  $\frac{4}{3}$

۵ اگر  $f(x) = x^2 + x$  و  $g(x) = \sqrt{4x + 1}$  باشند، مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودار تابع  $gof$  و خط به معادله‌ی  $y = 3$  کدام است؟

- ۱)  $3$       ۲)  $4$       ۳)  $4.5$       ۴)  $6$

۶ مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودارهای دو تابع  $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$  و  $y = \frac{1}{2}x + 2$ ، کدام است؟

- ۱)  $8$       ۲)  $9$       ۳)  $10$       ۴)  $12$

۷ مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودارهای دو تابع  $y = x + |x|$  و  $y = 2 - |x|$ ، کدام است؟

- ۱)  $2$       ۲)  $\frac{7}{3}$       ۳)  $\frac{8}{3}$       ۴)  $3$

۸ مجموعه جواب نامعادله‌ی  $|x - 2| < x^2 - 2x$ ، به صورت کدام بازه است؟

- ۱)  $(-1, 1)$       ۲)  $(-1, 2)$       ۳)  $(0, 2)$       ۴)  $(1, 2)$

۹ در بازه  $(a, b)$ ، نمودار تابع با ضابطه  $y = |2x^2 - 4|$  در زیر خط  $y = 2x$  واقع است. بیش‌ترین مقدار  $b - a$ ، کدام است؟

- ۱)  $1$       ۲)  $2$       ۳)  $3$       ۴)  $4$

۱۰ مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودارهای دو تابع  $y = |x| - x$  و  $y = 2 - \frac{3}{2}x$ ، کدام است؟

- ۱)  $\frac{8}{3}$       ۲)  $4$       ۳)  $\frac{16}{3}$       ۴)  $6$

۱۱ مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودار تابع  $f(x) = |2x - 1|$  و محور  $x$  ها و دو خط  $x = -1$ ،  $x = 1$ ، کدام است؟

- ۱)  $3$       ۲)  $2$       ۳)  $\frac{5}{2}$       ۴)  $\frac{3}{2}$

۱۲ مجموعه جواب نامعادله‌ی  $3 \leq \frac{1}{2}x + |x|$  به کدام صورت است؟

- ۱)  $[-4, 2]$       ۲)  $[-6, 8]$       ۳)  $[-6, 2]$       ۴)  $[-2, 6]$



۱۳) در بازه  $(a, b)$ ، نمودار تابع  $y = (x - 1)^2$  بالاتر از نمودار تابع  $y = 4x^2$  است. بیشترین مقدار  $b - a$ ، کدام است؟

- ۱) ۱      ۲)  $\frac{3}{2}$       ۳) ۲      ۴)  $\frac{5}{2}$

۱۴) اگر رابطه‌ی  $|x + y + z| \leq |x| + |y| + |z|$  به رابطه‌ی تساوی تبدیل شود الزاماً سه عدد غیر صفر  $x, y, z$  چگونه اند؟

- ۱) مساوی هم      ۲) هم علامت      ۳) مثبت      ۴) منفی

۱۵) مجموعه جواب دستگاه نامعادلات  $\begin{cases} |x| < 2 \\ (2x - 1) < |x| \end{cases}$  کدام است؟

- ۱)  $\{x : -1 < x < 1\}$       ۲)  $\{x : -2 < x < 2\}$       ۳)  $\{x : 0 < x < 2\}$       ۴)  $\{x : -2 < x < 1\}$

۱۶) نمودارهای دو تابع  $y = |x - 2| + |x + 1|$  و  $y = x + 7$  در دو نقطه  $A$  و  $B$  متقاطع هستند. اندازه پاره خط  $AB$ ، کدام است؟

- ۱)  $8\sqrt{2}$       ۲) ۱۲      ۳) ۱۳      ۴)  $10\sqrt{2}$

۱۷) تابع  $f(x) = \frac{1}{[\cos \pi x]}$  در کدام بازه قابل تعریف است؟  $(\cdot, \cdot)$ ، نماد جزء صحیح است.

- ۱)  $[0, 1]$       ۲)  $(0, 1)$       ۳)  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$       ۴)  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

۱۸) اگر جزء صحیح  $(x^2 + x)$  برابر  $-1$  باشد، آن گاه  $[x^2]$  کدام است؟

- ۱)  $-1$       ۲)  $0$       ۳)  $1$       ۴)  $2$

۱۹) برای هر عدد طبیعی  $n > 2$ ، حاصل  $\left[ \sqrt{4n^2 - 3n + 1} \right] - 2 \left[ \sqrt{n^2 - 2n} \right]$  کدام است؟  $(\cdot, \cdot)$ ، نماد جزء صحیح است.

- ۱)  $1$       ۲)  $2$       ۳)  $3$       ۴)  $4$

۲۰) اگر  $x^2 + x < 0$  باشد، حاصل  $[x^4] + [x^3] + [x^2] + [x]$  کدام است؟

- ۱)  $-2$       ۲)  $-1$       ۳)  $0$       ۴)  $1$

۲۱) نمودار تابع  $y = x - [x]$  ;  $x \in [-2, 3)$  از  $n$  پاره خط مساوی به اندازه‌ی  $l$  تشکیل شده است. دو تایی مرتب  $(n, l)$  کدام است؟

- ۱)  $(4, 1)$       ۲)  $(4, \sqrt{2})$       ۳)  $(5, 1)$       ۴)  $(5, \sqrt{2})$

۲۲) نمودار تابع  $y = 2\left[\frac{x}{2}\right] + 1$  ;  $x \in [-2, 6)$  از چند پاره خط مساوی هم، تشکیل شده است؟  $(\cdot, \cdot)$ ، نماد جزء صحیح است.

- ۱)  $3$       ۲)  $4$       ۳)  $5$       ۴)  $6$

۲۳) نمودار تابع  $y = [x^2]$  روی بازه‌ی  $x \in (-2, 2)$  از چند پاره خط تشکیل شده است؟  $(\cdot, \cdot)$ ، نماد جزء صحیح است.

- ۱)  $4$       ۲)  $5$       ۳)  $6$       ۴)  $7$

۲۴) اگر  $f(x) = [x]$ ، مجموعه‌ی مقادیر  $f(x - f(x))$  کدام است؟  $(\cdot, \cdot)$ ، نماد جزء صحیح است.

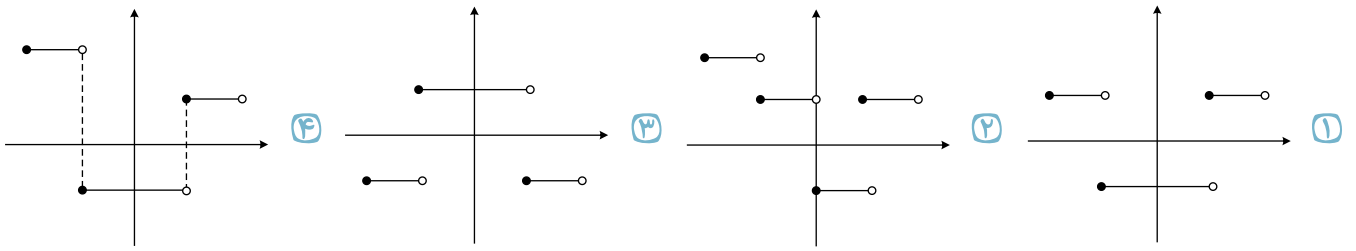
- ۱)  $\{0\}$       ۲)  $\{1\}$       ۳)  $\{0, 1\}$       ۴)  $\{-1, 0, 1\}$

۲۵) در تابع با ضابطه  $f(x) = x^2 - 2[x]$ ، مقدار  $f(-\frac{1}{2}f(\sqrt{3}))$  کدام است؟  $(\cdot, \cdot)$ ، نماد جزء صحیح است.

- ۱)  $1,75$       ۲)  $2,25$       ۳)  $2,5$       ۴)  $2,75$



۲۶) نمودار تابع  $y = 2|3x| - 1$  به ازای  $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$  کدام است؟



۲۷) اگر نمودار تابع  $f(x) = a(b)^x - 1$  از دو نقطه  $A(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  و  $B(1, 11)$  بگذرد،  $f(-1)$  کدام است؟

- ۱)  $-\frac{3}{4}$       ۲)  $-\frac{1}{2}$       ۳)  $-\frac{1}{4}$       ۴)  $\frac{3}{4}$

۲۸) اگر  $\log 5 = 3k$  باشد،  $\log \sqrt[3]{1,6}$  کدام است؟

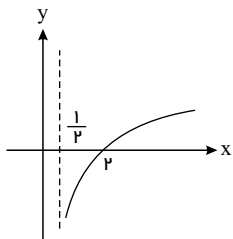
- ۱)  $1 - 4k$       ۲)  $2 - 5k$       ۳)  $1 - 2k$       ۴)  $1 - k$

۲۹) از معادله‌ی لگاریتمی  $\log_3(2x^2 + 1) - \log_3(x + 2) = 1$ ، مقدار لگاریتم  $(2x - 1)$  در پایه‌ی ۸، کدام است؟

- ۱)  $-\frac{2}{3}$       ۲)  $-\frac{1}{2}$       ۳)  $\frac{1}{2}$       ۴)  $\frac{2}{3}$

۳۰) شکل زیر، نمودار تابع  $y = -1 + \log_b(2^{x+a})$  است. این منحنی خط  $y = 1$  را با کدام طول، قطع می‌کند؟

- ۱) ۴      ۲) ۵      ۳) ۶      ۴) ۷



۳۱) از تساوی  $\log_x(x^2 + 4) = 1 + \log_x 5$ ، مقدار لگاریتم  $x$  در پایه‌ی ۲ کدام است؟

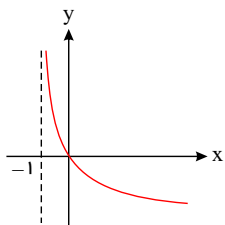
- ۱) -1      ۲)  $\frac{1}{2}$       ۳)  $\frac{3}{2}$       ۴) ۲

۳۲) اگر  $\log 2 = k$  باشد، حاصل  $\log(6 - 2\sqrt{5}) + 2\log(1 + \sqrt{5})$  کدام است؟

- ۱)  $2 + 4k$       ۲)  $4k$       ۳)  $1 + k$       ۴)  $2k$

۳۳) شکل روبه‌رو، نمودار تابع  $y = \log_p U(x)$  است.  $U(x)$  کدام است؟

- ۱)  $x + 1$       ۲)  $(x + 1)^{-1}$       ۳)  $x - 1$       ۴)  $1 - x$



۳۴) از دو معادله‌ی  $\log_3 x + \log_3 y = 2$  و  $x^2 + y^2 = 46$ ، لگاریتم  $(x + y)$  در پایه‌ی ۴ کدام است؟

- ۱) ۱,۵      ۲) ۲      ۳) ۳      ۴) ۲,۵

۳۵) اگر  $2^A = \left(\frac{4\sqrt{32}}{2\sqrt{8}}\right)^2$ ، عدد  $A$  کدام است؟

- ۱) ۸      ۲) ۱۶      ۳)  $8\sqrt{2}$       ۴)  $12\sqrt{2}$





۳۶ اگر  $2^{-x} < 0,0000001$  و  $\log 2 = 0,301$ ، کوچک‌ترین عدد  $x$  با دو رقم اعشاری کدام است؟

- ۱) ۱۹,۸۹      ۲) ۱۹,۹۱      ۳) ۱۹,۹۴      ۴) ۱۹,۹۷

۳۷ فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی دو منحنی به معادلات  $y = 2^x$  و  $y = (\sqrt{2})^{x+1} + 4$ ، از نقطه‌ی  $A(0, 4)$  کدام است؟

- ۱) ۲      ۲) ۳      ۳) ۴      ۴) ۵

۳۸ از دو معادله‌ی دوجمله‌ی  $3^{2x+y} = 9 \times 3^{x-y}$  و  $\log(x+2y) = 1 + \log y$ ، مقدار  $x$  کدام است؟

- ۱) ۱,۲      ۲) ۱,۴      ۳) ۱,۵      ۴) ۱,۶

۳۹ نمودار یک تابع به صورت  $f(x) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{Ax+B}$ ، نمودار تابع  $g(x) = x^2 - x$  را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۲ قطع می‌کند.  $f(3)$  کدام است؟

- ۱) ۳      ۲) ۴      ۳) ۵      ۴) ۶

۴۰ از دو معادله‌ی  $\log_x^2 = 1 + \log_y^{y+1}$ ،  $x^2 - y^2 = 32$ ، مقدار لگاریتم  $(x+y)$  در پایه‌ی ۴، کدام است؟

- ۱)  $\frac{1}{2}$       ۲)  $\frac{3}{4}$       ۳)  $\frac{3}{2}$       ۴) ۲

۴۱ اگر  $\log 3 + \log \sqrt[4]{3} = \log(81)^k$ ، آنگاه لگاریتم  $\frac{5}{k}$  در پایه‌ی ۲ کدام است؟

- ۱) ۲      ۲) ۳      ۳) ۴      ۴) ۵

۴۲ اگر  $\log_b^a = \frac{3}{2}$ ، آنگاه  $\log_{\sqrt{b}}^{ab^2}$  کدام است؟

- ۱) ۴      ۲) ۵      ۳) ۶      ۴) ۷

۴۳ اگر  $\log \frac{2}{x} + \log(x+1) = 1$  باشد لگاریتم عدد  $x$  در پایه‌ی ۸ کدام است؟

- ۱)  $-\frac{2}{3}$       ۲)  $-\frac{1}{3}$       ۳)  $\frac{1}{3}$       ۴)  $\frac{2}{3}$

۴۴ از معادلات  $2^x \times 8^y = 4$  و  $\log x = \log 2 + \log y$  مقدار  $x$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{2}{5}$       ۲)  $\frac{3}{4}$       ۳)  $\frac{3}{5}$       ۴)  $\frac{4}{5}$

۴۵ اگر لگاریتم  $a$  در پایه‌ی  $\sqrt{3}$  برابر  $\frac{4}{3}$  باشد آنگاه لگاریتم  $(a^3 + 7)$  در پایه‌ی ۸ کدام است؟

- ۱)  $\frac{2}{3}$       ۲)  $\frac{4}{3}$       ۳)  $\sqrt{2}$       ۴)  $\frac{3}{2}$

۴۶ اگر  $4^a = 2\sqrt{2}$  باشد، لگاریتم  $(4a+1)$  در پایه‌ی ۴ کدام است؟

- ۱) ۱      ۲)  $\sqrt{2}$       ۳) ۲      ۴)  $\frac{3}{2}$

۴۷ از دو معادله‌ی  $3^x + 2^x = 72$  و  $\log(x+1) + \log(2y+x^2) = 2$ ، مقدار  $y$  کدام است؟

- ۱) ۶      ۲) ۷      ۳) ۸      ۴) ۹

۴۸ اگر  $3^{x^2-2} = 81^x$  باشد،  $\log_9^{(x-2)}$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{1}{4}$       ۲)  $\frac{1}{3}$       ۳)  $\frac{1}{2}$       ۴)  $\frac{2}{4}$



۴۹) از معادله‌ی لگاریتمی  $\log(x^2 - x - 6) - \log(x - 3) = \log(2x - 5)$  ، مقدار لگاریتم  $\sqrt[3]{x+1}$  در پایه‌ی ۴، کدام است؟

- ۱)  $\frac{1}{3}$       ۲)  $\frac{1}{2}$       ۳)  $\frac{2}{3}$       ۴) ۱

۵۰) از دو معادله‌ی دو مجهولی  $2^{x-y} \times 4^{x+y} = 1$  و  $\log y = 2 \log 3 + \log x$  ، مقدار  $y$  کدام است؟

- ۱) ۱      ۲) ۲      ۳) ۳      ۴) ۴

۵۱) اگر  $\sqrt[4]{2} = 4^x$  و  $1 + \log \sqrt{x+1} = \log y$  باشد مقدار  $y$  کدام است؟

- ۱) ۷٫۵      ۲) ۱۲٫۵      ۳) ۱۵      ۴) ۲۵

۵۲) نمودارهای دو تابع  $y = (\frac{\sqrt{3}}{3})^{2x}$  و  $y = 3^x + \frac{8}{3}$  در نقطه‌ی  $A$  متقاطع‌اند. فاصله‌ی نقطه‌ی  $A$  از نقطه‌ی  $(-1, 1)$  کدام است؟

- ۱) ۱      ۲)  $\sqrt{2}$       ۳) ۲      ۴)  $\sqrt{5}$

۵۳) نمودارهای دو تابع  $f(x) = 4^x$  و  $g(x) = (\frac{1}{2})^{2x} + \frac{3}{2}$  در نقطه‌ی  $A$  متقاطع‌اند. فاصله‌ی نقطه‌ی  $A$  تا نقطه‌ی  $(-\frac{1}{2}, 1)$ ، کدام است؟

- ۱) ۱      ۲)  $\sqrt{2}$       ۳) ۲      ۴)  $\sqrt{5}$

۵۴) اگر  $\log_4^{12} = \alpha$  باشد، عدد  $4^{\alpha-2}$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{9}{2}$       ۲) ۶      ۳) ۹      ۴) ۱۸

۵۵) اگر  $(\frac{125}{8})^{x^2} = (4^{\circ})^{2x-1}$  باشد،  $\log_8^{(9x+1)}$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{2}{3}$       ۲)  $\frac{3}{4}$       ۳)  $\frac{4}{3}$       ۴)  $\frac{3}{2}$

۵۶) نمودار یک تابع به صورت  $f(x) = 3^{Ax+B}$  ، نمودار تابع  $y = x^2$  را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع می‌کند. عرض نقطه‌ی تلاقی تابع  $f$  با

محور  $y$ ها، کدام است؟

- ۱)  $\frac{1}{27}$       ۲)  $\frac{1}{9}$       ۳)  $\frac{1}{3}$       ۴)  $\sqrt{3}$

۵۷) از معادله‌ی لگاریتمی  $2 \log x = 1 + \log(x + \frac{12}{5})$  ، مقدار  $\log_5^{(2x+1)}$  کدام است؟

- ۱) -۱      ۲)  $\frac{1}{2}$       ۳) ۱      ۴) ۲

۵۸) اگر  $a$  و  $b$  ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - 10x + 1 = 0$  باشند، حاصل  $\log a + \log b - \log(a+b)$  کدام است؟

- ۱) -۲      ۲) -۱      ۳) ۰      ۴) ۱

۵۹) از تساوی  $\log_x^{3x+8} = 2 - \log_x^{x-6}$  ، مقدار لگاریتم  $x$  در پایه‌ی ۴، کدام است؟

- ۱)  $\frac{1}{2}$       ۲)  $\frac{2}{3}$       ۳)  $\frac{3}{2}$       ۴) ۲

۶۰) از دو معادله‌ی  $\log(y+2) = 1$  و  $\log(y-x) + \log(4x+y) = 2$  ، مقدار  $x$  کدام است؟

- ۱) ۱      ۲) ۲      ۳) ۳      ۴) ۴

۶۱) تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = a + \log_p^{(3x+b)^2}$  ، از دو نقطه‌ی  $(5, 11)$  و  $(21, 15)$  می‌گذرد،  $a$  کدام است؟

- ۱) ۱      ۲) ۲      ۳) ۳      ۴) ۴



۶۲) از معادله  $\log(2x - 1) + \log(x + 3) = \log 30 - \log 2$  مقدار  $\log_a x$  کدام است؟

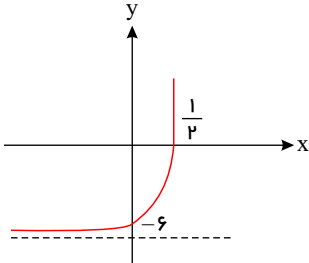
- ①  $-\frac{1}{2}$       ②  $\frac{1}{3}$       ③  $\frac{2}{3}$       ④  $\frac{3}{2}$

۶۳) تابع با ضابطه  $f(x) = a + \log_p^{(bx-4)}$ ، از دو نقطه  $(2, 6)$  و  $(12, 10)$  می‌گذرد.  $a$  کدام است؟

- ① ۳      ② ۴      ③ ۵      ④ ۶

۶۴) شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^{ax+b}$  است.  $f(2)$  کدام است؟

- ① ۲۳۴      ② ۱۰۸      ③ ۷۲      ④ ۱۸



۶۵) مقدار ۲۴ گرم از عنصری موجود است. اگر عنصر مورد نظر در هر مدت زمان ۳۰ روزه،  $\frac{1}{10}$  جرم باقی‌مانده را از دست بدهد، پس از چند روز

۸ گرم از آن عنصر، باقی‌می‌ماند؟ ( $\log 3 = 0.48$ )

- ① ۳۶۰      ② ۳۰۰      ③ ۲۷۰      ④ ۲۴۰

۶۶) از تساوی  $\log(2x - 1) + \frac{1}{p} \log x^2 = \log 3$ ، مقدار لگاریتم  $\frac{x}{3}$  در مبنای ۴ کدام است؟

- ①  $-\frac{1}{2}$       ②  $-\frac{1}{4}$       ③  $\frac{1}{4}$       ④  $\frac{1}{3}$

۶۷) نمودار یک تابع به صورت  $f(x) = 3^{Ax+B}$ ، نمودار تابع  $g(x) = x^2$  را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع می‌کند. عرض نقطه تلاقی تابع  $f$  با محور  $y$ ها، کدام است؟

- ①  $\frac{1}{27}$       ②  $\frac{1}{9}$       ③  $\frac{1}{3}$       ④  $\sqrt{3}$

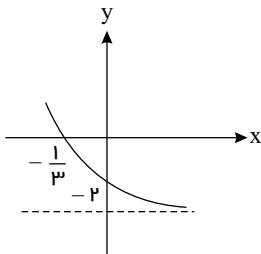
۶۸) در ظرفی ۱۰۰ لیتر محلول قرار دارد. هر روز ۴ لیتر از محلول را برداشته و به جای آن آب خالص اضافه می‌کنیم. پس از چند روز غلظت آن  $\frac{1}{3}$

غلظت اولیه می‌شود؟ ( $\log 2 = 0.3$ ،  $\log 3 = 0.48$ )

- ① ۲۰      ② ۲۴      ③ ۳۰      ④ ۳۲

۶۹) شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = -4 + 2^{ax+b}$  است.  $f\left(-\frac{5}{3}\right)$  کدام است؟

- ① ۵۴      ② ۶۰      ③ ۴۸      ④ ۲۸



۷۰) اگر  $\log_p^3 = 0.8$  باشد، مقدار  $\log_{1/p}^6$  کدام است؟

- ①  $\frac{13}{18}$       ②  $\frac{8}{11}$       ③  $\frac{3}{4}$       ④  $\frac{7}{9}$

۷۱) نمودارهای دو تابع  $f(x) = \log_p^x$  و  $g(x) = \log_{\frac{1}{p}}^x$  نسبت به هم چگونه‌اند؟

- ①  $f(x)$  بالاتر      ②  $g(x)$  بالاتر      ③ منطبق‌اند      ④ فقط در یک نقطه متقاطع



۷۲) اگر  $\log_3^2 = \frac{5}{8}$ ، آن گاه  $\log_{18}^4$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{15}{22}$       ۲)  $\frac{5}{7}$       ۳)  $\frac{8}{11}$       ۴)  $\frac{3}{4}$

۷۳) حاصل عبارت  $\log_{p_1}^{(1323)} \log_{p_1}^{(147)} + \log_{p_1}^{(3)}$  کدام است؟

- ۱) ۱      ۲) ۲      ۳) ۳      ۴) ۴

۷۴) نمودار یک تابع به صورت  $f(x) = -2 + \left(\frac{1}{p}\right)^{Ax+B}$ ، نمودار تابع  $y = x^2 - x$  را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۲ قطع می‌کند.  $f(3)$  کدام است؟

- ۱) ۳      ۲) ۴      ۳) ۵      ۴) ۶

۷۵) نمودار معکوس تابع  $y = 1 + 3^x$  کدام است؟ (با تغییر)



۷۶) یک قایق کاملاً بادی، روزانه ۵ درصد بادش را از دست می‌دهد. باد این قایق پس از چند روز، به نصف باد روز اول می‌رسد؟

( $\log 19 = 1,287, \log 2 = 0,301$ )

- ۱) ۱۷      ۲) ۱۸,۵      ۳) ۲۱,۵      ۴) ۲۵

۷۷) دامنه تغییرات تابع  $f(x) = \log_6 \frac{1}{6 + \sqrt{|x|} - |x|}$  کدام است؟

- ۱)  $(-9, 9)$       ۲)  $(-4, 9)$       ۳)  $(4, 9)$       ۴)  $(-4, 4)$

۷۸) دامنه تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{\log_4(x^2 - x - 2)}{\sqrt{x^2 - 1} + 1}$  کدام است؟

- ۱)  $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$       ۲)  $(-1, 2)$       ۳)  $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$       ۴)  $(-2, 1)$

۷۹) تابع  $y = 2^{x+|x|}$  را ۳ واحد در امتداد  $x$  در جهت منفی و سپس در امتداد محور  $y$  ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. منحنی حاصل، محور  $x$ ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

- ۱)  $-\frac{5}{2}$       ۲)  $-\frac{3}{2}$       ۳)  $\frac{5}{2}$       ۴)  $\frac{7}{2}$

۸۰) اگر تساوی  $\log_x^y - 2 \log_y^x = 1$  به ازای  $x, y > 1$  برقرار باشد کدام تساوی درست است؟

- ۱)  $y = x^2$       ۲)  $y = x^3$       ۳)  $y = \sqrt{x}$       ۴)  $xy = 2$

۸۱) نمودار تابع  $f(x) = 9^{\log_3^x}$  کدام است؟



۸۲) جمعیت شهری با نرخ زوال یک درصد در سال، کم می‌شود. با این روند با گذشت چند سال جمعیت این شهر، نصف جمعیت فعلی آن می‌شود؟

( $\log 99 = 1,995, \log 2 = 0,3$ )

- ۱) ۵۰      ۲) ۶۰      ۳) ۶۴      ۴) ۷۲



۸۳ از رابطه  $\log(x+2) + \log(2x-1) = \log(4x+1)$  مقدار لگاریتم  $(2x+5)$  در پایه ۴، کدام است؟

- ۱) ۰٫۵      ۲) ۰٫۷۵      ۳) ۱٫۲۵      ۴) ۱٫۵

۸۴ تابع با ضابطه  $f(x) = a + \log_r(bx-4)$ ، از دو نقطه  $(2,6)$  و  $(12,10)$  می‌گذرد.  $a$  کدام است؟

- ۱) ۳      ۲) ۴      ۳) ۵      ۴) ۶

۸۵ از رابطه  $\log(2x-5) + \log(x+1) = \log(4x-1)$  مقدار لگاریتم  $(2x+1)$  در پایه ۳، کدام است؟

- ۱) ۱      ۲) -۱      ۳) ۱٫۵      ۴) ۲

۸۶ اگر در معادله  $2 \log_x a + \log_a \sqrt{x} = 2$  مقدار  $x$  برابر ۹ باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{1}{9}$       ۲)  $\frac{1}{3}$       ۳) ۳      ۴) ۹



## پاسخنامه تشریحی

برای این منظور باید نامعادله  $|x| + 2x > \frac{9}{2} - \frac{1}{2}x - x^2$  را حل می‌کنیم. (1) (2) (3) (4) (1)

$$x \geq 0 \rightarrow -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2} > 2x + x \rightarrow x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{9}{2} < 0$$

$x$	$-\infty$	$-\frac{9}{2}$	$1$	$+\infty$		
عبارت	$< 0$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

$$\rightarrow \frac{-9}{2} < x < 1 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} 0 \leq x < 1 \quad (I)$$

$$x < 0 \rightarrow -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2} > 2x - x \rightarrow x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{2} < 0$$

$x$	$-\infty$	$-3$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$		
عبارت	$< 0$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

$$\rightarrow -3 < x < \frac{3}{2} \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} -3 < x < 0 \quad (II)$$

از اجتماع  $I$  و  $II$  به جواب  $-3 < x < 1$  می‌رسیم که طول نقطه‌ی وسط بازه  $-\frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{2}$  است.

(1) (2) (3) (4) (2)

روش اول:

$$2x + 1 - |x - 2| > |x^2 + 1| \rightarrow 2x + 1 - |x - 2| > x^2 + 1$$

$$x \geq 2: 2x + 1 - (x - 2) > x^2 + 1 \rightarrow 2x + 1 - x + 2 > x^2 + 1 \rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \rightarrow (x - 2)(x + 1) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 < x < 2 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \emptyset \quad (I)$$

$$x < 2: 2x + 1 - (-x + 2) > x^2 + 1 \rightarrow 2x + 1 + x - 2 > x^2 + 1 \rightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \rightarrow (x - 1)(x - 2) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 1 < x < 2$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} 1 < x < 2 \quad (II)$$

از اجتماع جواب‌های  $I$  و  $II$  به جواب  $1 < x < 2$  یا  $x \in (1, 2)$  می‌رسیم.

روش دوم:

در نامعادله داده شده به جای  $x$ ، عدد صفر قرار می‌دهیم.

$$x = 0 \rightarrow 0 + 1 - 2 > 1 \rightarrow -1 > 1$$

به نتیجه غلطی رسیدیم، پس گزینه‌های ۱ و ۲ که همگی شامل صفر هستند حذف می‌شوند و گزینه چهارم، جواب صحیح است.

$$\left| \frac{f}{g} \right| = \frac{|f|}{|g|} \text{ می‌دانیم که } (1) (2) (3) (4) (3)$$

$$\frac{|2 - x|}{|2x - 3|} > 1 \rightarrow |2 - x| > |2x - 3| \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4 + x^2 - 4x > 4x^2 + 9 - 12x$$

$$\rightarrow 3x^2 - 8x + 5 < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 1 < x < \frac{5}{3}$$

ولی دقت کنید که  $x = \frac{3}{2}$  مخرج کسر را صفر می‌کند و از مجموعه‌ی جواب باید حذف شود و جواب به صورت  $(1, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, \frac{5}{3})$  در می‌آید.

(1) (2) (3) (4) (4)

ریشه‌های داخل قدرمطلقها  $x = -2$  و  $x = \frac{1}{2}$  هستند.

$x$	$-\infty$	$-2$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$2x - 1$		$-$	$-$	$0$	$+$
$x + 2$		$-$	$0$	$+$	$+$

$$x < -2 \Rightarrow -2x + 1 - x - 2 = 3 \Rightarrow -3x = 4 \Rightarrow x = -\frac{4}{3} \text{ غ ق}$$

$$-2 \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -2x + 1 + x + 2 = 3 \Rightarrow -x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ق ق}$$

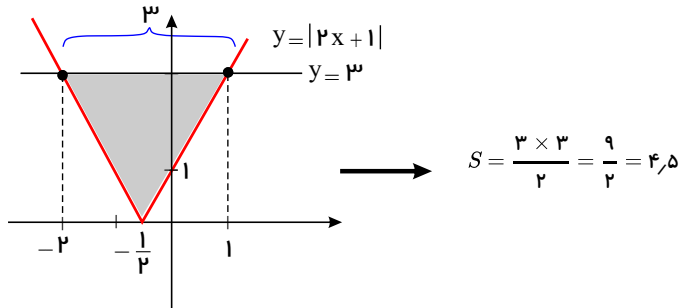


$$x > \frac{1}{2} \Rightarrow 2x - 1 + x + 2 = 3 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$\text{مجموع جوابها} = 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

1 2 3 4 5

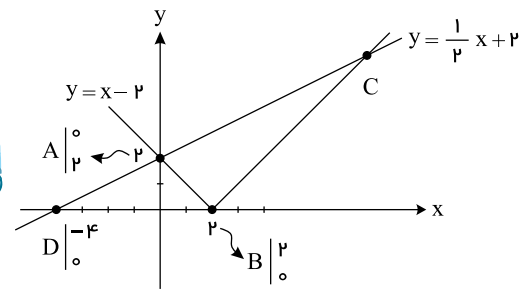
$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \sqrt{4(x^2 + x) + 1} = \sqrt{4x^2 + 4x + 1} = \sqrt{(2x + 1)^2} = |2x + 1|$$



دقت کنید که نقاطی که طولهای  $x = -2$  و  $x = 1$  از تلاقی تابع  $y = |2x + 1|$  با خط  $y = 3$  بدست آمده‌اند.

$$|2x + 1| = 3 \rightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 3 \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1 \\ 2x + 1 = -3 \rightarrow 2x = -4 \rightarrow x = -2 \end{cases}$$

$$\text{دو تابع } y = \frac{1}{2}x + 2 \text{ و } y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x - 2)^2} = |x - 2| \text{ را رسم می‌کنیم. } 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 6$$



نقطه  $C$  محل برخورد شاخه  $y = x - 2$  با خط  $y = \frac{1}{2}x + 2$  است:

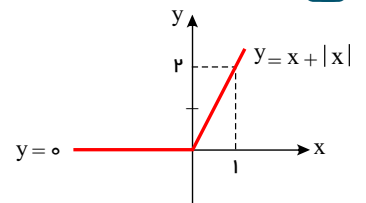
$$\frac{1}{2}x + 2 = x - 2 \Rightarrow x = 4, \quad y = 6 \Rightarrow C \begin{vmatrix} 4 \\ 6 \end{vmatrix}$$

پس مساحت مثلث  $ABC$  (سطح محصور بین دو نمودار) برابر است با:

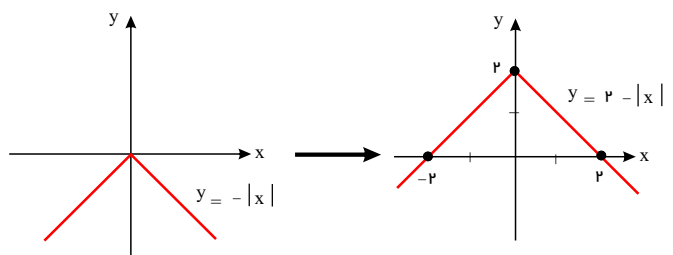
$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= S_{\triangle BDC} - S_{\triangle ABD} \\ &= \left(\frac{1}{2}BD \times y_C\right) - \left(\frac{1}{2}BD \times y_A\right) = \frac{1}{2}BD(y_C - y_A) \\ &= \frac{1}{2}(4 - 0)(6 - 2) = 12 \end{aligned}$$

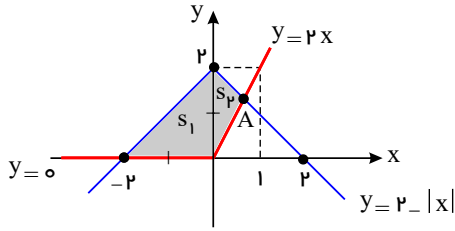
1 2 3 4 7

$$y = x + |x| \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \rightarrow y = x + x \rightarrow y = 2x, & A \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} \ B \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} \\ x < 0 \rightarrow y = x - x \rightarrow y = 0. \end{cases}$$



$$y = 2 - |x| \rightarrow$$





حال، کافی است این دو شکل را با هم رسم کنیم. برای پیدا کردن طول نقطه  $A$ ، کافی است که خط  $y = 2x$  و  $y = 2 - x$  را با هم تلاقی دهیم.

$$2x = 2 - x \rightarrow 3x = 2 \rightarrow x_A = \frac{2}{3}$$

$$S_1 = \frac{2 \times 2}{2} = 2, \quad S_2 = \frac{\frac{2}{3} \times 2}{2} = \frac{2}{3} \rightarrow S_{\text{کل}} = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

روش اول: **1 2 3 4 8**

قدرمطلق را تعیین علامت می کنیم:

$$x \geq 2 \Rightarrow x^2 - 2x < x - 2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 2) < 0$$

تعیین علامت  $\rightarrow 1 < x < 2$  اشتراک با شرط  $\rightarrow \emptyset$  (I)

$$x < 2 \Rightarrow x^2 - 2x < -x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) < 0$$

تعیین علامت  $\rightarrow -1 < x < 2$  اشتراک با شرط  $\rightarrow -1 < x < 2$  (II)

$$(I) \cup (II) : -1 < x < 2$$

روش دوم:

نامعادله را به روش عددگذاری حل می کنیم.

نامعادله  $x = 0 \rightarrow 0 < 2$  درست است (گزینه های 3 و 4 حذف می شوند)

نامعادله  $x = 1 \rightarrow -1 < 1$  درست است (گزینه ی 1 حذف می شود)

روش اول: باید نامعادله  $|2x^2 - 4| < 2x$  را حل کنیم می دانیم که ریشه های داخل قدرمطلق  $\pm\sqrt{2}$  هستند. **1 2 3 4 9**

$$x < -\sqrt{2} : 2x^2 - 4 < 2x \rightarrow 2x^2 - 2x - 4 < 0 \rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \rightarrow (x - 2)(x + 1) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 < x < 2 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \emptyset$$

$$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} : -2x^2 + 4 < 2x \rightarrow 2x^2 + 2x - 4 > 0 \rightarrow x^2 + x - 2 > 0 \rightarrow (x + 2)(x - 1) > 0$$

تعیین علامت  $\rightarrow x < -2$  یا  $x > 1$  اشتراک با شرط  $\rightarrow 1 < x < \sqrt{2}$

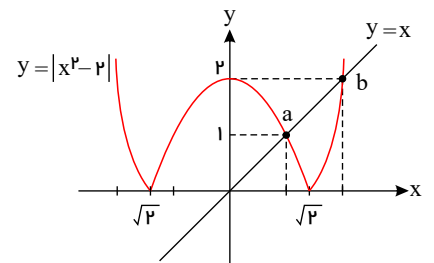
$$x > \sqrt{2} : 2x^2 - 4 < 2x \rightarrow 2x^2 - 2x - 4 < 0 \rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \rightarrow (x - 2)(x + 1) < 0$$

تعیین علامت  $\rightarrow -1 < x < 2$  اشتراک با شرط  $\rightarrow \sqrt{2} < x < 2$

از اجتماع جواب های بدست آمده به جواب  $x \in (1, 2)$  می رسم بنابراین  $b - a = 1$  است.

روش دوم: تابع  $|2x^2 - 4|$  و  $y = 2x$  را رسم کرده و مشخص می کنیم در چه بازه های تابع  $y = |2x^2 - 4|$  زیر تابع  $y = 2x$  قرار دارد.

$$|2x^2 - 4| < 2x \rightarrow |2(x^2 - 2)| < 2x \rightarrow |x^2 - 2| < x$$



برای این منظور باید نقاط  $a, b$  را پیدا کنیم.

$$|x^2 - 2| = x \rightarrow \begin{cases} x^2 - 2 = x \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 & b \\ x = -1 & a \end{cases} \\ x^2 - 2 = -x \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow (x + 2)(x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 & \text{غ} \\ x = 1 & a \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین جواب مسأله بازه  $(1, 2)$  است و  $b - a = 1$  است.

**1 2 3 4 10**

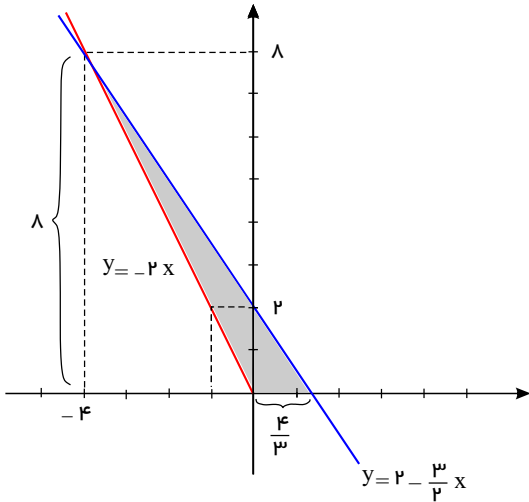
$$y = |x| - x = \begin{cases} x - x & x \geq 0 \\ -x - x & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$$





خط افقی  $y = 0$  را به شرط  $x \geq 0$  و خط  $y = -2x$  با شرط  $x < 0$  رسم می‌کنیم. برای رسم خط  $y = -2x$  دو نقطه دلخواه  $\begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{vmatrix}$  و  $\begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix}$  را روی آن در نظر می‌گیریم.

خط  $y = 2 - \frac{3}{2}x$  دو نقطه دلخواه  $\begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{vmatrix}$  و  $\begin{vmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \end{vmatrix}$  را روی آن در نظر می‌گیریم.



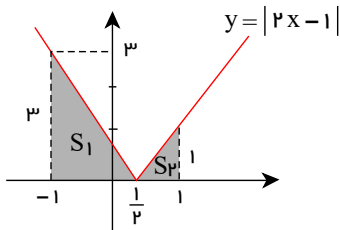
$$\Rightarrow S = \frac{8 \times \frac{4}{3}}{2} = \frac{16}{3}$$

دقت کنید برای پیدا کردن محل برخورد دو خط به معادلات  $y = -2x$  و  $y = 2 - \frac{3}{2}x$  آنها را تلافی می‌دهیم.

$$2 - \frac{3}{2}x = -2x \xrightarrow{\times 2} 4 - 3x = -4x \rightarrow x = -4$$

و  $x$  بدست آمده را در معادلات یکی از دو خط، قرار دهیم، عرض نقطه‌ی تلاقی  $8$  می‌شود.

نمودار تابع داده شده را رسم می‌کنیم. (1) (2) (3) (4) (11)



$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \frac{\frac{3}{2} \times 3}{2} = \frac{9}{4} \\ S_2 &= \frac{\frac{1}{2} \times 1}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned} \right\} \rightarrow S_{\text{کل}} = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{2}$$

داخل قدرمطلق را تعیین علامت می‌کنیم. (1) (2) (3) (4) (12)

$$x \geq 0 \rightarrow x + x \leq \frac{1}{2}x + 3 \rightarrow 2x \leq \frac{1}{2}x + 3 \rightarrow 4x \leq x + 6$$

$$\rightarrow 3x \leq 6 \rightarrow x \leq 2 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} 0 \leq x \leq 2(I)$$

$$x < 0 \rightarrow x - x \leq \frac{1}{2}x + 3 \rightarrow 0 \leq \frac{1}{2}x + 3 \rightarrow 0 \leq x + 6$$

$$\rightarrow x \geq -6 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} -6 \leq x < 0 \quad (II)$$

از اجتماع جواب‌های  $I$  و  $II$  به جواب  $-6 \leq x \leq 2$  یا  $x \in [-6, 2]$  می‌رسیم.

باید نامعادله  $(x-1)^2 > 4x^2$  را حل کنیم. (1) (2) (3) (4) (13)

$$(x-1)^2 > 4x^2 \rightarrow \sqrt{(x-1)^2} > \sqrt{4x^2} \rightarrow |x-1| > 2|x|$$

$$x \geq 1 : x-1 > 2x^2 \rightarrow 2x^2 - x + 1 < 0 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \emptyset \xrightarrow{\text{همواره مثبت}} \emptyset (I)$$

$$x < 1 : -x+1 > 2x^2 \rightarrow 2x^2 + x - 1 < 0 \rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -\infty & -1 & \frac{1}{2} & +\infty \\ \hline & + & 0 & - & + \end{array} \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} -1 < x < \frac{1}{2} (II)$$

از اجتماع  $I$  و  $II$  به جواب  $x \in (-1, \frac{1}{2})$  می‌رسیم و بیش‌ترین مقدار  $b - a$  برابر  $\frac{3}{2} - (-1) = \frac{5}{2}$  است.

نامساوی مثلثی برای  $n$  عدد وقتی به تساوی تبدیل می‌شود که همگی هم علامت باشند. (1) (2) (3) (4) (14)

$$|x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + |x_3| + \dots + |x_n|$$



همگی هم علامت باشند

$$\rightarrow |x_1 + x_2 + \dots + x_n| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵

روش اول:

$$\begin{cases} |x| < 2 \Rightarrow -2 < x < 2 & (1) \\ (2x-1) < |x| \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0: 2x-1 < x \Rightarrow x < 1 & \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} 0 \leq x < 1 \\ x < 0: 2x-1 < -x \Rightarrow 3x < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{3} & \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} x < 0 \end{cases} \end{cases} \xrightarrow{\text{اجتماع}} x < 1 \quad (2)$$

از اشتراک روابط ۱ و ۲ به جواب  $-2 < x < 1$  می‌رسیم.

روش دوم:

تست را به روش عدد گذاری حل می‌کنیم.

$$x = 1 \rightarrow \begin{cases} 1 < 2 \quad \checkmark \\ 2-1 < 1 \quad \times \end{cases} \rightarrow \text{گزینه های ۲ و ۳ که شامل } x = 1 \text{ می‌باشند حذف می‌شوند.}$$

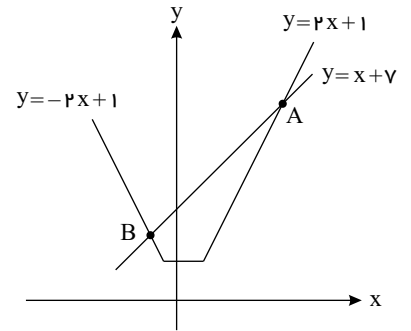
$$x = -1 \rightarrow \begin{cases} 1 < 2 \quad \checkmark \\ -2-1 < 1 \quad \checkmark \end{cases} \rightarrow \text{گزینه ۱ شامل } x = -1 \text{ نمی‌باشد حذف می‌شود.}$$

تابع  $y = |x-2| + |x+1|$  یک تابع گلدانی است که به ازای  $x < -1$  اکیداً نزولی و به ازای  $x > 2$  اکیداً صعودی و در فاصله  $-1 \leq x \leq 2$  ثابت است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶

$$x < -1: y = -x + 2 - x - 1 \rightarrow y = -2x + 1$$

$$-1 \leq x \leq 2: y = -x + 2 + x + 1 \rightarrow y = 3$$

$$x > 2: y = x - 2 + x + 1 \rightarrow y = 2x - 1$$



$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x + 7 \end{cases} \rightarrow x = 8, y = 15 \rightarrow A \begin{vmatrix} 8 \\ 15 \end{vmatrix}, \begin{cases} y = -2x + 1 \\ y = x + 7 \end{cases} \rightarrow x = -2, y = 5 \rightarrow B \begin{vmatrix} -2 \\ 5 \end{vmatrix}$$

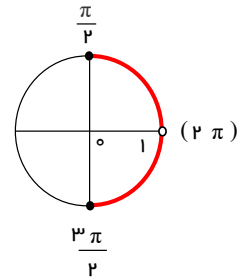
$$\text{پس: } AB = \sqrt{(8+2)^2 + (15-5)^2} = \sqrt{100 + 100} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷

$$[\cos \pi x] = 0 \Rightarrow 0 \leq \cos \pi x < 1$$

بازه‌ای را قبول می‌کنیم که در آن،  $\cos \pi x$  در رابطه  $0 \leq \cos \pi x < 1$  صدق نکند.

$$0 \leq \cos \pi x < 1 \Rightarrow \text{باتوجه به دایره‌ی مثلثاتی} \Rightarrow \begin{cases} 0 < \pi x \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2} \leq \pi x < 2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \leq x < 2 \end{cases}$$



این بازه ریشه‌های مخرج هستند و می‌دانیم که در توابع کسری یعنی ریشه‌های مخرج نباید در دامنه تابع باشند با توجه به گزینه‌ها، در گزینه ۳ ریشه‌های مخرج وجود ندارد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸

$$[x^2 + x] = -1 \Rightarrow -1 \leq x^2 + x < 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x < 0 \Rightarrow x(x+1) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 < x < 0 \\ -1 \leq x^2 + x \Rightarrow x^2 + x + 1 \geq 0 \xrightarrow{\text{همواره مثبت}} x \in R \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} -1 < x < 0$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} -1 < x < 0 \rightarrow 0 < x^2 < 1 \Rightarrow [x^2] = 0$$

روش اول: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۹



$$\underbrace{4n^2 - 4n + 1}_{(2n-1)^2} < \underbrace{4n^2 - 3n + 1}_{(2n)^2} < \underbrace{4n^2}_{(2n)^2} \rightarrow 2n - 1 < \sqrt{4n^2 - 3n + 1} < 2n \Rightarrow \left\lfloor \sqrt{4n^2 - 3n + 1} \right\rfloor = 2n - 1$$

$$\underbrace{n^2 - 4n + 4}_{(n-2)^2} < \underbrace{n^2 - 2n}_{(n-1)^2} < \underbrace{n^2 - 2n + 1}_{(n-1)^2} \rightarrow n - 2 < \sqrt{n^2 - 2n} < n - 1 \Rightarrow \left\lfloor \sqrt{n^2 - 2n} \right\rfloor = n - 2$$

$$\left\lfloor \sqrt{4n^2 - 3n + 1} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \sqrt{n^2 - 2n} \right\rfloor = (2n - 1) - 2(n - 2) = 3$$

روش دوم: کافی است یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۲ مثلاً  $n = 3$  را قرار دهیم.

$$n = 3 \rightarrow \left\lfloor \sqrt{36 - 9 + 1} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \sqrt{9 - 6} \right\rfloor = \underbrace{\left\lfloor \sqrt{28} \right\rfloor}_{5, \dots} - 2 \underbrace{\left\lfloor \sqrt{3} \right\rfloor}_{1, \dots} = 5 - 2(1) = 3$$

۲۰. اگر  $x^2 + x < 0$  باشد، نتیجه می‌گیریم که  $-1 < x < 0$  است.

$$x^2 + x < 0 \Rightarrow x(x+1) < 0 \Rightarrow \begin{array}{c} x \\ \hline -\infty \quad -1 \quad 0 \quad +\infty \\ \hline + \quad - \quad + \end{array} \Rightarrow -1 < x < 0$$

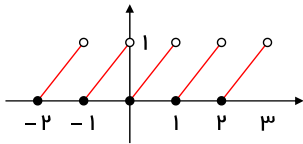
حال برای تعیین حاصل  $[x] + [x^2] + [x^3] + [x^4]$  کافی است حدود عبارت‌های داخل جزء صحیح را مشخص کنیم. داریم:

$$\begin{cases} -1 < x < 0 \Rightarrow [x] = -1 & \text{به توان ۲ میرسانیم} \\ -1 < x < 0 \Rightarrow 0 < x^2 < 1 \Rightarrow [x^2] = 0 & \text{به توان ۳ میرسانیم} \\ -1 < x < 0 \Rightarrow -1 < x^3 < 0 \Rightarrow [x^3] = -1 & \text{به توان ۴ میرسانیم} \\ -1 < x < 0 \Rightarrow 0 < x^4 < 1 \Rightarrow [x^4] = 0 \end{cases}$$

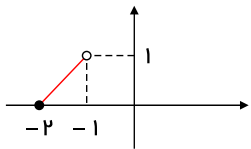
$$\Rightarrow [x] + [x^2] + [x^3] + [x^4] = (-1) + 0 + (-1) + 0 = -2$$

۲۱. ۱ ۲ ۳ ۴

نمودار تابع  $y = x - [x]$  به صورت زیر است واضح است در فاصله‌ی  $(-2, 3)$ ، ۵ پاره‌خط به اندازه‌ی  $\sqrt{2}$  وجود دارد.



اینگونه توابع به توابع دندان اره‌ای معروف هستند.  
توجه:



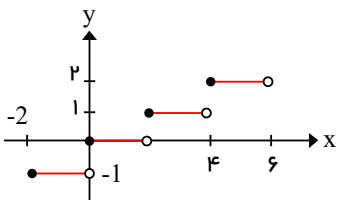
$$\text{طول پاره‌خط} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

۲۲. ۱ ۲ ۳ ۴

$$y = 2\left[\frac{x}{2}\right] + 1 \quad x \in [-2, 6)$$

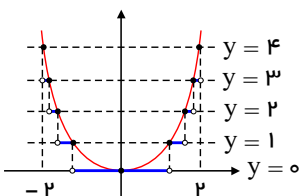
کافی است تعداد پاره‌خط‌های تابع  $y = \left[\frac{x}{2}\right]$  را در بازه  $[-2, 6)$  به دست آوریم زیرا ضریب پشت جزء صحیح و عدد ۱ تأثیری روی تعداد پاره‌خط‌ها ندارند برای این که ضریب، عرض‌ها را دو برابر کرده و عدد یک، شکل را یک واحد بالا می‌برد.

توجه کنید در تابع  $y = [nx]$  اگر  $n > 0$  باشد پلکان صعودی و طول هر پله  $\frac{1}{|n|}$  و ارتفاع پله‌ها یک واحد است.



۲۳. ۱ ۲ ۳ ۴

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، تابع  $y = [x^2]$  روی بازه‌ی  $(-2, 2)$ ، از ۷ پاره‌خط تشکیل شده است.





۱ ۲ ۳ ۴ ۲۴

$$f(x - f(x)) = f(x - [x]) = [x - [x]] = 0 \quad (\text{چون } 0 \leq x - [x] < 1 \text{ است})$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۵

$$f(x) = x^2 - 2[x] \Rightarrow f(\sqrt{3}) = 3 - 2[\sqrt{3}] = 3 - 2[1,7] = 3 - 2(1) = 1$$

$$f\left(\frac{-1}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2}\right)^2 - 2\left[\frac{-1}{2}\right] = \frac{1}{4} - 2(-1) = \frac{1}{4} + 2 = 2,25$$

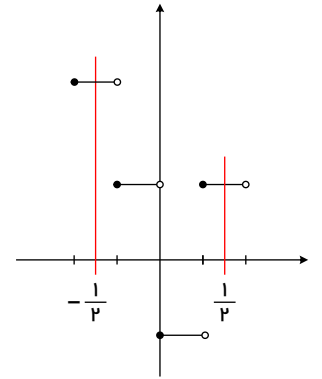
روش اول: چون داخل براکت  $3x$  داریم طول پله‌ها  $\frac{1}{3}$  است تابع را در بازی  $-\frac{2}{3} \leq x < \frac{2}{3}$  رسم می‌کنیم که بازه سؤال را شامل می‌شود. ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۶

$$\text{اگر } -\frac{2}{3} \leq x < \frac{1}{3} \Rightarrow [3x] = -2 \Rightarrow y = 3$$

$$\text{اگر } -\frac{1}{3} \leq x < 0 \Rightarrow [3x] = -1 \Rightarrow y = 1$$

$$\text{اگر } 0 \leq x < \frac{1}{3} \Rightarrow [3x] = 0 \Rightarrow y = -1$$

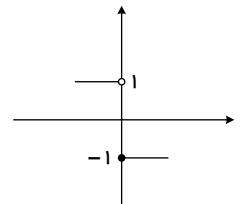
$$\text{اگر } \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3} \Rightarrow [3x] = 1 \Rightarrow y = 1$$



روش دوم: کافی است در حوالی صفر تابع را بررسی کنیم:

$$\text{if } x \rightarrow 0^+ \Rightarrow [3x] = 0 \Rightarrow y = -1$$

$$\text{if } x \rightarrow 0^- \Rightarrow [3x] = -1 \Rightarrow y = 1$$



فقط در گزینه ۲ تابع در نقطه  $x = 0$  ناپیوسته است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۷

دو نقطه‌ی داده شده را در تابع  $f(x) = ab^x - 1$  صدق می‌دهیم.

$$A \left| \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} \frac{1}{2} = ab^{-\frac{1}{2}} - 1 \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{a}{\sqrt{b}} \Rightarrow \frac{9}{4} = \frac{a^2}{b} \rightarrow a^2 = \frac{9}{4}b \rightarrow a = \frac{3}{2}\sqrt{b}$$

$$B \left| \begin{array}{l} 1 \\ 11 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} 11 = ab - 1 \Rightarrow ab = 12 \Rightarrow \frac{3}{2}\sqrt{b}b = 12$$

$$\Rightarrow b\sqrt{b} = 8 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow a = 3$$

$$\text{پس: } f(x) = 3 \times 4^x - 1 \Rightarrow f(-1) = 3 \times 4^{-1} - 1 = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۸

$$\log_k^a n = n \log_k^a, \log_k^{\frac{a}{b}} = \log_k^a - \log_k^b, \log 5 = 1 - \log 2 \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$\log \sqrt[3]{1,6} = \log(1,6)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log 1,6 = \frac{1}{3} \log \frac{16}{10}$$

$$= \frac{1}{3} (\log 16 - \log 10) = \frac{1}{3} (4 \log 2 - 1) = \frac{1}{3} (4(1 - \log 5) - 1) = \frac{1}{3} (3 - 4 \log 5)$$

$$= \frac{1}{3} (3 - 12k) = \frac{1}{3} (3(1 - 4k)) = 1 - 4k$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۹

$$\log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}}, \log_k^{am} = \frac{m}{n} \log_k^a, \log_b^N = x \rightarrow N = b^x \quad \text{می‌دانیم:}$$



$$\log_p^{2x^2+1} - \log_p^{x+2} = 1 \rightarrow \log_p^{\frac{2x^2+1}{x+2}} = 1 \xrightarrow{\text{تعریف}} \frac{2x^2+1}{x+2} = p^1$$

$$\rightarrow 2x^2 + 1 = 3x + 6 \rightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{c}{a} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

هر دو جواب بدست آمده، قابل قبول هستند ولی برای محاسبه  $\log_p^{2x-1}$  فقط به جای  $x$  می‌توانیم مقدار  $x = \frac{5}{2}$  را جایگزین کنیم، زیرا  $x = -1$  جلوی لگاریتم را منفی می‌کند.

$$\log_p^{2x-1} \stackrel{x=\frac{5}{2}}{=} \log_p^{\frac{5}{2}-1} = \log_p^{\frac{3}{2}} = \log_p^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۰

$$\text{با توجه به شکل } x > \frac{1}{2} \text{ دامنه تعریف لگاریتم: } 2x + a > 0 \rightarrow 2x > -a \rightarrow x > -\frac{a}{2} \rightarrow a = -1$$

بنابراین تابع به صورت  $y = -1 + \log_b^{(2x-1)}$  است، از طرفی مقدار تابع در  $x = 2$  برابر صفر است.

$$0 = -1 + \log_b^2 \rightarrow \log_b^2 = 1 \rightarrow b = 3 \rightarrow y = -1 + \log_3^{(2x-1)}$$

اکنون کافی است که به جای  $y$  مقدار ۱ را قرار دهیم.

$$1 = -1 + \log_3^{(2x-1)} \rightarrow \log_3^{(2x-1)} = 2 \xrightarrow{\log_b^a = c \rightarrow a = b^c} 2x - 1 = 3^2 \rightarrow 2x - 1 = 9 \rightarrow 2x = 10 \rightarrow x = 5$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۱

می‌دانیم:  $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$  ,  $\log_k^{a^n} = n \log_k^a$

$$\log_x^{x^2+4} = 1 + \log_x^4 \Rightarrow \log_x^{x^2+4} = \log_x^x + \log_x^4 \Rightarrow \log_x^{x^2+4} = \log_x^{4x} \Rightarrow x^2 + 4 = 5x$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{c}{a} = 4 \end{cases} \text{ (مینا نمی‌تواند یک باشد) غ ق ق}$$

$$\log_x^x \xrightarrow{x=4} \log_4^4 = \log_4^4 = 2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۲

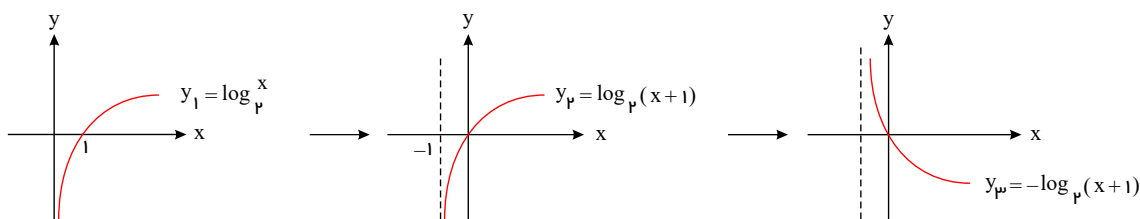
می‌دانیم:  $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$  ,  $\log_k^{a^n} = n \log_k^a$

$$\log(6 - 2\sqrt{5}) + 2\log(1 + \sqrt{5}) = \log(6 - 2\sqrt{5}) + \log(1 + \sqrt{5})^2 = \log(6 - 2\sqrt{5}) + \log(1 + 5 + 2\sqrt{5})$$

$$= \log(6 - 2\sqrt{5}) + \log(6 + 2\sqrt{5}) = \log \underbrace{(6 - 2\sqrt{5})(6 + 2\sqrt{5})}_{\text{مزدوج}} = \log(36 - 20) = \log 16 = \log 2^4 = 4 \log 2 = 4k$$

روش اول: ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۳

نمودار تابع داده شده  $y = \log_p^x$  است که یک واحد به سمت چپ برده شده و سپس نسبت به محور  $x$  قرینه شده است.



$$\text{پس: } y = -\log_p^{(x+1)} \rightarrow y = \log_p^{(x+1)^{-1}} \rightarrow U(x) = (x+1)^{-1}$$

روش دوم:

با توجه به شکل، دامنه تابع داده شده  $x > -1$  است بنابراین گزینه‌های سوم و چهارم حذف می‌شوند. با توجه به شکل وقتی  $x \rightarrow (-1)^+$  نمودار تابع به سمت  $+\infty$  می‌رود.

$$\text{نادرست: } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \log_p(x+1) = \log_p 0^+ = -\infty$$

$$\text{درست: } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \log_p \frac{1}{x+1} = \log_p \frac{1}{0^+} = \log_p(+\infty) = +\infty$$

توجه کنید اگر  $a > 1$  باشد  $\log_a^{+\infty} = +\infty$  و  $\log_a^0 = -\infty$  است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۴

می‌دانیم:



$$a^r + b^r = (a + b)^r - r ab, \log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}, \log_b^N = x \rightarrow b^x = N, \log_{km}^a = \frac{n}{m} \log_k^a$$

تعریف  
 $\log_r^x + \log_r^y = 2 \rightarrow \log_r^{xy} = 2 \rightarrow xy = 3^2 = 9$

$$x^r + y^r = 4^2 \rightarrow (x + y)^r - rxy = 4^2 \rightarrow (x + y)^r - 18 = 4^2$$

$\rightarrow (x + y)^r = 6^2 \rightarrow x + y = 8$  یا  $x + y = -8$  (غ ق مثبت هستند)  $(x, y)$  اعدادی مثبت هستند.

$$\log_r^{x+y} = \log_r^8 = \log_r^{3^2} = \frac{2}{r}$$

1 2 3 4 35

$$\left(\frac{4\sqrt{3r}}{2\sqrt{8}}\right)^r = \left(\frac{4^r\sqrt{r}}{2^r\sqrt{2}}\right)^r = \left(\frac{(2^2)^r\sqrt{r}}{2^r\sqrt{2}}\right)^r = \left(\frac{2^{2r}\sqrt{r}}{2^r\sqrt{2}}\right)^r = (2^r\sqrt{r})^r = 2^{1r}\sqrt{r} = 2^A \rightarrow A = 12\sqrt{2}$$

1 2 3 4 36

$$2^{-x} < 0.000001 \rightarrow 2^{-x} < 10^{-6}$$

از طرفین رابطه‌ی داده شده در مبنای ۱۰، لگاریتم می‌گیریم.

در منفی ضرب می‌کنیم  
 $\log 2^{-x} < \log 10^{-6} \rightarrow -x \log 2 < -6 \rightarrow x \log 2 > 6 \rightarrow x \left(\frac{3.01}{1000}\right) > 6$

$$\rightarrow x > \frac{6000}{3.01} \rightarrow x > 19,934$$

پس کوچک‌ترین عدد  $x$  با دو رقم اعشار، ۱۹٫۹۴ است.

باید دو منحنی داده شده را با هم تلاقی دهیم و نقطه‌ی تلاقی را بدست آوریم. 1 2 3 4 37

$$2^x = (\sqrt{2})^{x+1} + 4 \rightarrow 2^x = (2^{\frac{1}{2}})^{x+1} + 4 \rightarrow 2^x = (2^{\frac{x+1}{2}}) + 4$$

$$\rightarrow 2^x = (2^{\frac{x}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}}) + 4 \xrightarrow{2^{\frac{x}{2}}=A} A = \sqrt{2A} + 4 \rightarrow A - 4 = \sqrt{2A}$$

توان ۲  
 $\rightarrow A^2 - 8A + 16 = 2A \rightarrow A^2 - 10A + 16 = 0 \rightarrow (A - 8)(A - 2) = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} A = 8 \rightarrow 2^x = 8 \rightarrow x = 3 \xrightarrow{y=2^x} y = 8 \\ A = 2 \text{ غ ق (در معادله‌ی رادیکالی صدق نمی‌کند)} \end{cases}$$

حال باید فاصله‌ی نقطه‌ی  $A \left(\frac{3}{8}\right)$  را از  $B \left(\frac{3}{4}\right)$  حساب کنیم.

$$AB = \sqrt{(0 - 3)^2 + (4 - 8)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$  می‌دانیم: 1 2 3 4 38

$$3^{2x+y} = 9 \times 3^{x-y} \rightarrow 3^{2x+y} = 3^2 \times 3^{x-y} \rightarrow 3^{2x+y} = 3^{2+x-y}$$

$$\rightarrow 2x + y = 2 + x - y \rightarrow x + 2y = 2 \rightarrow x = 2 - 2y$$

از طرفی  $\log(x + 2y) = 1 + \log y \rightarrow \log(x + 2y) = \log 10 + \log y \rightarrow \log(x + 2y) = \log 10y$

$$\rightarrow x + 2y = 10y \rightarrow x = 8y \xrightarrow{x=2-2y} 2 - 2y = 8y \rightarrow 10y = 2 \rightarrow y = \frac{2}{10} \xrightarrow{x=8y} x = \frac{16}{10} = 1.6$$

چون دو نقطه به طول‌های ۱ و ۲ محل برخورد این دو تابع است: پس: 1 2 3 4 39

$$\begin{cases} f(1) = g(1) \rightarrow -2 + \left(\frac{1}{r}\right)^{A+B} = 1 - 1 \rightarrow \left(\frac{1}{r}\right)^{A+B} = 2 \rightarrow r^{-A-B} = 2 \rightarrow -A - B = 1 \\ f(2) = g(2) \rightarrow -2 + \left(\frac{1}{r}\right)^{rA+B} = 4 - 2 \rightarrow \left(\frac{1}{r}\right)^{rA+B} = 2 \rightarrow r^{-rA-B} = 2^r \rightarrow -rA - B = 2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -A - B = 1 \\ -rA - B = 2 \end{cases} \rightarrow A = -1, B = 0 \rightarrow f(x) = -2 + \left(\frac{1}{r}\right)^{-x}$$

$$\rightarrow f(3) = -2 + \left(\frac{1}{r}\right)^{-3} = -2 + r^3 = -2 + 8 = 6$$

1 2 3 4 40

$\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}, \log_{km}^a = \frac{n}{m} \log_k^a$  می‌دانیم:

$$\log_r^x = 1 + \log_r^{y+1} \Rightarrow \log_r^x = \log_r^y + \log_r^{y+1} \Rightarrow \log_r^x = \log_r^{y+y+1} \Rightarrow x = 2y + 2$$



معین کرمی

$$x^y - y^y = 3^2 \Rightarrow (2y + 2)^y - y^y = 3^2 \Rightarrow (4y^y + 8y + 4) - y^y = 3^2 \Rightarrow 3y^y + 8y - 28 = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 336}}{6} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \Rightarrow x = 6 \\ y = -\frac{14}{3} \end{cases} \Rightarrow \text{چون جلوی لگاریتم را منفی می کند، غیر قابل قبول است}$$

$$\log_{\frac{x+y}{y}} \frac{x-y}{y} = \log_{\frac{6+2}{2}} \frac{6-2}{2} = \log_{\frac{4}{2}} \frac{4}{2} = \frac{2}{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۱

می دانیم:  $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$  ,  $\log_k^{a^n} = n \log_k^a$

$$\log 3 + \log \sqrt[4]{3} = \log(3)^k \rightarrow \log 3 + \log 3^{\frac{1}{4}} = \log 3^{fk} \rightarrow \log 3 \times 3^{\frac{1}{4}} = \log 3^{fk}$$

$$\rightarrow \log 3^{\frac{5}{4}} = \log 3^{fk} \rightarrow fk = \frac{5}{4} \rightarrow k = \frac{5}{16}$$

$$\log_{\frac{5}{16}}^{\frac{5}{4}} = \log_{\frac{5}{16}}^{\frac{5}{4}} = \log_{\frac{5}{16}}^{\frac{5}{4}} = 4$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۲

می دانیم:  $\log_k^{ab} = \log_k^a + \log_k^b$  ,  $\log_{km}^{a^n} = \frac{n}{m} \log_k^a$

$$\log_{\sqrt{b}}^{ab^y} = \log_{\sqrt{b}}^a + \log_{\sqrt{b}}^{b^y} = \log_{\frac{1}{\sqrt{b}}}^a + \log_{\frac{1}{\sqrt{b}}}^{b^y} = 2 \log_b^a + 4 = 2 \left(\frac{2}{3}\right) + 4 = 7$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۳

می دانیم:  $\log_{km}^{a^n} = \frac{n}{m} \log_k^a$  ,  $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$  ,  $\log_b^N = x \rightarrow N = b^x$

$$\log \frac{2}{x} + \log(x+1) = 1 \Rightarrow \log \frac{2x+2}{x} = 1 \xrightarrow{\text{تعریف}} \frac{2x+2}{x} = 10 \Rightarrow 10x = 2x+2 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$\log_x^x = \log_{\frac{1}{x}}^x = \log_{\frac{1}{x}}^{x^{-1}} = -\frac{2}{3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۴

می دانیم:  $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$

$$\left. \begin{aligned} 2^x \times 8^y = 4 &\Rightarrow 2^x \times 2^{3y} = 2^2 \Rightarrow 2^{x+3y} = 2^2 \Rightarrow x+3y=2 \\ \log x = \log 2 + \log y &\Rightarrow \log x = \log 2y \Rightarrow x=2y \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = \frac{4}{5}, y = \frac{2}{5}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۵

می دانیم:  $\log_b^N = x \rightarrow b^x = N$  ,  $\log_k^{a^n} = n \log_k^a$

$$\log_{\sqrt{2}}^a = \frac{4}{3} \Rightarrow a = (\sqrt{2})^{\frac{4}{3}} \Rightarrow a = (2^{\frac{1}{2}})^{\frac{4}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$$

$$\log_{\lambda}^{(a^y)^y} = \log_{\lambda}^{(2^{\frac{2}{3}})^{3+y}} = \log_{\lambda}^{2^{2+y}} = \log_{\lambda}^{16} = \log_{\frac{2}{3}}^{16} = \frac{4}{3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۶

$$4^a = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2^{2a} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 2a = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}^{(2^a+1)} = \log_{\frac{1}{2}}^{(2^{\frac{3}{2}}+1)} = \log_{\frac{1}{2}}^2 = 1$$

می دانیم:  $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$  ,  $\log_b^N = x \rightarrow N = b^x$

$$2^x + 2^x = 72 \Rightarrow (2^x)^2 + 2^x - 72 = 0 \xrightarrow{2^x=A} A^2 + A - 72 = 0 \Rightarrow (A+9)(A-8) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = -9 \Rightarrow 2^x = -9 \rightarrow \text{امکان ندارد} \\ A = 8 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

$$\log(x+1) + \log(2y+x^2) = 2 \xrightarrow{x=3} \log 4 + \log(2y+9) = 2$$

$$\Rightarrow \log(4y+36) = 2 \xrightarrow{\text{تعریف}} 4y+36 = 10^2 \Rightarrow 4y = 64 \Rightarrow y = 16$$

می دانیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۴۸



دامنه  $y = \log_5^{x-2} \rightarrow x - 2 > 0 \rightarrow x > 2$

$3^{x^2-2} = 81^x \rightarrow 3^{x^2-2} = 3^{4x} \rightarrow x^2 - 2 = 4x \rightarrow x^2 - 4x = 2$

$\rightarrow (x-2)^2 - 4 = 2 \rightarrow (x-2)^2 = 6 \rightarrow x-2 = \pm\sqrt{6} \rightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{6} \\ x = 2 - \sqrt{6} < 2 \end{cases}$  غ ق

می‌دانیم  $\log_{km}^a = \frac{n}{m} \log_k^a$  است.

$\log_5^{x-2} = \log_5^{x-2+\sqrt{6}} \log_5^{2+\sqrt{6}-2} = \log_5^{\sqrt{6}} = \log_5^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۹

$\log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}}$  ,  $\log_{km}^a = \frac{n}{m} \log_k^a$  می‌دانیم:

$\log(x^2 - x - 6) - \log(x - 3) = \log(2x - 5) \rightarrow \log \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \log(2x - 5)$

$\rightarrow \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)} = 2x - 5 \rightarrow x + 2 = 2x - 5 \rightarrow x = 7$

$\log_9^{\sqrt{x+1}} = \log_9^{\sqrt{1}} = \log_9^1 = \frac{1}{2}$

$\log_k^{a^n} = n \log_k^a$  ,  $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$  می‌دانیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵۰

$2^{x-y} \times 4^{x+y} = 1 \rightarrow 2^{x-y} \times (2^2)^{x+y} = 1 \rightarrow 2^{x-y+2x+2y} = 1 \rightarrow 2^{3x+2y-y} = 1 \rightarrow 2^{3x+y} = 1 \rightarrow 3x + y = 0$

$\log y = 2 \log 3 + \log x \rightarrow \log y = \log 9 + \log x \rightarrow \log y = \log 9x \rightarrow y = 9x$

پس:  $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ y = 9x \end{cases} \rightarrow 3x + 18x = 7 \rightarrow 21x = 7 \rightarrow x = \frac{1}{3}$  ,  $y = 9(\frac{1}{3}) = 3$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۱

$\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$  می‌دانیم:

$4\sqrt{2} = 4^x \Rightarrow 2^2 \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^x \Rightarrow 2^{\frac{5}{2}} = 2^x \Rightarrow 2x = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{4}$

$1 + \log \sqrt{x+1} = \log y \Rightarrow \log 10 + \log \sqrt{\frac{5}{4} + 1} = \log y$

$\Rightarrow \log 10 + \log \frac{3}{2} = \log y \Rightarrow \log 10 \times \frac{3}{2} = \log y \Rightarrow y = 15$

برای پیدا کردن محل تقاطع دو تابع، کافی است که دو تابع را تلافی دهیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۵۲

$\begin{cases} y = (\frac{\sqrt{3}}{3})^{2x} \\ y = 3^x + \frac{1}{3} \end{cases} \xrightarrow{\text{تلافی}} (\frac{\sqrt{3}}{3})^{2x} = 3^x + \frac{1}{3} \rightarrow (\frac{3^{\frac{1}{2}}}{3})^{2x} = 3^x + \frac{1}{3} \rightarrow (3^{-\frac{1}{2}})^{2x} = 3^x + \frac{1}{3}$

$\rightarrow 3^{-x} = 3^x + \frac{1}{3} \rightarrow 3^x - \frac{1}{3^x} + \frac{1}{3} = 0 \xrightarrow{3^x=A} A - \frac{1}{A} + \frac{1}{3} = 0$

$\xrightarrow{\times 3A} 3A^2 - 3 + 1A = 0 \rightarrow 3A^2 + 1A - 3 = 0 \xrightarrow{\Delta=b^2-4ac} \Delta = 1 + 36 = 37 = 100$

$\rightarrow \begin{cases} A = \frac{-1+10}{6} = \frac{1}{3} \rightarrow 3^x = \frac{1}{3} = 3^{-1} \rightarrow x = -1 \xrightarrow{y=(\frac{\sqrt{3}}{3})^{2x}} y = (\frac{\sqrt{3}}{3})^{-2} = (\frac{3}{\sqrt{3}})^2 = \frac{9}{3} = 3 \\ A = \frac{-1-10}{6} = -\frac{11}{6} \rightarrow 3^x = -\frac{11}{6} : \text{امکان ندارد} \end{cases}$

نقطه‌ی تلافی این دو تابع  $A \begin{vmatrix} -1 \\ 3 \end{vmatrix}$  می‌باشد.

$A \begin{vmatrix} -1 \\ 3 \end{vmatrix}$  ,  $B \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix} \rightarrow AB = |-1 - 1| = 2$

برای پیدا کردن محل تقاطع دو تابع، کافی است که دو تابع را تلافی دهیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۵۳





$$\begin{cases} f(x) = 4^x \\ g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + \frac{3}{2} \rightarrow 4^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + \frac{3}{2} \rightarrow 4^x = \frac{1}{4^x} + \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{4^x=A} A = \frac{1}{A} + \frac{3}{2} \rightarrow 2A^2 = 2 + 3A \rightarrow 2A^2 - 3A - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta=b^2-4ac} \Delta = 9 - 4(2)(-2) = 9 + 16 = 25 \rightarrow \begin{cases} A = \frac{3+5}{4} = 2 \\ A = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$A = 2 \rightarrow 4^x = 2 \rightarrow 2^{2x} = 2 \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow y = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2 \rightarrow A \left| \frac{1}{2} \right.$$

$$A = -\frac{1}{2} \rightarrow 4^x = -\frac{1}{2} \text{ امکان ندارد:}$$

نقطه‌ی تلاقی این دو تابع  $A \left| \frac{1}{2} \right.$  است.

$$A \left| \frac{1}{2} \right., B \left| \frac{-1}{2} \right. \rightarrow AB = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۴

می‌دانیم:  $\log_b^N = x \rightarrow b^x = N$

$$\log_p^{12} = \alpha \xrightarrow{\text{تعریف}} p^\alpha = 12$$

$$4^{\alpha-2} = 4^\alpha \times 4^{-2} = (2^2)^\alpha \times \frac{1}{16} = (2^\alpha)^2 \times \frac{1}{16} = \frac{144}{16} = 9$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۵

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} = \left(\frac{125}{8}\right)^{x^2} \rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{2x-1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{3x^2} \rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{2x-1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{3x^2}$$

$$\rightarrow 2x - 1 = -3x^2 \rightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{c}{a} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

در عبارت خواسته شده نمی‌توانیم به جای  $x$  عدد  $-1$  را قرار دهیم چون جلوی لگاریتم منفی می‌شود و می‌دانیم که  $\log_k^a = \frac{n}{m} \log_k^a$  است.

$$\log_\lambda^{9x+1} \stackrel{x=\frac{1}{3}}{=} \log_\lambda^4 = \log_{\frac{2}{3}}^2 = \frac{2}{3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۶

$$y = x^2 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow M(1, 1) \\ x = 3 \Rightarrow y = 9 \Rightarrow N(3, 9) \end{cases}$$

نقاط  $M$  و  $N$  در تابع  $f(x) = 3^{Ax+B}$  صدق می‌کنند، پس داریم:

$$f(1) = 1 \Rightarrow 3^{A+B} = 1 \Rightarrow A+B = 0, \quad f(3) = 9 \Rightarrow 3^{3A+B} = 9 \Rightarrow 3A+B = 2$$

$$\begin{cases} A+B = 0 \\ 3A+B = 2 \end{cases} \rightarrow 2A = 2 \Rightarrow A = 1 \Rightarrow B = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = 3^{x-1} \Rightarrow f(0) = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۷

می‌دانیم:  $\log_k^{a^n} = n \log_k^a, \log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$

$$2 \log x = 1 + \log\left(x + \frac{12}{5}\right) \Rightarrow \log x^2 = \log 10 + \log\left(x + \frac{12}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \log x^2 = \log 10 \cdot \left(x + \frac{12}{5}\right) \Rightarrow x^2 = 10 \cdot \left(x + \frac{12}{5}\right)$$

$$x^2 - 10x - 24 = 0 \Rightarrow (x-12)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 12 \text{ ق ق} \\ x = -2 \text{ غ ق ق} \end{cases} \text{ (جلوی لگاریتم را منفی می‌کند)}$$



$$\log_2^{2x+1} = \log_2^{2^2} = \log_2^{2^2} = 2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۸

$$\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}, \log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}}, \log_k^{a^n} = n \log_k^a \text{ می دانیم:}$$

$$a + b = S = -\frac{b}{a} = 10, ab = P = \frac{c}{a} = \frac{1}{10}$$

$$\log a + \log b - \log(a+b) = \log \frac{ab}{a+b} = \log \frac{\frac{1}{10}}{10} = \log \frac{1}{100} = \log 10^{-2} = -2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۹

$$\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}, \log_{k^n}^a = \frac{m}{n} \log_k^a, \log_b^N = x \rightarrow N = b^x \text{ می دانیم:}$$

$$\log_x^{3x+8} = 2 - \log_x^{x-6} \rightarrow \log_x^{3x+8} + \log_x^{x-6} = 2$$

$$\rightarrow \log_x^{(3x+8)(x-6)} = 2 \xrightarrow{\text{تعریف}} (3x+8)(x-6) = x^2$$

$$\rightarrow 3x^2 - 18x + 8x - 48 = x^2 \rightarrow 2x^2 - 10x - 48 = 0$$

$$\rightarrow x^2 - 5x - 24 = 0 \rightarrow (x-8)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=8 & \text{ق ق} \\ x=-3 & \text{غ ق (جلوی لگاریتم را منفی می کند)}$$

$$\log_7^x = \frac{x-8}{-3} \Rightarrow \log_7^8 = \log_7^{\frac{2}{-3}} = \frac{2}{-3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۰

$$\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}, \log_b^N = x \rightarrow N = b^x \text{ می دانیم:}$$

$$\log(y+2) = 1 \xrightarrow{\text{تعریف}} y+2 = 10^1 \rightarrow y=8$$

$$\log(y-x) + \log(4x+y) = 2 \xrightarrow{y=8} \log(8-x) + \log(4x+8) = 2$$

$$\rightarrow \log(8-x)(4x+8) = 2 \rightarrow (8-x)(4x+8) = 10^2 \rightarrow 32x + 64 - 4x^2 - 8x = 100$$

$$\rightarrow 4x^2 - 24x + 36 = 0 \xrightarrow{\div 4} x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow (x-3)^2 = 0 \rightarrow x=3$$

$$\log_k^{a^n} = n \log_k^a, \log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}} \text{ می دانیم: } ۱ ۲ ۳ ۴ ۶۱$$

(f(x) = a + 2 log\_p^{3x+b}) کافی است دو نقطه‌ی داده شده را در تابع صدق دهیم

$$\left| \begin{array}{l} ۵ \\ ۱۱ \end{array} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} ۱۱ = a + 2 \log_p^{۱۵+b}, \left| \begin{array}{l} ۲۱ \\ ۱۵ \end{array} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} ۱۵ = a + 2 \log_p^{۶۳+b}$$

$$\begin{cases} ۱۱ = a + 2 \log_p^{۱۵+b} \\ ۱۵ = a + 2 \log_p^{۶۳+b} \end{cases} \rightarrow ۴ = 2 \log_p^{۶۳+b} - 2 \log_p^{۱۵+b} \rightarrow ۲ = \log_p^{۶۳+b} - \log_p^{۱۵+b}$$

$$\rightarrow \log_p^{\frac{۶۳+b}{۱۵+b}} = ۲ \xrightarrow{\text{تعریف}} \frac{۶۳+b}{۱۵+b} = p^2 \rightarrow ۶۳+b = ۶۰ + ۴b \rightarrow ۳b = ۳ \rightarrow b=1$$

$$\frac{۱۱}{۱۱} = \frac{a+2 \log_p^{۱۵+b}}{۱۱} \rightarrow ۱۱ = a + 2 \log_p^{۱۶} \rightarrow ۱۱ = a + 2 \log_p^{16} \rightarrow ۱۱ = a + 8 \rightarrow a=3$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۲

$$\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}, \log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}}, \log_{k^m}^a = \frac{n}{m} \log_k^a \text{ می دانیم:}$$

$$\log(2x-1) + \log(x+3) = \log 30 - \log 2 \rightarrow \log(2x-1)(x+3) = \log 15$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 5x - 3 = 15 \Rightarrow 2x^2 + 5x - 18 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 144}}{4}$$

$$x = \frac{-5 \pm 13}{4} \Rightarrow \begin{cases} x=2 & \text{ق ق} \\ x=-\frac{18}{4} & \text{غ ق (جلوی لگاریتم را منفی می کند)}$$

$$\log_8 x = \log_{2^3}^2 = \frac{1}{3}$$

$$\log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}} \text{ می دانیم: } ۱ ۲ ۳ ۴ ۶۳$$

کافی است دو نقطه‌ی داده شده را در تابع صدق دهیم.

$$\left| \begin{array}{l} ۲ \\ ۶ \end{array} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} ۶ = a + \log_p^{2b-4}, \left| \begin{array}{l} ۱۲ \\ ۱۰ \end{array} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} ۱۰ = a + \log_p^{12b-4}$$



$$- \begin{cases} a + \log_p^{2b-4} = 6 \\ a + \log_p^{12b-4} = 10 \end{cases} \rightarrow \log_p^{12b-4} - \log_p^{2b-4} = 4 \rightarrow \log_p^{\frac{12b-4}{2b-4}} = 4 \xrightarrow{\text{تعریف}} \frac{12b-4}{2b-4} = 2^4 = 16$$

$$\rightarrow 12b - 4 = 32b - 64 \rightarrow 20b = 60 \rightarrow b = 3 \xrightarrow{a + \log_p^{2b-4} = 6} a + \log_p^2 = 6 \rightarrow a + 1 = 6 \rightarrow a = 5$$

۶۴ دو نقطه داده شده را در تابع  $f(x) = -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^{ax+b}$  صدق می‌دهیم. ۱ ۲ ۳ ۴

$$\left| \begin{array}{l} 0 \\ -6 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} -6 = -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^b \rightarrow 3 = 3^{-b} \rightarrow -b = 1 \rightarrow b = -1$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ 0 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} 0 = -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{a}{2}-1} \rightarrow 9 = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{a}{2}-1} \rightarrow 3^2 = 3^{-\frac{a}{2}+1} \rightarrow -\frac{a}{2} + 1 = 2 \rightarrow -\frac{a}{2} = 1 \rightarrow a = -2$$

$$\text{پس } f(x) = -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2x-1} \rightarrow f(2) = -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-5} = -9 + 3^5 = -9 + 243 = 234$$

۶۵ در هر مدت یک ماه (۳۰ روز)  $\frac{1}{10}$  جرم را از دست می‌دهد. بنابراین  $\frac{9}{10}$  جرم باقی می‌ماند. پس بعد از ۲ ماه مقدار  $\frac{9}{10} \times \frac{9}{10} \times 24$  باقی می‌ماند و پس از ۱ ۲ ۳ ۴

۶۶ مقدار  $n$  ماه مقدار  $24 \times \underbrace{\frac{9}{10} \times \frac{9}{10} \times \dots \times \frac{9}{10}}_{n \text{ تا}}$  جرم باقی می‌ماند، پس:

$$24 \times \left(\frac{9}{10}\right)^n = 8 \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^n = \frac{1}{3}$$

از طرفین لگاریتم می‌گیریم:

$$\log\left(\frac{9}{10}\right)^n = \log \frac{1}{3} \Rightarrow n \cdot \log \frac{9}{10} = \log 1 - \log 3$$

$$n(\log 3^2 - \log 10) = 0 - \log 3 \Rightarrow n(2 \log 3 - 1) = -\log 3$$

$$n(0,96 - 1) = -0,48 \Rightarrow n = \frac{0,48}{0,04} = 12 \text{ ماه}$$

$$12 \times 30 = 360 \text{ روز}$$

۶۶ می‌دانیم: ۱ ۲ ۳ ۴

$$\log(2x-1) + \frac{1}{2} \log x^2 = \log 3 \Rightarrow \log(2x-1) + \log |x| = \log 3 \Rightarrow \log(2x-1)|x| = \log 3 \Rightarrow (2x-1)|x| = 3$$

با توجه به این که  $2x-1 > 0$  است، پس  $x > \frac{1}{2}$  و در نتیجه  $|x| = x$  می‌باشد، لذا داریم:

$$(2x-1)x = 3 \Rightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 & \text{ق ق غ} \\ x = -\frac{c}{a} = \frac{3}{2} & \text{ق ق ق} \end{cases}$$

(جلوی لگاریتم را منفی می‌کند) غ ق ق

بنابراین برای یافتن لگاریتم  $\frac{x}{3}$  در مبنای ۴ داریم:

$$\log_{\frac{x}{3}} = \log_{\frac{1}{3}} = \log_{\frac{1}{3}}^{3^{-1}} = -\frac{1}{3}$$

۶۷ چون دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ محل برخورد این دو تابع است؛ پس: ۱ ۲ ۳ ۴

$$\left\{ \begin{array}{l} f(1) = g(1) \rightarrow 3^{A+B} = 1 = 3^0 \rightarrow A+B = 0 \\ f(3) = g(3) \rightarrow 3^{3A+B} = 9 = 3^2 \rightarrow 3A+B = 2 \end{array} \right\} \rightarrow A = 1, B = -1$$

$$\text{پس } f(x) = 3^{x-1} \rightarrow f(0) = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

۶۸ چون در هر روز ۴ لیتر از محلول ۱۰۰ لیتری کم می‌شود، پس غلظت آن هر روز به  $\frac{96}{100}$  غلظت قبل می‌رسد. پس: ۱ ۲ ۳ ۴

$$a_n = a \cdot \left(\frac{96}{100}\right)^n$$

که  $a_n$  غلظت در روز  $n$  ام و  $a$  غلظت اولیه و  $n$  تعداد روزها می‌باشد.

$$a \cdot \left(\frac{96}{100}\right)^n = \frac{1}{3} a \rightarrow \left(\frac{96}{100}\right)^n = \frac{1}{3}$$

از طرفین لگاریتم می‌گیریم:

$$\log\left(\frac{96}{100}\right)^n = \log \frac{1}{3} \rightarrow n(\log 96 - \log 100) = \log 1 - \log 3 \rightarrow n(\log 2^5 \times 3 - 2) = -\log 3 \rightarrow n(5 \log 2 + \log 3 - 2) = -0,48 \rightarrow n = \frac{0,48}{\frac{2}{100}} = 24$$



۶۹ دو نقطه داده شده را در تابع  $f(x) = -4 + 2^{ax+b}$  صدق می‌دهیم. (۱) (۲) (۳) (۴)

$$\begin{matrix} 0 \\ -2 \end{matrix} \xrightarrow{\text{صدق}} -2 = -4 + 2^b \rightarrow 2^b = 2 \rightarrow b = 1$$

$$\begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix} \xrightarrow{\text{صدق}} 0 = -4 + 2^{\frac{-1}{3}a+1} \rightarrow 2^{\frac{-1}{3}a+1} = 2^2 \rightarrow -\frac{1}{3}a + 1 = 2 \rightarrow a = -3$$

پس:  $f(x) = -4 + 2^{-3x+1} \rightarrow f\left(\frac{-5}{3}\right) = -4 + 2^{5+1} = -4 + 64 = 60$

۷۰ می‌دانیم که  $\log_k^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^k}$  و  $\log_k^{ab} = \log_k^a + \log_k^b$  و  $\log_k^a = \frac{n}{m} \log_k^a$  است. (۱) (۲) (۳) (۴) (۷۰)

$$\log_{12}^6 = \frac{\log_7^6}{\log_7^{12}} = \frac{\log_7^3 + \log_7^2}{\log_7^3 + \log_7^4} = \frac{\log_7^3 + 0.8}{1 + 0.8} = \frac{\frac{1}{2} + 0.8}{1.8} = \frac{1.3}{1.8} = \frac{13}{18}$$

۷۱ دامنه‌ی هر دو تابع  $f$  و  $g$  برابر با  $x > 0$  است. حال دو تابع داده شده را ساده می‌کنیم. (۱) (۲) (۳) (۴) (۷۱)

$$\begin{aligned} f(x) &= \log_x^{\frac{1}{x}} = \log_x^{x^{-1}} = -\log_x^x \\ g(x) &= \log_{\frac{x}{1}}^x = \log_{x^{-1}}^x = -\log_x^x \end{aligned} \rightarrow f(x) = g(x)$$

چون ضابطه و دامنه‌ی توابع  $f$  و  $g$  یکسان هستند، در نتیجه نمودار این دو تابع، منطبق بر هم می‌باشند.

۷۲ می‌دانیم که  $\log_k^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^k}$  و  $\log_k^{ab} = \log_k^a + \log_k^b$  و  $\log_k^a = n \log_k^a$  است. (۱) (۲) (۳) (۴) (۷۲)

$$\log_{18}^8 = \frac{\log_7^8}{\log_7^{18}} = \frac{\log_7^{2^3}}{\log_7^{2 \cdot 9}} = \frac{3 \log_7^2}{2 + \log_7^9} = \frac{\frac{15}{8}}{2 + \frac{5}{8}} = \frac{\frac{15}{8}}{\frac{21}{8}} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۷۳)

چون پایه لگاریتم عدد ۲۱ می‌باشد بنابراین اعداد ۱۴۷ و ۱۳۲۳ را به ۲۱ تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{aligned} 1323 &= 21^2 \times 3, \quad 147 = 21 \times 7 \Rightarrow A = (\log_{21}^3)^2 + \log_{21}^{(21 \times 7)} \log_{21}^{(21^2 \times 3)} \\ A &= (\log_{21}^3)^2 + (\log_{21}^7 + \log_{21}^2)(\log_{21}^{21^2} + \log_{21}^3) = (\log_{21}^3)^2 + (1 + \log_{21}^2) \cdot (2 \log_{21}^{21} + \log_{21}^3) \end{aligned}$$

می‌دانیم:

$$3 \times 7 = 21 \Rightarrow \log_{21}^3 + \log_{21}^7 = \log_{21}^{21} \Rightarrow \log 7 = 1 - \log 3$$

$$A = (\log_{21}^3)^2 + (1 + 1 - \log_{21}^3) \cdot (2 + \log_{21}^3) = (\log_{21}^3)^2 + (4 - (\log_{21}^3)^2)$$

$$A = (\log_{21}^3)^2 + 4 - (\log_{21}^3)^2 = 4$$

۷۴ چون دو نقطه به طول‌های  $x = 2$  و  $x = 1$  محل برخورد این دو تابع است پس در هر دو تابع صدق می‌کند؛ بنابراین داریم: (۱) (۲) (۳) (۴) (۷۴)

$$y = x^y - x \rightarrow \begin{cases} y(1) = 0 \\ y(2) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(2) = 2 \end{cases}$$

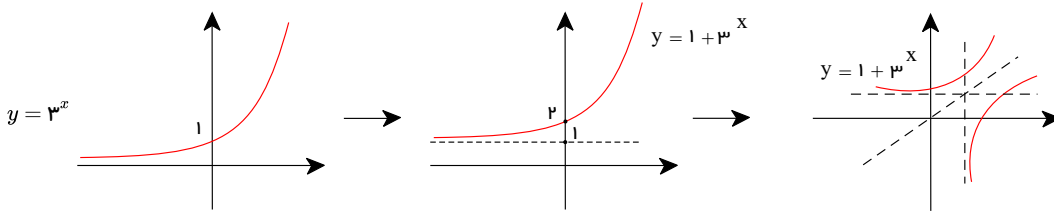
$$f(1) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{A+B} = 0 \Rightarrow 2^{-A-B} = 2^1 \Rightarrow \boxed{A+B=-1} \quad (1)$$

$$f(2) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2A+B} = 2 \Rightarrow 2^{-2A-B} = 2^2 \Rightarrow \boxed{2A+B=-2} \quad (2)$$

$$\begin{cases} A+B=-1 \\ 2A+B=-2 \end{cases} \Rightarrow A=-1, B=0 \Rightarrow f(x) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} \Rightarrow f(3) = -2 + 2^3 = 6$$

۷۵ توجه: هر تابعی با معکوس خود نسبت به نیم‌ساز اول و سوم قرینه است. (۱) (۲) (۳) (۴) (۷۵)

تابع  $y = 1 + 3^x$  را نسبت به خط  $y = x$  تقارن می‌دهیم.



می‌دانیم:  $\log_B^A = \frac{1}{\log_A^B}$ ,  $\log_B^A = \frac{\log_C^A}{\log_C^B}$  (۱) (۲) (۳) (۴) (۷۶)

روزانه ۵ درصد از حجم باد کم می‌شود پس ۰٫۹۵ باقی می‌ماند و در هر روز حجم باد دوباره در ۰٫۹۵ ضرب می‌شود پس حجم باد باقی‌مانده در روز  $n$  ام،  $k \times (۰٫۹۵)^n$  است ( $k$ ، حجم باد اولیه قایق است) که به گفته صورت سوال برابر  $\frac{k}{۲}$  می‌شود.

$$(۰٫۹۵)^n \times k = \frac{k}{۲} \Rightarrow (۰٫۹۵)^n = \frac{1}{۲}$$

چون متغیر در توان قرار دارد از طرفین لگاریتم در پایه  $\frac{1}{۲}$  می‌گیریم.

$$\log_{\frac{1}{۲}}(۰٫۹۵)^n = \log_{\frac{1}{۲}} \frac{1}{۲} \Rightarrow n \cdot \log_{\frac{1}{۲}} ۰٫۹۵ = 1$$

$$\log_{\frac{1}{۲}} ۰٫۹۵ = \frac{1}{n} \Rightarrow \log_{\frac{۱۰۰}{۲}} ۰٫۹۵ = \frac{1}{n} \Rightarrow \log_{\frac{۲۰}{۱۹}} ۲ = n$$

$$\frac{\log ۲}{\log \frac{۲۰}{۱۹}} = n \Rightarrow \frac{\log ۲}{\log ۲ + \log ۱۰ - \log ۱۹} = \frac{۰٫۳۰۱}{۰٫۳۰۱ + 1 - ۱٫۲۸۷} = \frac{۰٫۳۰۱}{۰٫۰۱۴} = \frac{۳۰۱}{۱۴} = ۲۱٫۵$$

می‌دانیم: برای محاسبه دامنه تابع  $y = \log(f(x))$  باید  $f(x) > ۰$  قرار داده و حدود  $x$  را پیدا کنیم. (۱) (۲) (۳) (۴) (۷۷)

$$\frac{1}{۶ + \sqrt{|x|} - |x|} > ۰ \Rightarrow ۶ + \sqrt{|x|} - |x| > ۰ \xrightarrow{\sqrt{|x|=t}} ۶ + t - t^2 > ۰ \Rightarrow t^2 - t - ۶ < ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۳ \\ t = -۲ \end{cases} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c} t & -۲ & ۳ & & & \\ \hline & + & ۰ & - & ۰ & + \end{array}$$

$$\Rightarrow -۲ < t < ۳ \Rightarrow -۲ < \sqrt{|x|} < ۳$$

پس داریم:

$$\underbrace{-۲ < \sqrt{|x|}}_{\text{بندهی}} < ۳ \Rightarrow \sqrt{|x|} < ۳ \Rightarrow |x| < ۹ \Rightarrow -۹ < x < ۹$$

روش دوم: عددگذاری

فقط گزینه ۵  $x = -۵$  قابل قبول را قبول کرده است و جواب مسئله است.

روش اول: (۱) (۲) (۳) (۴) (۷۸)

شرط اول:  $x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow |x| \geq 1 \Rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$  (۱)

شرط دوم:  $x^2 - x - 2 > 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

$$\frac{x}{x^2 - x - 2} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c} & -1 & 2 & & & \\ \hline & + & - & + & & \end{array} \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$$
 (۲)

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$$

روش دوم: عددگذاری

اگر  $x = ۲ \Rightarrow \log(۲^2 - ۲ - ۲) = \log^0 = \log^0 \Rightarrow$  غیر قابل قبول

پس عدد ۲ در دامنه عبارت نیست فقط گزینه ۳ حذف می‌شود.

گزینه ۲ و ۴ نیز حذف می‌شوند.  $\Rightarrow$  غیر قابل قبول  $\Rightarrow \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{-1} \Rightarrow x = ۰$



$$y = 2^{x+|x|} \xrightarrow{\text{واحد چپ}} y_1 = 2^{x+3+|x+3|} \xrightarrow{\text{واحد باین}} y_2 = 2^{x+3+|x+3|} - 2 \xrightarrow{y=0} 2^{x+3+|x+3|} = 2^1 \rightarrow x+3+|x+3| = 1$$

$$\rightarrow x+|x+3| = -2 \xrightarrow{\text{چک کردن گزینه‌ها}} x = -\frac{5}{2}$$

می‌دانیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۸۰

$$\log_y x = \frac{1}{\log_x y}$$

$$\Rightarrow \log_x^y \frac{2}{\log_x^y} = 1 \xrightarrow{\log_x^y = t} t - \frac{2}{t} = 1 \xrightarrow{\times t} t^2 - t - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = -1 \Rightarrow \log_x^y = -1 \Rightarrow x^{-1} = y \Rightarrow y = \frac{1}{x} \\ t = 2 \Rightarrow \log_x^y = 2 \Rightarrow x^2 = y \end{cases}$$

می‌دانیم:

$$a^{\log_a b} = b$$

ابتدا دامنه تابع را می‌یابیم:

$$y = 9^{\log_3 x} \Rightarrow x > 0$$

$$D_f = (0, +\infty)$$

$$f(x) = 9^{\log_3 x} = 3^{2 \log_3 x} = 3^{\log_3 x^2} = x^2$$

$$D_f : (0, +\infty)$$

البته دقت کنید که دامنه تابع  $x > 0$  است.

$$\log_B^A = \frac{\log_C^A}{\log_C^B} \quad \text{می‌دانیم: } ۱ \quad ۲ \quad ۳ \quad ۴ \quad ۸۲$$

جمعیت در هر سال یک درصد کاهش پیدا می‌کند. پس جمعیت با گذشت هر سال به ۰٫۹۹ مقدار قبلی کاهش می‌یابد و اگر جمعیت اولیه  $k$  باشد، در پایان سال اول جمعیت  $(k \times 0.99)$  است و در پایان سال  $n$  ام جمعیت  $k \cdot (0.99)^n$  است.

$$k \cdot (0.99)^n = \frac{k}{2} \Rightarrow (0.99)^n = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_{0.99}^{(0.99)^n} = \log_{0.99} \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log \frac{1}{2}}{\log 0.99} = \frac{-\log 2}{\log 99 - \log 100} = \frac{-0.3}{1.995 - 2} = 60$$

$$\log_n^A + \log_n^B = \log_n^{A \cdot B} \quad \text{می‌دانیم: } ۱ \quad ۲ \quad ۳ \quad ۴ \quad ۸۳$$

$$\log(x+2) + \log(2x-1) = \log(4x+1)$$

$$\Rightarrow \log(x+2) \cdot (2x-1) = \log(4x+1) \Rightarrow 2x^2 - x + 4x - 2 = 4x + 1$$

$$\Rightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = -\frac{c}{a} = \frac{3}{2}$$

با توجه به دامنه تابع لگاریتمی،  $x = -1$  قابل قبول نیست چون این عدد ضابطه  $\log(2x-1)$  را منفی می‌کند.

$$\log_{\frac{3}{2}}^{(2x+5)} = \frac{x}{2} \log_{\frac{3}{2}}^{(2(\frac{3}{2})+5)} = \log_{\frac{3}{2}}^A = \log_{\frac{3}{2}}^{2^3} = \frac{3}{2} \log_{\frac{3}{2}}^2 = \frac{3}{2}$$

$$\log_n^A - \log_n^B = \log_n^{\frac{A}{B}}, \quad \log_b^a = c \Leftrightarrow b^c = a \quad \text{می‌دانیم: } ۱ \quad ۲ \quad ۳ \quad ۴ \quad ۸۴$$

چون تابع از دو نقطه  $(2, 6)$  و  $(12, 10)$  می‌گذرد پس مختصات آن در تابع صدق می‌کند.

بنابراین:

$$(12, 10) \xrightarrow{\text{تلع}} 10 = a + \log_r(12b - 4) \quad (I)$$

$$(2, 6) \xrightarrow{\text{تلع}} 6 = a + \log_r(2b - 4)$$

$$4 = \log_r(12b - 4) - \log_r(2b - 4) \Rightarrow 4 = \log_r \frac{12b - 4}{2b - 4}$$

$$\frac{12b - 4}{2b - 4} = 16 \Rightarrow b = 3 \xrightarrow{(I)} a = 5$$

این دو رابطه را از هم کم می‌کنیم:



$$\log A + \log B = \log A \cdot B$$

$$\log(2x - 5) + \log(x + 1) = \log(4x - 1) \Rightarrow \log(2x - 5) \cdot (x + 1) = \log(4x - 1)$$

$$\Rightarrow (2x - 5) \cdot (x + 1) = (4x - 1) \Rightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 4x - 1 \Rightarrow 2x^2 - 7x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = 4 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \notin D_f, \quad x = 4 \in D_f$$

$$\log_p^{(2x+1)} = \log_p^{(4+1)} = \log_p^5 = \log_p^{2^2} = 2 \log_p^2 = 2$$

$$\text{می‌دانیم } \log_b^a = c \rightarrow a = b^c \text{ و } \log_k^a = \frac{1}{\log_k^a} \text{ و } \log_{k^m}^a = \frac{1}{m} \log_k^a$$

$$x = 4 \rightarrow 2 \log_4^a + \log_a^4 = 2 \rightarrow 2 \log_{\frac{2^2}{2}}^a + \log_{2^2}^4 = 2 \rightarrow \log_2^a + \log_a^4 = 2$$

دو عدد که معکوس یکدیگرند وقتی مجموعشان ۲ شود یعنی هر کدام یک بوده‌اند.

$$\log_p^a = 1 \xrightarrow{\text{تعریف}} a = 2$$

# پاسخنامه کلیبی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴

۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴
۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴
۴۱	۱	۲	۳	۴
۴۲	۱	۲	۳	۴
۴۳	۱	۲	۳	۴
۴۴	۱	۲	۳	۴

۴۵	۱	۲	۳	۴
۴۶	۱	۲	۳	۴
۴۷	۱	۲	۳	۴
۴۸	۱	۲	۳	۴
۴۹	۱	۲	۳	۴
۵۰	۱	۲	۳	۴
۵۱	۱	۲	۳	۴
۵۲	۱	۲	۳	۴
۵۳	۱	۲	۳	۴
۵۴	۱	۲	۳	۴
۵۵	۱	۲	۳	۴
۵۶	۱	۲	۳	۴
۵۷	۱	۲	۳	۴
۵۸	۱	۲	۳	۴
۵۹	۱	۲	۳	۴
۶۰	۱	۲	۳	۴
۶۱	۱	۲	۳	۴
۶۲	۱	۲	۳	۴
۶۳	۱	۲	۳	۴
۶۴	۱	۲	۳	۴
۶۵	۱	۲	۳	۴
۶۶	۱	۲	۳	۴

۶۷	۱	۲	۳	۴
۶۸	۱	۲	۳	۴
۶۹	۱	۲	۳	۴
۷۰	۱	۲	۳	۴
۷۱	۱	۲	۳	۴
۷۲	۱	۲	۳	۴
۷۳	۱	۲	۳	۴
۷۴	۱	۲	۳	۴
۷۵	۱	۲	۳	۴
۷۶	۱	۲	۳	۴
۷۷	۱	۲	۳	۴
۷۸	۱	۲	۳	۴
۷۹	۱	۲	۳	۴
۸۰	۱	۲	۳	۴
۸۱	۱	۲	۳	۴
۸۲	۱	۲	۳	۴
۸۳	۱	۲	۳	۴
۸۴	۱	۲	۳	۴
۸۵	۱	۲	۳	۴
۸۶	۱	۲	۳	۴



# سوالات سراسری هفته سوم

## تابع



معین کرمی

۱ در بازه‌ای که تابع  $f(x) = |x - 2| + |x - 3|$  روی آن اکیداً نزولی است، نمودار  $f$  با نمودار تابع  $g(x) = 2x^2 - x - 1$  چند نقطه مشترک دارد؟

- ۱ ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ فاقد نقطه مشترک ۴)

۲ تابع با ضابطه  $f(x) = x|x - 2|$ ، در یک بازه، نزولی است. ضابطه معکوس آن در این بازه، کدام است؟

- ۱  $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1+x}; x < 0$  ۱)  
 ۲  $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1-x}; x < 1$  ۲)  
 ۳  $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1-x}; 0 < x < 1$  ۳)  
 ۴  $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1-x}; 0 < x < 1$  ۴)

۳ اگر  $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$  و  $g(x) = \sqrt{x-x^2}$  باشند. دامنه‌ی تعریف تابع  $g \circ f$ ، کدام است؟

- ۱  $(0, 1)$  ۱) ۲  $\{0\}$  ۲) ۳  $(-1, 1)$  ۳) ۴  $\mathbb{R} - \{1, -1\}$  ۴)

۴ قرینه نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  را نسبت به محور  $y$ ‌ها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف  $x$ ‌های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیمساز ناحیه اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

- ۱  $-2$  ۱) ۲  $0.5$  ۲) ۳  $1$  ۳) ۴  $1.5$  ۴)

۵ نمودار تابع  $y = \left| \frac{1}{2}x \right| - 2$  را، ۴ واحد به طرف  $x$ ‌های منفی و یک واحد به طرف  $y$ ‌های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه، با کدام طول متقاطع‌اند؟

- ۱  $-3.5$  ۱) ۲  $-3$  ۲) ۳  $-2.5$  ۳) ۴  $-2$  ۴)

۶ اگر  $f(2x - 3) = 4x^2 - 14x + 13$  باشد، ضابطه  $f(x)$ ، برابر کدام است؟

- ۱  $x^2 - x + 3$  ۱) ۲  $x^2 - 2x - 1$  ۲) ۳  $x^2 - 2x + 1$  ۳) ۴  $x^2 - x + 1$  ۴)

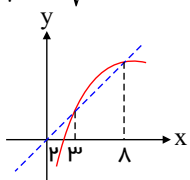
۷ اگر  $f(x) = \sqrt{3-x}$  و  $g(x) = \log_7(x^2 + 2x)$  باشند، دامنه‌ی تعریف تابع  $f \circ g$  کدام است؟

- ۱  $[-4, 2]$  ۱) ۲  $[-2, 0]$  ۲) ۳  $[-4, -1] \cup (1, 2]$  ۳) ۴  $[-4, -2] \cup (0, 2]$  ۴)

۸ ضابطه‌ی وارون تابع  $y = \frac{x}{1+|x|}$  کدام است؟

- ۱  $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}; |x| < 1$  ۱)  
 ۲  $f^{-1}(x) = \frac{1-|x|}{|x|}; |x| > 1$  ۲)  
 ۳  $f^{-1}(x) = \frac{x}{|x|-1}; |x| > 1$  ۳)  
 ۴  $f^{-1}(x) = \frac{|x|-1}{x}; |x| < 1$  ۴)

۹ شکل روبه‌رو، مربوط به نمودار تابع  $y = f(x)$  و نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم است. دامنه‌ی تعریف تابع با ضابطه‌ی  $\sqrt{x - f^{-1}(x)}$ ، کدام است؟



- ۱  $(0, 2]$  ۱) ۲  $[2, 3]$  ۲) ۳  $[2, 8]$  ۳) ۴  $[3, 8]$  ۴)



۱۰ نمودار تابع  $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$  با دامنه  $\mathbb{R} - \{2\}$  نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می کند؟

- ۱)  $-1, -4$       ۲)  $-1, 4$       ۳)  $1, -4$       ۴)  $1, 4$

۱۱ نمودار تابع  $y = -x^2 + 2x + 5$  را ۳ واحد به طرف  $x$  های مثبت، سپس ۲ واحد به طرف  $y$  های منفی انتقال می دهیم. نمودار جدید در کدام بازه، بالای نیمساز ربع اول است؟

- ۱)  $(3, 4)$       ۲)  $(2, 5)$       ۳)  $(3, 5)$       ۴)  $(2, 6)$

۱۲ اگر عبارت  $\sqrt[3]{2x - x^2} + \sqrt{\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2}}$  عدد حقیقی باشد، مجموعه مقادیر  $x$  در کدام بازه است؟

- ۱)  $[\frac{2}{3}, 2]$       ۲)  $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$       ۳)  $[-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, 2]$       ۴)  $[-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, \frac{2}{3}]$

۱۳ اگر  $f(x) = x^2 - 2x - 3$ ;  $x \geq 1$  باشد، نمودارهای دو تابع  $f^{-1}(x)$  و  $g(x) = \frac{x-9}{2}$  با کدام طول، متقاطع هستند؟

- ۱)  $12$       ۲)  $15$       ۳)  $18$       ۴)  $21$

۱۴ اگر  $f(x) = x^2 - x - 2$  و  $f(g(x)) = x^2 + x - 2$ ، آن گاه  $(f+g)(x)$  کدام گزینه می تواند باشد؟

- ۱)  $x^2 - 1$       ۲)  $x^2 + 1$       ۳)  $x^2 - 2x$       ۴)  $x^2 + 2x$

۱۵ قرینه ی خط  $3y - 2x = 4$  را نسبت به خط  $y = x$ ، خط  $d$  می نامیم. عرض از مبدأ خط  $d$  کدام است؟

- ۱)  $-2$       ۲)  $-1$       ۳)  $1$       ۴)  $2$

۱۶ ضابطه ی وارون  $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$  به کدام صورت است؟

- ۱)  $f(x) = x\sqrt{|x|}; x \in \mathbb{R}$       ۲)  $f^{-1}(x) = x\sqrt{|x|}; x \in \mathbb{R} - \{0\}$

- ۳)  $f^{-1}(x) = x|x|; x \in \mathbb{R} - \{0\}$       ۴)  $f^{-1}(x) = x|x|; x \in \mathbb{R}$

۱۷ اگر  $f(x-3) = x^2 - 4x + 5$ ، آن گاه  $f(1-x)$  کدام است؟

- ۱)  $x^2 - 4x + 5$       ۲)  $x^2 + 3$       ۳)  $x^2 + 4x + 5$       ۴)  $x^2 + 1$

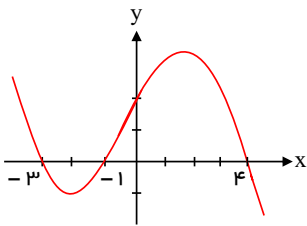
۱۸ تابع با ضابطه  $f(x) = |x+2| + |x-1|$ ، روی کدام بازه، اکیداً نزولی است؟

- ۱)  $(-\infty, -2)$       ۲)  $(-\infty, 1)$       ۳)  $(-2, 1)$       ۴)  $(1, +\infty)$

۱۹ شکل روبه رو، نمودار تابع  $y = f(x-2)$  است: دامنه ی تعریف تابع با ضابطه ی  $\sqrt{xf(x)}$ ، کدام است؟

- ۱)  $[-1, 1] \cup [0, 6]$       ۲)  $[-3, 1] \cup [0, 2]$

- ۳)  $[-5, -3] \cup [-1, 2]$       ۴)  $[-5, -3] \cup [0, 2]$



۲۰ اگر  $g(x) = f(x) + \sqrt{f(x)}$  و  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2x}$  حاصل  $g^{-1}(6)$  کدام است؟

- ۱)  $1$       ۲)  $2$       ۳)  $3$       ۴)  $4$

۲۱ اگر  $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$  باشد، دامنه ی تابع  $y = f(3-x)$ ، کدام است؟

- ۱)  $[0, 2]$       ۲)  $[0, 3]$       ۳)  $[1, 2]$       ۴)  $[1, 3]$

۲۲ دو تابع  $f = \{(2, 5), (6, 3), (3, 7), (4, 1), (1, 9)\}$  و  $g(x) = \frac{x}{x-1}$  مفروض اند. اگر  $f^{-1}(g(2a)) = 6$  باشد،  $a$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{1}{2}$       ۲)  $\frac{3}{4}$       ۳)  $\frac{3}{2}$       ۴)  $\frac{5}{2}$



۲۳ اگر  $f(x) = \frac{2}{5}x - 4$  و  $g(x) = x^3 + x$  باشند، مقدار  $(g^{-1} \circ f^{-1})(8)$  کدام است؟

- ۱) ۱٫۵      ۲) ۲      ۳) ۲٫۵      ۴) ۳

۲۴ تابع با ضابطه  $f(x) = |x + 1| - |x - 2|$  روی کدام بازه، اکیداً صعودی است؟

- ۱)  $(-\infty, 2)$       ۲)  $(-1, +\infty)$       ۳)  $(-1, 2)$       ۴)  $(2, +\infty)$

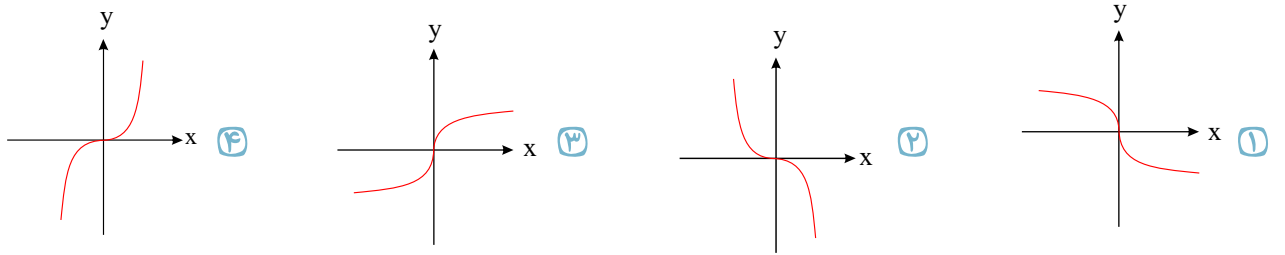
۲۵ نمودار تابع  $y = x^2 - x - 3$  را  $2$  واحد به طرف  $x$ ‌های منفی سپس  $9$  واحد به طرف  $y$ ‌های منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید، در کدام بازه، زیر محور  $x$ ‌ها است؟

- ۱)  $(-5, 2)$       ۲)  $(-5, 3)$       ۳)  $(-2, 3)$       ۴)  $(-2, 5)$

۲۶ تابع با ضابطه  $f(x) = |2x - 6| - |x + 1|$ ، در یک بازه، صعودی است. ضابطه‌ی معکوس آن، در این بازه کدام است؟

- ۱)  $f^{-1}(x) = -x + 7; x > 8$       ۲)  $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + 2; x > 3$   
 ۳)  $f^{-1}(x) = x + 7; x > -4$       ۴)  $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 1; -4 < x < 8$

۲۷ اگر  $f(x) = x|x|$  باشد، نمودار تابع  $y = f^{-1}(x)$  کدام است؟



۲۸ ضابطه وارون تابع  $f(x) = 2 - \sqrt{x - 1}$  به کدام صورت است؟

- ۱)  $f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 5; x \leq 2$       ۲)  $f^{-1}(x) = -x^2 + 4x - 5; x \leq 2$   
 ۳)  $f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 5; x \geq 1$       ۴)  $f^{-1}(x) = -x^2 + 4x - 5; x \geq 1$

۲۹ اگر  $f(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$  و  $g(x) = \sqrt{x - x^2}$  باشند، دامنه‌ی تعریف تابع  $g \circ f$  کدام است؟

- ۱)  $[0, 1]$       ۲)  $[-1, 1]$       ۳)  $R$       ۴)  $R - (-1, 1)$

۳۰ اگر  $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1}$  و  $g(x) = \frac{2x + 2}{2 - x}$  باشند، ضابطه تابع  $g(f(x))$  کدام است؟

- ۱)  $x - 1$       ۲)  $x + 1$       ۳)  $x$       ۴)  $2x$

۳۱ در تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x + 4} & ; x > 3 \\ 2x + 3 & ; x \leq 3 \end{cases}$  مقدار  $f(f(5)) + f(f(1))$  کدام است؟

- ۱) ۹      ۲) ۷      ۳) ۸      ۴) ۶

۳۲ اگر  $g(x) = 2x + 1$  و  $(f \circ g)(x) = 8x^2 + 6x + 5$  باشند، تابع  $f(x)$  برابر کدام است؟

- ۱)  $2x^2 + 3x + 1$       ۲)  $2x^2 - 2x + 3$       ۳)  $2x^2 - x + 4$       ۴)  $2x^2 + x + 3$

۳۳ اگر  $f(x) = |x|$  و  $g(x) = x^2 + 2x + 1$  باشد، حاصل  $(f \circ g)(1 - \sqrt{2}) - (g \circ f)(1 - \sqrt{2})$  کدام است؟

- ۱) ۴      ۲)  $4(\sqrt{2} - 1)$       ۳)  $4(1 - \sqrt{2})$       ۴)  $4\sqrt{2}$

۳۴ اگر  $f(x) = |x| - x$  ضابطه‌ی تابع  $f(f(x))$  برابر کدام است؟

- ۱)  $x$       ۲)  $|x|$       ۳)  $x + |x|$       ۴)  $0$



۳۵) اگر  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$  و  $f \circ g(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$  مقدار  $g(1)$  کدام است؟

- ۱) ۲      ۲) ۳      ۳) ۴      ۴) ۵

۳۶) فرض کنیم  $f(g(x)) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 4$  و  $g(x) = x - \frac{1}{x}$  در این صورت  $f(x)$  کدام است؟

- ۱)  $x^2 - 2$       ۲)  $x^2 + 2$       ۳)  $x^2 - 4$       ۴)  $x^2 + 4$

۳۷) ابتدا قرینه نمودار تابع  $f(x) = (x-1)^2$  را نسبت به مبدأ مختصات رسم کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی کدام است؟

- ۱) ۰.۲      ۲) -۱.۱      ۳) -۱.۲      ۴) ۱.۰-۲

۳۸) فرض کنید در دامنه  $[0, +\infty)$  تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{2^x + (\frac{1}{2})^x}{2}$  مفروض باشد.  $f^{-1}(2)$  کدام است؟

- ۱)  $\log_2(2 - \sqrt{3})$       ۲)  $\log_2(\sqrt{3} - 1)$       ۳)  $\log_2(1 + \sqrt{3})$       ۴)  $\log_2(2 + \sqrt{3})$

۳۹) اگر  $f = \{(1, 2), (2, 5), (5, 3), (4, -1)\}$  و  $g = \{(2, 3), (-1, 4), (4, 1), (3, 0)\}$  تابع  $g \circ f^{-1}$  کدام است؟

- ۱)  $g \circ f^{-1}(x) = \{(0, 0), (1, 3)\}$       ۲)  $g \circ f^{-1}(x) = \{(2, 4), (3, 5)\}$       ۳)  $g \circ f^{-1}(x) = \{(5, 3), (-1, 1)\}$       ۴)  $g \circ f^{-1}(x) = \{(2, 0), (-1, 4)\}$

۴۰) اگر  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  و  $f = \{(x, 2x-1), x \in A\}$  باشد، تابع  $f(f(x))$  شامل چند عضو است؟

- ۱) ۱      ۲) ۲      ۳) ۳      ۴) ۴

۴۱) دو تابع  $f = \{(5, 2), (7, 3), (1, 4), (3, 6), (9, 1)\}$  و  $g(x) = \sqrt{5x+9}$  مفروض‌اند. اگر  $(g^{-1} \circ f^{-1})(a) = 8$  باشد،  $a$  کدام است؟

- ۱) ۲      ۲) ۳      ۳) ۶      ۴) ۷

۴۲) اگر  $f(x) = x + \sqrt{x}$ ،  $g = \{(1, 2), (5, 4), (6, 5), (2, 3)\}$  و  $g(f(a)) = 5$  باشد، عدد  $a$  کدام است؟

- ۱) ۱      ۲) ۲      ۳) ۳      ۴) ۴

۴۳) ضابطه‌ی وارون تابع  $y = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases}$  کدام است؟

- ۱)  $f^{-1}(x) = x|x|; x \in \mathbb{R}$       ۲)  $f^{-1}(x) = -x^2; x < 0$       ۳)  $f^{-1}(x) = \pm x^2; x \in \mathbb{R}$       ۴)  $f^{-1}(x) = \pm x|x|; x \in \mathbb{R}$

۴۴) نمودار تابع با ضابطه‌ی  $y = x^2 - 3x - 1 = 0$  را، حداقل چند واحد به طرف  $x$ ‌های مثبت انتقال دهیم، تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور  $x$ ‌ها غیر منفی باشد؟

- ۱) ۱      ۲) ۱.۵      ۳) ۲      ۴) ۳

۴۵) اگر  $f(x) = 2x - 2$  و  $g(x) = x^2 - 1$  باشد جواب معادله‌ی  $f \circ g(x) = 0$  کدام است؟

- ۱)  $\pm\sqrt{2}$       ۲)  $\pm 2$       ۳)  $\pm\sqrt{3}$       ۴)  $\pm 3$

۴۶) اگر  $f(g(x)) = \frac{x}{x-3}$  و  $g(x) = 2x - 1$  مقدار  $f(3)$  کدام است؟

- ۱) -۴      ۲) -۲      ۳) ۲      ۴) ۴

۴۷) ضابطه‌ی وارون تابع  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases}$  کدام است؟

- ۱)  $f^{-1}(x) = -x^2$       ۲)  $f^{-1}(x) = x^2$       ۳)  $f^{-1}(x) = x|x|$       ۴)  $f^{-1}(x) = -x|x|$



۴۸ دامنهٔ تعریف تابع  $f(x) = \sqrt{1 - \log(x-1)}$  به کدام صورت است؟

- ①  $(1, 2]$       ②  $[2, 10]$       ③  $[1, 11]$       ④  $(1, 11]$

۴۹ تابع با ضابطهٔ  $g(x) = x - \sqrt{x}$  مفروض است. اگر نمودار تابع  $f$  محور  $x$ ها را در دو نقطه به طولهای ۶ و  $-\frac{1}{4}$  قطع کند، آنگاه نمودار تابع

$f \circ g$ ، محور  $x$ ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

- ①  $\frac{1}{9}$  و ۴      ② ۹ و  $\frac{1}{4}$       ③  $\frac{1}{4}$  و ۴      ④ ۴ و ۹

۵۰ در تابع با ضابطهٔ  $f(x) = a \cdot b^x$ ;  $b > 0$  داریم  $f(0) = \frac{3}{2}$  و  $f(-2) = \frac{3}{32}$ ، مقدار  $f(\frac{3}{2})$  کدام است؟

- ① ۶      ② ۸      ③ ۱۲      ④ ۲۴

۵۱ اگر  $f(x) = \sqrt{x+|x|}$  و  $g(x) = \frac{1}{x^2 - 4x}$ ، دامنهٔ تعریف تابع  $g \circ f$  کدام است؟

- ①  $(0, 8) \cup (8, +\infty)$       ②  $\mathbb{R} - \{0, 8\}$       ③  $\mathbb{R} - \{0\}$       ④  $(0, +\infty)$

۵۲ اگر  $f(x) = \frac{x}{x-1}$  باشد، ضابطهٔ تابع  $f(x^2) - 2f(x) + 1$  کدام است؟

- ①  $\frac{1}{1-x^2}$       ②  $\frac{2x}{x^2-1}$       ③  $\frac{2x+1}{1-x^2}$       ④  $\frac{2x-1}{x^2-1}$

۵۳ اگر  $f(x) = \sqrt{x+2|x|}$ ، مقدار  $f(f(-144))$  کدام است؟

- ① تعریف نشده      ② ۶      ③ ۸      ④ ۱۲

۵۴ اگر  $f(x) = (2x-3)^2$  و  $g(x) = x+2$  نمودارهای دو تابع  $f$  و  $f \circ g$ ، با کدام طول متقاطع اند؟

- ① -۱      ②  $\frac{1}{2}$       ③ ۱      ④  $\frac{3}{2}$

۵۵ تابع با ضابطهٔ  $f(x) = \frac{2^x - (\frac{1}{2})^x}{2}$  را در نظر بگیرید.  $f^{-1}(2)$ ، کدام است؟

- ①  $\log_2(-1 + \sqrt{5})$       ②  $\log_2(1 + \sqrt{5})$       ③  $\log_2(2 + \sqrt{5})$       ④  $\log_2(3 + \sqrt{5})$

۵۶ تابع با ضابطهٔ  $f(x) = |x^3|$  با دامنه  $R$ ، چگونه است؟

- ① نزولی      ② صعودی      ③ وارون ناپذیر      ④ یک به یک

۵۷ اگر  $f(x) = [x] - x$  و  $g(x) = \frac{1-2x}{x+1}$  باشند، برد تابع  $g \circ f$ ، کدام است؟ (  $[ ]$ ، نماد جزء صحیح است.)

- ①  $[-1, 1]$       ②  $(-1, 1]$       ③  $[1, +\infty)$       ④  $(-\infty, 1]$

۵۸ نمودار تابع با ضابطهٔ  $f(x) = x^2 - 2x$ ; ( $x > 1$ ) مفروض است. قرینهٔ نمودار آن نسبت به محور  $x$ ها را، ۱۶ واحد در امتداد محور  $y$ ها در

جهت مثبت انتقال می‌دهیم. فاصلهٔ نقطهٔ برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع  $f$ ، از مبدأ مختصات، کدام است؟

- ①  $4\sqrt{5}$       ②  $6\sqrt{2}$       ③  $5\sqrt{2}$       ④  $2\sqrt{5}$

۵۹ اگر  $f(x) = 2x^2 + 4$  و  $f(g(x)) = 4x^2 + 6x$ ، مقدار  $g(-2)$  کدام است؟

- ① صفر      ② ۱      ③ -۱      ④ ۲

۶۰ اگر  $f(x) = \sin x$  و  $g(x) = x\sqrt{1-x^2}$ ، مقدار  $(g \circ f)(\frac{\pi}{4})$  کدام است؟

- ①  $\frac{1}{2}$       ②  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       ③ ۱      ④  $\sqrt{2}$



۶۱ تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = x - \frac{2}{x}$  در دامنه  $D_f = (-\infty, 0)$  را در نظر بگیرید. نمودار تابع  $f^{-1}$  نیمساز ناحیه چهارم را با کدام طول، قطع می‌کند؟

- ۱  ۲  ۳  ۴

۶۲ اگر  $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$  و  $g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\}$  باشند. تابع  $\frac{g}{g \circ f^{-1}}$  کدام است؟

- ۱   $\{(4, 2), (5, 2)\}$  ۲   $\{(4, 2), (3, 5)\}$  ۳   $\{(5, 2), (2, 4)\}$  ۴   $\{(3, 5), (2, 4)\}$

۶۳ اگر  $f(x) = \sqrt{2 - x - x^2}$ ، مقدار  $f(f(-1))$  کدام است؟

- ۱  تعریف نشده ۲  ۰ ۳  ۱ ۴   $\sqrt{2}$

۶۴ با فرض  $x \geq 2$  و  $f(x) = x^2 - 4x + 9$  و  $g(x) = \frac{3-x}{2}$ ، حاصل  $(f^{-1} \circ g^{-1})(-9)$  کدام است؟

- ۱  ۳ ۲  ۴ ۳  ۵ ۴  ۶

۶۵ اگر  $f(x) = x + |x|$  و  $g(x) = |x + 1| + 1$ ؛ آنگاه برد تابع  $(\frac{f}{g})(x)$ ، کدام است؟

- ۱   $(0, 1)$  ۲   $(0, 2)$  ۳   $(0, +\infty)$  ۴   $(1, +\infty)$

۶۶ اگر  $f(x) = \frac{2x+3}{2-x}$  و  $g(x) = \frac{1-3x}{x+2}$  باشند، ضابطه‌ی تابع  $g(f(x))$  کدام است؟

- ۱   $x$  ۲   $-x$  ۳   $-x - 1$  ۴   $x + 1$

۶۷ اگر  $f(x) = 3 + \sqrt{2x}$ ، آنگاه  $f(8)$  کدام است؟

- ۱  ۵ ۲  ۳ ۳  ۷ ۴  ۸

۶۸ تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = x - \frac{1}{2x}$  بر دامنه  $(0, +\infty)$  مفروض است. نمودار تابع  $f^{-1}$  نیمساز ناحیه دوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

- ۱   $-\frac{3}{2}$  ۲   $-\frac{3}{4}$  ۳   $-1$  ۴   $-\frac{1}{2}$

۶۹ رابطه‌ی  $\{(3, m^2), (2, 1), (-3, m), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$  به ازای کدام مقدار  $m$ ، یک تابع است؟

- ۱   $-2$  ۲   $-1$  ۳  ۲ ۴  هیچ مقدار  $m$

۷۰ اگر توابع  $f$  و  $g$  به عنوان ماشین به صورت  $x \rightarrow f \rightarrow g \rightarrow 2x$  باشند و  $g(x) = 3x + 4$ ، مقدار  $f(5)$  کدام است؟

- ۱  ۱ ۲  ۲ ۳  ۳ ۴  ۴

۷۱ اگر  $f(x) = x + \sqrt{x}$  و  $g(x) = \frac{9x+6}{1-x}$  باشند، مقدار  $(g^{-1} \circ f^{-1})(20)$ ، کدام است؟

- ۱   $\frac{2}{5}$  ۲   $\frac{3}{5}$  ۳   $\frac{2}{3}$  ۴   $\frac{3}{4}$

۷۲ اگر  $f(x) = 2x - [2x]$  و  $g(x) = -x^2 + 4x$  باشند، بُرد تابع  $g \circ f$ ، کدام است؟ ( [ ]، نماد جزء صحیح است)

- ۱   $(0, 2)$  ۲   $(0, 3)$  ۳   $(0, 4)$  ۴   $(1, 4)$

۷۳ اگر  $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$  و  $g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\}$  دو تابع باشند، برد تابع  $(g^{-1} \circ f) - f$ ، کدام است؟

- ۱   $\{-1, 4\}$  ۲   $\{2, 3\}$  ۳   $\{3, 4\}$  ۴   $\{2, -1\}$



- ۷۴) نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{x}$  را در امتداد محور  $x$  ها، ۱۲ واحد در جهت مثبت و سپس در امتداد محور  $y$  ها، ۲ واحد در جهت مثبت، انتقال می دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع  $f$ ، از مبدأ مختصات، کدام است؟
- ۱)  $4\sqrt{15}$     ۲)  $6\sqrt{7}$     ۳)  $4\sqrt{17}$     ۴)  $6\sqrt{10}$
- ۷۵) اگر  $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$  و  $g(x) = x+4$  باشند، جواب معادله  $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ ، کدام است؟
- ۱)  $-1, -7$     ۲)  $1, -7$     ۳)  $-1, 7$     ۴)  $1, 7$
- ۷۶) اگر  $f(x) = 4 - 3^{2x}$  باشد، دامنه تابع  $g(x) = \sqrt{x f^{-1}(x)}$ ، کدام است؟ (با تغییر)
- ۱)  $[2, 3]$     ۲)  $[3, 4]$     ۳)  $[0, 3]$     ۴)  $[0, 4]$
- ۷۷) اگر  $f(x) = 2^x$  باشد، دامنه تابع  $y = \sqrt{f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x)}$ ، به کدام صورت است؟
- ۱)  $\mathbb{R} - (-1, 1)$     ۲)  $[-1, 0) \cup (0, 1]$     ۳)  $[-1, 0) \cup [1, +\infty)$     ۴)  $(-\infty, -1] \cup (0, 1]$
- ۷۸) اگر  $f(x) = x - [x]$  و  $g(x) = \frac{1-x}{x}$ ، برد تابع  $g \circ f$  کدام بازه است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)
- ۱)  $(0, +\infty)$     ۲)  $[0, +\infty)$     ۳)  $(1, +\infty)$     ۴)  $[1, +\infty)$
- ۷۹) تابع  $f: [-4, 4] \rightarrow [-4, 4]$  با ضابطه  $f(x) = [x]$  چگونه است؟ (با تغییر)
- ۱) نزولی - یک به یک    ۲) نزولی - غیر یک به یک    ۳) صعودی - غیر یک به یک    ۴) صعودی - یک به یک
- ۸۰) شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه  $f(x)$  است. دامنه تابع غیرنقطه ای  $\sqrt{(x+1)f(x)}$  کدام است؟
- ۱)  $[-3, 2]$     ۲)  $[-1, +\infty)$     ۳)  $(-\infty, -1]$     ۴)  $\mathbb{R} - (-3, 2)$
- 
- ۸۱) اگر  $f(x) = [x]$  و  $g(x) = \frac{x}{1-x}$ ، آن گاه  $(f \circ g)(\sqrt{2})$  کدام است؟
- ۱)  $-4$     ۲)  $-3$     ۳)  $-2$     ۴)  $-1$
- ۸۲) اگر  $f(x) = 2 - |x+1|$  و  $g(x) = x + |x|$  باشد، برد تابع  $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ ، کدام است؟
- ۱)  $(-\infty, \frac{1}{2})$     ۲)  $(-1, +\infty)$     ۳)  $(-\frac{1}{2}, +\infty)$     ۴)  $(0, +\infty)$
- ۸۳) اگر رابطه  $f = \{(3, 2), (a, 5), (3, a^2 - a), (b, 2), (-1, 4)\}$  تابع یک به یک باشد، دوتایی  $(a, b)$  کدام است؟
- ۱)  $(-1, 1)$     ۲)  $(-1, 3)$     ۳)  $(2, 1)$     ۴)  $(2, 3)$
- ۸۴) اگر  $y = f(x)$  یک تابع خطی گذرنده از نقاط  $(0, a)$  و  $(a, 0)$  باشد. ضابطه  $f \circ f(x)$  کدام است؟
- ۱)  $0$     ۲)  $x$     ۳)  $f(x)$     ۴)  $x + 2a$
- ۸۵) اگر  $g(x)$  وارون تابع  $f(x) = x + \sqrt{x}$  باشد، مقدار  $g(6) + g(12)$ ، کدام است؟
- ۱)  $10$     ۲)  $11$     ۳)  $13$     ۴)  $14$
- ۸۶) در تابع با ضابطه  $f(x) = x^2(2-x)^2$  حاصل  $f(1+x) - f(1-x)$  کدام است؟
- ۱)  $0$     ۲)  $4x$     ۳)  $2x^2$     ۴)  $4x^2$



۸۷) کدام یک از توابع زیر، با تابع  $y = \log \frac{x-2}{x}$  برابر است؟

$p(x) = 2 \log \sqrt{\frac{x-2}{x}}$  (۴)     
  $h(x) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{x-2}{x}\right)^2$  (۳)     
  $g(x) = \log \frac{x^2-4}{x^2+2x}$  (۲)     
  $f(x) = \log(x-2) - \log x$  (۱)

۸۸) دو تابع با ضابطه‌های  $f(x) = [x] + [-x]$  و  $g(x) = x^2 + x - 2$  مفروض‌اند. اگر  $g(f(x)) = -2$  باشد، مجموعه مقادیر  $x$  کدام است؟

$\emptyset$  (۴)     
  $\mathbb{Z}$  (۳)     
  $\mathbb{R}$  (۲)     
  $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$  (۱)

۸۹) قرینه نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  را نسبت به محور  $y$ ها تعیین کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت راست، انتقال می‌دهیم. منحنی اخیر و منحنی اصلی نسبت به کدام خط، متقارن هستند؟

$x = 2,5$  (۴)     
  $x = 2$  (۳)     
  $x = 1,5$  (۲)     
  $x = 1$  (۱)

۹۰) اگر  $f(x) = x - [x]$  برد تابع  $g(x) = f(2x-3) - 2f(x)$  کدام می‌باشد؟

$\{0, 1\}$  (۴)     
  $\{-1, 0\}$  (۳)     
  $[0, 1]$  (۲)     
  $[-1, 0]$  (۱)

۹۱) اگر  $f(x) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x$  باشد، دامنه تابع  $y = \sqrt{xf(x)}$  کدام بازه است؟

$(0, +\infty)$  (۴)     
  $(-\infty, +\infty)$  (۳)     
  $(-\infty, 0)$  (۲)     
  $[-1, 1]$  (۱)

۹۲) تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \begin{cases} x^3 & ; x \geq 0 \\ -x^2 & ; x < 0 \end{cases}$  در مجموعه‌ی اعداد حقیقی چگونه است؟

یک به یک - اکیداً صعودی (۱)     
 یک به یک - نزولی (۲)     
 یک به یک - غیر یکنوا (۳)     
 غیر یک به یک - غیر یکنوا (۴)

۹۳) به ازای کدام مجموعه مقادیر  $k$ ، بازه  $(k-2, 3k+2)$  زیرمجموعه‌ای از دامنه تابع  $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x-1}$  است؟

$[-1, -\frac{1}{3}]$  (۴)     
  $[-1, \frac{1}{3}]$  (۳)     
  $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$  (۲)     
  $[\frac{1}{3}, 3]$  (۱)

۹۴) اگر  $g(x) = 2x - 3$  و  $(f \circ g)(x) = 4(x^2 - 4x + 5)$  باشند، ضابطه  $f(x)$  کدام است؟

$x^2 - 2x + 3$  (۴)     
  $x^2 - 2x + 5$  (۳)     
  $x^2 - 4x + 5$  (۲)     
  $x^2 - 4x + 3$  (۱)

۹۵) اگر  $f(x) = 2x + 3$  و  $g(f(x)) = 8x^2 + 22x + 20$  باشند، ضابطه تابع  $f \circ g$  کدام است؟

$4x^2 - 4x + 11$  (۴)     
  $4x^2 - 2x + 13$  (۳)     
  $2x^2 - 3x + 7$  (۲)     
  $2x^2 - 7x + 3$  (۱)

۹۶) فرض کنید  $g(x)$  وارون تابع  $f(x) = x + 2\sqrt{x}$  باشد. حاصل  $g(3) + g(15)$  کدام است؟

۸ (۴)     
 ۱۰ (۳)     
 ۱۱ (۲)     
 ۱۲ (۱)

۹۷) اگر  $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$  و  $g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\}$  دو تابع باشند، برد تابع  $(g^{-1} \circ f) - f$  کدام است؟

$\{2, -1\}$  (۴)     
  $\{3, 4\}$  (۳)     
  $\{2, 3\}$  (۲)     
  $\{-1, 4\}$  (۱)

۹۸) اگر  $g(x) = 1 - 2x$  و  $f(x) = ax - 1$  باشد، به ازای کدام مقدار  $a$  دو تابع  $f$  و  $f \circ g$  روی محور  $x$ ها متقاطع‌اند؟

۳ (۴)     
 ۲ (۳)     
 -۲ (۲)     
 -۳ (۱)

۹۹) فرض کنید برد تابع  $f(x) = 2\sqrt[3]{9\cos^2(x)-1} - 2\sqrt[3]{1-9\cos^2(x)}$  به صورت  $[a, b]$  باشد مقدار  $b - a$  کدام است؟

$\frac{21}{4}$  (۴)     
  $\frac{9}{2}$  (۳)     
  $\frac{15}{4}$  (۲)     
  $\frac{9}{4}$  (۱)

۱۰۰) اگر  $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$  و  $g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\}$  باشند، تابع  $\frac{g}{g \circ f^{-1}}$  کدام است؟

$\{(3, 5), (2, 4)\}$  (۴)     
  $\{(5, 2), (2, 4)\}$  (۳)     
  $\{(4, 2), (3, 5)\}$  (۲)     
  $\{(4, 2), (5, 2)\}$  (۱)





۱۰۱ تابع  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 1 & ; x \geq 0 \\ \frac{1}{x} & ; x < 0 \end{cases}$  روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی چگونه است؟

- ۱ یک به یک - نزولی      ۲ یک به یک - صعودی      ۳ یک به یک - غیر یکنوا      ۴ غیر یک به یک - غیر یکنوا

۱۰۲ دامنه‌ی تابع با ضابطه  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(|x^2 - 2| - x)$  کدام است؟

- ۱  $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (2, +\infty)$       ۲  $(-\infty, 1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$       ۳  $(-1, 1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$       ۴  $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

۱۰۳ فرض کنیم  $f(x) = x^2 - 4$  و  $f(g(x)) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 4$  در این صورت ضابطه  $f(x)$  کدام است؟

- ۱  $x^2 - 2$       ۲  $x^2 + 2$       ۳  $x^2 - 4$       ۴  $x^2 + 4$

۱۰۴ فرض کنید  $M$  نقطه‌ی تلاقی منحنی  $y = \sqrt{x+3} - 1$  با تابع وارون خود باشد. فاصله‌ی نقطه‌ی  $M$  از مبدأ مختصات، کدام است؟

- ۱  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       ۲  $\sqrt{2}$       ۳ ۳      ۴  $2\sqrt{2}$

۱۰۵ تابع متناوب  $f(x) = \begin{cases} x & ; 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & ; 1 < x \leq 2 \end{cases}$  را که دوره‌ی تناوب آن ۲ است، در نظر بگیرید. مساحت ناحیه‌ی محصور به منحنی  $f$  و محور  $x$ ها در بازه  $[-0.75, 3.25]$ ، کدام است؟

- ۱ ۲      ۲ ۳      ۳ ۳.۵      ۴ ۴

۱۰۶ قرینه‌ی نمودار تابع  $y = 2 + \sqrt{x-1}$  را نسبت به خط  $y = x$  رسم کرده و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در جهت مثبت محور  $x$ ها و ۳ واحد در جهت منفی محور  $y$ ها انتقال می‌دهیم و آن را  $y = g(x)$  می‌نامیم. مقدار  $g(4)$  کدام است؟

- ۱ ۳      ۲ -۳      ۳ -۲      ۴ -۴

۱۰۷ اگر  $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$  و  $g(x) = \sqrt{x-x^2}$ ، دامنه‌ی تابع  $g \circ f$ ، کدام است؟

- ۱  $(0, 1)$       ۲  $\{0\}$       ۳  $(-1, 1)$       ۴  $\mathbb{R} - \{1, -1\}$

۱۰۸ دو تابع با ضابطه‌ی های  $g = \{(2, 5), (3, 4), (1, 6), (4, 7), (8, 1)\}$  و  $f(x) = 2x - 5$  مفروض اند. اگر  $(f^{-1} \circ g)(a) = 6$  باشد،  $a$  کدام است؟

- ۱ ۱      ۲ ۲      ۳ ۳      ۴ ۴

۱۰۹ با فرض  $f(x) = x^2 - 2$ ، مقدار  $f(f(f(2 \cos x)))$  کدام است؟

- ۱  $2 \sin^4 x$       ۲  $2 \cos^4 x$       ۳  $2 \sin 4x$       ۴  $2 \cos 4x$

۱۱۰ اگر  $g(x) = f(x) + \sqrt{f(x)}$  و  $f^{-1}(x) = \sqrt{2x}$ ، حاصل  $f^{-1}(6)$  کدام است؟

- ۱ ۱      ۲ ۲      ۳ ۳      ۴ ۴

۱۱۱ اگر  $f(x) = 1 + \sqrt{x}$  و  $g(x) = x^2$  و  $x > 0$ ، ضابطه  $g^{-1} \circ f^{-1}$  کدام است؟

- ۱  $x - 1$       ۲  $x + 1$       ۳  $x^2 - 1$       ۴  $x^2 + 1$

۱۱۲ دو تابع  $f$  و  $g$  به صورت مجموعه‌ی زوج‌های مرتب بیان شده‌اند. در حالت کلی کدام رابطه ممکن است تابع نباشد؟

- ۱  $f \cup g$       ۲  $f \cap g$       ۳  $f - g$       ۴  $f \circ g$

۱۱۳ با توجه به ماشین  $x \rightarrow [f] \rightarrow [g] \rightarrow x$ ، اگر  $f(x) = 2x - 1$ ، آنگاه  $g(0)$  کدام است؟

- ۱ ۱      ۲ صفر      ۳  $\frac{1}{2}$       ۴ ۲



توابع ۱۱۴  $f = \{(2, 1), (3, 2), (4, 5), (1, 7)\}$ ,  $g = \{(1, 2), (3, 1), (a, 3), (b, 1)\}$  مفروض اند، اگر  $(4, 2) \in fog$ ,  $(4, 1) \in gof$  باشند، دو تایی  $(a, b)$  کدام است؟

- ① (۳, ۴)      ② (۴, ۳)      ③ (۴, ۵)      ④ (۵, ۴)

توابع ۱۱۵ اگر  $g(x) = 2x - 1$  و  $(fog)(x) = \frac{x}{x-3}$  مقدار  $f(3)$  کدام است؟

- ① -۴      ② -۲      ③ ۲      ④ ۴

توابع ۱۱۶ نمودار منحنی  $y = \sqrt{4-x}$  را  $k$  واحد در راستای قائم و  $2-k$  واحد در جهت افقی چنان انتقال می‌دهیم که منحنی جدید وارون تابع خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند. سپس منحنی حاصل را ۱ واحد در راستای قائم به سمت پایین انتقال می‌دهیم. طول نقطه برخورد منحنی به دست آمده با محور  $x$ ها کدام است؟

- ① -۴      ② -۳      ③ ۱      ④ ۲

توابع ۱۱۷ اگر  $f(x) = \sqrt{2-x}$  و  $g(x) = \log(x^2 - 15x)$  باشند، دامنه‌ی تابع  $fog$  کدام است؟

- ①  $(0, 5) \cup [20, 25]$       ②  $[-5, 0) \cup (15, 20]$       ③  $(15, 20]$       ④  $[-5, 0)$

توابع ۱۱۸ دو تابع  $f$  و  $g$  بر روی اعداد حقیقی تعریف شده‌اند. در کدام حالت دو تابع مساوی‌اند؟

①  $f(x) = 2 \log x$ ,  $g(x) = \log x^2$       ②  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{|x|}$ ,  $g(x) = 1$

③  $f(x) = (\sqrt{x})^2$ ,  $g(x) = x$       ④  $f(x) = \frac{x}{|x|}$ ,  $g(x) = \frac{|x|}{x}$

توابع ۱۱۹ اگر  $(fog)(x) = -f(x)$  و  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$  باشد ضابطه  $g(x)$  کدام است؟ ( $x \neq 0, 1$ )

- ①  $\frac{1}{x}$       ②  $\frac{2}{x}$       ③  $x$       ④  $2x$

توابع ۱۲۰ اگر  $f(x) = \sqrt{1-x}$  و  $g(x) = \sqrt{x-1}$  دامنه‌ی تابع  $(fog)(x)$  کدام است؟

- ①  $[0, 2]$       ②  $[0, 1]$       ③  $[1, 2]$       ④  $[1, 3]$

توابع ۱۲۱ اگر  $f(x) = 2 - |x - 2|$ ، ضابطه‌ی تابع  $f(f(x))$  برابر کدام است؟

- ①  $x$       ②  $4 - x$       ③  $f(x)$       ④  $2 - f(x)$

توابع ۱۲۲ اگر  $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ ، تابع  $(f(\sqrt{x}))^2 - f(x)$  چگونه است؟

- ① ثابت      ② همانی      ③ نه صعودی نه نزولی      ④ یک به یک

توابع ۱۲۳ اگر خروجی از ماشین شکل مقابل  $\frac{4}{3}$  باشد، مقدار ورودی کدام است؟

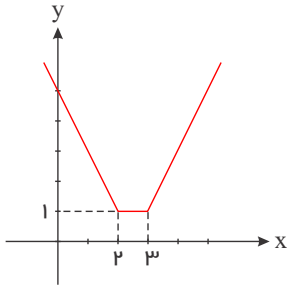
ورودی  $\rightarrow$   $2x - 2$   $\rightarrow$   $\frac{x}{\sqrt{x} + 1}$   $\rightarrow$  خروجی

- ①  $\frac{11}{9}$       ②  $\frac{7}{2}$       ③ ۳      ④ ۴



## پاسخنامه تشریحی

تابع  $f$  یک تابع گلدانی است که در  $x < 2$  اکیداً نزولی است و ضابطه آن در این بازه  $f(x) = -2x + 5$  است. 1 2 3 4 1



$$\begin{cases} f(x) = -2x + 5 \\ g(x) = 2x^2 - x - 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{تلافی}} 2x^2 - x - 1 = -2x + 5 \Rightarrow 2x^2 + x - 15 = (2x - 5)(x + 3) = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 12 = 13$$

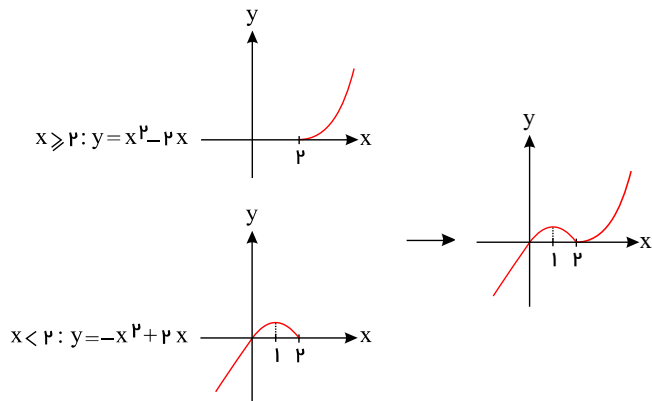
$$\begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{4} = \frac{5}{2} \quad (\text{با توجه به } x < 2) \\ x = \frac{-1 - \sqrt{13}}{4} = -3 \quad \text{ق ق} \end{cases}$$

تنها نقطه مشترک  $f$  و  $g$  در بازه  $(-\infty, 2)$  نقطه  $(-3, 11)$  است.

ابتدا ضابطه  $f$  را به صورت زیر می‌نویسیم: 1 2 3 4 2

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 2 \\ -x^2 + 2x & x < 2 \end{cases}$$

و نمودار آن نیز مطابق شکل زیر است:



پس تابع در  $(1, 2)$  نزولی است. حال ضابطه معکوس را پیدا می‌کنیم.

برد  $f^{-1}$  باید بازه  $(1, 2)$  باشد، پس علامت  $+$  را قبول می‌کنیم:

روش دوم:

متوجه شدیم که تابع،  $y = -x^2 + 2x$  ( $1 < x < 2$ ) است. یک عدد دلخواه مثلاً  $\frac{3}{4}$  را  $x$  در تابع قرار می‌دهیم.

$$x = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{3}{4} : \left| \begin{array}{l} \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \end{array} \right. \in f \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \end{array} \right. \in f^{-1} \rightarrow \text{فقط در گزینه سوم صدق می‌کند.}$$

ابتدا دامنه‌ی تعریف دو تابع  $f, g$  را بدست می‌آوریم. 1 2 3 4 3

$$f(x) = \frac{1 + x^2}{1 - x^2} \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$



$$g(x) = \sqrt{x - x^2} \rightarrow D_g : x - x^2 \geq 0 \rightarrow x(1 - x) \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0 \leq x \leq 1$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f, f(x) \in D_g\} = \underbrace{\{x \neq 1, x \neq -1\}}_I, 0 \leq \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1$$

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} \geq 0 \rightarrow 1-x^2 > 0 \rightarrow x^2 < 1 \rightarrow -1 < x < 1 \quad (II)$$

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1 \rightarrow \frac{1+x^2}{1-x^2} - 1 \leq 0 \rightarrow \frac{1+x^2-1-x^2}{1-x^2} \leq 0 \rightarrow \frac{2x^2}{1-x^2} \leq 0$$

$$\rightarrow \begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & -1 & & 0 & & 1 & & +\infty \\ \hline \text{عبارت} & \leq & 0 & - & \text{تن} & + & 0 & + & \text{تن} & - \end{array}$$

$$\rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 1 \text{ یا } x = 0 \quad (III)$$

از اشتراک I و II و III به جواب  $x = 0$  می‌رسیم.

1 2 3 4 5

$$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y \text{ ها}} g(x) = \sqrt{-x} \xrightarrow{\text{دو واحد به طرف } x \text{ های مثبت}} h(x) = \sqrt{-(x-2)} = \sqrt{-x+2}$$

$$\begin{cases} h(x) = \sqrt{-x+2} \\ y = x \text{ نیمساز ناحیه اول و سوم} \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} \sqrt{-x+2} = x \xrightarrow{\text{توان ۲}} -x+2 = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 & \text{غریقی (در معادله صدق نمی‌کند)} \\ x = 1 & \text{حقیق} \end{cases}$$

$$\text{اگر نمودار تابع } y = \left| \frac{1}{2}x \right| - 2 \text{ را } y = \left| \frac{1}{2}x \right| - 2 \text{ واحد به سمت چپ منتقل کنیم معادله به صورت } y = \left| \frac{1}{2}(x+4) \right| - 2 \text{ درمی‌آید و اگر یک واحد به بالا منتقل کنیم}$$

$$\text{به صورت } y = \left| \frac{1}{2}(x+4) \right| - 2 + 1 \text{ درمی‌آید.}$$

$$\begin{cases} y_{\text{قدیم}} = \left| \frac{1}{2}x \right| - 2 \\ y_{\text{جدید}} = \left| \frac{1}{2}x + 2 \right| - 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} \left| \frac{1}{2}x \right| - 2 = \left| \frac{1}{2}x + 2 \right| - 1$$

$$\xrightarrow{\times 2} |x| - 4 = |x+4| - 2 \Rightarrow |x| - |x+4| = 2 \xrightarrow{\text{مشاهده‌ی گزینه‌ها}} x = -3$$

1 2 3 4 5 6 روش اول:

$$2x - 3 = t \Rightarrow 2x = t + 3 \Rightarrow x = \frac{t+3}{2}$$

$$= t^2 + 9 + 6t - 7t - 21 + 13 = t^2 - t + 1 \Rightarrow f(x) = x^2 - x + 1 \Rightarrow f(t) = 4\left(\frac{t+3}{2}\right)^2 - 14\left(\frac{t+3}{2}\right) + 13 = (t+3)^2 - 7(t+3) + 13$$

روش دوم: یک عدد دلخواه مانند  $x = 2$  را انتخاب می‌کنیم.

$$f(2x-3) = 4x^2 - 14x + 13 \xrightarrow{x=2} f(1) = 16 - 28 + 13 \rightarrow f(1) = 1$$

تنها گزینه‌ی چهارم است که اگر به جای  $x$  آن عدد یک قرار دهیم T حاصل برابر یک می‌شود.

1 2 3 4 5 6 7 روش اول:

ابتدا دامنه‌ی تعریف دو تابع  $f, g$  را به دست می‌آوریم:

$$D_f : 3 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 3$$

$$D_g : x^2 + 2x = x(x+2) > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x < -2 \text{ یا } x > 0$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x < -2 \text{ یا } x > 0 \mid \log_p^{x^2+2x} \leq 3\}$$

$$= \{x < -2 \text{ یا } x > 0 \mid x^2 + 2x \leq 3^3\} = \{x < -2 \text{ یا } x > 0 \mid x^2 + 2x - 8 \leq 0\}$$

$$= \{x < -2 \text{ یا } x > 0 \mid (x+4)(x-2) \leq 0\} = \{x < -2 \text{ یا } x > 0 \mid -4 \leq x \leq 2\}$$

$$= -4 \leq x < -2 \text{ یا } 0 < x \leq 2 \Rightarrow D_{f \circ g} = [-4, -2) \cup (0, 2]$$

البته می‌توانیم  $f \circ g(x)$  را تشکیل داده (تابع را ساده نکنید) سپس دامنه‌ی آن را به دست آوریم.

روش دوم:

$x = -1$  در دامنه‌ی تعریف  $g$  قرار ندارد. بنابراین در دامنه‌ی تعریف  $f \circ g$  هم نباید باشد، یعنی هر گزینه‌ای که  $x = -1$  دارد نادرست است. پس فقط گزینه‌ی چهارم درست است.

1 2 3 4 5 6 7 8 روش اول:



$$\begin{cases} x \geq 0; y = \frac{x}{1+x} \Rightarrow y+xy=x \Rightarrow x = \frac{y}{1-y} \xrightarrow{x \geq 0} \frac{y}{1-y} \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0 \leq y < 1 & (1) \\ x \leq 0; y = \frac{x}{1-x} \Rightarrow y-xy=x \Rightarrow x = \frac{y}{1+y} \xrightarrow{x \leq 0} \frac{y}{1+y} \leq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 < y \leq 0 & (2) \end{cases}$$

بنابراین داریم:

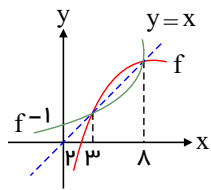
$$x = \begin{cases} \frac{y}{1-y}; 0 \leq y < 1 \\ \frac{y}{1+y}; -1 < y \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{y}{1-|y|}, |y| < 1 \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}; |x| < 1$$

روش دوم

می‌توانید نقطه‌ی دلخواهی از تابع را در نظر گرفته و جای  $x$  و  $y$  را عوض کرده و کنترل کنیم که این مختصات در کدام ضابطه صدق می‌کند. به عنوان مثال، نقطه‌ی  $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$  متعلق به ضابطه‌ی تابع وارون می‌باشد. با کمی دقت پی می‌بریم که این مختصات تنها در گزینه‌ی ۱ صدق می‌کند.

برای به دست آوردن دامنه‌ی تعریف توابع رادیکالی با فرجه‌ی زوج، کافی است زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهیم.

$$x - f^{-1}(x) \geq 0 \rightarrow x \geq f^{-1}(x)$$



نمودارهای  $f$  و  $f^{-1}$  نسبت به نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم متقارن هستند و باتوجه به  $x \geq f^{-1}(x)$  باید به دنبال فواصلی باشیم که خط  $y=x$  بزرگ‌تر مساوی تابع  $f^{-1}$  باشد یعنی  $[3, 8]$ .

ابتدا وارون تابع داده‌شده را پیدا کرده و آن را با تابع اصلی تلاقی می‌دهیم و می‌دانیم برای پیدا کردن تابع وارون کافی است که  $x$  را برحسب  $y$  به دست آورده و سپس جای  $x$  و  $y$  را عوض می‌کنیم.

$$y = \frac{x+4}{x-2} \rightarrow xy - 2y = x + 4 \rightarrow xy - x = 2y + 4 \rightarrow x(y-1) = 2y + 4 \rightarrow x = \frac{2y+4}{y-1}$$

$$\rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x+4}{x-1}$$

$$\text{تلاقی: } f(x) = f^{-1}(x) \rightarrow \frac{x+4}{x-2} = \frac{2x+4}{x-1} \rightarrow 2x^2 - 4x + 4x - 8 = x^2 - x + 4x - 4$$

$$\rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{c}{a} = 4 \end{cases}$$

می‌دانیم: برای اینکه ۳ واحد به سمت  $x$  های مثبت منتقل شود باید به جای عبارت  $x-3$  و برای اینکه به طرف  $y$  های منفی منتقل شود باید به کل تابع عدد  $-2$  اضافه شود؛ بنابراین داریم:

$$y = -(x-3)^2 + 2(x-3) + 5 - 2 = -x^2 + 6x - 9 + 2x - 6 + 3 \Rightarrow y = -x^2 + 8x - 12$$

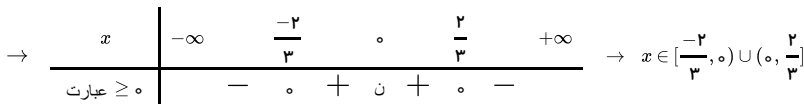
و برای اینکه این تابع بالای نیمساز ربع اول قرار گیرد باید:

$$-x^2 + 8x - 12 > x \Rightarrow x^2 - 7x + 12 < 0 \Rightarrow (x-3) \cdot (x-4) < 0 \Rightarrow 3 < x < 4$$

روش اول: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲

چون یک چندجمله‌ای در زیر رادیکال با فرجه‌ی فرد قرار دارد، بنابراین رادیکال با فرجه‌ی فرد به ازای تمام مقادیر  $x$  تعریف شده است و فقط باید عبارت زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهیم.

$$\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2} \geq 0 \rightarrow \frac{4 - 9x^2}{2x^2} \geq 0 \rightarrow \begin{cases} \text{صورت} = 0 \rightarrow 9x^2 = 4 \rightarrow x^2 = \frac{4}{9} \rightarrow x = \pm \frac{2}{3} \\ \text{مخرج} = 0 \rightarrow 2x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \end{cases}$$



روش دوم

اگر  $x = 1$  باشد زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج منفی می‌شود بنابراین گزینه‌های اول و سوم که شامل  $x = 1$  هستند حذف می‌شوند در ضمن  $x = 0$  مخرج را صفر می‌کند و گزینه‌ی دوم که شامل  $x = 0$  است نیز حذف می‌شود.

برای پیدا کردن تابع وارون، کافی است  $x$  را برحسب  $y$  به دست آورده و سپس جای  $x$  و  $y$  را عوض کنیم.

$$y = f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 1 - 3 = (x-1)^2 - 4 \Rightarrow (x-1)^2 = y + 4$$

$$\xrightarrow{x \geq 1} x - 1 = \sqrt{y+4} \Rightarrow x = 1 + \sqrt{y+4} \xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ را عوض می‌کنیم}} f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+4}$$

حال با خط  $g(x) = \frac{x-a}{2}$  قطع می‌دهیم:

$$f^{-1}(x) = g(x) \Rightarrow 1 + \sqrt{x+4} = \frac{x-9}{2} \xrightarrow{\text{بررسی گزینه‌ها}} x = 21$$



توجه کنید حل معادله آخر بدین صورت است:

$$2\sqrt{x+4} = x - 11 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4x + 16 = x^2 + 121 - 22x \Rightarrow x^2 - 26x + 105 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 21)(x - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 21 & \text{فقط} \\ x = 5 & \text{در معادله صدق نمی‌کند} \end{cases}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - x - 2 \Rightarrow f(g(x)) = (g(x))^2 - (g(x)) - 2 \\ f(g(x)) = x^2 + x - 2 \end{cases}$$

حال با تغییر متغیر  $t = g(x)$  و تساوی دو رابطه‌ی بالا داریم:

$$\begin{aligned} \Rightarrow t^2 - t - 2 &= x^2 + x - 2 \Rightarrow t^2 - t = x^2 + x \\ \Rightarrow (t - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} &= (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \Rightarrow (t - \frac{1}{2})^2 = (x + \frac{1}{2})^2 \\ \Rightarrow (t - \frac{1}{2}) &= \pm(x + \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t - \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2} \Rightarrow t = x + 1 \Rightarrow g(x) = x + 1 \\ t - \frac{1}{2} = -x - \frac{1}{2} \Rightarrow t = -x \Rightarrow g(x) = -x \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} (f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - x - 2 + (-x) = x^2 - 2x - 2 \\ (f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - x - 2 + x + 1 = x^2 - 1 \end{cases}$$

۱۵ ۱ ۲ ۳ ۴ دو تابع  $f$  و  $f^{-1}$  نسبت به خط  $y = x$  متقارن هستند و می‌دانیم برای پیدا کردن ضابطه‌ی معکوس یک تابع، ابتدا رابطه را برحسب  $x$  بدست می‌آوریم و سپس جای  $x$  و  $y$  را عوض می‌کنیم.

$$3y - 2x = 4 \rightarrow 2x = 3y - 4 \rightarrow x = \frac{3}{2}y - 2 \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3}{2}x - 2 \xrightarrow{x=0} -2 = \text{عرض از مبدأ}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y = \sqrt{x} \rightarrow x = y^2 \rightarrow f^{-1}(x) = x^2, & \quad x > 0 \\ y = -\sqrt{-x} \rightarrow -x = y^2 \rightarrow x = -y^2 \rightarrow f^{-1}(x) = -x^2, & \quad x < 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases} = x|x|, \quad x \in \mathbb{R}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷

روش اول:

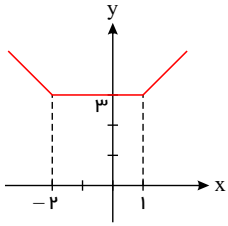
$$\begin{aligned} x - 3 = t \rightarrow x = t + 3 \\ f(x - 3) = x^2 - 4x + 5 \rightarrow f(t) = (t + 3)^2 - 4(t + 3) + 5 \rightarrow f(1 + x) \\ = (1 - x + 3)^2 - 4(1 - x + 3) + 5 \rightarrow f(1 - x) = (4 - x)^2 - 4(4 - x) + 5 \rightarrow f(1 - x) \\ = 16 + x^2 - 8x - 16 + 4x + 5 \rightarrow f(1 - x) = x^2 - 4x + 5 \end{aligned}$$

روش دوم:

باید  $x - 3$  را تبدیل به  $x - 1$  کنیم با کمی دقت متوجه می‌شویم در  $x - 3$  اگر  $x$  را به  $x - 4$  تبدیل کنیم این اتفاق می‌افتد.

$$\begin{aligned} x \rightarrow -x + 4 \Rightarrow f(1 - x) = (-x + 4)^2 - 4(-x + 4) + 5 \\ = x^2 + 16 - 8x + 4x - 16 + 5 = x^2 - 4x + 5 \end{aligned}$$

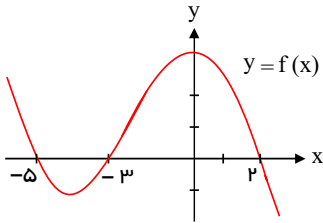
۱۸ ۱ ۲ ۳ ۴ تابع داده‌شده یک تابع گلدانی است که در  $x = -2$  و  $x = 1$  (ریشه‌های داخل قدرمطلق) دارای شکست است.



اکیداً نزولی :  $x < -2$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۹

اگر نمودار  $f(x-2)$  را دو واحد به سمت چپ منتقل کنیم نمودار تابع  $f(x)$  به دست می آید.



برای پیدا کردن دامنه‌ی تعریف  $\sqrt{xf(x)}$  باید زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار دهیم.

$$xf(x) \geq 0 \rightarrow xy \geq 0 \xrightarrow{\text{باید هم علامت باشند } x,y} [-5, -3] \cup [0, 2]$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۰

$$g^{-1}(6) = a \Rightarrow g(a) = 6$$

$$g(a) = f(a) + \sqrt{f(a)} \Rightarrow 6 = f(a) + \sqrt{f(a)} \Rightarrow f(a) = 4 \Rightarrow f^{-1}(4) = a \Rightarrow \sqrt[3]{8} = a \rightarrow a = 2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۱

$$2x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(2-x) \geq 0 \Rightarrow \begin{array}{c} x \quad | \quad -\infty \quad \circ \quad 2 \quad +\infty \\ \text{عبارت} > 0 \quad | \quad - \quad \circ \quad + \quad \circ \quad - \end{array} \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$$

حال برای پیدا کردن دامنه  $f(3-x)$  کافی است  $3-x$  را بین صفر و ۲ قرار دهیم.

$$0 \leq 3-x \leq 2 \Rightarrow -3 \leq -x \leq -1 \Rightarrow 3 \geq x \geq 1 \Rightarrow x \in [1, 3]$$

البته می توانید ابتدا ضابطه  $f(3-x)$  را به دست آورید و سپس زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار دهید.

$$\text{می دانیم اگر } f(a) = b \text{ باشد آن گاه } f^{-1}(b) = a \text{ است.} \quad \text{۱ ۲ ۳ ۴ ۲۲}$$

$$f^{-1}(g(2a)) = 6 \Rightarrow f(6) = 3 = g(2a) = \frac{2a}{2a-1} \Rightarrow 6a - 3 = 2a \Rightarrow 4a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$\text{می دانیم اگر } f(a) = b \text{ باشد آن گاه } f^{-1}(b) = a \text{ است.} \quad \text{۱ ۲ ۳ ۴ ۲۳}$$

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(8) = g^{-1}(f^{-1}(8))$$

برای محاسبه  $f^{-1}(8)$  بدین صورت عمل می کنیم:

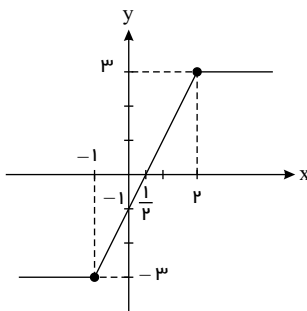
$$8 = \frac{2}{5}x - 4 \rightarrow \frac{2}{5}x = 12 \rightarrow 2x = 60 \rightarrow x = 30$$

$$\text{پس : } g^{-1}(f^{-1}(8)) = g^{-1}(30)$$

برای محاسبه  $g^{-1}(30)$  بدین صورت عمل می نمایم.

$$30 = x^2 + x \rightarrow x = 3$$

$$\text{تابع داده شده یک تابع سراسره‌ای (آبشاری) است که در } x = -1 \text{ و } x = 2 \text{ (ریشه‌های داخل قدرمطلق) دارای شکست است.} \quad \text{۱ ۲ ۳ ۴ ۲۴}$$



اکیداً صعودی :  $-1 < x < 2$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۵

$$y = x^2 - x - 3 \xrightarrow[\text{واحد به چپ}]{x \rightarrow x+2} y = (x+2)^2 - (x+2) - 3 \xrightarrow[\text{واحد پایین}]{y \rightarrow y+9} y = (x+2)^2 - (x+2) - 3 - 9 = x^2 + 3x - 10$$

نمودار زیر محور  $x$ ها قرار دارد یعنی باید نامعادله  $y < 0$  را حل کنیم.

$$\Rightarrow x^2 + 3x - 10 = (x-2)(x+5) < 0 \Rightarrow -5 < x < 2 \Rightarrow x \in (-5, 2)$$



در ابتدا باید تکلیف قدمطلق ها را معلوم کنیم. پس از تابع مشتق گرفته و بزرگ تر از صفر قرار دهیم.

$x$	$-\infty$	$-1$	$3$	$+\infty$
$2x-6$		$-$	$-$	$+$
$x+1$		$-$	$+$	$+$

$$x < -1 : y = -2x + 6 - (-x - 1) \rightarrow y = -x + 7 \rightarrow y' = -1 < 0 \rightarrow \text{نزولی}$$

$$-1 \leq x \leq 3 : y = -2x + 6 - (x + 1) \rightarrow y = -3x + 5 \rightarrow y' = -3 < 0 \rightarrow \text{نزولی}$$

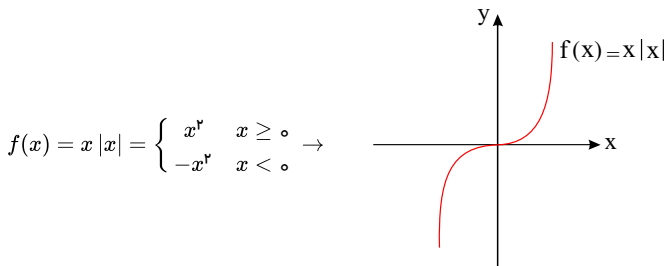
$$x > 3 : y = 2x - 6 - (x + 1) \rightarrow y = x - 7 \rightarrow y' = 1 > 0 \rightarrow \text{صعودی}$$

پس باید ضابطه‌ی معکوس تابع  $y = x - 7$  را به ازای  $x > 3$  به دست آوریم.

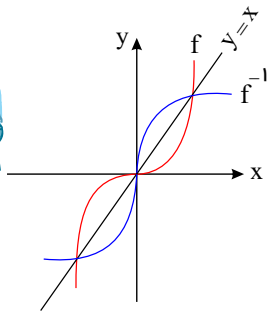
$$y = x - 7 \rightarrow x = y + 7 \rightarrow f^{-1}(x) = x + 7, x > -4$$

$$\text{دقت کنید: } y = x - 7 \xrightarrow{x > 3} y > -4$$

دقت کنید  $y > -4$  برد تابع  $f$  است که در حقیقت دامنه‌ی تابع معکوس است.



برای رسم تابع معکوس، کافی است قرینه‌ی شکل را نسبت به نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم، رسم کنیم.



ابتدا  $x$  را برحسب  $y$  به دست می‌آوریم و سپس جای  $x$  و  $y$  را عوض می‌کنیم.

$$y = 2 - \sqrt{x-1} \Rightarrow (\sqrt{x-1})^2 = (2-y)^2 \Rightarrow x-1 = 4 - 4y + y^2$$

$$\Rightarrow x = y^2 - 4y + 5 \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 5, x \leq 2$$

چون  $\sqrt{x-1}$  مثبت است، پس  $-\sqrt{x-1}$  منفی بوده و  $y = 2 - \sqrt{x-1}$  همواره کوچک تر مساوی ۲ می‌شود. بنابراین دامنه‌ی تابع معکوس  $x \leq 2$  است.

ابتدا دامنه‌ی تعریف دو تابع  $f$  و  $g$  را بدست می‌آوریم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۹

$$f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2} \rightarrow D_f = R$$

$$g(x) = \sqrt{x-x^2} \rightarrow D_g : x-x^2 \geq 0 \rightarrow x(1-x) \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0 \leq x \leq 1$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f, f(x) \in D_g\} = \underbrace{\{x \in R\}}_I, 0 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1$$

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} \geq 0 \rightarrow 1-x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 \leq 1 \rightarrow -1 \leq x \leq 1 : II$$

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1 \rightarrow \frac{1-x^2}{1+x^2} - 1 \leq 0 \rightarrow \frac{1-x^2-1-x^2}{1+x^2} \leq 0 \rightarrow \frac{\underbrace{-2x^2}_{\text{منفی یا صفر}}}{1+x^2} \leq 0 \text{ : همواره برقرار است } III$$

از اشتراک سه جواب به دست آمده به جواب  $-1 \leq x \leq 1$  می‌رسیم. ( $x \in [-1, 1]$ )





۱ ۲ ۳ ۴ ۳۰

$$g(f(x)) = \frac{2\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) + 2}{2 - \left(\frac{2x-1}{x+1}\right)} = \frac{4x-2+2x+2}{2x+2-2x+1} = \frac{6x}{3} = 2x$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۱

$$\left. \begin{aligned} f(f(5)) &= f(5 - \sqrt{5+4}) = f(2) = 2(2) + 3 = 7 \\ f(f(1)) &= f(2(1) + 3) = f(5) = 5 - \sqrt{5+4} = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 7 + 2 = 9$$

روش اول: ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۲

$$f \circ g(x) = 8x^2 + 6x + 5 \rightarrow f(g(x)) = 8x^2 + 6x + 5 \rightarrow f(2x+1) = 8x^2 + 6x + 5$$

برای پیدا کردن  $f(x)$  باید  $2x+1$  را مساوی  $t$  قرار دهیم.

$$2x+1 = t \rightarrow 2x = t-1 \rightarrow x = \frac{t-1}{2}$$

$$\text{پس: } f(t) = 8\left(\frac{t-1}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{t-1}{2}\right) + 5 \rightarrow f(t) = 8\left(\frac{t^2+1-2t}{4}\right) + 3(t-1) + 5$$

$$\rightarrow f(t) = 2t^2 + 2 - 4t + 3t - 3 + 5 \rightarrow f(t) = 2t^2 - t + 4$$

$$\rightarrow f(x) = 2x^2 - x + 4$$

روش دوم:  $f(2x+1) = 8x^2 + 6x + 5$  است. به جای  $x$  یک عدد دلخواه مثلاً صفر قرار می‌دهیم:

$$x = 0 \rightarrow f(1) = 5$$

گزینه‌ای درست است که اگر در آن  $x = 1$  را قرار دهیم حاصل برابر ۵ شود که گزینه‌ی سوم است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۳

$$f(x) = |x|, g(x) = (x+1)^2$$

$$f \circ g(1 - \sqrt{2}) = f(g(1 - \sqrt{2})) = f((1 - \sqrt{2} + 1)^2) = f((2 - \sqrt{2})^2) = |(2 - \sqrt{2})^2|$$

$$= (2 - \sqrt{2})^2 = 4 - 4\sqrt{2} + 2 = 6 - 4\sqrt{2}$$

$$g \circ f(1 - \sqrt{2}) = g(f(1 - \sqrt{2})) = g(|1 - \sqrt{2}|) = g(-1 + \sqrt{2}) = (-1 + \sqrt{2} + 1)^2 = 2$$

$$\Rightarrow f \circ g(1 - \sqrt{2}) - g \circ f(1 - \sqrt{2}) = 6 - 4\sqrt{2} - 2 = 4 - 4\sqrt{2} = 4(1 - \sqrt{2})$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۴

$$f(x) = |x| - x \rightarrow f(x) = \begin{cases} x - x & x \geq 0 \\ -x - x & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} x \geq 0 &\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow f(f(x)) = f(0) = 0 \\ x < 0 &\Rightarrow f(x) = -2x \Rightarrow f(f(x)) = f(-2x) = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow f \circ f(x) = 0$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۵

ابتدا  $f \circ g(x)$  را تشکیل می‌دهیم و مساوی  $f \circ g(x)$  صورت سؤال قرار می‌دهیم.

$$\left. \begin{aligned} f(x) = \frac{x+1}{x-1} &\Rightarrow f(g(x)) = \frac{g(x)+1}{g(x)-1} \\ f \circ g(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1} &\Rightarrow f(g(x)) = \frac{x^2+2}{x^2+1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{g(x)+1}{g(x)-1} = \frac{x^2+2}{x^2+1}$$

$$\xrightarrow{x=1} \frac{g(1)+1}{g(1)-1} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2g(1) - 2 = 2g(1) + 2 \Rightarrow g(1) = 5$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۶

$$f(g(x)) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 4 \rightarrow f\left(x - \frac{1}{x}\right) = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 - 4$$

$$\xrightarrow{x - \frac{1}{x} = t} f(t) = t^2 - 2 \rightarrow f(x) = x^2 - 2$$

توجه کنید که  $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$  می‌باشد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۷

$$f(x) = (x-1)^2 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} g(x) = -(-x-1)^2 \xrightarrow{\text{واحد به سمت بالا}} h(x) = -(-x-1)^2 + 4$$

$$\text{تلاقی: } (x-1)^2 = -(-x-1)^2 + 4 \Rightarrow x^2 + 1 - 2x = -x^2 - 1 - 2x + 4 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1, x = -1$$



۳۸ می‌دانیم که  $f(a) = b \rightarrow f^{-1}(b) = a$  است پس برای محاسبه  $f^{-1}(2)$  کافی است در تابع اصلی به جای  $y$  و  $2$  بگذاریم.

$$2 = \frac{2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2} \rightarrow 2^x + \frac{1}{2^x} = 4 \xrightarrow{2^x=A} A + \frac{1}{A} = 4$$

$$\xrightarrow{\times A} A^2 + 1 = 4A \rightarrow A^2 - 4A + 1 = 0 \rightarrow \Delta = 16 - 4 = 12 \rightarrow \begin{cases} A = \frac{4 + \sqrt{12}}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3} \\ A = \frac{4 - \sqrt{12}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

می‌دانیم که  $\log_b^a c \rightarrow a = b^c$  است.

$$A = 2 + \sqrt{3} \rightarrow 2^x = 2 + \sqrt{3} \rightarrow x = \log_p^{2+\sqrt{3}}$$

$$A = 2 - \sqrt{3} \rightarrow 2^x = 2 - \sqrt{3} \rightarrow x = \log_p^{2-\sqrt{3}} \text{ غ ق ق}$$

توجه کنید که  $\log_p^{2-\sqrt{3}}$  تقریباً معادل  $\log_p^{2+\sqrt{3}}$  است که حتماً مقدار آن منفی است و چون دامنه تابع شده بزرگتر مساوی صفر است بنابراین برد تابع معکوس نمی‌تواند منفی باشد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۹

$$f^{-1} = \{(2, 1), (5, 2), (3, 0), (-1, 4)\}, \quad g = \{(2, 3), (-1, 4), (4, 1), (3, 0)\}$$

$$g \circ f^{-1}(x) = g(f^{-1}(x)) = \begin{cases} g(f^{-1}(2)) = g(1) = \emptyset \\ g(f^{-1}(5)) = g(2) = 3 \\ g(f^{-1}(3)) = g(0) = \emptyset \\ g(f^{-1}(-1)) = g(4) = 1 \end{cases} \rightarrow g \circ f^{-1}(x) = \{(5, 3), (-1, 1)\}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۰

$$f = \{(x, 2x-1), x \in A\} \Rightarrow f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7), (5, 9)\}$$

$$\left. \begin{aligned} f(f(1)) &= f(1) = 1 \\ f(f(2)) &= f(3) = 5 \\ f(f(3)) &= f(5) = 9 \\ f(f(4)) &= f(7) = \emptyset \\ f(f(5)) &= f(9) = \emptyset \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(f(x)) = \{(1, 1), (2, 5), (3, 9)\} : \text{شامل سه زوج مرتب است.}$$

۴۱ می‌دانیم اگر  $f(a) = b$  باشد آن‌گاه  $f^{-1}(b) = a$  است.

$$g^{-1} \circ f^{-1}(a) = 8 \rightarrow g^{-1}(f^{-1}(a)) = 8 \rightarrow f^{-1}(a) = g(8) \rightarrow f^{-1}(a) = \sqrt{5(8)+9} = \sqrt{49} = 7$$

$$\rightarrow f^{-1}(a) = 7 \rightarrow f(7) = a \rightarrow a = 3$$

۴۲ برای آن‌که  $g(f(a)) = 5$  باشد، باید مقدار  $f(a)$  یعنی ورودی تابع  $g$  برابر با  $6$  باشد، چون  $g(6) = 5$  است. برای این منظور ضابطه‌ی تابع  $f$  را برابر  $6$  قرار

می‌دهیم. داریم.

$$f(a) = 6 \Rightarrow a + \sqrt{a} = 6 \xrightarrow{\text{مشاهده‌ی گزینه‌ها}} a = 4$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۳

روش اول:

$$\text{بالا ضابطه‌ی بالا: } y = \sqrt{x}, x \geq 0 \Rightarrow y \geq 0 \Rightarrow y^2 = x \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2, x \geq 0$$

$$\text{پایین ضابطه‌ی پایین: } y = -\sqrt{-x}, x < 0 \Rightarrow y < 0 \Rightarrow y^2 = -x \Rightarrow x = -y^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = -x^2, x < 0$$

$$\text{بنابراین ضابطه‌ی تابع وارون به صورت } f^{-1}(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases} \text{ و یا به صورت } f^{-1}(x) = x|x|, x \in R \text{ است.}$$

روش دوم:

یک  $x$  دلخواه در تابع قرار می‌دهیم.

$$x = 4 \xrightarrow{\text{تلف}} y = 2 \quad \left| \begin{array}{l} 4 \in f \\ 2 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 2 \\ 4 \end{array} \right. \in f^{-1}$$

گزینه ای درست است که اگر به جای  $x$  آن  $2$  قرار دهیم حاصل  $4$  می‌شود.

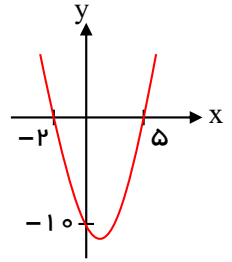
۴۴ کافی است تابع درجه‌ی دوم را رسم کنیم در این تابع چون ضریب  $x^2$  مثبت است تابع دارای  $Min$  است حال محل برخورد تابع با محورهای مختصات را به

دست می‌آوریم.



$$y = 0 \rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \rightarrow (x - 5)(x + 2) = 0 \rightarrow x = -2, x = 5$$

$$x = 0 \rightarrow y = -10$$



واضح است اگر نمودار تابع  $f$  را حداقل دو واحد به طرف  $x$  های مثبت انتقال دهیم طول نقاط برخورد نمودار تابع  $f$  با محور  $x$  ها غیر منفی می باشد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۵

$$f \circ g(x) = 0 \Rightarrow f(g(x)) = 2(x^2 - 1) - 2 = 0 \Rightarrow 2(x^2 - 1) = 2$$

$$\Rightarrow x^2 - 1 = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۶

$$f(g(x)) = f(2x - 1) \xrightarrow{f(g(x)) = \frac{x}{x-3}} f(2x - 1) = \frac{x}{x-3} \xrightarrow{2x-1=3 \rightarrow x=2} f(2) = \frac{2}{2-3} = -2$$

روش اول: برای پیدا کردن ضابطه  $y$  وارون یک تابع، کافی است  $x$  را بر حسب  $y$  بدست آورده و سپس جای  $x$  و  $y$  را عوض کنیم.

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۷

$$y = \sqrt{x}, x \geq 0 \rightarrow y^2 = x \rightarrow f^{-1}(x) = x^2, x \geq 0 \rightarrow f^{-1}(x) = x|x|$$

$$y = -\sqrt{-x}, x < 0 \rightarrow y^2 = -x \rightarrow x = -y^2 \rightarrow f^{-1}(x) = -x^2, x < 0$$

روش دوم: تست را به روش عددگذاری حل می کنیم و می دانیم اگر  $f(a) = b$  باشد آن گاه  $f^{-1}(b) = a$  است.

$$x = 4 \xrightarrow{\text{تبع}} y = 2 \rightarrow A \left| \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right. \in f \rightarrow A' \left| \begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix} \right. \in f^{-1} \rightarrow \text{گزینه های اول و چهارم حذف می شوند.}$$

$$x = -4 \xrightarrow{\text{تبع}} y = -2 \rightarrow B \left| \begin{matrix} -4 \\ -2 \end{matrix} \right. \in f \rightarrow B' \left| \begin{matrix} -2 \\ -4 \end{matrix} \right. \in f^{-1} \rightarrow \text{گزینه دوم حذف می شود.}$$

جلوی لگاریتم باید مثبت باشد و زیر رادیکال، باید بزرگتر مساوی صفر باشد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۸

$$x - 1 > 0 \rightarrow x > 1 \quad (I)$$

$$1 - \log(x - 1) \geq 0 \rightarrow \log(x - 1) \leq 1 \rightarrow \log(x - 1) \leq \log 10 \rightarrow x - 1 \leq 10 \rightarrow x \leq 11 \quad (II)$$

از اشتراک  $I$  و  $II$  به جواب  $1 < x \leq 11$  یا  $x \in (1, 11]$  می رسم.

ابتدا تابع  $f \circ g(x)$  را تشکیل می دهیم:

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۹

$$g(x) = x - \sqrt{x} \rightarrow f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x - \sqrt{x})$$

برای محاسبه ریشه های معادله  $f(x - \sqrt{x}) = 0$  ابتدا باید ببینیم که تابع  $f(x)$  چند بار محور  $x$  را قطع می کند همانطور که می دانیم:

$$f(6) = 0 \Rightarrow x - \sqrt{x} = 6 \Rightarrow x - 6 = \sqrt{x} \rightarrow x^2 - 12x + 36 = x$$

$$\Rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 9 \end{cases}$$

$$f(-\frac{1}{4}) = 0 \Rightarrow x - \sqrt{x} = -\frac{1}{4} \Rightarrow x - \sqrt{x} + \frac{1}{4} = 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x} - \frac{1}{4})^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{16}$$

پس تابع  $f \circ g$  دو بار محور  $x$  ها را قطع می کند.

$$\text{در تابع با ضابطه } f(x) = ab^x \text{ و } f(0) = \frac{3}{32} \text{ و } f(-2) = \frac{3}{32} \text{ است، پس داریم:}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۰

$$f(0) = \frac{3}{32} \Rightarrow ab^0 = \frac{3}{32} \Rightarrow a = \frac{3}{32}$$

$$f(-2) = \frac{3}{32} \Rightarrow \frac{3}{32} b^{-2} = \frac{3}{32} \Rightarrow \frac{1}{b^2} = \frac{1}{16} \Rightarrow b^2 = 16 \xrightarrow{b > 0} b = 4$$

حال با معلوم بودن مقادیر  $a$  و  $b$ ، ضابطه  $f$  را نوشته و سپس  $f(\frac{3}{4})$  را به دست می آوریم:

$$a = \frac{3}{32}, b = 4 \Rightarrow f(x) = \frac{3}{32} \times 4^x \Rightarrow f(\frac{3}{4}) = \frac{3}{32} \times 4^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{32} \times \sqrt[4]{4^3} = \frac{3}{32} \times 8 = 12$$

برای تعیین دامنه  $f$  تعریف تابع  $f \circ g$  ابتدا باید دامنه های تعریف  $f$  و  $g$  را مشخص می کنیم. داریم:

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۱

$$f(x) = \sqrt{x + |x|} \rightarrow x + |x| \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 : 2x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} x \geq 0 \\ x < 0 : x - x \geq 0 \Rightarrow 0 \geq 0 \xrightarrow{\text{همواره برقرار}} x < 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اجتماع}} x \in \mathbb{R} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$



$$g(x) = \frac{1}{x^2 - 4x} \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0, 4\}$$

حال با توجه به دامنه‌ی تعریف تابع مرکب، می‌نویسیم:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x+|x|} \in (\mathbb{R} - \{0, 4\})\}$$

باید مقادیری از  $x$  که به ازای آن‌ها  $f(x) = \sqrt{x+|x|}$  برابر 0 یا 4 می‌شوند را از  $\mathbb{R}$  کنار بگذاریم. داریم:

$$\sqrt{x+|x|} = 0 \Rightarrow x+|x| = 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow x \leq 0, \quad \sqrt{x+|x|} = 4 \Rightarrow x+|x| = 16$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 : 2x = 16 \Rightarrow x = 8 \\ x < 0 : x - x = 16 \Rightarrow 0 = 16 \text{ غلط} \end{cases}$$

بنابراین اگر از  $\mathbb{R}$  از  $x \leq 0$  و  $x = 8$  را کنار بگذاریم، دامنه‌ی تعریف  $g \circ f$  به دست می‌آید:

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \not\leq 0, x \neq 8\} = \mathbb{R}^{>0} - \{8\} = (0, 8) \cup (8, +\infty)$$

روش اول:  1  2  3  4  52

$$f(x^2) - 2f(x) + 1 = \frac{x^2}{x^2-1} - \frac{2x}{x-1} + 1 = \frac{x^2}{(x+1)(x-1)} - \frac{2x}{x-1} + 1$$

$$= \frac{x^2 - 2x(x+1) + (x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2 - 2x^2 - 2x + x^2 - 1}{x^2 - 1}$$

$$= \frac{-2x - 1}{x^2 - 1} = \frac{-(2x+1)}{x^2 - 1} = \frac{2x+1}{1-x^2}$$

روش دوم:

کافی است در رابطه  $f(x^2) - 2f(x) + 1$  به جای  $x$  مقدار دلخواهی قرار داده و حاصل این عبارت را مشخص کنیم. به عنوان مثال داریم:

$$x = 2 \rightarrow f(4) - 2f(2) + 1 = \frac{4}{4-1} - 2\left(\frac{2}{2-1}\right) + 1 = \frac{4}{3} - 4 + 1 = -\frac{5}{3}$$

حال در میان گزینه‌ها، گزینه‌ای را انتخاب می‌کنیم که با جای گذاری  $x = 2$  مقدارش  $-\frac{5}{3}$  گردد. پس جواب درست گزینه (3) است.

1  2  3  4  53

$$f(-144) = \sqrt{-144 + 2 \times 144} = \sqrt{144} = 12 \rightarrow f(f(-144)) = f(12) = \sqrt{12 + (2 \times 12)} = \sqrt{36} = 6$$

1  2  3  4  54

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = (2(x+2) - 3)^2 = (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

$$f(x) = (2x-3)^2 \Rightarrow f(x) = 4x^2 - 12x + 9$$

$$\text{تلاقی: } 4x^2 + 4x + 1 = 4x^2 - 12x + 9 \Rightarrow 16x = 8 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

می‌دانیم که  $f(a) = b \rightarrow f^{-1}(b) = a$  است پس برای محاسبه  $f^{-1}(2)$  کافی است در تابع اصلی به جای  $y$ ، 2 بگذاریم.  1  2  3  4  55

$$2 = \frac{2^x - (\frac{1}{2})^x}{2} \rightarrow 2^x - \frac{1}{2^x} = 4 \xrightarrow{2^x=A} A - \frac{1}{A} = 4 \xrightarrow{\times A} A^2 - 1 = 4A \rightarrow A^2 - 4A - 1 = 0 \rightarrow \Delta = 16 + 4 = 20$$

$$\rightarrow \begin{cases} A = \frac{4 + \sqrt{20}}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{5}}{2} = 2 + \sqrt{5} \\ A = \frac{4 - \sqrt{20}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{5}}{2} = 2 - \sqrt{5} \end{cases}$$

می‌دانیم که  $\log_b^a = c \rightarrow a = b^c$  است.

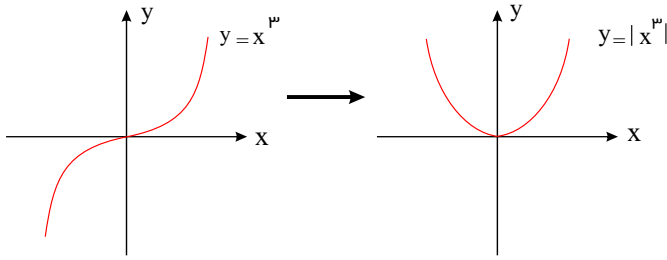
$$A = 2 + \sqrt{5} \rightarrow 2^x = 2 + \sqrt{5} \rightarrow x = \log_2^{2+\sqrt{5}}$$

$$A = 2 - \sqrt{5} \rightarrow 2^x = 2 - \sqrt{5} \quad \text{امکان ندارد}$$

منفی



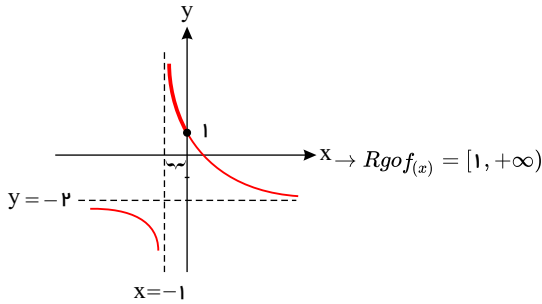
۱ ۲ ۳ ۴ ۵۶



این تابع، غیر یک به یک و در نتیجه وارون ناپذیر است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۷

در تابع  $gof(x)$  ورودی تابع  $x - [x]$  است که می‌دانیم  $0 < x - [x] < 1$  است کافی است تابع  $g(x)$  را رسم کرده و مشخص می‌کنیم وقتی  $0 < x - [x] < 1$  است چه عرضی به ما می‌دهد.



طرح این سوال کاملاً خارج از اهداف کتاب درسی است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۸

۱۶ واحد در جهت مثبت محور  $y$  ها  $\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}}$

$$f(x) = (x-1)^2 - 1 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}} g(x) = -(x-1)^2 + 1 \xrightarrow{\text{۱۶ واحد در جهت مثبت محور } y \text{ ها}} h(x) = -(x-1)^2 + 1 + 16 \rightarrow h(x) = -(x-1)^2 + 17$$

$$\text{غ ق ق } \begin{cases} x-1 = 3 \rightarrow x = 4 \rightarrow y = 8 \\ x-1 = -3 \rightarrow x = -2 \quad (x > 1) \end{cases} \rightarrow (x-1)^2 - 1 = -(x-1)^2 + 17 \rightarrow 2(x-1)^2 = 18 \rightarrow (x-1)^2 = 9$$

پس:  $A \left| \begin{matrix} 4 \\ 8 \end{matrix} \right|, B \left| \begin{matrix} 4 \\ -2 \end{matrix} \right| \rightarrow AB = \sqrt{(4-0)^2 + (8-0)^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۹

$$f(x) = 2x^2 + 4 \rightarrow f(g(x)) = 2(g(x))^2 + 4$$

از طرفی  $f(g(x)) = 4x^2 + 6x$  می‌باشد، بنابراین داریم:

$$2(g(x))^2 + 4 = 4x^2 + 6x \xrightarrow{x=-2} 2(g(-2))^2 + 4 = 4(4) + 6(-2) \rightarrow 2(g(-2))^2 + 4 = 4 \rightarrow 2(g(-2))^2 = 0 \rightarrow g(-2) = 0$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۰

$$gof\left(\frac{\pi}{4}\right) = g\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = g\left(\sin\frac{\pi}{4}\right) = g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

۶۱ می‌دانیم که  $f(a) = b \rightarrow f^{-1}(b) = a$  است برای آنکه مشخص کنیم نمودار تابع  $f^{-1}(x)$ ، نیمساز ناحیه چهارم  $(y = -x)$  را با کدام طول قطع می‌کند باید معادله  $f^{-1}(x) = -x$  را حل کنید.

$$f^{-1}(x) = -x \rightarrow f(-x) = x \rightarrow -x - \frac{2}{-x} = x \rightarrow \frac{2}{x} = 2x \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} \text{ق ق } x = 1 \\ \text{غ ق } x = -1 \end{cases}$$

توجه کنید که در ناحیه چهارم،  $x > 0$  است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۲

$$f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\} \rightarrow f^{-1} = \{(2, 1), (5, 2), (4, 3), (6, 4)\}$$

$$gof^{-1}(x) : \begin{cases} g(f^{-1}(2)) = g(1) = \emptyset \\ g(f^{-1}(5)) = g(2) = 3 \\ g(f^{-1}(4)) = g(3) = 1 \\ g(f^{-1}(6)) = g(4) = 2 \end{cases} \rightarrow gof^{-1}(x) = \{(5, 3), (4, 1), (6, 2)\}$$

پس:  $\frac{g(x)}{gof^{-1}(x)} = \left\{ \left(4, \frac{2}{1}\right), \left(5, \frac{6}{3}\right) \right\} = \{(4, 2), (5, 2)\}$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۳

$$f(x) = \sqrt{2-x-x^2} \rightarrow f(-1) = \sqrt{2-(-1)-(-1)^2} = \sqrt{2+1-1} = \sqrt{2} \quad 21$$



$$\Rightarrow f(f(-1)) = f(\sqrt{2}) = \sqrt{2 - \sqrt{2} - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2 - \sqrt{2} - 2} = \sqrt{-\sqrt{2}}$$

تعریف نشده

می‌دانیم که  $a = f(b) \Rightarrow f^{-1}(a) = b$  است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۶۴

$$f^{-1} \circ g^{-1}(-9) = f^{-1}(g^{-1}(-9)) = f^{-1}(21) = 6$$

توجه کنید:

$$g^{-1}(-9) = a \Rightarrow g(a) = -9 \Rightarrow \frac{3-a}{2} = -9 \Rightarrow 3-a = -18 \Rightarrow a = 21$$

$$f^{-1}(21) = b \Rightarrow f(b) = 21 \Rightarrow b^2 - 4b + 9 = 21 \Rightarrow b^2 - 4b - 12 = 0 \Rightarrow (b-6)(b+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 6 \\ b = -2 \end{cases}$$

غ ق (با توجه به دامنه)

ابتدا تابع  $y = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$  را تشکیل می‌دهیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۶۵

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x + |x|}{|x+1| + 1}$$

با توجه به تابع  $y = \frac{f(x)}{g(x)}$  به ازای اعداد نامثبت (منفی و صفر)، صورت کسر صفر می‌شود بنابراین در این فاصله برد تابع عدد صفر است.

$$x \leq 0 \Rightarrow y = 0$$

$$x > 0 \Rightarrow y = \frac{x+x}{x+1+1} = \frac{2x}{x+2}$$

$$x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow R_f = [0, 2)$$

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow y = 2$$

چون این یک تابع صعودی است ( $f' > 0$ ) با جایگذاری ابتدا و انتهای دامنه، برد تابع محاسبه می‌شود.

و یا می‌توان گفت:

$$y = \frac{2x}{x+2} = 2 - \frac{4}{x+2}$$

$$x < 0 \Rightarrow x+2 < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{x+2} < 0 \Rightarrow 0 < 2 - \frac{4}{x+2} \Rightarrow D_y = (0, 2) \cup \{0\} = [0, 2)$$

روش اول: ۱ ۲ ۳ ۴ ۶۶

$$g(f(x)) = g\left(\frac{2x+3}{2-x}\right) = \frac{1-3\left(\frac{2x+3}{2-x}\right)}{\frac{2x+3}{2-x}+2} = \frac{2-x-6x-9}{2-x} = \frac{-7x-7}{2-x} = \frac{7(-x-1)}{2-x} = -x-1$$

روش دوم:

یک عدد دلخواه مثلاً  $x = 1$  را انتخاب می‌کنیم.

$$g(f(1)) = g(5) = \frac{1-15}{5+2} = \frac{-14}{7} = -2$$

فقط در گزینه‌ی سوم به ازای  $x = -1$  عدد  $-2$  به دست می‌آید.

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۷

$$f(x) = 3 + \sqrt{2x} \Rightarrow f(8) = 3 + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$$

می‌دانیم که  $a = f(b) \Rightarrow f^{-1}(a) = b$  است برای آن که مشخص کنیم نمودار تابع  $f^{-1}(x)$ ، نیمساز ناحیهٔ دوم ( $y = -x$ ) را با کدام طول قطع می‌کند باید ۱ ۲ ۳ ۴ ۶۸

معادلهٔ  $f^{-1}(x) = -x$  را حل کنید.

$$f^{-1}(x) = -x \Rightarrow f(-x) = x \Rightarrow -x - \frac{1}{-2x} = x \Rightarrow \frac{1}{2x} = 2x \Rightarrow 4x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \text{ غ ق} \\ x = -\frac{1}{2} \text{ ق ق} \end{cases}$$

توجه کنید که در ناحیهٔ دوم،  $x < 0$  است.

برای این که رابطه‌ی نشان‌دهنده تابع باشد هیچ دو زوج مرتب متمایزی نباید دارای مولفه اول برابر داشته باشد. ۱ ۲ ۳ ۴ ۶۹

$$(3, m^2), (3, m+2) \Rightarrow m^2 = m+2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$$

تابع است  $\rightarrow \{(3, 1), (2, 1), (-3, -1), (-2, -1), (3, 1), (-1, 4)\}$

تابع نیست  $\rightarrow \{(3, 4), (2, 1), (-3, 2), (-2, 2), (3, 4), (2, 4)\}$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۰

$$g(f(x)) = 2x$$

اگر توابع  $f$  و  $g$  به عنوان ماشین به صورت  $x \rightarrow f \rightarrow g \rightarrow 2x$  باشند، نتیجه می‌گیریم که:

$$g(x) = 3x + 4 \Rightarrow g(f(x)) = 3f(x) + 4 \Rightarrow 3f(x) + 4 = 2x \Rightarrow f(x) = \frac{2x-4}{3} \Rightarrow f(5) = \frac{6}{3} = 2$$

می‌دانیم که  $a = f(b) \Rightarrow f^{-1}(a) = b$  است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۷۱



$$g^{-1}(16) = b \Rightarrow g(b) = \frac{9b+6}{1-b} = 16 \Rightarrow b = \frac{2}{5} f^{-1}(20) = a \Rightarrow f(a) = a + \sqrt{a} = 20 \Rightarrow a = 16 \Rightarrow f^{-1}(20) = 16$$

$$= g^{-1}(16) = \frac{2}{5} \Rightarrow g^{-1} \circ f^{-1}(20) = g^{-1}(f^{-1}(20))$$

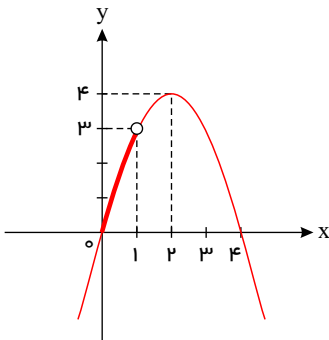
روش اول: ۱ ۲ ۳ ۴ ۷۲

می‌دانیم که  $0 \leq u - [u] < 1$  است پس  $0 \leq 2x - [2x] < 1$  است یعنی  $0 \leq f(x) < 1$  است.

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = -f^2(x) + 4f(x) = -(f^2(x) - 4f(x)) = -((f(x) - 2)^2 - 4) = -(f(x) - 2)^2 + 4$$

$$\text{پس: } 0 \leq f(x) < 1 \rightarrow -2 \leq f(x) - 2 < -1 \rightarrow 1 < (f(x) - 2)^2 \leq 4 \rightarrow -1 > -(f(x) - 2)^2 \geq -4 \rightarrow 3 > -(f(x) - 2)^2 + 4 \geq 0$$

$$\rightarrow 0 \leq g \circ f(x) < 3 \rightarrow R_{g \circ f} = [3, 0)$$

روش دوم: در تابع  $g \circ f(x)$  ورودی تابع  $2x - [2x]$  است که می‌دانیم  $0 \leq 2x - [2x] < 1$  است کافی است تابع  $g(x)$  را رسم کرده ومشخص کنیم وقتی  $0 \leq x < 1$  است چه عرضی به ما می‌دهد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۳

$$g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\} \rightarrow g^{-1}\{(3, 2), (2, 4), (6, 5), (1, 3)\}$$

$$g^{-1} \circ f(x) : \begin{cases} g^{-1}(f(1)) = g^{-1}(2) = 4 \\ g^{-1}(f(2)) = g^{-1}(5) = \emptyset \\ g^{-1}(f(3)) = g^{-1}(4) = \emptyset \\ g^{-1}(f(4)) = g^{-1}(6) = 5 \end{cases} \rightarrow g^{-1} \circ f(x) = \{(1, 4), (4, 5)\}$$

$$\begin{cases} g^{-1} \circ f(x) = \{(1, 4), (4, 5)\} \\ f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\} \end{cases} \rightarrow g^{-1} \circ f(x) = \{(1, 4-2), (4, 5-6)\} = \{(1, 2), (4, -1)\}$$

بنابراین برد تابع به صورت  $\{2, -1\}$  است.

۷۴ ۱ ۲ ۳ ۴

$$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{واحد در جهت مثبت محور } x \text{ ها}} g(x) = \sqrt{x-12} \xrightarrow{\text{واحد در جهت مثبت محور } y \text{ ها}} h(x) = \sqrt{x-12} + 2$$

$$\text{تلاقی: } \sqrt{x} = \sqrt{x-12} + 2$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x = x - 12 + 4 + 4\sqrt{x-12} \rightarrow 8 = 4\sqrt{x-12} \rightarrow 2 = \sqrt{x-12}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 4 = x - 12 \rightarrow x = 16 \rightarrow y = 4$$

$$\text{پس: } A|_4^1, O|_0^0 \rightarrow AO = \sqrt{(16-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{16^2 + 4^2} = \sqrt{16^2 + 16} = \sqrt{16(16+1)} = 4\sqrt{17}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۵

$$\begin{cases} f \circ g(x) = f(g(x)) = \frac{2(x+4)-1}{x+4+2} = \frac{2x+7}{x+6} \\ g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{2x-1}{x+2} + 4 = \frac{2x-1+4x+8}{x+2} = \frac{6x+7}{x+2} \end{cases}$$

$$\text{پس: } \frac{2x+7}{x+6} = \frac{6x+7}{x+2} \rightarrow 6x^2 + 36x + 7x + 42 = 2x^2 + 4x + 7x + 14$$



$$\rightarrow 4x^2 + 32x + 28 = 0 \rightarrow x^2 + 8x + 7 = 0 \rightarrow (x+1)(x+7) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -7 \end{cases}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۶

می‌دانیم:  $\log a^b = b \cdot \log a$  ,  $\log_a^a e = 1$   
ابتدا  $f^{-1}(x)$  را می‌یابیم:

$$f(x) = 4 - 3^{2x} \Rightarrow y = 4 - 3^{2x} \Rightarrow 3^{2x} = 4 - y \xrightarrow[\text{پایه سه می‌گیریم}]{\text{از طرفین لگاریتم در}} 2x = \log_3(4 - y) \Rightarrow x = \frac{1}{2} \log_3(4 - y)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \log_3(4 - x) \quad ; \quad 4 - x > 0 \Rightarrow x < 4 \Rightarrow D_{f^{-1}} = (-\infty, 4)$$

$$g(x) = \sqrt{x f^{-1}(x)} \Rightarrow g(x) = \sqrt{\frac{1}{2} x \cdot \log_3(4 - x)}$$

برای یافتن دامنه  $g(x)$  باید ریشه‌های عبارت زیر رادیکالی را بیابیم و سپس تعیین علامت کنیم.

$$\log_3(4 - x) = 0 \Rightarrow 4 - x = 1 \Rightarrow x = 3$$

$x$	$-\infty$	$0$	$3$	$4$
$\frac{1}{2} x \log_3(4 - x)$		-	+	-

$$\Rightarrow D_g = [0, 3]$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۷

چون  $f(x) = 2^x$  است پس  $f(\frac{1}{x}) = 2^{\frac{1}{x}}$  می‌باشد پس:

$$y = \sqrt{f(\frac{1}{x}) - f(x)} \xrightarrow{Dy} f(\frac{1}{x}) - f(x) \geq 0 \Rightarrow 2^{\frac{1}{x}} - 2^x \geq 0 \Rightarrow 2^{\frac{1}{x}} \geq 2^x \quad (*)$$

می‌دانیم تابع نمایی  $y = 2^x$  صعودی است، پس از نامساوی (\*) نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{1}{x} \geq x \Rightarrow \frac{1}{x} - x \geq 0 \Rightarrow \frac{1 - x^2}{x} \geq 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{(1-x)(1+x)}{x}}_{P(x)} \geq 0$$

$x$	$-1$	$0$	$1$
$P(x)$	+	-	+

باتوجه به جدول تعیین علامت  $P(x)$ ، مجموعه جواب نامساوی اخیر برابر است با  $(-\infty, -1] \cup (0, 1]$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۸

می‌دانیم:  
$$x - [x] = \begin{cases} 0 & , x \in \mathbb{Z} \\ (0, 1) & , x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= x - [x] \\ g(x) &= \frac{1}{x} - 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow g \circ f(x) = g(x - [x]) = \frac{1}{x - [x]} - 1$$

می‌دانیم همواره  $0 \leq x - [x] < 1$  است و از طرفی نباید  $x - [x] = 0$  باشد.

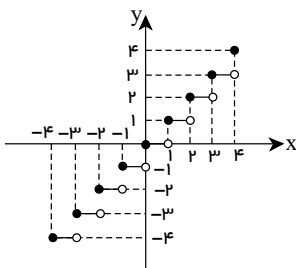
$$0 < x - [x] < 1 \Rightarrow \frac{1}{x - [x]} > 1 \rightarrow \frac{1}{x - [x]} - 1 > 0$$

$$\Rightarrow g \circ f(x) > 0 \Rightarrow R_{g \circ f} = (0, +\infty)$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۹

نمودار تابع  $y = [x]$  را رسم می‌کنیم.

این تابع یک به یک نمی‌باشد (زیرا تابعی یک به یک است که اگر هر خطی موازی محور طول رسم کنیم شکل را حداکثر در یک نقطه قطع کند) در ضمن همانطور که نمودار نشان می‌دهد تابع  $y = [x]$  تابعی صعودی است.



باتوجه به شکل تابع  $f(x)$  در نقاط به طول‌های  $-3$  و  $-1$  و  $2$  محور  $x$  ها را قطع می‌کند.

$$\text{شرط دامنه: } (x+1) \cdot f(x) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ f(x) = 0 \Rightarrow x = -3, -1, 2 \end{cases}$$

توجه: چون عدد  $x = -1$  دو بار تکرار شده است. پس ریشه مضاعف محسوب شده و علامت معادله در طرفین ریشه مضاعف تغییر نمی‌کند.

$x$	$-\infty$	$-3$	$-1$	$2$	$+\infty$	
$(x+1) \cdot f(x) \geq 0$		+	0	-	0	+

$$D_f = (-\infty, -3] \cup [2, +\infty) = \mathbb{R} - (-3, 2)$$



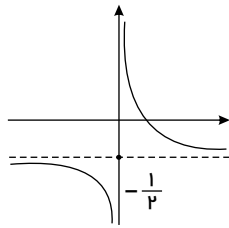


$$\begin{aligned}(f \circ g)(\sqrt{2}) &= f(g(\sqrt{2})) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right) \\ &= \left[\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right] = \left[\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \times \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right] = \left[\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{1-2}\right] = [-2-\sqrt{2}] = -2 + [-1, 4] = -2 - 2 = -4\end{aligned}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۲ برای محاسبه برد تابع  $y = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$  ابتدا دو تابع  $f(x)$  و  $g(x)$  را دو ضابطه‌ای نموده و سپس  $y = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$  را تشکیل می‌دهیم و می‌دانیم که  $y = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$  در دامنه مشترک ایجاد می‌شود.

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & x \leq -1 \\ -x+1 & x > -1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 2x & x > 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \begin{cases} \text{تعریف نشده} & x \leq -1 \\ \text{تعریف نشده} & -1 < x \leq 0 \\ \frac{-x+1}{2x} & x > 0 \end{cases}$$



منحنی  $y = \frac{-x+1}{2x}$  یک تابع هموگرافیک است که با رسم نمودار برد تابع را می‌یابیم.

با توجه به شکل برای  $x > 0$  برد تابع  $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$  است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۳ الف) شرط تابع بودن: هیچ دو زوج مرتب متمایز، مولفه‌ی اول برابر نداشته باشند.

$$\begin{aligned}(3, 2) = (3, a^2 - a) &\Rightarrow a^2 - a = 2 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \\ \Rightarrow (a-2)(a+1) = 0 &\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -1 \end{cases}\end{aligned}$$

ب) شرط یک به یک بودن: هیچ دو زوج مرتب متمایز، مولفه‌ی دوم برابر نداشته باشند.

$$(3, 2) = (b, 2) \Rightarrow b = 3$$

اما از میان دو مقدار به دست آمده برای  $a$ ، باید یکی را به گونه‌ای انتخاب کنیم که شرایط الف) و ب) کماکان برقرار بماند. در نتیجه فقط  $a = 2$  قابل قبول می‌باشد زیرا اگر  $a = -1$  باشد، دو زوج مرتب  $(-1, 4)$  و  $(-1, 2)$  در مجموعه دیده می‌شوند که در آن صورت مجموعه‌ی حاصل تابع نخواهد بود. در نتیجه  $(a, b) = (2, 3)$  می‌باشد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۴ ابتدا با داشتن دو نقطه‌ی  $A \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$  و  $B \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$  معادله‌ی خط گذرنده از این دو نقطه را می‌نویسیم:

$$\frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \Rightarrow \frac{y - a}{x - a} = \frac{a - a}{-a} = -1 \Rightarrow y - a = -x \Rightarrow f(x) = a - x$$

$$f \circ f(x) = f(f(x)) = a - (a - x) = x$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۵ می‌دانیم که  $f(a) = b \rightarrow f^{-1}(b) = a$  است. سؤال در حقیقت  $f^{-1}(12) + f^{-1}(6)$  را خواسته است.

$$\begin{aligned}f^{-1}(6) = a &\rightarrow f(a) = 6 \rightarrow a + \sqrt{a} = 6 \rightarrow a = 4 \rightarrow a + b = 13 \\ f^{-1}(12) = b &\rightarrow f(b) = 12 \rightarrow b + \sqrt{b} = 12 \rightarrow b = 9\end{aligned}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۶

$$f(1+x) = (1+x)^2(2-(1+x))^2 = (1+x)^2(1-x)^2$$

$$f(1-x) = (1-x)^2(2-(1-x))^2 = (1-x)^2(1+x)^2$$

$$\rightarrow f(1+x) - f(1-x) = (1+x)^2(1-x)^2 - (1-x)^2(1+x)^2 = 0$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۷ ابتدا دامنه‌ی تعریف تابع  $y = \log \frac{x-2}{x}$  را بدست می‌آوریم.

$$\frac{x-2}{x} > 0 \rightarrow \begin{array}{c} | \quad -\infty \quad 2 \quad +\infty \\ \hline \quad \quad \quad + \quad \quad - \quad \quad + \\ \quad \quad \quad \circ \quad \quad \circ \quad \quad \circ \end{array} \rightarrow x < 0 \text{ یا } x > 2$$

می‌دانیم شرط تساوی دو تابع  $f(x)$  و  $g(x)$  آن است که دامنه‌هایشان برابر باشد و به ازای هر  $x$  از دامنه،  $f(x) = g(x)$  باشد. اکنون به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم.

$$\text{گزینه‌ی اول: } \begin{cases} x-2 > 0 \rightarrow x > 2 \\ x > 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f : x > 2 \rightarrow \text{دامنه‌ها برابر نیستند}$$



توجه کنید  $x = -2$  مخرج را صفر می‌کند و نباید در دامنه‌ی تعریف باشد. بنابراین قطعاً دامنه‌اش با دامنه‌ی تابع داده شده برابر نیست.

$$\text{گزینه‌ی دوم: } \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2} > 0$$

به ازای  $x \neq 2$  و  $x \neq 0$  همواره برقرار است. بنابراین

$$\text{گزینه‌ی سوم: } \left(\frac{x-2}{x}\right)^2 > 0$$

دامنه تعریف می‌شود  $D_h = \mathbb{R} - \{0, 2\}$  و مشخص است که دامنه‌ها برابر نیستند.

دامنه‌ها برابرند  $\rightarrow x > 2$  یا  $x < 0 \rightarrow \frac{x-2}{x} > 0$  :گزینه‌ی چهارم

$$p(x) = 2 \log \sqrt{\frac{x-2}{x}} = 2 \log \left(\frac{x-2}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \log \frac{x-2}{x} = y \rightarrow \text{دو تابع باهم برابرند}$$

1 2 3 4 88

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \text{ می‌دانیم:}$$

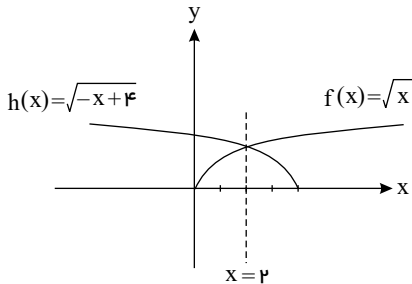
$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow g(f(x)) = \begin{cases} x \notin \mathbb{Z}: & g(-1) = 1 - 1 - 2 = -2 \\ x \in \mathbb{Z}: & g(0) = -2 \end{cases}$$

پس به ازای هر عدد حقیقی برقرار است.

1 2 3 4 89

2 نمودار را در یک دستگاه رسم می‌کنیم.

$$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y \text{ ها}} g(x) = \sqrt{-x} \xrightarrow{\text{واحد به سمت راست}} h(x) = \sqrt{-(x-4)} = \sqrt{-x+4}$$



مشخص است که این دو نسبت به خط  $x = 2$  متقارن هستند.

1 2 3 4 90

به کمک تعریف تابع  $f(x)$ ، تابع  $g(x)$  را تشکیل می‌دهیم:

$$\text{می‌دانیم } 0 \leq x - [x] < 1$$

$$\begin{aligned} g(x) &= f(2x-3) - 2f(x) = ((2x-3) - [2x-3]) - 2(x - [x]) \\ &= 2x - [2x] - 2x + 2[x] = -[2x] + 2[x] = -[2x - 2[x]] = -[2(x - [x])] \\ 0 \leq 2x - 2[x] < 2 &\Rightarrow [2x - 2[x]] = 0, 1 \Rightarrow -[2x - 2[x]] = 0, -1 \end{aligned}$$

بنابراین گزینه 3 صحیح است.

1 2 3 4 91

روش اول:

$$\left(\frac{1}{p}\right)^x \text{ نزولی اکید} \Rightarrow 1 - \left(\frac{1}{p}\right)^x \text{ صعودی اکید} \Rightarrow f(x) \text{ و صعودی اکید است } f(0) = 0$$

$$y = \sqrt{xf(x)}$$

$$x \geq 0 \xrightarrow{\text{صعودی } f} f(x) \geq f(0) = 0 \Rightarrow xf(x) \geq 0$$

$$x < 0 \xrightarrow{\text{صعودی } f} f(x) < f(0) = 0 \Rightarrow xf(x) > 0$$

بنابراین عبارت زیر رادیکال همواره مثبت است و در نتیجه دامنه تعریف تابع  $y$ ،  $(-\infty, +\infty)$  است.

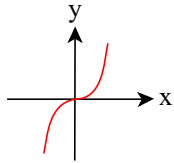
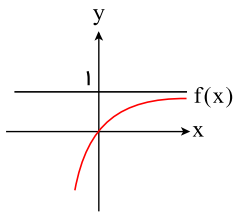
روش دوم:

$$y = \sqrt{xf(x)} = \sqrt{x\left(1 - \left(\frac{1}{p}\right)^x\right)} \rightarrow x\left(1 - \left(\frac{1}{p}\right)^x\right) \geq 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x \geq 0: \left(\frac{1}{p}\right)^x \leq 1 \Rightarrow 1 - \left(\frac{1}{p}\right)^x \geq 0 \Rightarrow x\left(1 - \left(\frac{1}{p}\right)^x\right) \geq 0 \Rightarrow D_1 = [0, +\infty) \\ \text{یا} \\ x < 0: \left(\frac{1}{p}\right)^x > 1 \Rightarrow -\left(\frac{1}{p}\right)^x < -1 \Rightarrow 1 - \left(\frac{1}{p}\right)^x < 0 \Rightarrow x\left(1 - \left(\frac{1}{p}\right)^x\right) > 0 \Rightarrow D_2 = (-\infty, 0) \end{cases}$$



$$\Rightarrow D = D_1 \cup D_2 = (-\infty, +\infty)$$



$$f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x-1}, \quad 9-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 9 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$$

$$x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \Rightarrow D_f = [-3, 3] - \{1\} = [-3, 1) \cup (1, 3]$$

$$I \subseteq [-3, 1) \Rightarrow \begin{cases} k-2 \geq -3 \\ 3k+2 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \geq -1 \\ k \leq -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow -1 \leq k \leq -\frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\text{یا} \\ I \subseteq (1, 3] \Rightarrow \begin{cases} k-2 \geq 1 \\ 3k+2 \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \geq 3 \\ k \leq \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \emptyset \quad (2)$$

$$(1) \cup (2) \Rightarrow -1 \leq k \leq -\frac{1}{3} \Rightarrow k \in [-1, -\frac{1}{3}]$$

ظاهراً طرح سؤال به این نکته که  $k = -\frac{1}{3}$  نیز می‌تواند باشد توجه نکرده است.

$$k = -\frac{1}{3} \Rightarrow (k-2, 3k+2) = (-\frac{1}{3}-2, -1+2) = (-\frac{7}{3}, 1) \subset D_f$$

ابتدا تابع  $g(x) = 2x - 3$  را در داخل تابع  $f \circ g(x)$  می‌سازیم بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= 2(x^2 - 4x + 5) = 2x^2 - 8x + 10 \\ &= 2x^2 - 12x + 9 - 4x + 6 + 5 \\ &= (2x - 3)^2 - 2(2x - 3) + 5 \\ &= g^2(x) - 2g(x) + 5 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x + 5 \end{aligned}$$

راه حل تستی

قرار می‌دهیم  $x = 2$ :

$$\begin{aligned} g(2) &= 4 - 3 = 1 \\ f(g(2)) &= f(1) = 4(1 - 1 + 5) = 4 \end{aligned}$$

در گزینه‌ها تابعی را می‌یابیم که  $f(1) = 4$  باشد. اگر بیش از یک گزینه باقی ماند با یک عدد دیگر همین روند را تکرار می‌کنیم.

1 2 3 4 95

ابتدا از روی ضابطه توابع  $f(x)$  و  $g(x)$  ضابطه  $g \circ f(x)$  را یافته، سپس ضابطه  $f \circ g$  را می‌یابیم.

$$f(x) = 2x + 3$$

$$g(f(x)) = 8x^2 + 22x + 20$$

$$g(2x + 3) = 8x^2 + 22x + 20$$

$$2x + 3 = t \Rightarrow x = \frac{t-3}{2} \Rightarrow g(t) = 2(t^2 - 6t + 9) + 11(t-3) + 20 \Rightarrow g(x) = 2x^2 - x + 5$$

$$\Rightarrow (f \circ g)(x) = 2(2x^2 - x + 5) + 3 = 4x^2 - 2x + 13$$

می‌دانیم که  $f(a) = b \rightarrow f^{-1}(b) = a$  است. سوال در حقیقت  $f^{-1}(3) + f^{-1}(15)$  را خواسته است. 1 2 3 4 96

$$f^{-1}(3) = a \rightarrow f(a) = 3 \rightarrow a + 2\sqrt{a} = 3 \rightarrow a = 1 \rightarrow a + b = 10$$

$$f^{-1}(15) = b \rightarrow f(b) = 15 \rightarrow b + 2\sqrt{b} = 15 \rightarrow b = 9$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۹۷

$$f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}, \quad g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\}$$

$$g^{-1} = \{(3, 2), (2, 4), (6, 5), (1, 3)\} \Rightarrow g^{-1} \circ f = \{(1, 4), (4, 5)\}$$

$$g^{-1} \circ f - f = \{(1, 4 - 2), (4, 5 - 6)\} = \{(1, 2), (4, -1)\} \Rightarrow \text{برد} = \{2, -1\}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۹۸

راه اول: جواب معادله  $f(x) = 0$  را پیدا میکنیم که در معادله  $(f \circ g)\left(\frac{1}{a}\right) = 0$  باید صدق کند.

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{a} \Rightarrow (f \circ g)\left(\frac{1}{a}\right) = 0$$

$$(f \circ g)(x) = a(1 - 2x) - 1 = a - 2ax - 1$$

$$(f \circ g)\left(\frac{1}{a}\right) = 0 \Rightarrow a - 2 - 1 = 0 \Rightarrow a = 3$$

راه حل دوم: ابتدا معادله تلاقی دو تابع  $f$  و  $f \circ g$  را تشکیل داده، طول نقطه تلاقی آنها را می‌یابیم سپس با جایگذاری آن در یکی از معادلات  $f$  یا  $f \circ g$  را می‌یابیم.

$$(f \circ g)(x) = f(x) \Rightarrow a - 2ax - 1 = ax - 1 \Rightarrow -3ax + a = 0$$

$$\Rightarrow a(-3x + 1) = 0 \Rightarrow -3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

توجه:  $f\left(\frac{1}{3}\right)$  را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$a\left(\frac{1}{3}\right) - 1 = 0 \Rightarrow \frac{a}{3} = 1 \Rightarrow a = 3$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۹۹

$$0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 9 \cos^2 x \leq 9 \Rightarrow -1 \leq 9 \cos^2 x - 1 \leq 8 \Rightarrow -1 \leq \underbrace{\sqrt{9 \cos^2 x - 1}}_t \leq 2 \Rightarrow -1 \leq t \leq 2$$

$$f(x) = 2^t - 2^{-t}$$

تابع  $2^t$  همواره صعودی است و تابع  $2^{-t}$  همواره نزولی است پس تابع  $2^{-t} - 2^t$  نیز همواره صعودی است. پس می‌توان نتیجه گرفت تابع  $f(x)$  یک تابع صعودی است.

$$\text{کمترین مقدار تابع: } t = -1 \Rightarrow 2^{-1} - 2^1 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} \Rightarrow \left[-\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right]$$

$$\text{بیشترین مقدار تابع: } t = 2 \Rightarrow 2^2 - 2^{-2} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

$$\Rightarrow b - a = \frac{15}{4} - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{21}{4}$$

توجه: اگر تابع پیوسته  $f(x)$  در بازه  $[a, b]$  اکیداً صعودی باشد آنگاه برد تابع برابر است با:

$$R_f = [f(a), f(b)]$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰۰

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$$

می‌دانیم:

$$D_{f \circ g} = \{x | x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

ابتدا  $f^{-1}$  را می‌نویسیم:

$$f^{-1} = \{(2, 1), (5, 2), (4, 3), (6, 4)\}$$

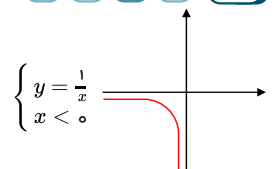
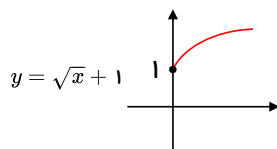
و سپس  $g \circ f^{-1}$  را محاسبه می‌کنیم:

$$g \circ f^{-1} = \{(5, 3), (4, 1), (6, 2)\}$$

حال زوج مرتب  $\frac{g}{g \circ f^{-1}}$  را پیدا می‌کنیم:

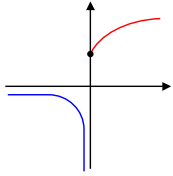
$$\frac{g}{g \circ f^{-1}} = \{(5, 2), (4, 2)\}$$

بهترین و سریعترین روش برای بررسی توابع چند ضابطه‌ای، رسم آنهاست. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰۱





خطوط موازی محور  $x$ ها نمودار این تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند پس یک به یک است و این تابع ابتدا نزولی و بعد صعودی است که غیر یکتا محسوب می‌شود.



روش اول: کافی است عبارت جلوی لگاریتم را بزرگ‌تر از صفر قرار دهید. (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۰۲)

$$|x^x - 2| - x > 0 \rightarrow |x^x - 2| > x$$

ریشه‌های داخل قدرمطلق  $\pm\sqrt{2}$  هستند.

$$x < -\sqrt{2} \rightarrow x^x - 2 > x \rightarrow x^x - x - 2 > 0 \rightarrow (x-2)(x+1) > 0 \rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 2 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} x < -\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \rightarrow -x^x + 2 > x \rightarrow x^x + x - 2 < 0 \rightarrow (x+2)(x-1) < 0 \rightarrow -2 < x < 1 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} -2 < x < 1$$

$$x > \sqrt{2} \rightarrow x^x - 2 > x \rightarrow x^x - x - 2 > 0 \rightarrow (x-2)(x+1) > 0 \rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 2 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} x > 2$$

از اجتماع جواب‌های به دست آمده به  $x > 2$  یا  $x < 1$  می‌رسیم.  
روش دوم: به روش عددگذاری حل می‌کنیم.

گزینه‌های ۲ و ۳ حذف می‌شوند  $\rightarrow$  جلوی لگاریتم منفی می‌شود  $x = 2$   
گزینه ۱ حذف می‌شود  $\rightarrow$  جلوی لگاریتم مثبت می‌شود  $x = -1$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۱۰۳)

با تغییر متغیر داریم:

$$x - \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^x + \frac{1}{x^x} - 2 = t^x \Rightarrow x^x + \frac{1}{x^x} = t^x + 2$$

$$f\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^x + \frac{1}{x^x} - 2 \xrightarrow{\left(x - \frac{1}{x}\right) = t} f(t) = t^x - 2 \Rightarrow f(x) = x^x - 2$$

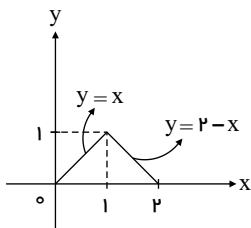
چون تابع  $f(x) = \sqrt{x+3} - 1$  اکیدا صعودی است پس حتماً وارونش را روی نیمساز ربع اول و سوم ( $y = x$ ) قطع می‌کند. (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۰۴)

$$\sqrt{x+3} - 1 = x \rightarrow \sqrt{x+3} = x+1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} x+3 = x^2 + 1 + 2x \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow (x+2)(x-1) = 0$$

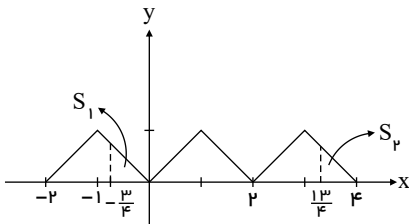
$$\rightarrow \begin{cases} x = -2 & \text{(در معادله صدق نمی‌کند)} \\ x = 1 & \rightarrow y = 1 \end{cases}$$

$$M \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, O \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow MO = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

نمودار تابع داده شده را در یک دوره تناوبش رسم می‌کنیم. (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۰۵)



اکنون شکل را در بازه خواسته شده یعنی  $\left[-\frac{3}{4}, \frac{13}{4}\right]$  رسم می‌کنیم:



چون  $S_1 = S_2$  است بنابراین مساحت خواسته شده دو برابر مساحت یکی از مثلث‌های کامل است، یعنی  $1 = \left(\frac{2 \times 1}{2}\right) \times 2$ .

معکوس تابع را به دست می‌آوریم (قرینه نسبت به  $y = x$ )، دقت کنید برد تابع  $y \geq 2$  است پس دامنه تابع معکوس  $x \geq 2$  خواهد بود: (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۰۶)

$$y = 2 + \sqrt{x-1} \Rightarrow y-2 = \sqrt{x-1} \Rightarrow x-1 = (y-2)^2 \Rightarrow x = (y-2)^2 + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = (x-2)^2 + 1; x \geq 2$$

واحد راست  $\rightarrow g(x) = (x-4)^2 - 2; x \geq 4 \Rightarrow g(4) = -2$   
واحد پایین  $\rightarrow$



$$f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2} \quad D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\} \quad (I)$$

$$y = g(f(x)) = \sqrt{f - f^2} = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2} \left(1 - \frac{1+x^2}{1-x^2}\right)} = \sqrt{\frac{-2(1+x^2) \cdot x^2}{(1-x^2)^2}}$$

$$D_{g \circ f} : \frac{-2(1+x^2) \cdot x^2}{(1-x^2)^2} \geq 0$$

تابع  $g \circ f$  همواره نامثبت است و برای این که در زیر رادیکال قرار گیرد، فقط می‌تواند صفر باشد، پس مجموعه جواب‌های نامعادله بالا فقط  $\{0\}$  است. (II)

$$I \cap II \Rightarrow D_{g \circ f} \{0\}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰۸

می‌دانیم:  $f(a) = b \Rightarrow f^{-1}(b) = a$ 

$$f^{-1} \circ g(a) = f^{-1}(g(a)) = 6 \Rightarrow f(6) = g(a)$$

$$f(6) = 2(6) - 5 = 7 \Rightarrow g(a) = 7 \xrightarrow{(4,7) \in g} a = 4$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰۹

می‌دانیم:

$$\cos^2 u - 1 = \cos 2u$$

$$f(2 \cos x) = 2 \cos^2 x - 2 = 2(\underbrace{\cos^2 x - 1}_{\cos 2x}) = 2 \cos 2x$$

$$f(f(2 \cos 2x)) = 2 \cos^2 2x - 2 = 2(\underbrace{\cos^2 2x - 1}_{\cos 4x}) = 2 \cos 4x$$

$$f(f(f(2 \cos x))) = 2 \cos^2 4x - 2 = 2(\underbrace{\cos^2 4x - 1}_{\cos 8x}) = 2 \cos 8x$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱۰

$$g^{-1}(6) = a \Rightarrow g(a) = 6$$

$$g(a) = f(a) + \sqrt{f(a)} \Rightarrow 6 = f(a) + \sqrt{f(a)} \Rightarrow f(a) = 4 \Rightarrow f^{-1}(4) = a \Rightarrow f^{-1}(4) = 2 \Rightarrow a = 2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱۱

می‌دانیم:  $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ 

$$g^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ g)^{-1} \Rightarrow f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 1 + x$$

$$\Rightarrow y = x + 1 \Rightarrow y - 1 = x \Rightarrow (f \circ g)^{-1} = x - 1$$

$$f = \{(1, 2), (2, 0)\} \Rightarrow f \cup g = \{(1, 2), (2, 0), (1, 3), (3, -1)\}$$

$$g = \{(1, 3), (3, -1)\}$$

رابطه فوق تابع نیست زیرا دو زوج مرتب متمایز با مولفه‌های اول یکسان در رابطه وجود دارد.

اگر بقیه گزینه‌ها را تشکیل دهیم شرایط تابع بودن را دارند.

$$g(x) = f^{-1}(x) \text{ یعنی } g(f(x)) = x \text{ با توجه به ماشین داده شده } x \text{ ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱۳}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2} \Rightarrow f^{-1}(0) = \frac{1}{2}$$

$$f \circ g = \{(1, 1), (3, 7), (a, 2), (b, 7)\} \quad (4, 2) \in f \circ g \Rightarrow a = 4$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱۴

راه اول: ابتدا  $g \circ f$  و  $f \circ g$  را تشکیل می‌دهیم:

با توجه به این که  $(4, 1)$  در  $g \circ f$  است پس  $b = 5$  است.

راه دوم: ابتدا توابع  $f \circ g$  و  $g \circ f$  را بصورت زوج مرتب نشان می‌دهیم:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \left\{ \begin{array}{l} x=1 \xrightarrow{g} 2 \xrightarrow{f} 1 \\ x=3 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} 7 \\ x=a \xrightarrow{g} 3 \xrightarrow{f} 2 \\ x=b \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} 7 \end{array} \right\} \rightarrow f \circ g = \{(1, 1), (3, 7), (a, 2), (b, 7)\}$$

چون در صورت سؤال گفته  $(4, 2) \in f \circ g$  پس  $(4, 2) = (a, 2) \leftarrow a = 4$



$$g \circ f = g(f(x)) = \begin{cases} x = 2 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{g} 2 \\ x = 3 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g} ? \\ x = 4 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{g} ? \\ x = 1 \xrightarrow{f} 7 \xrightarrow{g} ? \end{cases}$$

در سؤال گفته شده است که  $(4, 1) \in g \circ f$  پس  $x = 4 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{g} 1$  در نتیجه  $b = 5$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱۵

$$g(x) = 2x - 1, (f \circ g)(x) = \frac{x}{x-3} \Rightarrow f(g(x)) = \frac{x}{x-3}$$

$$g(x) = 3 \Rightarrow 2x - 1 = 3 \Rightarrow x = 2$$

$$f(g(x)) = \frac{x}{x-3} \xrightarrow{g(x)=3, x=2} f(3) = \frac{2}{2-3} = -2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱۶

روش اول:

$$y = \sqrt{4-x} \xrightarrow[k \text{ واحد در راستای قائم}]{} y = \sqrt{4-x} + k \xrightarrow[k-2 \text{ واحد در راستای افقی}]{} y = \sqrt{4(x - (k-2))} + k$$

محل برخورد تابع فوق و وارونش در نقطه‌ای با عرض ۱ است که باید روی خط  $y = x$  باشد، پس نقطه  $(1, 1)$  در تابع صدق می‌کند.

$$1 = \sqrt{4 - (1 - (k - 2))} + k \Rightarrow \sqrt{k+1} + k = 1 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow y = \sqrt{2-x} \xrightarrow[\text{یک واحد پایین}]{} y = \sqrt{2-x} - 1 \xrightarrow[\text{محل برخورد با } x \text{ ها}]{y=0} \sqrt{2-x} = 1 \Rightarrow 2-x = 1 \Rightarrow x = 1$$

روش دوم: توابع رادیکالی به فرم داده شده در صورت سؤال، وارون خود را روی خط  $y = x$  قطع می‌کنند. پس منحنی جدید وارون خود را در نقطه  $(1, 1)$  قطع کرده است. با انتقال ۱ واحد این

نمودار به پایین، نقطه  $(1, 1)$  به نقطه  $(1, 0)$  متناظر می‌شود، در نتیجه طول نقطه برخورد نمودار نهایی با محور  $x$  برابر ۱ است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱۷

با توجه به تعریف داریم:

$$D_{f \circ g}(x) = \{x | x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$D_{f \circ g} = \begin{cases} x \in D_g \Rightarrow x^2 - 15x > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 15 \\ x < 0 \end{cases} \quad (1) \\ g(x) \in D_f \xrightarrow{D_f: x \leq 2} g(x) \leq 2 \Rightarrow \log(x^2 - 15x) \leq 2 \Rightarrow x^2 - 15x - 100 \leq 0 \Rightarrow -5 \leq x \leq 20 \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \cap (2) = [-5, 0) \cup (15, 20]$$

توجه: برای محاسبه دامنه‌ی تابع  $y = \log_B^A$  باید  $A > 0$ ,  $B > 0$ ,  $B \neq 1$  باشد.

توجه: برای محاسبه دامنه‌ی تابع  $y = \log_B^A$  باید  $A > 0$  و  $B > 0$  و  $B \neq 1$  باشد. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱۸

می‌دانیم دو تابع  $f$  و  $g$  با هم برابرند. هرگاه اولاً  $D_f = D_g$  و ثانیاً برای هر  $x \in D_f$  یا  $x \in D_g$ ،  $f(x) = g(x)$  باشد.

بررسی گزینه‌ها:

$$1) \begin{cases} D_f = (0, +\infty) \\ D_g = \mathbb{R} - \{0\} \end{cases} \Rightarrow D_f \neq D_g \Rightarrow f \neq g \quad 2) \begin{cases} D_f = \mathbb{R} - \{0\} \\ D_g = \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow D_f \neq D_g \Rightarrow f \neq g$$

$$3) \begin{cases} D_f = [0, +\infty) \\ D_g = \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow D_f \neq D_g \Rightarrow f \neq g \quad 4) \begin{cases} D_f = \mathbb{R} - \{0\} \\ D_g = \mathbb{R} - \{0\} \end{cases} \Rightarrow D_f = D_g$$

این دو تابع شرایط اولیه را دارند، برای دو تابع داریم:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases} (*), \quad g(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases} (**), (*) \xrightarrow{(**), (*)} \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} : f(x) = g(x)$$

لذا دو تابع  $f$  و  $g$  برابرند.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱۹

به کمک تابع  $f(x)$  تابع  $f(g(x)) = y$  را می‌سازیم و مساوی تابع  $y = f \circ g(x)$  که صورت سؤال داده قرار می‌دهیم تا  $g(x)$  محاسبه شود.

$$f(g(x)) = \frac{g(x)+1}{g(x)-1} = \frac{-x-1}{x-1} \Rightarrow xg(x) - g(x) + x - 1 = -xg(x) - g(x) + x + 1$$

$$\Rightarrow 2xg(x) = 2 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{x}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲۰

ابتدا دامنه تابع  $f$  و  $g$  را می‌یابیم.

$$D_f : 1 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1, \quad D_g : x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

$$D_{f \circ g}(x) = \{x | x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 1 \\ \sqrt{x-1} \leq 1 \Rightarrow x-1 \leq 1 \Rightarrow x \leq 2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x \in [1, 2]$$

ضابطه‌ی  $f(f(x))$  را تشکیل می‌دهیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲۱



$$f(f(x)) = f(2 - |x - 2|) = 2 - |2 - |x - 2| - 2| \\ = 2 - | - |x - 2|| = 2 - |x - 2| = f(x)$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲۲

تابع  $f(\sqrt{x})$  را تشکیل می‌دهیم بنابراین:

$$f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + \frac{1}{(\sqrt{x})^2} = x + \frac{1}{x} \Rightarrow g(x) = (f(\sqrt{x}))^2 - f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \\ = \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right) - \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 2 \text{ تابع ثابت } 2$$

با توجه به ماشین داده شده جمله  $(2x - 2)$  داخل  $x$  های تابع  $\frac{x}{\sqrt{x+1}}$  قرار می‌گیرد بنابراین: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲۳

$$\frac{2x-2}{\sqrt{2x-2+1}} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3(x-1) = 2(\sqrt{2(x-1)+1}) \xrightarrow{\sqrt{x-1}=t} 3t^2 = 2(t\sqrt{2+1}) \Rightarrow 3t^2 - 2t\sqrt{2} - 2 = 0$$

$$t = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{x-1} = \sqrt{2} \Rightarrow x = 3$$



# پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴

۳۲	۱	۲	۳	۴
۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴
۴۱	۱	۲	۳	۴
۴۲	۱	۲	۳	۴
۴۳	۱	۲	۳	۴
۴۴	۱	۲	۳	۴
۴۵	۱	۲	۳	۴
۴۶	۱	۲	۳	۴
۴۷	۱	۲	۳	۴
۴۸	۱	۲	۳	۴
۴۹	۱	۲	۳	۴
۵۰	۱	۲	۳	۴
۵۱	۱	۲	۳	۴
۵۲	۱	۲	۳	۴
۵۳	۱	۲	۳	۴
۵۴	۱	۲	۳	۴
۵۵	۱	۲	۳	۴
۵۶	۱	۲	۳	۴
۵۷	۱	۲	۳	۴
۵۸	۱	۲	۳	۴
۵۹	۱	۲	۳	۴
۶۰	۱	۲	۳	۴
۶۱	۱	۲	۳	۴
۶۲	۱	۲	۳	۴

۶۳	۱	۲	۳	۴
۶۴	۱	۲	۳	۴
۶۵	۱	۲	۳	۴
۶۶	۱	۲	۳	۴
۶۷	۱	۲	۳	۴
۶۸	۱	۲	۳	۴
۶۹	۱	۲	۳	۴
۷۰	۱	۲	۳	۴
۷۱	۱	۲	۳	۴
۷۲	۱	۲	۳	۴
۷۳	۱	۲	۳	۴
۷۴	۱	۲	۳	۴
۷۵	۱	۲	۳	۴
۷۶	۱	۲	۳	۴
۷۷	۱	۲	۳	۴
۷۸	۱	۲	۳	۴
۷۹	۱	۲	۳	۴
۸۰	۱	۲	۳	۴
۸۱	۱	۲	۳	۴
۸۲	۱	۲	۳	۴
۸۳	۱	۲	۳	۴
۸۴	۱	۲	۳	۴
۸۵	۱	۲	۳	۴
۸۶	۱	۲	۳	۴
۸۷	۱	۲	۳	۴
۸۸	۱	۲	۳	۴
۸۹	۱	۲	۳	۴
۹۰	۱	۲	۳	۴
۹۱	۱	۲	۳	۴
۹۲	۱	۲	۳	۴
۹۳	۱	۲	۳	۴

۹۴	۱	۲	۳	۴
۹۵	۱	۲	۳	۴
۹۶	۱	۲	۳	۴
۹۷	۱	۲	۳	۴
۹۸	۱	۲	۳	۴
۹۹	۱	۲	۳	۴
۱۰۰	۱	۲	۳	۴
۱۰۱	۱	۲	۳	۴
۱۰۲	۱	۲	۳	۴
۱۰۳	۱	۲	۳	۴
۱۰۴	۱	۲	۳	۴
۱۰۵	۱	۲	۳	۴
۱۰۶	۱	۲	۳	۴
۱۰۷	۱	۲	۳	۴
۱۰۸	۱	۲	۳	۴
۱۰۹	۱	۲	۳	۴
۱۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۱۹	۱	۲	۳	۴
۱۲۰	۱	۲	۳	۴
۱۲۱	۱	۲	۳	۴
۱۲۲	۱	۲	۳	۴
۱۲۳	۱	۲	۳	۴

# سوالات برای هفته چهارم

## مثلثات



معین کرمی

۱) حاصل عبارت  $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ}$  با فرض  $\tan 15^\circ = 0.28$ ، کدام است؟

$\frac{16}{9}$  (۴)

$\frac{9}{16}$  (۳)

$-\frac{9}{16}$  (۲)

$-\frac{16}{9}$  (۱)

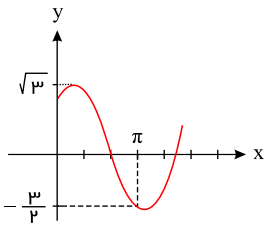
۲) شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع  $y = a + b \sin(x + \frac{\pi}{3})$  است.  $b$  کدام است؟

$\frac{3}{2}$  (۲)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۱)

۲ (۴)

$\sqrt{3}$  (۳)



۳) اندازه‌ی دو قطر از متوازی‌الاضلاع ۱۲ و  $8\sqrt{3}$  واحد است. این دو قطر با زاویه‌ی  $60^\circ$  درجه متقاطع هستند. مساحت این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

۷۲ (۴)

۶۴ (۳)

۵۴ (۲)

۴۸ (۱)

۴) جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی  $\tan x \tan 3x = 1$ ، کدام است؟

$x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$  (۴)

$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}$  (۳)

$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$  (۲)

$x = \frac{k\pi}{4}$  (۱)

۵) اگر  $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{2}$  باشد، مقدار  $\tan(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2})$ ، کدام است؟

۲ (۴)

$\frac{1}{2}$  (۳)

$-\frac{1}{2}$  (۲)

-۲ (۱)

۶) نمودار تابع  $y = -4 \cos(\frac{\pi}{4} - 3\pi x)$ ، روی بازه‌ی  $[-1, 1]$  در چند نقطه بیشترین مقدار را دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۷) اگر  $\tan \alpha = \frac{2}{3}$  باشد مقدار  $\frac{\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) + \sin(3\pi + \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) + \cos(\alpha - \pi)}$ ، کدام است؟

-۴ (۴)

-۳ (۳)

۱ (۲)

۵ (۱)

۸) اگر انتهای کمان  $\alpha$  در ناحیه‌ی اول باشد، عبارت  $\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$  برابر کدام است؟

$\cot \alpha$  (۴)

$\tan \alpha$  (۳)

$-\cot \alpha$  (۲)

$-\tan \alpha$  (۱)

۹) جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی  $\cos 2x + 2 \cos^2 x = 0$ ، کدام است؟

$x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  (۴)

$x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۳)

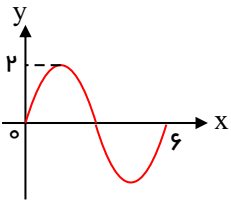
$x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$  (۲)

$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۱)



۱۰ حاصل  $\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ}$  کدام است؟

- ۱) ۲      ۲)  $\sqrt{6}$       ۳)  $2\sqrt{2}$       ۴)  $2\sqrt{3}$

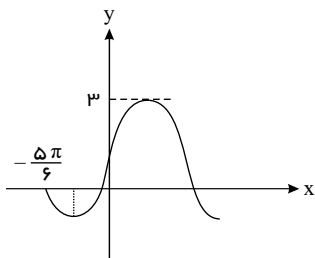


۱۱ شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع  $y = a \sin(b\pi x)$  است.  $a + b$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{4}{3}$       ۲)  $\frac{5}{3}$       ۳)  $\frac{7}{3}$       ۴)  $\frac{8}{3}$

۱۲ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی  $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$  به کدام صورت است؟

- ۱)  $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$       ۲)  $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$       ۳)  $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$       ۴)  $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$



۱۳ شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع  $y = a + b \cos(\frac{\pi}{2} - x)$  است. مقدار تابع در  $x = \frac{\pi}{6}$  کدام است؟

- ۱) ۱٫۵      ۲) ۲      ۳) ۲٫۵      ۴)  $1 + \sqrt{3}$

۱۴ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی  $\frac{\sin 3x + \sin 2x}{1 + \cos x} = 0$  کدام است؟

- ۱)  $x = \frac{k\pi}{5}$       ۲)  $x = \frac{2k\pi}{5}$       ۳)  $x = k\pi + \frac{\pi}{5}$       ۴)  $x = \frac{(2k+1)\pi}{5}$

۱۵ حاصل عبارت  $\sin(\frac{17\pi}{3}) \cos(\frac{-17\pi}{6}) + \tan(\frac{19\pi}{4}) \sin(\frac{-11\pi}{6})$  کدام است؟

- ۱)  $-\frac{1}{4}$       ۲)  $-\frac{1}{2}$       ۳)  $\frac{1}{4}$       ۴)  $\frac{1}{2}$

۱۶ مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی  $\sin 2x + \cos(\frac{\pi}{2} - x) = 0$  در بازه‌ی  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{14\pi}{3}$       ۲)  $4\pi$       ۳)  $\frac{9\pi}{2}$       ۴)  $5\pi$

۱۷ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی  $2\cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1$  به کدام صورت است؟

- ۱)  $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$       ۲)  $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$       ۳)  $x = k\pi - \frac{\pi}{8}$       ۴)  $x = k\pi + \frac{\pi}{8}$

۱۸ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی  $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$  کدام است؟

- ۱)  $x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$       ۲)  $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$       ۳)  $x = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}$       ۴)  $x = k\pi - \frac{\pi}{3}$

۱۹ اگر  $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$  باشد، مقدار  $\cos(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha)$  کدام است؟

- ۱)  $-\frac{3}{4}$       ۲)  $-\frac{3}{8}$       ۳)  $\frac{3}{8}$       ۴)  $\frac{3}{4}$

۲۰ مجموع تمام جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی  $\sin 5x + \sin 4x = 1 + \cos \pi$  در بازه‌ی  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

- ۱)  $8\pi$       ۲)  $9\pi$       ۳)  $10\pi$       ۴)  $11\pi$



۲۱ حاصل عبارت  $\frac{\sin 25^\circ + \sin 70^\circ}{\cos 56^\circ - \cos 11^\circ}$  با فرض  $\tan 20^\circ = 0.4$ ، کدام است؟

- ۱  $-\frac{3}{4}$     
  ۲  $\frac{3}{4}$     
  ۳  $\frac{7}{3}$     
  ۴  $\frac{5}{8}$

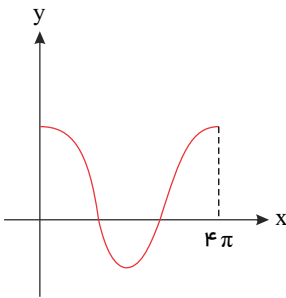
۲۲ نمودار تابع  $y = 3 \sin(\frac{\pi}{4} - 2x)$  روی بازه  $[-\pi, \frac{3\pi}{2}]$  در چند نقطه محور  $x$ ها را قطع می‌کند؟

- ۱ ۲    
  ۲ ۳    
  ۳ ۴    
  ۴ ۵

۲۳ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی  $2 \sin(\pi - x) \cos(\frac{3\pi}{2} + x) + 3 \cot x \sin(\pi + x) = 0$  کدام است؟

- ۱  $x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$     
  ۲  $x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}$     
  ۳  $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$     
  ۴  $x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

۲۴ شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع  $y = \frac{1}{2} + 2 \cos mx$  است. مقدار تابع در نقطه‌ای به طول  $x = \frac{16\pi}{3}$ ، کدام است؟



- ۱  $-\frac{1}{2}$     
  ۲  $\frac{1}{2}$     
  ۳ ۱    
  ۴ صفر

۲۵ اگر  $\tan x = \frac{4}{3}$  باشد، مقدار  $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2}$ ، کدام است؟

- ۱  $-\frac{3}{4}$     
  ۲  $-\frac{3}{2}$     
  ۳  $\frac{4}{3}$     
  ۴  $\frac{2}{3}$

۲۶ اگر  $\tan \frac{2\pi}{3} \sin(\frac{3\pi}{2} - x) = 1$  باشد، مقدار  $\cos 2x$  کدام است؟

- ۱  $-\frac{2}{3}$     
  ۲  $-\frac{1}{3}$     
  ۳  $\frac{1}{3}$     
  ۴  $\frac{2}{3}$

۲۷ حاصل  $\sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{7\pi}{12}$  کدام است؟

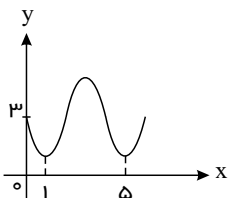
- ۱  $\frac{1}{3}$     
  ۲  $\frac{1}{4}$     
  ۳  $-\frac{1}{4}$     
  ۴  $-\frac{1}{3}$

۲۸ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی  $\frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{2} + x)} = 1$  به کدام صورت است؟

- ۱  $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$     
  ۲  $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$     
  ۳  $x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$     
  ۴  $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

۲۹ اگر  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$  باشد، حاصل عبارت  $\frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} (\frac{1}{\sin x} - \sin x)$ ، کدام است؟

- ۱  $-\cos^2 x$     
  ۲  $-\cos x$     
  ۳  $\cos^2 x$     
  ۴  $\cos x$



۳۰ شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع  $y = a + \sin(b\pi x)$  است. مقدار  $y$  در نقطه‌ی  $x = \frac{25}{3}$  کدام است؟

- ۱ ۲    
  ۲ ۳    
  ۳ ۴    
  ۴ ۵



۳۱) اگر  $\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}$  باشد کم ترین مقدار  $\frac{1 - \tan^2(45 - \alpha)}{1 + \tan^2(45 - \alpha)}$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{1}{2}$       ۲) ۱      ۳)  $-\sqrt{2}$       ۴)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۳۲) اگر  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$  باشد، حاصل  $\sqrt{1 + \tan^2 x} (2 \sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x)$  کدام است؟

- ۱)  $\sin x$       ۲)  $\cos x$       ۳)  $-\sin x$       ۴)  $-\cos x$

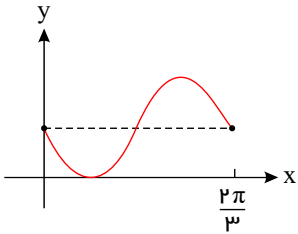
۳۳) با کدام ضابطه  $f(x)$  همواره تساوی  $|f(x)| = (-1)^{[x]} f(x)$  برقرار است؟

- ۱)  $\sin \pi x$       ۲)  $\cos \pi x$       ۳)  $\sin 2\pi x$       ۴)  $\cos 2\pi x$

۳۴) جواب کلی معادله مثلثاتی  $\cos 3x + \cos x = 0$ ، با شرط  $\cos x \neq 0$ ، کدام است؟

- ۱)  $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$       ۲)  $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$       ۳)  $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$       ۴)  $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$

۳۵) شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع  $y = 1 - \sin mx$  است. مقدار تابع در نقطه‌ی  $x = \frac{7\pi}{6}$ ، کدام است؟



- ۱) صفر      ۲)  $\frac{1}{2}$       ۳) ۱      ۴) ۲

۳۶) اگر  $\tan \alpha = \frac{4}{3}$  و انتهای کمان  $\alpha$  در ربع سوم باشد، حاصل عبارت زیر کدام است؟

- ۱)  $-1,23$       ۲)  $-0,52$       ۳)  $0,27$       ۴)  $0,48$
- $\sin(\frac{9\pi}{2} + \alpha) \cos(\frac{7\pi}{2} - \alpha) - \tan(\alpha - \frac{3\pi}{2})$

۳۷) مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی  $\sin(\frac{3\pi}{2} - x) = 1$ ، در بازه  $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

- ۱)  $\frac{5\pi}{2}$       ۲)  $3\pi$       ۳)  $4\pi$       ۴)  $5\pi$

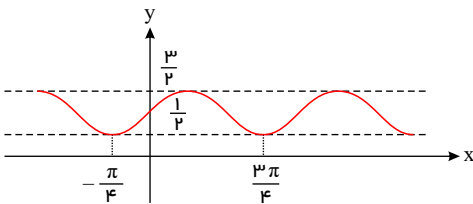
۳۸) جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی  $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin(\frac{3\pi}{2} + x)$ ، به کدام صورت است؟

- ۱)  $x = \frac{k\pi}{3}$       ۲)  $x = \frac{2k\pi}{3}$       ۳)  $x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$       ۴)  $x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

۳۹) دوره تناوب تابع با ضابطه  $f(x) = \tan(\pi x) - \cot(\pi x)$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{1}{2}$       ۲) ۱      ۳) ۲      ۴)  $\pi$

۴۰) شکل روبه‌رو، نمودار تابع  $y = 1 + a \sin bx \cos bx$  است.  $a + b$  کدام است؟



- ۱) ۱      ۲) ۲      ۳) ۳      ۴)  $\frac{3}{2}$

۴۱) جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی  $(1 + \tan^2 x) \cos(\pi + 2x) = 2$  به کدام صورت است؟

- ۱)  $x = k\pi + \frac{\pi}{6}$       ۲)  $x = k\pi + \frac{\pi}{3}$       ۳)  $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$       ۴)  $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$



۴۲) حاصل عبارت  $\sin x \cos x (1 - 2\sin^2 x)$  به ازای  $x = 75^\circ$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{1}{4}$       ۲)  $\frac{1}{8}$       ۳)  $\frac{3}{8}$       ۴)  $\frac{3}{16}$

۴۳) خلاصه شده‌ی عبارت  $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) \sin(\pi + \alpha) - \sin(\pi - \alpha) \cos(-\alpha)$  کدام است؟

- ۱)  $-\sin 2\alpha$       ۲)  $\sin 2\alpha$       ۳)  $\cos 2\alpha$       ۴)  $0$

۴۴) جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی  $(\sin x - \tan x) \tan(\frac{3\pi}{2} - x) = \cos \frac{4\pi}{3}$ ، کدام است؟

- ۱)  $x = k\pi - \frac{\pi}{6}$       ۲)  $x = k\pi + \frac{\pi}{3}$       ۳)  $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$       ۴)  $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

۴۵) جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی  $\frac{\cos 2x}{\cos(x + \frac{\pi}{4})} = 0$  به کدام صورت است؟

- ۱)  $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$       ۲)  $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$       ۳)  $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$       ۴)  $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$

۴۶) اگر  $\tan \theta = 2$ ، مقدار  $\frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)}$  کدام است؟

- ۱)  $-2$       ۲)  $1, 2$       ۳)  $2$       ۴)  $3$

۴۷) جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی  $\sin(\pi + x) \cos(\frac{\pi}{2} + x) - 2\sin(\pi - x) + 1 = 0$  کدام است؟

- ۱)  $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$       ۲)  $x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$       ۳)  $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$       ۴)  $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

۴۸) حاصل عبارت  $\tan \frac{11\pi}{4} + \sin \frac{15\pi}{4} \cos \frac{13\pi}{4}$ ، کدام است؟

- ۱)  $-\frac{3}{2}$       ۲)  $-\frac{1}{2}$       ۳)  $\frac{1}{2}$       ۴)  $\frac{3}{2}$

۴۹) مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی  $\sin^f x + \cos^f x = \frac{1}{2}$  در بازه  $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

- ۱)  $\frac{5\pi}{2}$       ۲)  $3\pi$       ۳)  $\frac{7\pi}{2}$       ۴)  $4\pi$

۵۰) اگر  $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = 1$  باشد، مقدار  $\tan 2x$ ، کدام است؟

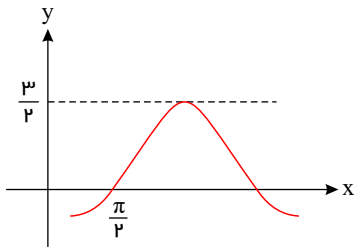
- ۱)  $-\frac{3}{2}$       ۲)  $\frac{3}{4}$       ۳)  $\frac{4}{3}$       ۴)  $\frac{3}{2}$

۵۱) تعداد جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی  $4 \sin(3x) \cos(3x) = 1$  در بازه  $[0, \frac{\pi}{2}]$ ، کدام است؟

- ۱)  $2$       ۲)  $3$       ۳)  $4$       ۴)  $5$

۵۲) جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی  $\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \sqrt{3}$ ، به کدام صورت است؟

- ۱)  $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$       ۲)  $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$       ۳)  $x = k\pi + \frac{\pi}{6}$       ۴)  $x = k\pi - \frac{\pi}{6}$



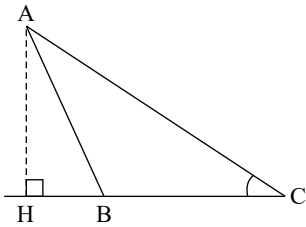
۵۳ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه  $y = a + b \sin(x + \frac{\pi}{3})$  است. مقدار  $a$ ، کدام است؟

۱)  $-\frac{1}{2}$

۲)  $1$

۳)  $\frac{1}{2}$

۴)  $-\frac{1}{2}$



۵۴ در شکل زیر، فرض کنید  $\sin C = \frac{5}{13}$  و  $CH = 9$ ، اندازه ارتفاع  $AH$ ، کدام است؟

۱)  $3,25$

۲)  $3,75$

۳)  $3,6$

۴)  $3,25$

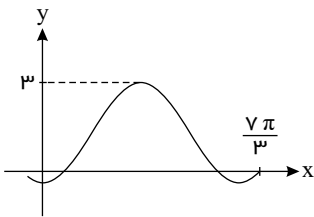
۵۵ اگر  $\tan 20^\circ = 0,36$ ، حاصل  $\frac{\sin 16^\circ - \cos 20^\circ}{\cos 11^\circ + \sin 7^\circ}$  کدام است؟

۱)  $\frac{9}{4}$

۲)  $\frac{15}{8}$

۳)  $\frac{17}{8}$

۴)  $\frac{31}{16}$



۵۶ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه  $y = a + b \sin(\frac{\pi}{2} + x)$  است. مقدار  $b$ ، کدام است؟

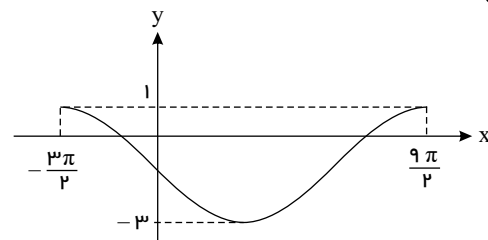
۱)  $2$

۲)  $1$

۳)  $-1$

۴)  $-2$

۵۷ شکل زیر، نمودار تابع  $y = a \sin(bx) + c$  را در یک بازه تناوب، نشان می‌دهد. نسبت  $\frac{a}{b}$ ، کدام است؟



۱)  $-2$

۲)  $-3$

۳)  $-4$

۴)  $-6$

۵۸ حاصل عبارت  $\tan \frac{17\pi}{6} \sin \frac{11\pi}{3} + \cos \frac{10\pi}{3}$ ، کدام است؟

۱)  $1$

۲)  $\sqrt{3}$

۳)  $0$

۴)  $-1$

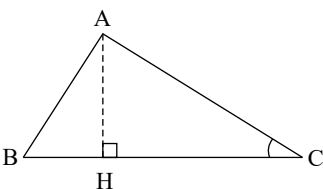
۵۹ ساده شده‌ی کسر  $\frac{(1 + \tan^2 \theta)(1 + \cot^2 \theta)}{1 - \sin^2 \theta - \cos^4 \theta}$  کدام است؟

۱)  $8 \cos^{-2} 2\theta$

۲)  $16 \sin^{-2} 2\theta$

۳)  $16 \cos^{-2} 2\theta$

۴)  $8 \sin^{-2} 2\theta$



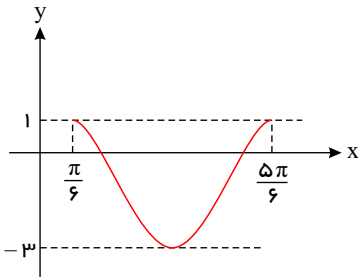
۶۰ در شکل زیر،  $\cot C = \frac{\sqrt{5}}{2}$  و  $AC = 96$ ، اندازه ارتفاع  $AH$ ، کدام است؟

۱)  $48$

۲)  $56$

۳)  $64$

۴)  $72$



۶۱ شکل زیر، نمودار تابع  $y = a \sin(bx) + c$  در یک بازه تناوب است. مقادیر  $b$  و  $c$ ، کدامند؟

$b = 3, c = -2$  (۲)

$b = 3, c = -1$  (۱)

$b = \frac{3}{2}, c = -1$  (۴)

$b = \frac{3}{2}, c = -2$  (۳)

۶۲ جواب کلی معادلهی مثلثاتی  $1 = \tan x \cos^2 x$  به کدام صورت است؟

$x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۴)

$x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}$  (۳)

$x = k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۲)

$x = k\pi - \frac{\pi}{4}$  (۱)

۶۳ جواب کلی معادلهی مثلثاتی  $\cos^3 x + \cos x = 0$  با شرط  $\cos x \neq 0$  کدام است؟

$x = k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۴)

$x = k\pi - \frac{\pi}{4}$  (۳)

$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$  (۲)

$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$  (۱)

۶۴ جواب کلی معادلهی مثلثاتی  $2 \cos^2 x - \cos x - 3 = 0$  کدام است؟

$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$  (۴)

$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$  (۳)

$x = 2k\pi + \pi$  (۲)

$x = k\pi$  (۱)

۶۵ جواب کلی معادلهی مثلثاتی  $2 \sin^2 x = 3 \cos x$  به کدام صورت است؟

$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۴)

$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  (۳)

$x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۲)

$x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  (۱)

۶۶ جواب کلی معادلهی مثلثاتی  $\sin 4x \cos 2x = \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$  کدام است؟

$\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$  (۴)

$\frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{12}$  (۳)

$\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{12}$  (۲)

$\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{12}$  (۱)

۶۷ ناظری به فاصله ۳۵ متر از پای ستونی که بر روی آن مجسمه‌ای قرار دارد، ایستاده است. زاویه رویت انتها و ابتدای مجسمه با سطح افق  $45^\circ$  و

$40^\circ$  درجه است. ارتفاع مجسمه کدام است؟ ( $\tan 40^\circ = 0.8$ )

۷٫۲ (۴)

۷ (۳)

۶٫۴ (۲)

۶ (۱)

۶۸ جواب‌های معادلهی مثلثاتی  $\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \cos(x + \frac{\pi}{4})$  با شرط  $x \neq k\pi$  که در آن  $k$  یک عدد صحیح است، کدام است؟

$x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$  (۴)

$x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$  (۳)

$x = \frac{2k\pi}{3}$  (۲)

$x = \frac{k\pi}{3}$  (۱)

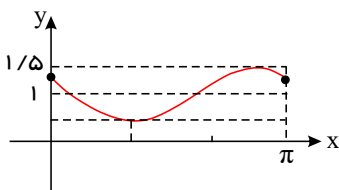
۶۹ جواب‌های معادلهی مثلثاتی  $\sin(x + \frac{\pi}{6}) + \cos(x + \frac{\pi}{3}) = \cos 2x$  کدام است؟

$x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$  (۴)

$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$  (۳)

$x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$  (۲)

$x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$  (۱)



۷۰ شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه  $y = 1 + a \sin(bx - \frac{\pi}{6})$  است.  $a + b$  کدام است؟

۱ (۲)

$\frac{1}{2}$  (۱)

۲ (۴)

$\frac{3}{2}$  (۳)

۷۱ مجموع تمام جواب‌های معادلهی مثلثاتی  $\sin^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x$  در بازه  $[0, \pi]$ ، برابر کدام است؟

$\frac{11\pi}{3}$  (۴)

$\frac{5\pi}{2}$  (۳)

$\frac{9\pi}{4}$  (۲)

$\frac{7\pi}{4}$  (۱)





۷۲) مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی  $\tan(3x) \tan(x) = 1$  در بازهٔ  $[\pi, 2\pi]$ ، کدام است؟

$\frac{11\pi}{2}$  (۴)

$\frac{9\pi}{2}$  (۳)

$6\pi$  (۲)

$5\pi$  (۱)

۷۳) حاصل عبارت  $\tan \frac{11\pi}{4} + \sin \frac{15\pi}{4} \cos \frac{13\pi}{4}$ ، کدام است؟

$\frac{3}{2}$  (۴)

$\frac{1}{2}$  (۳)

$-\frac{1}{2}$  (۲)

$-\frac{3}{2}$  (۱)

۷۴) جواب کلی معادلهٔ  $\cos^2 x + 3\sin(\frac{\pi}{4} + x) + 2 = 0$  به کدام صورت است؟

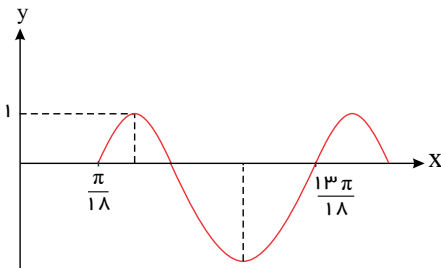
$x = (2k + 1)\pi$  (۴)

$x = k\frac{\pi}{2}$  (۳)

$x = 2k\pi$  (۲)

$x = k\pi$  (۱)

۷۵) شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه  $y = a - 2 \cos\left(bx + \frac{\pi}{2}\right)$  است.  $a + b$  کدام است؟



$\frac{1}{2}$  (۱)

۱ (۲)

$\frac{3}{2}$  (۳)

۲ (۴)

۷۶) مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی  $\sin(x + \frac{\pi}{8}) + \cos(x - \frac{3\pi}{8}) = 1$  در بازهٔ  $[0, 2\pi]$  برابر کدام است؟

$\frac{7\pi}{4}$  (۴)

$\frac{3\pi}{2}$  (۳)

$\frac{5\pi}{4}$  (۲)

$\frac{3\pi}{4}$  (۱)

۷۷) حاصل عبارت  $2\cos^2(\frac{7\pi}{4} - x) - \cos^2 x (1 + \tan^2 x)$  برابر است با:

$\cos 2x$  (۴)

$-\sin 2x$  (۳)

$-\cos 2x$  (۲)

$\sin 2x$  (۱)

۷۸) حاصل  $\cos 165^\circ \cos 105^\circ$  کدام است؟

$\frac{1}{2}$  (۴)

$\frac{1}{4}$  (۳)

$-\frac{1}{4}$  (۲)

$-\frac{1}{2}$  (۱)

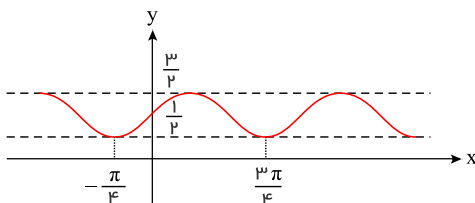
۷۹) حاصل عبارت  $\tan(285) \tan(-165) - \sin(1095) \cos(255)$ ، کدام است؟ (اعداد داده شده بر حسب درجه هستند).

$-\cos^2(15)$  (۴)

$-\sin^2(15)$  (۳)

$\cos^2(15)$  (۲)

$\sin^2(15)$  (۱)



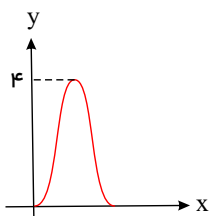
۸۰) شکل روبه‌رو، نمودار تابع  $y = 1 + a \sin bx \cos bx$  است.  $a + b$  کدام است؟

$\frac{3}{2}$  (۲)

۱ (۱)

۳ (۴)

۲ (۳)



۸۱) شکل زیر نمودار تابع  $y = a + b \cos(\frac{\pi}{2}x)$  در بازهٔ  $(0, 4)$  است.  $b$  کدام است؟

-۱ (۲)

-۲ (۱)

۲ (۴)

۱ (۳)



۸۲) دوره تناوب تابع با ضابطه  $f(x) = \tan(\pi x) - \cot(\pi x)$  کدام است؟

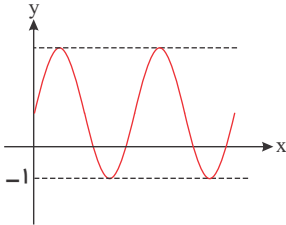
- ۱)  $\frac{1}{2}$       ۲) ۱      ۳) ۲      ۴)  $\pi$

۸۳) حاصل عبارت  $\tan \frac{17\pi}{6} \sin \frac{11\pi}{3} + \cos \frac{10\pi}{3}$  کدام است؟

- ۱) -۱      ۲) صفر      ۳) ۱      ۴)  $\sqrt{3}$

۸۴) شکل زیر نمودار تابع  $y = 1 + a \sin(b\pi x)$  در بازه  $(0, \frac{4}{3})$  است.  $a + b$  کدام است؟

- ۱) ۳      ۲) ۴      ۳) ۵      ۴) ۶



۸۵) اگر  $a + b = \frac{\pi}{4}$  باشد، حاصل  $\cos^2 a \cos b \cos(\frac{\pi}{2} - a) \cos(\frac{\pi}{2} - b)$  کدام است؟

- ۱)  $\sin 4a$       ۲)  $\cos 4a$       ۳)  $\sin^2 2a$       ۴)  $\cos^2 2a$

۸۶) حاصل عبارت  $\tan(300^\circ) \cos(210^\circ) + \tan(480^\circ) \sin(840^\circ)$  کدام است؟ (اعداد داده شده بر حسب درجه هستند.)

- ۱)  $-\frac{1}{2}$       ۲) صفر      ۳) ۱      ۴) ۲

۸۷) جواب کلی معادله مثلثاتی  $\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan 3x$  به کدام صورت است؟

- ۱)  $x = \frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{16}$       ۲)  $x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$       ۳)  $x = \frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{8}$       ۴)  $x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

۸۸) جواب کلی معادله مثلثاتی  $\sin \frac{5\pi}{6} + \sin(\frac{\pi}{2} + x) \sin(\pi + x) = 0$  کدام است؟

- ۱)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$       ۲)  $k\pi - \frac{\pi}{4}$       ۳)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$       ۴)  $2k\pi + \frac{\pi}{2}$

۸۹) نمودار تابع  $y = 2^{|sin x|}$  را ابتدا به اندازه  $\frac{\pi}{2}$  در امتداد محور  $x$  ها در جهت مثبت و سپس  $\frac{3}{2}$  در امتداد محور  $y$  ها در جهت منفی انتقال می‌دهیم.

تعداد محل تقاطع نمودار حاصل با محور  $x$  ها در فاصله  $[0, \pi]$  کدام است؟

- ۱) صفر      ۲) ۱      ۳) ۲      ۴) ۴

۹۰) تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی  $\cos^2(x) - \sin^2(x) \cos(3x) = 1$  در فاصله  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

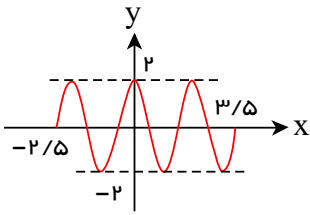
- ۱) ۱      ۲) ۳      ۳) ۵      ۴) ۶

۹۱) مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی  $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$  در بازه  $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

- ۱)  $\frac{5\pi}{2}$       ۲)  $\frac{7\pi}{2}$       ۳)  $2\pi$       ۴)  $3\pi$

۹۲) جواب کلی معادله مثلثاتی  $\frac{\sin 3x}{\sin x} = 2 \cos^2 x$ ، کدام است؟

- ۱)  $\frac{k\pi}{2}$       ۲)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$       ۳)  $k\pi - \frac{\pi}{4}$       ۴)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$



۹۳ شکل رو به رو، قسمتی از نمودار تابع  $y = a \sin \pi \left( \frac{1}{5} + bx \right)$  است.  $a \cdot b$  کدام است؟ ( $b > 0$ )

- ۱ ۲  
۲ ۳  
۳ ۴  
۴ ۵

۹۴ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی  $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \sqrt{3}$  به کدام صورت است؟

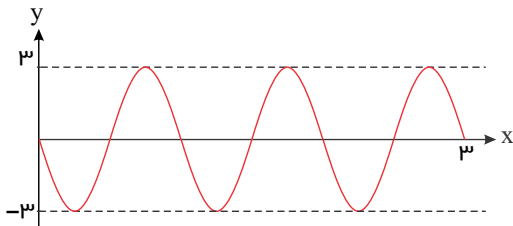
- ۱  $2k\pi + \frac{5\pi}{6}$   
۲  $2k\pi + \frac{\pi}{3}$   
۳  $k\pi + \frac{5\pi}{6}$   
۴  $k\pi + \frac{\pi}{3}$

۹۵ اگر  $f(x) = 32 \cos^2(x) \cos^2(2x) \cos^2(4x) \cos^2(8x) \cos^2(16x)$  باشد، مقدار  $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$  کدام است؟

- ۱  $\frac{6 + \sqrt{27}}{32}$   
۲  $\frac{6 + \sqrt{27}}{16}$   
۳  $\frac{6 - \sqrt{27}}{16}$   
۴  $\frac{6 - \sqrt{27}}{32}$

۹۶ فرض کنید  $A$  مجموعه‌ی جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی  $(1 + \cos(2\alpha))(1 + \cos(4\alpha))(1 + \cos(8\alpha)) = \frac{1}{8}$  در بازه  $[0, \pi]$  باشد، ماکزیمم عضو مجموعه  $A$ ، کدام است؟

- ۱  $\frac{5\pi}{7}$   
۲  $\frac{6\pi}{7}$   
۳  $\frac{7\pi}{9}$   
۴  $\frac{8\pi}{9}$



۹۷ شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع  $y = a \sin(b\pi x)$  است.  $a \cdot b$  کدام می‌باشد؟

- ۱ ۶  
۲ ۳  
۳ ۴٫۵  
۴ ۶

۹۸ نقاط پایانی کمان جواب‌های معادله‌ی  $\frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$  بر روی دایره‌ی مثلثاتی رأس‌های کدام چند ضلعی است؟

- ۱ مربع  
۲ مستطیل  
۳ مثلث قائم الزاویه  
۴ مثلث متساوی الساقین

۹۹ جواب‌های کلی معادله مثلثاتی  $\cos 2x = \sin x$  به صورت  $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6}$  بیان شده است، مجموعه مقادیر  $i$  کدام است؟

- ۱  $\{7, 9\}$   
۲  $\{1, 3, 5\}$   
۳  $\{1, 4, 7\}$   
۴  $\{1, 5, 9\}$

۱۰۰ تعداد جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی  $5 \sin^2(x) + 2 \cos^2(3x) = -2$  در فاصله  $[-\pi, \pi]$ ، کدام است؟

- ۱ ۱  
۲ ۲  
۳ ۵  
۴ ۷

۱۰۱ اگر زاویه  $\alpha$  در ناحیه سوم دایره‌ی مثلثاتی و  $\tan \alpha = \frac{3}{4}$  باشد، مقدار  $\frac{\cos(2\alpha - \frac{\pi}{2}) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot(2\alpha)}$  کدام است؟

- ۱  $-\frac{96}{175}$   
۲  $\frac{1056}{175}$   
۳  $\frac{96}{175}$   
۴  $-\frac{1056}{175}$

۱۰۲ اگر  $f(\alpha) = 4 \sin(\alpha) \cos(2\alpha) + 2 \sin(\alpha)$  باشد مقدار  $f\left(\frac{41\pi}{9}\right)$  کدام است؟

- ۱  $-\sqrt{3}$   
۲  $\sqrt{3}$   
۳ ۱  
۴ -۱

۱۰۳ اگر  $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{4}$  باشد، حاصل  $\frac{\tan(\alpha) - \sin(\alpha)}{\sin(\alpha) - \cos(\alpha)}$  کدام است؟

- ۱  $-\frac{91}{105}$   
۲  $-\frac{16}{105}$   
۳  $\frac{16}{105}$   
۴  $\frac{91}{105}$



۱۰۴ اگر  $f(x) = 16 \cos^2(3x) \cos^2(6x) \cos^2(12x) \cos^2(24x)$  مقدار  $f\left(\frac{\pi}{36}\right)$  کدام است؟

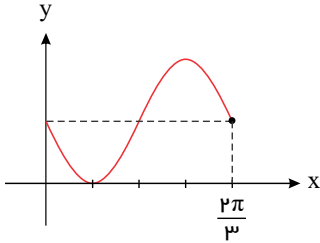
$\frac{6 + 3\sqrt{3}}{16}$  (۴)

$\frac{6 + \sqrt{3}}{16}$  (۳)

$\frac{6 - \sqrt{3}}{16}$  (۲)

$\frac{6 - 3\sqrt{3}}{16}$  (۱)

۱۰۵ شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع  $y = 1 - \sin mx$  است. مقدار تابع در نقطه‌ی  $x = \frac{7\pi}{6}$  کدام است؟



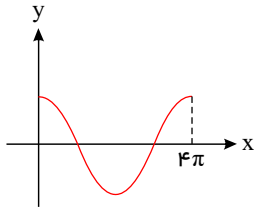
(۱) صفر

(۲)  $\frac{1}{2}$

(۳) ۱

(۴) ۲

۱۰۶ شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع  $y = \frac{1}{2} + 2 \cos mx$  است. مقدار تابع در نقطه‌ی  $x = \frac{16\pi}{3}$  کدام است؟



(۲)  $\frac{1}{2}$

(۴) صفر

(۱)  $-\frac{1}{2}$

(۳) ۱

۱۰۷ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی  $2 \cos 2x = \cot x (4 \sin x + \tan x)$  کدام می‌باشد؟

$2k\pi \pm \frac{2\pi}{6}$  (۴)

$2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$  (۳)

$k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۲)

$k\pi - \frac{\pi}{3}$  (۱)

۱۰۸ فرض کنید زاویه  $\alpha$  در ناحیه‌ی چهارم مثلثاتی و  $\cos(\alpha) = \frac{2}{3}$  باشد. حاصل عبارت  $\frac{\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) - \sin(\alpha - \pi)}{|\tan^2(\alpha) - 1|}$  کدام است؟

$-\frac{4(2 + \sqrt{5})}{3}$  (۴)

$\frac{4(2 - \sqrt{5})}{3}$  (۳)

$\frac{4(-2 + \sqrt{5})}{3}$  (۲)

$\frac{4(2 + \sqrt{5})}{3}$  (۱)



## پاسخنامه تشریحی

ابتدا تمام زوایا را بر حسب  $15^\circ$  می نویسیم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۱**

$$\begin{aligned} \cos 285^\circ &= \cos(270^\circ + 15^\circ) = \sin 15^\circ, \quad \sin 255^\circ = \sin(270^\circ - 15^\circ) = -\cos 15^\circ \\ \sin 525^\circ &= \sin(540^\circ - 15^\circ) = \sin(180^\circ - 15^\circ) = \sin 15^\circ, \quad \sin 105^\circ = \sin(90^\circ + 15^\circ) = \cos 15^\circ \\ \text{بنابراین داریم: } \frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ} &= \frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ} \end{aligned}$$

تمام جملات را بر  $\cos 15^\circ$  تقسیم می کنیم در نتیجه:

$$\frac{\tan 15^\circ + 1}{\tan 15^\circ - 1} = \frac{0.28 + 1}{0.28 - 1} = \frac{1.28}{-0.72} = \frac{-128}{72} = -\frac{16}{9}$$

می دانیم در تابع  $y = a \sin bx + c$  بیشترین مقدار تابع، برابر  $|a| + c$  است. **۱ ۲ ۳ ۴ ۲**

$$Max = \sqrt{3} \rightarrow |b| + a = \sqrt{3} \xrightarrow{\text{چون شکل فرمت خود سینوس است، } b > 0 \text{ است.}} b + a = \sqrt{3}$$

نقطه  $(\pi, -\frac{3}{2})$  در تابع صدق می کند، پس:

$$\left| \begin{array}{l} \pi \\ -\frac{3}{2} \end{array} \right. \rightarrow -\frac{3}{2} = a + b \sin(\pi + \frac{\pi}{2}) \rightarrow -\frac{3}{2} = a - b \sin \frac{\pi}{2} \rightarrow -\frac{3}{2} = a - \frac{\sqrt{3}}{2}b \rightarrow -3 = 2a - \sqrt{3}b$$

$$-2 \begin{cases} b + a = \sqrt{3} \\ 2a - \sqrt{3}b = -3 \end{cases} \rightarrow -2b - \sqrt{3}b = -2\sqrt{3} - 3 \rightarrow 2b + \sqrt{3}b = 2\sqrt{3} + 3$$

$$\rightarrow (2 + \sqrt{3})b = 2\sqrt{3} + 3 \rightarrow b = \frac{2\sqrt{3} + 3}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3} - 6 + 6 - 3\sqrt{3}}{4 - 3} = \sqrt{3}$$

مساحت هر چهارضلعی از نصف حاصل ضرب دو قطر در سینوس زاویه ی بینشان به دست می آید. **۱ ۲ ۳ ۴ ۳**

$$S = \frac{1}{2}(12)(8\sqrt{3})(\sin 60^\circ) = (48\sqrt{3})(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 24 \times 3 = 72$$

**۱ ۲ ۳ ۴ ۴**

از رابطه  $\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot \alpha$  استفاده می کنیم.

$$\tan 3x \cdot \tan x = 1 \rightarrow \tan 3x = \frac{1}{\tan x} \rightarrow \tan 3x = \cot x \rightarrow \tan 3x = \tan(\frac{\pi}{2} - x)$$

$$\xrightarrow{\tan x = \tan \alpha \rightarrow x = k\pi + \alpha} 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} - x \rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$$

**۱ ۲ ۳ ۴ ۵**

$$\begin{aligned} 1 + \cos u &= 2 \cos^2 \frac{u}{2} \\ \sin u &= 2 \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2} \end{aligned} \quad \text{می دانیم:}$$

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\tan(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}) = -\cot \frac{\alpha}{2} = \frac{-1}{\tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$$

برای آنکه تابع  $y = -4 \cos(\frac{\pi}{4} - 3\pi x)$  روی بازه  $[-1, 1]$  بیشترین مقدار را داشته باشد، باید حاصل  $\cos(\frac{\pi}{4} - 3\pi x)$  کمترین مقدار، یعنی مقدار **۱ ۲ ۳ ۴ ۶**

$(-1)$  را به خود بگیرد. پس داریم:

$$\cos(\frac{\pi}{4} - 3\pi x) = -1 \rightarrow \frac{\pi}{4} - 3\pi x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{-2k}{3} - \frac{1}{4}$$

حال برای تعیین تعداد جوابهای این معادله در بازه  $[-1, 1]$  کافی است به  $k$  اعداد صحیح را نسبت دهیم:



$k$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$
$x$	$\frac{13}{12}$	$\frac{5}{12}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{11}{12}$	$-\frac{19}{12}$
	غ ق ق	✓	✓	✓	غ ق ق

بنابراین معادله‌ی فوق در بازه‌ی  $[-1, 1]$  دارای ۳ جواب است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۷

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha, \quad \sin(3\pi + \alpha) = \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha, \quad \cos(\alpha - \pi) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(3\pi + \alpha)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \cos(\alpha - \pi)} = \frac{-\cos \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$$

$$\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = \frac{1 + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 5$$

تک تک جملات را بر  $\cos \alpha$  تقسیم می‌کنیم

۱ ۲ ۳ ۴ ۸

می‌دانیم:  $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

$$\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} = \frac{1}{|\sin \alpha|} = \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \stackrel{\text{در مزدوج مخرج ضرب و تقسیم می‌کنیم}}{=} \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)}{(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)}} = \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)^2}{1 - \cos^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)^2}{\sin^2 \alpha}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + \cot^2 \alpha} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \alpha$$

می‌دانیم:  $1 + \cos 2a = 2\cos^2 a$  ۱ ۲ ۳ ۴ ۹

$$\cos 2x + 2\cos^2 x = 0 \rightarrow \cos 2x + 1 + \cos 2x = 0 \rightarrow 2\cos 2x = -1 \rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \cos 2x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{2\pi}{3} \rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

می‌دانیم:  $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$  ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰

$$\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\frac{1}{2} \sin 30^\circ}$$

$$\rightarrow A^2 = \frac{\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ - 2\sin 15^\circ \cos 15^\circ}{\frac{1}{16}} = \frac{1 - \sin 30^\circ}{\frac{1}{16}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{16}} = 8$$

$$\rightarrow A = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

دوره تناوب تابع  $y = \sin kx$  برابر  $\frac{2\pi}{|k|}$  می‌باشد. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱

$$y = a \sin(b\pi x) \rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|\pi} = \frac{2}{|b|} = 6 \rightarrow |b| = \frac{1}{3} \rightarrow b = \pm \frac{1}{3}$$

باتوجه به شکل داده شده  $a$  و  $b$  هر دو مثبت یا هر دو منفی هستند و چون همه گزینه‌ها مثبت می‌باشند پس  $b = \frac{1}{3}$  قابل قبول است. بیشترین مقدار این تابع از روی شکل ۲ می‌باشد و بیشترین

مقدار  $y = a \sin(b\pi x)$  زمانی رخ می‌دهد که سینوس برابر ۱ باشد

بنابراین  $a = 2$  است پس  $a + b = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$



$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \quad \text{می دانیم}$$

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4} \Rightarrow (\sin^2 x - \cos^2 x) \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_1 = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow -\cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

توجه کنید که  $\sin \frac{5\pi}{4} = \sin(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  است.

$$y = a + b \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = a + b \sin x$$

نقطه  $(0, -\frac{5\pi}{6})$  در تابع صوق می کند، پس:

$$\left| \begin{array}{l} -\frac{5\pi}{6} \\ 0 \end{array} \right. \rightarrow 0 = a + b \sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right) \rightarrow 0 = a - b \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$\rightarrow 0 = a - b \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \rightarrow 0 = a - b \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \rightarrow a - \frac{b}{2} = 0 \quad (I)$$

در تابع  $y = a \sin bx + c$  مقدار  $Max$  تابع از رابطه  $c + |a|$  به دست می آید و چون تابع داده شده فرمت سینوس را دارد  $ab > 0$  است و چون  $a > 0$  است و در نتیجه  $b > 0$  است.

$$Max = |a| + c \rightarrow 3 = |b| + a \rightarrow 3 = b + a \quad (II)$$

از روابط (I) و (II) مقادیر  $a = 1$  و  $b = 2$  حاصل می شوند.

پس  $f(x) = 1 + 2 \sin x \rightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 2$

کسری برابر صفر است که صورتش صفر باشد. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴

$$\sin 3x + \sin 2x = 0 \rightarrow \sin 3x = -\sin 2x \rightarrow \sin 3x = \sin(-2x)$$

$$\begin{cases} 3x = 2k\pi - 2x \rightarrow 5x = 2k\pi \rightarrow x = \frac{2k\pi}{5} \\ 3x = 2k\pi + \pi + 2x \rightarrow x = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

غشقی (مخرج را صفر می کند)

هرکدام از نسبت های مثلثاتی داده شده را حساب می کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵

$$\sin \frac{17\pi}{3} = \sin\left(6\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{-17\pi}{6}\right) = \cos \frac{17\pi}{6} = \cos\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \frac{19\pi}{4} = \tan\left(5\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\sin\left(\frac{-11\pi}{6}\right) = -\sin \frac{11\pi}{6} = -\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

بنابراین خواسته سؤال بصورت زیر است:

$$\sin\left(\frac{17\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{-17\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{19\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{-11\pi}{6}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha \quad \text{می دانیم: } ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶$$

$$\sin 2x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0 \rightarrow 2 \sin x \cos x + \sin x = 0 \rightarrow \sin x (2 \cos x + 1) = 0$$



$$\rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi \xrightarrow{k=0,1,2} x = 0, \pi, 2\pi \\ 2 \cos x + 1 = 0 \rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{x=2k\pi \pm \alpha} \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{k=0} x = \frac{2\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{k=1} x = \frac{4\pi}{3} \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین مجموع جوابها برابر  $5\pi$  است.  $0 + \pi + 2\pi + \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 5\pi$

1 2 3 4 17

می‌دانیم:  $2 \sin a \cos a = \sin 2a, \cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$

$$2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 \rightarrow 2 \sin x \cos x = 1 - 2 \cos^2 x$$

$$\rightarrow 2 \sin x \cos x = -(2 \cos^2 x - 1) \rightarrow \sin 2x = -\cos 2x$$

طرفین را بر  $\cos 2x$  تقسیم می‌کنیم:

$$\rightarrow \tan 2x = -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \rightarrow 2x = k\pi - \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

1 2 3 4 18

$$2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0 \rightarrow 2(1 - \cos^2 x) + 3 \cos x = 0$$

$$\rightarrow 2 - 2 \cos^2 x + 3 \cos x = 0 \rightarrow 2 \cos^2 x - 3 \cos x - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\cos x = A} 2A^2 - 3A - 2 = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 + 16 = 25$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{3+5}{4} = 2 \rightarrow \text{امکان ندارد } (-1 \leq \cos x \leq 1) \\ \cos x = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{x=2k\pi \pm \alpha} x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

می‌دانیم:  $(\sin a - \cos a)^2 = 1 - \sin 2a$  1 2 3 4 19

$$\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{توان 2}} 1 - \sin 2\alpha = \frac{1}{4} \rightarrow \sin 2\alpha = \frac{3}{4}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) = -\sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$$

1 2 3 4 20

نکته:  $\sin u = \sin v \Rightarrow u = 2k\pi + v, u = 2k\pi + \pi - v$

$$\sin 5x + \sin 4x = 1 + \underbrace{\cos \pi}_{-1} \rightarrow \sin 5x = -\sin 4x \rightarrow \sin 5x = \sin(-4x)$$

$$\rightarrow \begin{cases} 5x = 2k\pi - 4x \rightarrow 9x = 2k\pi \rightarrow x = \frac{2k\pi}{9} \\ 5x = 2k\pi + \pi + 4x \rightarrow x = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

$$x = \frac{2k\pi}{9} \rightarrow \begin{array}{c|cccccc} k & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 9 \\ \hline x & 0 & \frac{2\pi}{9} & \frac{4\pi}{9} & \frac{6\pi}{9} & \frac{8\pi}{9} & \dots & 2\pi \end{array}$$

$$x = 2k\pi + \pi \xrightarrow{0 \leq x < 2\pi} x = \pi$$

$$\text{مجموع جوابها} = \frac{2\pi + 4\pi + 6\pi + \dots + 18\pi}{9} + \pi$$

$$= \frac{(2+4+6+\dots+18)\pi}{9} + \pi = \frac{90\pi}{9} + \pi = 10\pi + \pi = 11\pi$$

دقت کنید که  $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$  است روی همین اصل داریم:





$$2 + 4 + 6 + \dots + 18 = 9(9 + 1) = 90$$

1 2 3 4 21

ابتدا تمام زوایا را بر حسب  $20^\circ$  می‌نویسیم:

$$\sin 250^\circ = \sin(270^\circ - 20^\circ) = -\cos 20^\circ, \sin 700^\circ = \sin(720^\circ - 20^\circ) = \sin(-20^\circ) = -\sin 20^\circ$$

$$\cos 560^\circ = \cos(540^\circ + 20^\circ) = \cos(180^\circ + 20^\circ) = -\cos 20^\circ, \cos 110^\circ = \cos(90^\circ + 20^\circ) = -\sin 20^\circ$$

بنابراین داریم:

$$\frac{\sin 250^\circ + \sin 700^\circ}{\cos 560^\circ - \cos 110^\circ} = \frac{-\cos 20^\circ - \sin 20^\circ}{-\cos 20^\circ + \sin 20^\circ}$$

تمام جملات را بر  $\cos 20^\circ$  تقسیم می‌کنیم در نتیجه:

$$\frac{-1 - \tan 20^\circ}{-1 + \tan 20^\circ} = \frac{-1 - 0.36}{-1 + 0.36} = \frac{-1.36}{-0.64} = \frac{1.36}{0.64} = \frac{17}{8}$$

1 2 3 4 22

برای پیدا کردن نقاط برخورد نمودار تابع  $y = 3 \sin(\frac{\pi}{4} - 2x)$  با محور  $x$ ها روی بازه  $[-\pi, \frac{3\pi}{2}]$ ، کافی است معادله  $3 \sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = 0$  را روی

بازه‌ی مورد نظر حل کنیم. داریم:

$$3 \sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = 0 \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = 0$$

حالت خاص

$$\frac{\pi}{4} - 2x = k\pi \Rightarrow -2x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} - \frac{k\pi}{2}$$

حال، جواب‌های قابل قبول  $x$  را که در بازه  $[-\pi, \frac{3\pi}{2}]$  قرار دارند به دست

می‌آوریم:

$$k = 2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} - \pi = -\frac{7\pi}{8}, \quad k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{8}$$

$$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8}, \quad k = -1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{8}$$

$$k = -2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \pi = \frac{9\pi}{8}$$

در نتیجه، پنج جواب قابل قبول وجود دارد.

1 2 3 4 23

$$2 \sin(\pi - x) \cos(\frac{3\pi}{4} + x) + 3 \cot x \sin(\pi + x) = 0 \Rightarrow 2 \sin x \cdot \sin x + 3 \frac{\cos x}{\sin x} (-\sin x) = 0$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 x - 3 \cos x = 0 \Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) - 3 \cos x = 0 \Rightarrow 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\cos x = A} 2A^2 + 3A - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 + 16 = 25 \rightarrow \begin{cases} A = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{1}{2} \\ A = \frac{-3 - 5}{4} = -2 \end{cases}$$

$$A = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$A = -2 \Rightarrow \cos x = -2 \text{ امکان ندارد } (-1 \leq \cos x \leq 1)$$

1 2 3 4 24

می‌دانیم دوره‌ی تناوب تابع  $y = a \cos bx$  برابر  $T = \frac{2\pi}{|b|}$  است. از روی شکل مشخص است که دوره‌ی تناوب تابع برابر  $4\pi$  است.

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow 4\pi = \frac{2\pi}{|m|} \rightarrow 2 = \frac{1}{|m|} \rightarrow |m| = \frac{1}{2} \rightarrow m = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2}$$

چون  $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$  است فرقی نمی‌کند که  $m = \frac{1}{2}$  یا  $m = -\frac{1}{2}$  باشد.

$$y = \frac{1}{2} + 2 \cos(\frac{1}{2}x) \rightarrow y(\frac{16\pi}{3}) = \frac{1}{2} + 2 \cos(\frac{1}{2} \times \frac{16\pi}{3}) = \frac{1}{2} + 2 \cos \frac{8\pi}{3}$$

$$\rightarrow y(\frac{16\pi}{3}) = \frac{1}{2} + 2 \cos(2\pi + \frac{2\pi}{3}) = \frac{1}{2} + 2 \cos \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} + 2(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$



$$\cot a - \tan a = 2 \cot 2a \quad \text{می دانیم: } \boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \boxed{3} \quad \boxed{4} \quad \boxed{25}$$

$$\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = -(\cot \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2}) = -2 \cot x = -2 \left( \frac{1}{\tan x} \right) = -2 \left( \frac{2}{4} \right) = -\frac{3}{2}$$

$$\boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \boxed{3} \quad \boxed{4} \quad \boxed{26}$$

$$\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 \quad \text{می دانیم:}$$

$$\tan \frac{2\pi}{3} \sin \left( \frac{2\pi}{3} - x \right) = 1 \Rightarrow \tan \left( \pi - \frac{\pi}{3} \right) \sin \left( \frac{2\pi}{3} - x \right) = 1$$

$$\Rightarrow -\tan \frac{\pi}{3} (-\cos x) = 1 \Rightarrow \sqrt{3} \cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 2 \times \frac{1}{3} - 1 = \frac{-1}{3}$$

$$\boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \boxed{3} \quad \boxed{4} \quad \boxed{27}$$

$$\sin u \cdot \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u \quad \text{می دانیم:}$$

$$\sin \frac{\pi}{12} \frac{\sqrt{3}}{12} = \sin \frac{\pi}{12} \sin \left( \frac{6\pi + \pi}{12} \right) = \sin \frac{\pi}{12} \sin \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \right) = \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \sin \left( \frac{2\pi}{12} \right) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \boxed{3} \quad \boxed{4} \quad \boxed{28}$$

$$\text{می دانیم } \cos \left( \frac{3\pi}{2} + x \right) = \sin x \text{ پس:}$$

$$\frac{\sin 3x}{\cos \left( \frac{3\pi}{2} + x \right)} = 1 \Rightarrow \frac{\sin 3x}{\sin x} = 1 \xrightarrow{\sin x \neq 0 \rightarrow x \neq k\pi} \sin 3x = \sin x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \rightarrow 2x = 2k\pi \rightarrow x = k\pi \\ 3x = 2k\pi + \pi - x \rightarrow 4x = 2k\pi + \pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\text{چون } x \neq k\pi \text{ می باشد پس جواب } x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \text{ است.}$$

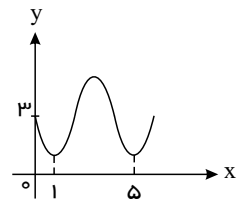
$$\text{می دانیم که } 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ و چون } \frac{\pi}{4} < x < \pi \text{ است، انتهای کمان در ناحیه دوم دایره مثلثاتی است و داریم:}$$

$$\boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \boxed{3} \quad \boxed{4} \quad \boxed{29}$$

$$\frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \left( \frac{1}{\sin x} - \sin x \right) = \frac{\tan x}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}} \left( \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x} \right) = \frac{\tan x}{\frac{1}{|\cos x|}} \left( \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right) = - \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right) (\cos x) \left( \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right) = -\cos^2 x$$

$$\boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \boxed{3} \quad \boxed{4} \quad \boxed{30}$$

با توجه به شکل روبه‌رو به راحتی پی می‌بریم که دوره‌ی تناوب اصلی تابع  $y = a + \sin(b\pi x)$  برابر  $T = 4$  می‌باشد. از طرفی عرض از مبدأ این تابع برابر  $f(0) = 3 \rightarrow a = 3$  یعنی:  $3$  است  $3$



توجه کنید که دوره‌ی تناوب تابع  $y = \sin kx$  برابر  $T = \frac{2\pi}{|k|}$  است.

$$y = a + \sin \left( \underbrace{b\pi}_k x \right) \Rightarrow \text{دوره‌ی تناوب} = T = \frac{2\pi}{|k|} = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|} \xrightarrow{T=4} \frac{2}{|b|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

چون به ازای  $x > 0$ ، تابع ابتدا نزولی می‌باشد، پس مقدار  $b$  منفی می‌باشد، یعنی  $b = -\frac{1}{2}$  است. داریم:

$$y = 3 + \sin \left( -\frac{1}{2} \pi x \right)$$

$$\Rightarrow y \left( \frac{25}{3} \right) = 3 + \sin \left( -\frac{25}{6} \pi \right) = 3 - \sin \left( 4\pi + \frac{\pi}{6} \right) = 3 - \sin \frac{\pi}{6} = 3 - \frac{1}{2} = 2,5$$

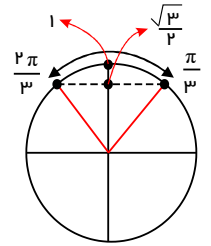


۱ ۲ ۳ ۴ ۳۱

$$\frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \cos 2\alpha \quad \text{می دانیم:}$$

$$\frac{1 - \tan^2(45 - \alpha)}{1 + \tan^2(45 - \alpha)} = \cos 2(45 - \alpha) = \cos(90 - 2\alpha) = \sin 2\alpha$$

$$\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \leq 2\alpha \leq \frac{2\pi}{3}$$



مقدار سینوس در این بازه از  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  تا ۱ متغیر است که کمترین مقدار آن  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۲ می دانیم که  $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$  و چون  $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$  است، انتهای کمان در ناحیه سوم دایره مثلثاتی است و داریم:

$$\sqrt{1 + \tan^2 x} \left( 2 \sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x \right) = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} \left( 2 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - \sin^2 x \right) = \frac{1}{|\cos x|} (1 - \sin^2 x) = \frac{-1}{\cos x} (\cos^2 x) = -\cos x$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۳ اگر  $[x]$  زوج باشد آنگاه:

$$(-1)^{[x]} f(x) = |f(x)| \Rightarrow f(x) = |f(x)| \Rightarrow f(x) \geq 0$$

اگر  $[x]$  فرد باشد آنگاه:

$$(-1)^{[x]} f(x) = |f(x)| \Rightarrow -f(x) = |f(x)| \Rightarrow f(x) \leq 0$$

تابع  $f(x) = \sin \pi x$  ویژگی های بالا را دارد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۴

$$\cos 3x + \cos x = 0 \rightarrow \cos 3x = -\cos x \rightarrow \cos 3x = \cos(\pi - x)$$

$$\cos x = \cos \alpha \rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha \rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \pi - x \rightarrow 4x = 2k\pi + \pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ 3x = 2k\pi - \pi + x \rightarrow 2x = 2k\pi - \pi \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

توجه کنید چون  $\cos x \neq 0$  است پس جواب  $x = k\pi - \frac{\pi}{2}$  قابل قبول نمی باشد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۵ می دانیم دوره تناوب تابع  $y = a \sin bx$  برابر  $T = \frac{2\pi}{|b|}$  است. از روی شکل مشخص است که دوره تناوب تابع برابر  $\frac{2\pi}{3}$  است.

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{|m|} \rightarrow |m| = 3 \rightarrow m = 3, m = -3$$

از طرفی تابع در همسایگی راست  $x = 0$  نزولی است پس  $m > 0$  است یعنی  $m = 3$  قابل قبول است.

$$y = 1 - \sin 3x \rightarrow y\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 1 - \sin \frac{21\pi}{6} = 1 - \sin \frac{7\pi}{2} = 1 - \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 1 - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - (-1) = 2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۶

$$\tan \alpha = \frac{4}{3} \rightarrow \begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow 1 + \frac{16}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{25} \xrightarrow{\text{ناحیه سوم}} \cos \alpha = -\frac{3}{5} \\ \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \xrightarrow{\text{ناحیه سوم}} \sin \alpha = -\frac{4}{5} \\ \cot \alpha = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$



$$\cos\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(2\pi + \frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\tan\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = -\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cot \alpha = -\frac{3}{4}$$

$$\text{پس: } \sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right) \cos\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) - \tan\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \left(-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) + \frac{3}{4} = -\frac{12}{25} + \frac{3}{4} = \frac{-48 + 75}{100} = \frac{27}{100} = 0,27$$

می‌دانیم  $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$  ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۷

$$2 \sin x \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 1 \rightarrow -2 \sin x \cos x = 1 \rightarrow -2 \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right) = 1 \rightarrow -2 \sin 2x = 1 \rightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} = \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)$$

$$\sin x = \sin \alpha \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \rightarrow x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \end{cases} \xrightarrow{\text{به } k \text{ عدد می‌دهیم.}} x = \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}, \frac{23\pi}{12} \xrightarrow{\text{مجموع جوابها}} \frac{60\pi}{12} = 5\pi$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۸

می‌دانیم:  $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \Rightarrow -\cos 2x = -\cos x \Rightarrow \cos 2x = \cos x$$

$$2x = 2k\pi \pm x \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3}$$

می‌دانیم دوره تناوب  $y = \tan bx$  برابر  $T = \frac{\pi}{|b|}$  است بنابراین  $T = \frac{\pi}{2}$  می‌باشد.

می‌دانیم  $\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$  ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۹

$$\text{پس: } f(x) = -(\cot \pi x - \tan \pi x) = -2 \cot 2\pi x = \frac{-2}{\tan 2\pi x}$$

چون فاصله دو مینیمم متوالی، دوره تناوب اصلی منحنی است، پس:

می‌دانیم که  $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$  است پس  $y = 1 + \frac{a}{2} \sin 2bx$  و می‌دانیم در تابع  $y = a \sin bx + c$ ، دوره تناوب  $T = \frac{2\pi}{|b|}$  و  $Max = |a| + c$  است.

$$Max = \frac{3}{2} \rightarrow \left|\frac{a}{2}\right| + 1 = \frac{3}{2} \rightarrow \left|\frac{a}{2}\right| = \frac{1}{2} \rightarrow a = \pm 1$$

$$T = \frac{2\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \pi \rightarrow \frac{2\pi}{|2b|} = \pi \rightarrow |b| = 1 \rightarrow b = \pm 1$$

$$a = 1 \rightarrow b = 1 \rightarrow a + b = 2 \quad \text{یا} \quad a = -1 \rightarrow b = -1 \rightarrow a + b = -2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۱

می‌دانیم:  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ ،  $2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$

$$(1 + \tan^2 x) \cdot \cos(\pi + 2x) = 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)(-\cos 2x) = 2 \Rightarrow 2 \cos^2 x = -\cos 2x$$

$$\Rightarrow 1 + \cos 2x = -\cos 2x \Rightarrow 2 \cos 2x = -1 \Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۴۲

می دانیم:  $\sin u \cdot \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u$  ,  $\cos^2 a = 1 - 2 \sin^2 a$

$$\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} (1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} \times \cos \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} \times 0 = 0$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۳

می دانیم:  $\sin u \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u$

$$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) \sin(\pi + \alpha) - \sin(\pi - \alpha) \cos(-\alpha) = \cos \alpha (-\sin \alpha) - \sin \alpha \cos \alpha = -2 \sin \alpha \cos \alpha = -\sin 2\alpha$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۴

می دانیم  $\tan(\frac{3\pi}{2} - x) = \cot x$  پس:

$$(\sin x - \tan x) \tan(\frac{3\pi}{2} - x) = \cos \frac{3\pi}{2} \Rightarrow (\sin x - \tan x) \cot x = \cos(\pi + \frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow \sin x \cot x - \tan x \cot x = -\cos \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} - 1 = -\cos \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos x - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۵

روش اول:

$$\frac{\cos 2x}{\cos(x + \frac{\pi}{4})} = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \xrightarrow[\text{حالت خاص}]{x = k\pi + \frac{\pi}{2}} 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$\text{مخرج} \neq 0 \Rightarrow \cos(x + \frac{\pi}{4}) \neq 0 \xrightarrow[\text{حالت خاص}]{x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}} x + \frac{\pi}{4} \neq k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}$$

روش دوم: اگر به  $k$  صفر دهیم گزینه‌های ۱، ۲، ۳، ۴ جواب  $x = \frac{\pi}{4}$  بدست می‌آید که غیر قابل قبول است (چون مخرج را صفر می‌کند) پس گزینه‌ی ۴ جواب صحیح است.

۴۶ ۱ ۲ ۳ ۴  $\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) = \cos(\pi + \frac{\pi}{2} + \theta) = -\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -(-\sin \theta) = \sin \theta$

$$\frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(\frac{3\pi}{2} + \theta)} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta + \sin \theta} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{2 \sin \theta} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cot \theta$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{10}{2} = \frac{1}{2} + \frac{10}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۷

$$\sin(\pi + x) \cos(\frac{\pi}{2} + x) - 2 \sin(\pi - x) + 1 = 0 \Rightarrow (-\sin x)(-\sin x) - 2 \sin x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \sin^2 x - 2 \sin x + 1 = 0 \Rightarrow (\sin x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \sin x = 1 \xrightarrow[\text{حالت خاص}]{} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۸

$$\tan(\frac{11\pi}{4}) = \tan(3\pi - \frac{\pi}{4}) = \tan(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\sin(\frac{15\pi}{4}) = \sin(4\pi - \frac{\pi}{4}) = -\sin(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(\frac{13\pi}{4}) = \cos(3\pi + \frac{\pi}{4}) = \cos(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{پس: } A = (-1) + (-\frac{\sqrt{2}}{2})(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

می‌دانیم  $\sin^4 a + \cos^4 a = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2a$  ۱ ۲ ۳ ۴ ۴۹



$$1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2 2x = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \\ \sin 2x = -1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

$$\text{مجموع جوابها} = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} = 4\pi$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}, \cot a - \tan a = 2 \cot 2a \quad \text{می دانیم: } \boxed{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 50}$$

$$\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = 1 \rightarrow \cot \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2} = -1 \rightarrow 2 \cot x = -1 \rightarrow \cot x = \frac{-1}{2} \rightarrow \tan x = -2$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \rightarrow \tan 2x = \frac{2(-2)}{1 - 4} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

$$\sin \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u \quad \text{می دانیم که } \boxed{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 51}$$

$$4 \sin 3x \cos 3x = 1 \rightarrow 2 \left( \frac{1}{2} \sin 6x \right) = 1 \rightarrow 2 \sin 6x = 1 \rightarrow \sin 6x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \xrightarrow{\sin x = \sin \alpha \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}} \begin{cases} 6x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{36} \\ 6x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{5\pi}{36} \end{cases}$$

k	0	1
x	$\frac{\pi}{36}, \frac{5\pi}{36}$	$\frac{13\pi}{36}, \frac{17\pi}{36}$

بنابراین معادله در بازه داده شده دارای 4 جواب است.

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \quad \text{می دانیم: } \boxed{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 52}$$

$$\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \sqrt{3} \Rightarrow \tan 2x = \sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3} \xrightarrow{x = k\pi + \alpha} 2x = k\pi + \frac{\pi}{3} \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

$$\text{در تابع } y = a \sin bx + c \text{ مقدار ماکسیمم تابع از رابطه } |a| + c = \text{Max} \text{ به دست می آید. } \boxed{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 53}$$

$$\text{Max} = \frac{3}{2} \rightarrow |b| + a = \frac{3}{2} \xrightarrow{\text{شکل فرمت قرینه سینوس}} -b + a = \frac{3}{2}$$

است پس  $b < 0$ .

$$\left| \frac{\pi}{2} \right| \xrightarrow{\text{صنق}} 0 = a + b \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow 0 = a + b \cos \frac{\pi}{3} \rightarrow a + \frac{b}{2} = 0 \rightarrow \begin{cases} -b + a = \frac{3}{2} \\ a + \frac{b}{2} = 0 \end{cases} \rightarrow 3a = \frac{3}{2} \rightarrow a = \frac{1}{2}, b = -1$$

$$\boxed{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 54}$$

$$1 + \cot^2 C = \frac{1}{\sin^2 C} \rightarrow 1 + \cot^2 C = \frac{169}{25} \rightarrow \cot^2 C = \frac{144}{25} \rightarrow \cot C = \frac{12}{5}$$

$$\triangle AHC : \cot C = \frac{CH}{AH} \rightarrow \frac{12}{5} = \frac{9}{AH} \rightarrow 12AH = 45 \rightarrow AH = 3,75$$

$$\boxed{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 55}$$

$$\frac{\sin 160^\circ - \cos 200^\circ}{\cos 110^\circ + \sin 70^\circ} = \frac{\sin(180^\circ - 20^\circ) - \cos(180^\circ + 20^\circ)}{\cos(90^\circ + 20^\circ) + \sin(90^\circ - 20^\circ)} = \frac{\sin 20^\circ + \cos 20^\circ}{-\sin 20^\circ + \cos 20^\circ}$$

$$\frac{\div \cos 20^\circ}{-\tan 20^\circ + 1} = \frac{\frac{36}{100} + 1}{-\frac{36}{100} + 1} = \frac{136}{64} = \frac{17}{8}$$

$$\boxed{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 56}$$

$$y = a + b \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \rightarrow y = a + b \cos x$$

در تابع  $y = a \cos bx + c$  می دانیم که  $|a| + c = \text{Max}$  است.

$$\text{Max} = 3 \rightarrow |b| + a = 3 \xrightarrow{\text{شکل فرمت قرینه سینوس را دارد}} -b + a = 3$$

پس  $b < 0$  است



$$\frac{7\pi}{3} \text{ صبق } \rightarrow \circ = a + b \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) \rightarrow \circ = a + b \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow \circ = a + b \cos \frac{\pi}{3} \rightarrow \circ = a + \frac{b}{2} \rightarrow 2a + b = \circ$$

$$\text{پس: } \begin{cases} -b+a=3 \\ 2a+b=0 \end{cases} \rightarrow a=1, b=-2$$

در تابع  $y = a \sin bx + c$  می‌دانیم که  $T = \frac{2\pi}{|b|}$  و  $Max = |a| + c$  و  $Min = -|a| + c$  است. (۱) (۲) (۳) (۴) (۵۷)

$$T = \frac{9\pi}{2} - \left(\frac{-3\pi}{2}\right) = 6\pi \rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 6\pi \rightarrow |b| = \frac{1}{3} \rightarrow b = \frac{1}{3}, b = -\frac{1}{3}$$

$$\left. \begin{matrix} Max = 1 \rightarrow |a| + c = 1 \\ Min = -3 \rightarrow -|a| + c = -3 \end{matrix} \right\} \rightarrow c = -1, |a| = 2 \rightarrow a = 2, a = -2$$

چون شکل فرمت قرینه سینوس را دارد پس  $ab < 0$  است بنابراین  $a = -2$  است. (۱) (۲) (۳) (۴) (۵۸)

$$\tan \frac{17\pi}{6} = \tan\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin \frac{11\pi}{3} = \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{10\pi}{3} = \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{پس: } \tan \frac{17\pi}{6} \cdot \sin \frac{11\pi}{3} + \cos \frac{10\pi}{3} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

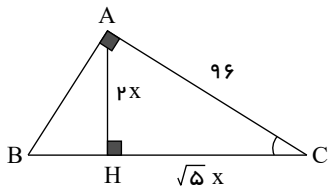
(۱) (۲) (۳) (۴) (۵۹)

می‌دانیم  $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$ ,  $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ ,  $1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta}$

$$\frac{(1 + \tan^2 \theta)(1 + \cot^2 \theta)}{(1 - \sin^2 \theta) - \cos^2 \theta} = \frac{\frac{1}{\cos^2 \theta} \times \frac{1}{\sin^2 \theta}}{\cos^2 \theta - \cos^2 \theta} = \frac{\frac{1}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}}{\underbrace{\cos^2 \theta(1 - \cos^2 \theta)}_{\sin^2 \theta}} = \frac{1}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}$$

$$= \frac{1}{(\sin \theta \cos \theta)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2} \sin 2\theta\right)^2} = \frac{16}{\sin^2 2\theta} = 16 \sin^{-2} 2\theta$$

چون  $\cot C = \frac{CH}{AH} = \frac{\sqrt{5}}{2}$  است می‌توان  $CH = \sqrt{5}x$  و  $AH = 2x$  را در نظر گرفت. (۱) (۲) (۳) (۴) (۶۰)



$$\triangle AHC: (96)^2 = (2x)^2 + (\sqrt{5}x)^2 \rightarrow 96 \times 96 = 4x^2 + 5x^2 \rightarrow 96 \times 96 = 9x^2 \rightarrow x^2 = 32 \times 32 \rightarrow x = 32 \rightarrow AH = 2x = 64$$

در تابع  $y = a \sin bx + c$  می‌دانیم که  $T = \frac{2\pi}{|b|}$  و  $Max = |a| + c$  و  $Min = -|a| + c$  است. (۱) (۲) (۳) (۴) (۶۱)

$$T = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} \rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3} \rightarrow |b| = 3 \rightarrow b = 3, b = -3$$

$$\left. \begin{matrix} Max = 1 \rightarrow |a| + c = 1 \\ Min = -3 \rightarrow -|a| + c = -3 \end{matrix} \right\} \rightarrow c = -1, |a| = 2 \rightarrow a = 2, a = -2$$

شکل فرمت سینوس را دارد یعنی  $ab > 0$  است و بدون دانستن این موضوع هم گزینه اول انتخاب می‌شد.

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a \text{ می‌دانیم: } (۱) (۲) (۳) (۴) (۶۲)$$



$$2 \tan x \cos^2 x = 1 \rightarrow 2 \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos^2 x = 1 \rightarrow 2 \sin x \cos x = 1$$

حالت خاص

$$\rightarrow \sin 2x = 1 \rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۳

$$\cos 2x + \cos x = 0 \rightarrow \cos 2x = -\cos x \rightarrow \cos 2x = \cos(\pi - x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x=2k\pi+\alpha}{\rightarrow 2x = 2k\pi + \pi - x \rightarrow 3x = 2k\pi + \pi \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}} \\ \frac{x=2k\pi-\alpha}{\rightarrow 2x = 2k\pi - \pi + x \rightarrow 3x = 2k\pi - \pi \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{3}} \end{cases}$$

چون  $\cos x \neq 0$  است پس جواب  $x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$  قابل قبول است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۴

$$2 \cos^2 x - \cos x - 3 = 0 \xrightarrow{\cos x = A} 2A^2 - A - 3 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} A = -1 \\ A = -\frac{c}{a} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

حالت خاص

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \rightarrow x = 2k\pi + \pi \\ \cos x = \frac{3}{2} > 1 \text{ غ ق ق } (-1 \leq \cos x \leq 1) \end{cases}$$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$  می دانیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۶۵

$$2 \sin^2 x = 3 \cos x \rightarrow 2(1 - \cos^2 x) = 3 \cos x \rightarrow 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\cos x = A} 2A^2 + 3A - 2 = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 + 16 = 25$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \xrightarrow{x=2k\pi \pm \alpha} x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \\ \cos x = \frac{-3-5}{4} = -2 \text{ است. } -1 \leq \cos x \leq 1 \text{ امکان ندارد زیرا} \end{cases}$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \text{ و } \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x + \sin x) \text{ نکته: } ۱ ۲ ۳ ۴ ۶۶$$

طبق صورت سؤال داریم:

$$\sin 2x \cos 2x = \cos^2(x - \frac{\pi}{4}) \Rightarrow (2 \sin 2x \cos 2x)(\cos 2x) = (\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x + \sin x))^2 = \frac{1}{2} (\sin x + \cos x)^2$$

$$\Rightarrow 2 \sin 2x \cos^2 2x = \frac{1}{2} (\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 + \underbrace{2 \sin x \cos x}_{\sin 2x})$$

$$\Rightarrow 4 \sin 2x (1 - \sin^2 2x) = 1 + \sin 2x \Rightarrow 4 \sin 2x - 4 \sin^3 2x = 1 + \sin 2x$$

$$\Rightarrow 3 \sin 2x - 4 \sin^3 2x = 1 \Rightarrow \sin^3(2x) = 1 \Rightarrow \sin 2x = 1 = \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

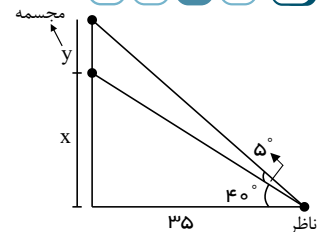
$$\tan 30^\circ = \frac{x}{35}$$

$$\tan 40^\circ = \frac{\lambda}{10} \Rightarrow \frac{x}{35} = \frac{\lambda}{10} \Rightarrow x = 28m$$

$$\tan 45^\circ = \frac{x+y}{35} = 1 \Rightarrow x+y = 35 \Rightarrow 28 + y = 35$$

$$\Rightarrow y = 7m \text{ ارتفاع مجسمه ۷ متر است.}$$

با در نظر گرفتن شکل زیر داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۶۷



روش اول: ۱ ۲ ۳ ۴ ۶۸

$$\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \cos(x + \frac{\pi}{4}) \rightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{2} - (x + \frac{\pi}{4})) \rightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \sin(-x + \frac{\pi}{4})$$





$$\sin x = \sin \alpha \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi - x + \frac{\pi}{4} \rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi + x - \frac{\pi}{4} \rightarrow x = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

غ ق ق (با توجه به شرط)

روش دوم: اگر  $k = 0$  باشد گزینه اول و دوم  $x = 0$  را می دهند که در معادله صدق نمی کند اگر  $k = 1$  باشد گزینه سوم  $x = \frac{\pi}{3}$  را می دهد که در معادله صدق نمی کند بنابراین گزینه چهارم صحیح است.

این تست با عددگذاری حل می شود.  $x = 0$  در معادله صدق می کند ( $\sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{3} = \cos 0$ ) بنابراین گزینه های سوم و چهارم حذف می شوند.  $x = \frac{\pi}{3}$

در معادله صدق نمی کند ( $\sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{2\pi}{3} \neq \cos \frac{2\pi}{3}$ ) بنابراین گزینه دوم نیز حذف می شود و جواب گزینه اول یعنی  $x = \frac{2k\pi}{3}$  است.

دوره تناوب تابع برابر  $\pi$  است. **۱ ۲ ۳ ۴ ۷۰**

$$T = \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2$$

ماکزیم تابع برابر ۱٫۵ است، پس:

$$1 + |a| = 1,5 \Rightarrow |a| = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{2}$$

تابع در اطراف  $x = 0$  نزولی است، پس  $a, b$  مختلف علامت هستند و داریم:

$$a = \frac{1}{2}, b = -2 \Rightarrow a + b = -\frac{3}{2}$$

$$a = -\frac{1}{2}, b = 2 \Rightarrow a + b = \frac{3}{2}$$

**۱ ۲ ۳ ۴ ۷۱**

می دانیم  $\sin^2 x = 2 \sin x \cos x$  و  $\cos^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$\sin^2 x = \sin^2 x - \cos^2 x$$

$$2 \sin^2 x \cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = -\cos^2 x$$

$$\rightarrow 2 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x = 0 \rightarrow \cos^2 x (2 \sin^2 x + 1) = 0$$

$$\cos^2 x = 0 \rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \xrightarrow{0 \leq x \leq \pi} \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}$$

$$\sin^2 x = -\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{12} \xrightarrow{0 \leq x \leq \pi} \left\{ \frac{11\pi}{12} \right\} \\ 2x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \rightarrow x = k\pi + \frac{5\pi}{12} \xrightarrow{0 \leq x \leq \pi} \left\{ \frac{5\pi}{12} \right\} \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{11\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{5\pi}{2}$$

**۱ ۲ ۳ ۴ ۷۲**

$$\tan^3 x \cdot \tan x = 1 \rightarrow \tan^4 x = \frac{1}{\tan x} \rightarrow \tan^3 x = \cot x \rightarrow \tan^3 x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \xrightarrow{\tan x = \tan \alpha \rightarrow x = k\pi + \alpha} 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} - x \rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \rightarrow \begin{array}{c|cccc} k & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ \\ \hline x & \frac{9\pi}{8} & \frac{11\pi}{8} & \frac{13\pi}{8} & \frac{15\pi}{8} \end{array} \rightarrow \text{مجموع جوابها} = \frac{48\pi}{8} = 6\pi$$

زاویه ها را شکسته و بر حسب  $\frac{\pi}{4}$  می نویسیم. **۱ ۲ ۳ ۴ ۷۳**

$$A = \tan \frac{11\pi}{4} + \sin \frac{15\pi}{4} \cos \frac{13\pi}{4}$$

$$\tan\left(\frac{11\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{12\pi - \pi}{4}\right) = \tan\left(3\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\sin\left(\frac{15\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{16\pi - \pi}{4}\right) = \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{13\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{12\pi + \pi}{4}\right) = \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$A = -1 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

1 2 3 4 74

$$\cos^2 x + 3 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2 = 0 \rightarrow \cos^2 x + 3 \cos x + 2 = 0 \xrightarrow{\cos x = A} A^2 + 3A + 2 = 0$$

$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} A = -1 \rightarrow \cos x = -1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi + \pi = (2k+1)\pi \\ A = -\frac{c}{a} = -2 \rightarrow \cos x = -2 \quad (-1 \leq \cos x \leq 1) \text{ امکان ندارد} \end{cases}$$

با توجه به رابطه  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$  داریم: 1 2 3 4 75

$$f(x) = a - 2 \cos\left(bx + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(x) = a + 2 \sin bx$$

$$\left. \begin{aligned} T = \frac{13\pi}{18} - \frac{\pi}{18} = \frac{2\pi}{9} = \frac{2\pi}{3|b|} \rightarrow |b| = 3 \rightarrow b = \pm 3 \rightarrow b = 3 \text{ ق. ق.} \\ f\left(\frac{\pi}{18}\right) = 0 \rightarrow a + 2 \sin \frac{\pi}{9} = 0 \rightarrow a + 1 = 0 \rightarrow a = -1 \end{aligned} \right\} \rightarrow a + b = -1 + 3 = 2$$

1 2 3 4 76

اگر:  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \cos \beta \\ \tan \alpha = \cot \beta \end{cases}$

$$\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \left(\frac{3\pi}{8} - x\right) = \frac{\pi}{2} \rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{8} - x\right) = \cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right)$$

$$\Rightarrow 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = 1 \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{8} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x + \frac{\pi}{8} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \xrightarrow{[0, 2\pi]} \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{24} \\ x_2 = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{8} = \frac{17\pi}{24} \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{18\pi}{24} = \frac{3\pi}{4}$$

1 2 3 4 77

می‌دانیم  $\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right) = \cos\left(2\pi - \alpha\right) = -\sin \alpha$  و  $2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$

$$2 \cos^2\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) = 1 + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right)$$

$$2 \cos^2\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) - \cos^2 x (1 + \tan^2 x) = 1 + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) - \cos^2 x \times \frac{1}{\cos^2 x} = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) = -\sin 2x$$

1 2 3 4 78

می‌دانیم:  $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$

$$\cos 165^\circ = \cos(180^\circ - 15^\circ) = -\cos 15^\circ, \quad \cos 105^\circ = \cos(90^\circ + 15^\circ) = -\sin 15^\circ$$

$$\Rightarrow \cos 165^\circ \cdot \cos 105^\circ = \cos 15^\circ \sin 15^\circ \Rightarrow \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

1 2 3 4 79

$$\tan 285^\circ = \tan(270^\circ + 15^\circ) = -\cot 15^\circ$$

$$\tan(-165^\circ) = -\tan 165^\circ = -\tan(180^\circ - 15^\circ) = \tan 15^\circ$$

$$\sin(1095^\circ) = \sin(6 \times 180^\circ + 15^\circ) = \sin 15^\circ$$

$$\cos(255^\circ) = \cos(270^\circ - 15^\circ) = -\sin 15^\circ$$

پس:  $\tan(285^\circ) \cdot \tan(-165^\circ) - \sin(1095^\circ) \cos(255^\circ) = (-\cot 15^\circ)(\tan 15^\circ) - (\sin 15^\circ)(-\sin 15^\circ) = -1 + \sin^2 15^\circ$

$$= -(1 - \sin^2 15^\circ) = -\cos^2 15^\circ$$

1 2 3 4 80

می‌دانیم:  $y = \sin bx \rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|}, \quad \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$



$$y = 1 + a \cdot \sin bx \cdot \cos bx = 1 + \frac{a}{2} \cdot \sin 2bx$$

چون فاصله دو نقطهٔ مینیمم متوالی برابر با دورهٔ تناوب اصلی منحنی است پس:

$$T = \frac{2\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

$$T = \frac{2\pi}{|2b|} = \frac{\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = \pm 1$$

$$y = 1 + \frac{a}{2} \cdot \sin 2bx \xrightarrow{\text{بیشترین مقدار}} 1 + \left|\frac{a}{2}\right| = \frac{3}{2} \Rightarrow |a| = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

تابع در اطراف  $x = 0$  صعودی است، پس  $a$  و  $b$  هم علامتند و داریم:

$$a + b = 2 \text{ یا } a + b = -2$$

با توجه به شکل، منحنی از  $(0, 0)$  و  $(2, 4)$  عبور می‌کند پس: **۱ ۲ ۳ ۴ ۸۱**

$$\left. \begin{array}{l} (0, 0) \xrightarrow{\text{تنگ}} 0 = a + b \cos(0) \Rightarrow a + b = 0 \\ (2, 4) \xrightarrow{\text{تنگ}} 4 = a + b \cos\left(\frac{\pi}{2}(2)\right) = a + b \cdot \cos \pi = a - b \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a - b = 4 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = -2$$

روش اول: تابع را ساده تر می‌کنیم. **۱ ۲ ۳ ۴ ۸۲**

$$f(x) = \tan(\pi x) - \cot(\pi x) = \frac{\sin \pi x}{\cos \pi x} - \frac{\cos \pi x}{\sin \pi x} = \frac{\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x}{\sin \pi x \cos \pi x}$$

$$f(x) = \frac{-(\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x)}{\sin \pi x \cos \pi x} = \frac{-\cos 2\pi x}{\frac{1}{2} \sin 2\pi x} = -2 \cot 2\pi x$$

$$T = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

روش دوم:

با توجه به اتحاد  $\tan \alpha - \cot \alpha = -2 \cot 2\alpha$  به راحتی حل می‌شود.

$$\tan(\pi x) - \cot(\pi x) = -2 \cot 2\pi x$$

$$T = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

**۱ ۲ ۳ ۴ ۸۳**

$$\tan \frac{17\pi}{6} \sin \frac{11\pi}{3} + \cos \frac{10\pi}{3} = \tan\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \left(-\tan \frac{\pi}{6}\right) \left(-\sin \frac{\pi}{3}\right) - \cos \frac{\pi}{3}$$

$$= \tan \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{6} - \frac{1}{2} = 0$$

می‌دانیم که در تابع  $y = a \cdot \sin bx$  اگر  $a \cdot b > 0$  باشد، تابع در نقطهٔ شروع  $x = 0$  صعودی خواهد بود و اگر  $a \cdot b < 0$  باشد، نزولی خواهد بود. **۱ ۲ ۳ ۴ ۸۴**

توجه:

$$y = k \cdot \sin ax \xrightarrow{\text{دوره تناوب}} T = \frac{2\pi}{|a|}$$

با توجه به شکل، منحنی دو بار تکرار شده است. پس عدد  $\frac{4}{3}$  دو برابر دورهٔ تناوب تابع است.

$$2T = \frac{4}{3} \Rightarrow T = \frac{2}{3} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{3} \Rightarrow |b| = 3$$

کم‌ترین مقدار تابع  $y = 1 + a \sin(b\pi x)$  زمانی ایجاد می‌شود که مقدار سینوس عدد ۱ یا -۱ باشد و با توجه به شکل مقدار  $\min$  عدد -۱ است. پس:



$$\min = 1 - |a| = -1 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a + b = \begin{cases} 2 + 3 = 5 \\ -2 - 3 = -5 \end{cases}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha, \quad \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \quad \text{می‌دانیم} \quad \textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3} \textcircled{4} \textcircled{85}$$

$$\begin{aligned} \Lambda \cos a \cos b \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) &= \Lambda \cos a \cos b \sin a \sin b \\ &= 2(2 \sin a \cos a)(2 \sin b \cos b) = 2 \sin 2a \sin 2b \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{a+b=\frac{\pi}{4}} 2 \sin 2a \sin 2\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = 2 \sin 2a \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2a\right) = 2 \sin 2a \cos 2a = \sin 4a$$

1 2 3 4 86

$$\tan 300^\circ = \tan(360^\circ - 60^\circ) = \tan(-60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\cos 210^\circ = \cos(270^\circ - 60^\circ) = -\sin(60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 480^\circ = \tan(360^\circ + 120^\circ) = \tan(120^\circ) = \tan(180^\circ - 60^\circ) = -\tan(60^\circ) = -\sqrt{3}$$

$$\sin 840^\circ = \sin(4 \times 360^\circ + 120^\circ) = \sin(120^\circ) = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{پس: } \tan(300^\circ) \cos(210^\circ) + \tan(480^\circ) \sin(840^\circ) = (-\sqrt{3})\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

1 2 3 4 87

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} \quad \text{می‌دانیم}$$

$$\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan 3x \rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \tan 3x$$

$$\rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{4} - x \rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$$

1 2 3 4 88

$$\text{می‌دانیم: } \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

$$\sin \frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} + \cos x (-\sin x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

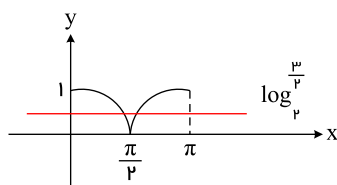
1 2 3 4 89

$$y = 2^{|\sin x|} \xrightarrow{\text{به راست } \frac{\pi}{2}} y = 2^{|\sin(x - \frac{\pi}{2})|} = 2^{|\cos x|} \xrightarrow{\text{به پایین } \frac{3}{2}} y = 2^{|\cos x|} - \frac{3}{2} \xrightarrow{y=0} 2^{|\cos x|} = \frac{3}{2} \Rightarrow \log_2 \frac{3}{2} = |\cos x|$$

$\log_2 \frac{3}{2}$  در واقع عدد بین صفر تا یک است؛ زیرا:

$$\underbrace{\log_2 1}_{\text{صفر}} < \log_2 \frac{3}{2} < \log_2 2$$

حال تابع  $y = |\cos x|$  و خط  $y = \log_2 \frac{3}{2}$  را رسم می‌کنیم. خط و نمودار در دو نقطه تقاطع دارند.



$$\text{می‌دانیم } \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \quad \text{پس داریم:} \quad \textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3} \textcircled{4} \textcircled{90}$$

$$1 - \sin^2 x - \sin^2 x \cos 2x = 1 \Rightarrow \sin^2 x \cos 2x + \sin^2 x = 0$$



$$\sin^3 x (\cos 3x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = 0, \pi, 2\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3} \\ \cos 3x = -1 \Rightarrow 3x = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

معادله دوم نیز سه جواب دارد ( $\frac{\pi}{3}$  و  $\pi$  و  $\frac{5\pi}{3}$ ) اما جواب  $\pi$  در هر دو معادله به دست آمد و تکراری است. پس در کل معادله فوق ۵ جواب ( $0, \pi, 2\pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ ) را خواهد داشت.

۱ ۲ ۳ ۴ ۹۱

می‌دانیم:  $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$  ,  $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$$

به کمک اتحاد  $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$  عبارت  $\sin^3 x + \cos^3 x$  را تجزیه می‌کنیم.

$$(\sin x + \cos x) \cdot (\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x) = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$(\sin x + \cos x) \cdot (1 - \frac{1}{2} \sin 2x) = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$(\sin x + \cos x) \cdot (1 - \frac{1}{2} \sin 2x) - (1 - \frac{1}{2} \sin 2x) = 0$$

$$(1 - \frac{1}{2} \sin 2x) \cdot (\sin x + \cos x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} 1 - \frac{1}{2} \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x = 2 \text{ غلط} \\ \sin x + \cos x = 1 \Rightarrow \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1 \Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi \Rightarrow x = 0, 2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\text{جمع} = 0 + \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{5\pi}{4}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۹۲

می‌دانیم:  $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} = 3 \cos^2 x \rightarrow \frac{-4 \sin^3 x + 3 \sin x}{\sin x} = 3 \cos^2 x \rightarrow \frac{\sin x (-4 \sin^2 x + 3)}{\sin x} = 3(1 - \sin^2 x) \Rightarrow -4 \sin^2 x + 3 = 3 - 3 \sin^2 x$$

$$\rightarrow -4 \sin^2 x = -1 \rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{4} \rightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(\pm \frac{\pi}{4})$$

طبق دایره مثلثاتی مقابل، جوابهای معادله فوق بصورت  $x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$  است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۹۳ می‌دانیم که دوره تناوب تابع  $y = k \cdot \cos ax$  برابر  $T = \frac{2\pi}{|a|}$  است.

$$y = a \sin(\frac{\pi}{4} + b\pi x) = a \cos(b\pi x)$$

چون برد تابع  $[-2, 2]$  است و برد تابع کسینوس  $[-1, 1]$  است پس  $a = 2$  است. ( $a > 0$  است زیرا نمودار نسبت به محور  $x$ ها قرینه نشده است.)

$$3T = 3,5 - (-2,5) = 6 \Rightarrow T = 2$$



از طرفی طبق شکل دوره تناوب ۲ است و داریم:  $1 = b \Rightarrow \frac{2\pi}{\pi b} = 2 \Rightarrow b = 1$  پس  $ab = 2$  می‌باشد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۹۴

می‌دانیم:  $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$ ,  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

معادله را ساده می‌کنیم.

$$\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = \sqrt{3} \Rightarrow \tan x = \sqrt{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۹۵

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 3^2 \cos^2 \frac{\pi}{12} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{6} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{3} \cdot \cos^2 \frac{2\pi}{3} \cdot \cos^2 \frac{4\pi}{3}$$

توجه کنید که  $\frac{\pi}{12}$  رادیان معادل  $15^\circ$  است و  $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$  و  $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  و  $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$  و  $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$  و  $\cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$  است، پس داریم:

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 3^2 \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right) \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3(2+\sqrt{3})}{32} = \frac{6+3\sqrt{3}}{32} = \frac{6+\sqrt{27}}{32}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۹۶

می‌دانیم:

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha, \quad 1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$(1 + \cos \lambda\alpha)(1 + \cos 4\alpha)(1 + \cos 8\alpha) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\Rightarrow 2 \cos^2 \alpha \times 2 \cos^2 2\alpha \times 2 \cos^2 4\alpha = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 2\alpha \cdot \cos^2 4\alpha = \frac{1}{6\lambda}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha = \pm \frac{1}{\lambda} \xrightarrow{\alpha \neq k\pi} \underbrace{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}_{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha = \frac{1}{\lambda} \underbrace{\sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha}_{\frac{1}{2} \sin 4\alpha} \cdot \cos 4\alpha = \frac{1}{\lambda} \underbrace{\sin 4\alpha \cdot \cos 4\alpha}_{\frac{1}{2} \sin 8\alpha}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \sin 8\alpha = \pm \frac{1}{\lambda} \sin \alpha \Rightarrow \sin 8\alpha = \pm \sin \alpha$$

$$(1) \sin 8\alpha = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} 8\alpha = 2k\pi + \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{7} \Rightarrow \max: \frac{6\pi}{7} \\ 8\alpha = 2k\pi + \pi - \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{9} + \frac{\pi}{9} \Rightarrow \max: \frac{7\pi}{9} \end{cases}$$

$$(2) \sin 8\alpha = -\sin \alpha \Rightarrow \sin 8\alpha = \sin(-\alpha)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8\alpha = 2k\pi - \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{9} \Rightarrow \max = \frac{8\pi}{9} \\ 8\alpha = 2k\pi + \pi + \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{7} + \frac{\pi}{7} \Rightarrow \max = \frac{5\pi}{7} \end{cases}$$

\* البته دقت کنید که  $\alpha = \pi$  جواب قابل قبول برای معادله نیست. پس ماکزیمم جواب‌ها  $\frac{8\pi}{9}$  است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۹۷

سه برابر دوره تناوب برابر ۳ است.

$$3T = 3 \Rightarrow T = 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 1 \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2$$

ماکزیمم تابع برابر ۳ است، پس:

$$|a| = 3 \Rightarrow a = \pm 3$$

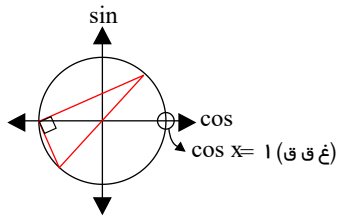
تابع در اطراف  $x = 0$  نزولی است، پس  $a$  و  $b$  مختلف‌العلامت هستند.

$$a = 3, b = -2 \text{ یا } a = -3, b = 2 \Rightarrow a \cdot b = -6$$

با توجه به این که  $\cos x \neq 1$  (ریشه‌ی مخرج)، معادله‌ی مثلثاتی را ساده می‌کنیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۹۸



$$\frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow \sin^2 x - \sin x \cos x = 0 \Rightarrow \sin x (\sin x - \cos x) = 0$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi \\ \text{یا} \\ \sin x \neq 0 \Rightarrow \cos x = \sin x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

همان طور که در دایره‌ی مثلثاتی مشاهده می‌کنید، نقاط پایانی کمان جواب‌های معادله‌ی مفروض، رئوس یک مثلث قائم الزویه هستند زیرا زاویه‌ی محاطی مقابل به قطر دارد.

1 2 3 4 99

$$\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

k	x
0	$\frac{\pi}{6}$
1	$\frac{5\pi}{6}$
2	$\frac{9\pi}{6}$

$\in \{1, 5, 9\}$

می‌دانیم که  $1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$  است. 1 2 3 4 100

$$\Delta \sin^2 x + 2 \cos^2 x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta \sin^2 x + 2(1 + \cos^2 x) = 0 \Rightarrow \Delta \sin^2 x + 2 \cos^2 \frac{3x}{2} = 0$$

جمع دو عبارت نامنفی وقتی صفر است که تک‌تک آن‌ها صفر باشند و ریشه‌ی مشترک، جواب معادله است.

$$\Delta \sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi \rightarrow x = -\pi, 0, \pi$$

$$2 \cos^2 \frac{3x}{2} = 0 \Rightarrow \cos \frac{3x}{2} = 0 \xrightarrow{\cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{3x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$$

$$\rightarrow x = -\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \pi$$

بنابراین ریشه‌های مشترک  $\pi$  و  $-\pi$  هستند. پس معادله دو جواب دارد.

ابتدا کمی عبارت را ساده کنیم. 1 2 3 4 101

$$\frac{\cos(2\alpha - \frac{\pi}{2}) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot(2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha - \cos \alpha}{\cot(2\alpha)}$$

$$\text{دقت کنید که } \cos(2\alpha - \frac{\pi}{2}) = \sin 2\alpha \text{ و } \cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$$

برای حل سؤال مقادیر  $\cos \alpha, \sin \alpha, \sin 2\alpha, \cos 2\alpha$  و  $\cot 2\alpha$  نیاز داریم، که آن‌ها را محاسبه می‌کنیم.

$$1) 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \xrightarrow{\alpha \text{ در ربع سوم}} \cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$2) \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \xrightarrow{\alpha \text{ در ربع سوم}} \sin \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$3) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

$$4) \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}$$

$$5) \cot 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\frac{7}{25}}{\frac{24}{25}} = \frac{7}{24}$$

حال خواسته سوال را به دست می‌آوریم:



معین کرمی

$$\frac{\sin 2\alpha - \cos \alpha}{\cot(2\alpha)} = \frac{\frac{24}{25} - (-\frac{4}{5})}{\frac{1}{24}} = \frac{24 \times 24}{25 \times 1} = \frac{1056}{175}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰۲

قبل از حل سؤال نحوه محاسبه  $\sin 3\alpha$  و اتحاد مثلثاتی آن را بررسی می‌کنیم.

$$\sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cdot \cos \alpha + \cos 2\alpha \cdot \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \sin 3\alpha = 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha \Rightarrow \sin 3\alpha = 2 \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha \Rightarrow \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha$$

حال تابع  $f(x)$  را ساده می‌کنیم.

$$f(\alpha) = 2 \sin \alpha \cos 2\alpha + 2 \sin \alpha = 2 \sin \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha) + 2 \sin \alpha \Rightarrow f(\alpha) = 2 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha + 2 \sin \alpha = 4 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha = 4 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) = 4 \sin \alpha \cos^2 \alpha$$

$$f\left(\frac{41\pi}{9}\right) = 4 \sin\left(\frac{41\pi}{9}\right) \cos^2\left(\frac{41\pi}{9}\right) = 4 \sin\left(\frac{36\pi + 5\pi}{9}\right) \cos^2\left(\frac{36\pi + 5\pi}{9}\right) = 4 \sin\left(4\pi + \frac{5\pi}{9}\right) \cos^2\left(4\pi + \frac{5\pi}{9}\right) = 4 \sin\left(\frac{5\pi}{9}\right) \cos^2\left(\frac{5\pi}{9}\right) = 4 \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{9}\right) \cos^2\left(2\pi - \frac{\pi}{9}\right) = -4 \sin\left(\frac{\pi}{9}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{9}\right) = -4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{4} = -\sqrt{3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰۳

می‌دانیم:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}, \quad 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{8}{15}$$

از طرفی:

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{64}{225} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{225}{289} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{15}{17} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{225}{289}} = \frac{8}{17}$$

حال خواسته سوال را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{\tan \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\frac{8}{17} - \frac{8}{17}}{\frac{8}{17} - \frac{15}{17}} = \frac{\frac{8 \times 17 - 8 \times 15}{17 \times 17}}{\frac{-7}{17}} = \frac{16}{-7} = -\frac{16}{7}$$

دقت کنید اگر  $\frac{\alpha}{2}$  در ربع اول باشد با توجه به مقدار  $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$  نیز ربع اول خواهد بود و اگر  $\frac{\alpha}{2}$  در ربع سوم باشد باز هم  $\alpha$  در ربع اول خواهد بود.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰۴

$$\text{می‌دانیم: } \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

ضابطه تابع  $f$  را در  $\sin^2 3x$  ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$f(x) = 16 \left( \frac{\frac{1}{2} \sin 6x}{\sin 3x} \right)^2$$

دقت کنید:

$$\sin 3x \cos 3x = \frac{1}{2} \sin 6x$$

$$\sin 6x \cos 6x = \frac{1}{2} \sin 12x$$

$$\sin 12x \cos 12x = \frac{1}{2} \sin 24x$$

$$\sin 24x \cos 24x = \frac{1}{2} \sin 48x$$

$$f(x) = 16 \left( \frac{\frac{1}{16} \sin 48x}{\sin 3x} \right)^2$$





$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{36}\right) = 16 \left( \frac{\sin \frac{4\pi}{36}}{16 \sin \frac{3 \times \pi}{36}} \right)^2 = \frac{\sin^2 \frac{4\pi}{36}}{16 \sin^2 \frac{\pi}{12}}$$

از طرفی می‌دانیم  $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$  و  $\sin \frac{4\pi}{36} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  و البته  $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

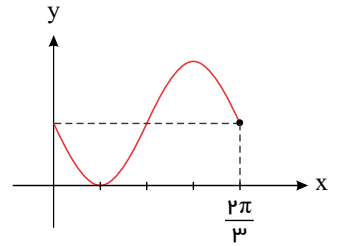
$$f\left(\frac{\pi}{36}\right) = \frac{\frac{3}{4}}{16 \left( \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2} \right)} = \frac{3}{16(2 - \sqrt{3})} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{6 + 3\sqrt{3}}{16}$$

$y = \sin ax \rightarrow T = \frac{2\pi}{|a|}$  می‌دانیم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰۵**

باتوجه به نمودار داریم:

$$T = \frac{2\pi}{3}$$

$$y = 1 - \sin mx \rightarrow T = \frac{2\pi}{|m|} = \frac{2\pi}{3} \rightarrow |m| = 3 \rightarrow m = \pm 3$$



چون نمودار در آغاز رو به پایین حرکت می‌کند و ضریب سینوس منفی است پس باید کمان سینوس مثبت باشد پس  $m > 0$  بوده و  $m = +3$  قابل قبول است.

$$y = 1 - \sin(+3x) = 1 - \sin 3x \xrightarrow{x = \frac{7\pi}{6}} y = 1 - \sin \frac{21\pi}{6} = 1 - \sin \frac{7\pi}{2} \rightarrow y = 1 + 1 = 2$$

$y = \cos ax \rightarrow T = \frac{2\pi}{a}$  می‌دانیم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰۶**

با توجه به شکل، دوره‌ی تناوب تابع  $4\pi$  است.

$$y = \frac{1}{2} + 2 \cos mx \rightarrow T = \frac{2\pi}{m} = 4\pi \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$\text{بازنویسی: } f(x) = \frac{1}{2} + 2 \cos \frac{1}{2}x \xrightarrow{x = \frac{16\pi}{3}} f\left(\frac{16\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2 \cos \frac{8\pi}{3} = \frac{1}{2} + 2 \cos\left(\frac{9\pi - \pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2 \cos\left(3\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

**۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰۷**

از رابطه  $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$  استفاده می‌کنیم.

$$2 \cos 2x = \cot x (2 \sin x + \tan x)$$

$$\Rightarrow 2(2 \cos^2 x - 1) = \frac{\cos x}{\sin x} \sin x + \cot x \cdot \tan x = 2 \cos x + 1$$

$$\Rightarrow 4 \cos^2 x - 2 \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16 + 48}}{8} = \begin{cases} \frac{3}{2} & \text{غ ق} \\ \frac{-1}{2} & \text{ق ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{-1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

**۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰۸**

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(\pi - \alpha)}{|\tan^2(\alpha) - 1|} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{|\tan^2 \alpha - 1|}$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{3} \rightarrow \begin{cases} \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{3} \xrightarrow{\text{ناحیه چهارم}} \sin \alpha = \frac{-\sqrt{5}}{3} \\ \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

توجه کنید:



$$\text{پس : } \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{|\tan^2 \alpha - 1|} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{5}}{3}}{|\frac{5}{4} - 1|} = \frac{\frac{2 - \sqrt{5}}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{4(2 - \sqrt{5})}{3}$$

# پاسخنامه کلیبی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴

۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴
۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴
۴۱	۱	۲	۳	۴
۴۲	۱	۲	۳	۴
۴۳	۱	۲	۳	۴
۴۴	۱	۲	۳	۴
۴۵	۱	۲	۳	۴
۴۶	۱	۲	۳	۴
۴۷	۱	۲	۳	۴
۴۸	۱	۲	۳	۴
۴۹	۱	۲	۳	۴
۵۰	۱	۲	۳	۴
۵۱	۱	۲	۳	۴
۵۲	۱	۲	۳	۴
۵۳	۱	۲	۳	۴
۵۴	۱	۲	۳	۴

۵۵	۱	۲	۳	۴
۵۶	۱	۲	۳	۴
۵۷	۱	۲	۳	۴
۵۸	۱	۲	۳	۴
۵۹	۱	۲	۳	۴
۶۰	۱	۲	۳	۴
۶۱	۱	۲	۳	۴
۶۲	۱	۲	۳	۴
۶۳	۱	۲	۳	۴
۶۴	۱	۲	۳	۴
۶۵	۱	۲	۳	۴
۶۶	۱	۲	۳	۴
۶۷	۱	۲	۳	۴
۶۸	۱	۲	۳	۴
۶۹	۱	۲	۳	۴
۷۰	۱	۲	۳	۴
۷۱	۱	۲	۳	۴
۷۲	۱	۲	۳	۴
۷۳	۱	۲	۳	۴
۷۴	۱	۲	۳	۴
۷۵	۱	۲	۳	۴
۷۶	۱	۲	۳	۴
۷۷	۱	۲	۳	۴
۷۸	۱	۲	۳	۴
۷۹	۱	۲	۳	۴
۸۰	۱	۲	۳	۴
۸۱	۱	۲	۳	۴

۸۲	۱	۲	۳	۴
۸۳	۱	۲	۳	۴
۸۴	۱	۲	۳	۴
۸۵	۱	۲	۳	۴
۸۶	۱	۲	۳	۴
۸۷	۱	۲	۳	۴
۸۸	۱	۲	۳	۴
۸۹	۱	۲	۳	۴
۹۰	۱	۲	۳	۴
۹۱	۱	۲	۳	۴
۹۲	۱	۲	۳	۴
۹۳	۱	۲	۳	۴
۹۴	۱	۲	۳	۴
۹۵	۱	۲	۳	۴
۹۶	۱	۲	۳	۴
۹۷	۱	۲	۳	۴
۹۸	۱	۲	۳	۴
۹۹	۱	۲	۳	۴
۱۰۰	۱	۲	۳	۴
۱۰۱	۱	۲	۳	۴
۱۰۲	۱	۲	۳	۴
۱۰۳	۱	۲	۳	۴
۱۰۴	۱	۲	۳	۴
۱۰۵	۱	۲	۳	۴
۱۰۶	۱	۲	۳	۴
۱۰۷	۱	۲	۳	۴
۱۰۸	۱	۲	۳	۴



معین کریمی

# سوالات سراسری هفته پنجم مکروبیوتی

۱) حاصل  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3-x}}}$  ، کدام است؟

- ۸ ①      ۱۲ ②      ۱۶ ③      ۲۴ ④

۲) اگر  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{ax+b} = \frac{1}{2}$  باشد، آنگاه  $b$  کدام است؟

- ۲ ①      -۱ ②      ۱ ③      ۲ ④

۳) حد عبارت  $\frac{\cos x}{1 - \sin x}$  وقتی  $x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+$  ، کدام است؟

- $+\infty$  ①      ۲ ②      ۱ ③       $-\infty$  ④

۴) اگر  $f(x) = 2x + \sqrt{4x^2 + x}$  باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ، کدام است؟

- ۱ ①       $-\frac{1}{2}$  ②       $-\frac{1}{4}$  ③      صفر ④

۵) در تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{ax^n + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}}$  ، اگر  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$  باشد، آنگاه  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  کدام است؟

- ۶ ①      -۴ ②      ۳ ③      ۵ ④

۶) تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 + x - 2|}{x - 1} & ; x \neq 1 \\ a & ; x = 1 \end{cases}$  به ازای کدام مقدار  $a$  بر  $\mathbb{R}$  پیوسته است؟

- هر مقدار  $a$  ①      -۳ ②      ۳ ③      هیچ مقدار  $a$  ④

۷) اگر  $f(x) = x - \sqrt{4x^2 + x}$  باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  ، کدام است؟

- ۲ ①      -۱ ②      ۲ ③      ۳ ④

۸) حد عبارت  $\frac{x^2 + 10x + 16}{12 + 6\sqrt{x}}$  ، وقتی  $x \rightarrow -8$  ، کدام است؟

- ۲۴ ①      -۱۸ ②      -۱۲ ③      -۶ ④

۹) در مورد تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + |x|}$  ، کدام بیان، درست است؟

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  ①       $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  ②       $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  ③       $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  ④

۱۰) در مورد تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x}$  ، کدام بیان، درست است؟

- $\lim_{x \rightarrow (\frac{2\pi}{3})^+} f(x) = -\infty$  ①       $\lim_{x \rightarrow (\frac{2\pi}{3})^+} f(x) = +\infty$  ②       $\lim_{x \rightarrow (\frac{2\pi}{3})^-} f(x) = -\infty$  ③       $\lim_{x \rightarrow (\frac{2\pi}{3})^-} f(x) = +\infty$  ④





۲۳ به ازای کدام مقدار  $a$ ، تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{x} & ; 1 \leq x \leq 6 \\ a + \cos^2 \frac{\pi x}{36} & ; x > 6 \end{cases}$  بر روی مجموعه اعداد حقیقی بزرگ‌تر از ۱، پیوسته است؟

- ۱  $-\frac{1}{2}$     ۲  $-\frac{1}{4}$     ۳  $\frac{1}{4}$     ۴  $\frac{1}{2}$

۲۴ در تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & ; x < -2 \\ 3x + 4 & ; x > -2 \end{cases}$  مقدار حد چپ در نقطه  $x = -2$ ، عکس مقدار حد راست در این نقطه است.  $a$  کدام است؟

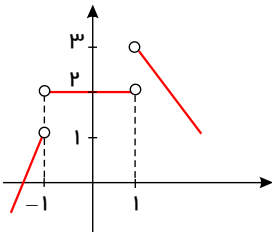
- ۱ ۳    ۲ ۳٫۵    ۳ -۴    ۴ -۴٫۵

۲۵ اگر  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + 9}{1 - x + \sqrt{x + 1}} = 3$  باشد، آنگاه حدّ این کسر وقتی  $x \rightarrow 3$  کدام است؟

- ۱ ۱    ۲ ۲    ۳ ۴    ۴ ۵

۲۶ با توجه به شکل مقابل حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$  کدام است؟

- ۱ ۱    ۲ ۲    ۳ ۴    ۴ ۵



۲۷ به ازای کدام مقدار  $a$ ، تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{a + x^3}{|x + 2|} & ; x \neq -2 \\ a & ; x = -2 \end{cases}$  در نقطه  $x = -2$ ، فقط از چپ پیوسته است؟

- ۱ -۱۲    ۲ -۶    ۳ ۶    ۴ ۱۲

۲۸ تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x - 2} & ; x > 2 \\ 2x + b & ; x \leq 2 \end{cases}$  به ازای کدام مقدار  $b$  همواره پیوسته است؟

- ۱ -۴    ۲ -۲    ۳ ۲    ۴ ۴

۲۹ تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} ax + 2^{x-3} & ; x < 3 \\ a \log_2(1+x) & ; x \geq 3 \end{cases}$  در نقطه‌ای به طول  $x = 3$  پیوسته است،  $f(2)$  کدام است؟

- ۱ -۲    ۲ -۱٫۵    ۳ ۱    ۴ صفر

۳۰ در تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{ax + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2}$  اگر  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{5}{2}$  باشد، آنگاه حد  $f(x)$  وقتی  $x \rightarrow -1$ ، کدام است؟

- ۱  $\frac{2}{3}$     ۲  $\frac{5}{6}$     ۳  $\frac{3}{2}$     ۴  $\frac{5}{4}$

۳۱ حاصل  $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\tan x}{\cot x}$  کدام است؟

- ۱  $0^+$     ۲ -۱    ۳  $+\infty$     ۴  $-\infty$

۳۲ به ازای کدام مجموعه مقادیر  $x$ ، بازه  $(x + 1, 2x - 1)$  یک همسایگی عدد ۳ می‌باشد؟

- ۱  $\emptyset$     ۲  $\{2\}$     ۳  $2 < x < 2٫۵$     ۴  $1٫۵ < x < 2$

۳۳ حد کسر  $\frac{x^{m+3} + nx + m}{mx^{n-2} - mx + n - 1}$  با شرط  $n > 3$  وقتی  $x \rightarrow \infty$  برابر ۲- است  $m + n$  کدام است؟

- ۱ ۳٫۵    ۲ ۴    ۳ ۴٫۵    ۴ ۵



۳۴ حاصل  $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 1}{\cos 2x}$  کدام است؟

- ۱) -۲      ۲)  $\frac{1}{2}$       ۳) ۱      ۴) ۲

۳۵ در تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{ax^n - 6}$ ، اگر  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$  باشد، آنگاه  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  کدام است؟

- ۱)  $-\frac{1}{6}$       ۲)  $-\frac{1}{8}$       ۳)  $\frac{1}{4}$       ۴)  $\frac{1}{3}$

۳۶ اگر تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{ax+3} & ; x < 1 \\ x^2 + ax & ; x \geq 1 \end{cases}$  در نقطه  $x = 1$  پیوسته باشد،  $f(-\frac{3}{4})$  کدام است؟

- ۱) ۰٫۵      ۲) ۱٫۲۵      ۳) ۱٫۵      ۴) ۲٫۵

۳۷ فرض کنید  $f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & ; |x-1| < 1 \\ x^2 + ax + b & ; |x-1| \geq 1 \end{cases}$ ، یک تابع همواره پیوسته باشد. مقدار  $a$ ، کدام است؟

- ۱)  $-\frac{3}{2}$       ۲) -۱      ۳) ۱      ۴)  $\frac{5}{2}$

۳۸ نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{ax+1+\sqrt{4x^2+9}}{3x-2}$  از نقطه  $(2, 1)$  می‌گذرد.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  کدام است؟

- ۱)  $-\frac{1}{3}$       ۲)  $\frac{1}{3}$       ۳)  $\frac{2}{3}$       ۴) ۱

۳۹ حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt{x+6}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}$  کدام است؟

- ۱)  $-\frac{1}{6}$       ۲)  $-\frac{1}{12}$       ۳)  $\frac{1}{12}$       ۴)  $\frac{1}{6}$

۴۰ تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \tan^2 x}{\cos 2x} & ; 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ a \cos 3x & ; \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ ، به ازای کدام مقدار  $a$ ، در نقطه  $x = \frac{\pi}{4}$  پیوسته است؟

- ۱)  $-2\sqrt{2}$       ۲) -۱      ۳)  $\sqrt{2}$       ۴) ۲

۴۱ در تابع با ضابطه  $f(x) = (x+a)[x]$ ، اگر  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$  باشد، عدد حقیقی  $a$  کدام است؟

- ۱) ۱      ۲) ۲      ۳) -۱      ۴) ۰

۴۲ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای  $P(x)$  بر  $x-1$  و  $2x+1$  به ترتیب ۸ و ۵ است. باقی‌مانده تقسیم  $P(x)$  بر  $2x^2 - x - 1$  کدام است؟

- ۱)  $-x+4$       ۲)  $x+3$       ۳)  $2x+6$       ۴)  $2x-3$

۴۳ تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & ; x \geq 1 \\ ax + 5x - a & ; x < 1 \end{cases}$  به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر  $a$ ، در بازه  $[-2, 2]$  پیوسته است؟

- ۱)  $\emptyset$       ۲)  $R$       ۳)  $\{0, 1\}$       ۴)  $\{-2, 2\}$

۴۴ اگر  $f(x) = \begin{cases} x+a & ; x < 1 \\ 1 & ; x \geq 1 \end{cases}$  و  $g(x) = \begin{cases} x+1 & ; x < 1 \\ \frac{a}{x+1} & ; x \geq 1 \end{cases}$ ، به ازای کدام مقدار  $a$ ، تابع  $f+g$  در  $x=1$  پیوسته است؟

- ۱) -۴      ۲) ۴      ۳) -۲      ۴) ۲



تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \begin{cases} a \sin 2x & ; \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{3\pi}{4} \\ \cos(x + \frac{\pi}{4}) & ; \frac{3\pi}{4} \leq x \leq 2\pi \end{cases}$  بر بازه‌ی  $[\frac{\pi}{4}, 2\pi]$  پیوسته است. مقدار  $a$  کدام است؟ (۴۵)

- ۱ (۴)                       $\frac{1}{2}$  (۳)                      ۰ (۲)                      -۱ (۱)

اگر  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - 4|}{ax^2 - x + 2} = -1$ ، آن گاه حد راست این عبارت در نقطه‌ی  $x = -2$  کدام است؟ (۴۶)

- $\frac{4}{3}$  (۴)                       $\frac{2}{3}$  (۳)                       $-\frac{2}{3}$  (۲)                       $-\frac{4}{3}$  (۱)

تعداد نقاط ناپیوستگی تابع  $f(x) = [x] \sin \pi x$ ؛  $|x| \leq 2$  کدام است؟ (۴۷)

- صفر (۴)                      ۱ (۳)                      ۲ (۲)                      ۳ (۱)

اگر  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{ax + 3a}{1 - \sqrt{5x + 16}} = 2$ ، آنگاه  $a$  کدام است؟ (۴۸)

- $a = -5$  (۴)                       $a = 5$  (۳)                       $a = -1$  (۲)                       $a = 1$  (۱)

حاصل  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + \sqrt{2x + 8}}{x + 2}$  برابر کدام است؟ (۴۹)

- $-\frac{5}{2}$  (۴)                       $-\frac{3}{2}$  (۳)                       $\frac{5}{2}$  (۲)                       $\frac{3}{2}$  (۱)

به ازای کدام مقدار  $a$ ، تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} & ; x \neq 0 \\ a & ; x = 0 \end{cases}$  در نقطه‌ی  $x = 0$  پیوسته است؟ (۵۰)

- هیچ مقدار  $a$  (۴)                       $\frac{1}{2}$  (۳)                       $-\frac{1}{2}$  (۲)                       $-\frac{1}{4}$  (۱)

فرض کنید  $f(x) = \begin{cases} 2 & x \geq 1 \\ 1 & x < 1 \end{cases}$  می‌باشد حد تابع  $f(x)$  وقتی  $x \rightarrow 1^-$  کدام است؟ (۵۱)

- $f(3)$  (۴)                       $f(1)$  (۳)                       $f(2)$  (۲)                       $f(0)$  (۱)

در تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{ax^n + 4}$  اگر  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$  باشد آنگاه  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  کدام است؟ (۵۲)

- $\frac{1}{3}$  (۴)                       $\frac{3}{4}$  (۳)                       $\frac{2}{3}$  (۲)                       $\frac{3}{2}$  (۱)

فرض کنید  $n \in \mathbb{N}$  حاصل  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n+1} - 2^{1-2n}}{2^{2n+1} + 3 \times 2^{1-2n}}$  کدام است؟ (۵۳)

- ۱ (۴)                       $-\frac{1}{3}$  (۳)                       $\frac{1}{3}$  (۲)                      ۱ (۱)

به ازای مقادیری از  $a$  و  $b$ ، تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \begin{cases} x[x] & ; |x| < 1 \\ ax + b & ; |x| \geq 1 \end{cases}$  بر روی  $\mathbb{R}$  پیوسته است.  $a$  کدام است؟ (۵۴)

- $\frac{1}{2}$  (۴)                       $-\frac{1}{2}$  (۳)                      -۱ (۲)                       $-\frac{3}{2}$  (۱)

با کدام مجموعه مقادیر  $a$ ، تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+a} & ; x \geq -1 \\ x^2 + ax & ; x < -1 \end{cases}$  در  $x = -1$  پیوسته است؟ (۵۵)

- $\mathbb{R}$  (۴)                       $\emptyset$  (۳)                       $\{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$  (۲)                       $\{1, \sqrt{2}\}$  (۱)





۵۶ در تابع باضابطه ی  $f(x) = \frac{ax^n - 3x + 1}{3x^2 + x}$  اگر  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{2}{3}$  باشد،  $f(-1)$  کدام است؟

- ۱) -۲      ۲)  $\frac{3}{2}$       ۳) ۲      ۴) ۳

۵۷ تابع با ضابطه ی  $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} & ; x > 1 \\ ax - a + 2 & ; x \leq 1 \end{cases}$  به ازای کدام مقدار  $a$  در نقطه‌ای به طول  $x = 1$  پیوسته است؟

- ۱) ۱      ۲) ۲      ۳) هر مقدار  $a$       ۴) هیچ مقدار  $a$

۵۸ به ازای کدام مقدار  $a$ ، تابع با ضابطه ی  $f(x) = \begin{cases} a + \sin^2 x & 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ \sqrt{2} \cos 3x & \frac{\pi}{4} \leq x \leq 2\pi \end{cases}$  روی بازه ی  $[0, 2\pi]$  پیوسته است؟

- ۱)  $-\frac{3}{2}$       ۲)  $-\frac{1}{2}$       ۳)  $\frac{1}{2}$       ۴) هیچ مقدار  $a$

۵۹ حاصل  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\cos 2x}$  کدام است؟

- ۱) -۱      ۲)  $-\frac{1}{2}$       ۳)  $\frac{1}{2}$       ۴) ۱

۶۰ فرض کنید  $n \in \mathbb{N}$  حاصل  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{2n} - 3^{-2n+1}}{2 \times 3^{2n} + 3^{-2n+1}}$  کدام است؟

- ۱)  $+\infty$       ۲)  $\frac{1}{2}$       ۳) ۰      ۴)  $-\frac{1}{2}$

۶۱ مقدار  $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x + \sqrt{x+2}}{x+2}$  کدام است؟

- ۱)  $-\infty$       ۲) ۲      ۳) ۴      ۴)  $0^+$

۶۲ حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 7\sqrt{x} + 5}{2x - \sqrt{3x} + 1}$  کدام است؟

- ۱)  $-1,5$       ۲)  $-1,2$       ۳)  $-0,8$       ۴)  $-0,6$

۶۳ حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{2 - \sqrt{5-x}}$  کدام است؟

- ۱) -۴      ۲) -۲      ۳) ۲      ۴) ۴

۶۴ به ازای یک مقدار  $a$ ، چندجمله‌ای  $P(x) = 2x^4 + ax^3 + 2x^2 - 3x$  بر  $2x - 1$  بخش پذیر است. در این حالت باقی مانده  $P(x)$  بر  $x + 2$  کدام است؟

- ۱) -۱۰      ۲) -۸      ۳) ۴      ۴) ۶

۶۵ تابع با ضابطه ی  $f(x) = \frac{4x^n - 6x^2 + 1}{ax^3 + 7x^2 - 2}$  را در نظر بگیرید. اگر  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$  باشد، آن گاه  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$  کدام است؟

- ۱)  $-\frac{4}{17}$       ۲)  $-\frac{6}{17}$       ۳)  $-\frac{5}{12}$       ۴)  $-\frac{6}{11}$

۶۶ تابع با ضابطه ی  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{2|x - 2|} & ; x \neq 2 \\ 2 & ; x = 2 \end{cases}$  از نظر پیوستگی در  $x = 2$  چگونه است؟

- ۱) از چپ پیوسته      ۲) پیوسته      ۳) از چپ ناپیوسته و از راست ناپیوسته      ۴) از راست پیوسته





۷۸ در تابع  $f(x) = \frac{2x - \sqrt{x^2 + 6x}}{ax - 2}$  اگر  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$  باشد، آنگاه  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  کدام است؟

- ۱  $0$       ۲  $\frac{2}{3}$       ۳  $\frac{3}{4}$       ۴  $\frac{3}{2}$

۷۹ حاصل  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{2x+1}}{2 - \sqrt{x}}$  کدام است؟

- ۱  $\frac{2}{3}$       ۲  $\frac{3}{4}$       ۳  $\frac{4}{3}$       ۴  $\frac{3}{2}$

۸۰ مقدار  $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^-} \frac{10x - 5 + [\frac{3}{x^2}]}{16x - [-\frac{2}{x^2}]}$  کدام است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

- ۱  $-\infty$       ۲ صفر      ۳  $\frac{5}{8}$       ۴  $+\infty$

۸۱ فرض کنید چندجمله‌ای  $p(x)$  بر  $x^2 - 1$  ، بخش‌پذیر باشد. اگر  $Q(x) = p(x-1) + p(1-x)$  . آنگاه باقی‌مانده تقسیم  $Q(x)$  بر  $x-2$  کدام است؟

- ۱  $-1$       ۲ صفر      ۳  $1$       ۴  $2$

۸۲ مقدار  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi-}{6}} [2 \sin x - 1]$  کدام است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

- ۱  $-1$       ۲ صفر      ۳  $1$       ۴ وجود ندارد.

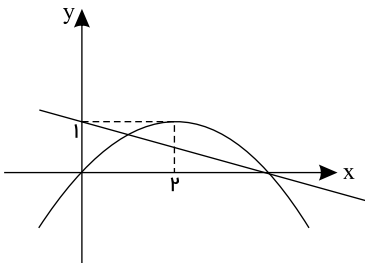
۸۳ حاصل  $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{1 + \cot x}{1 + \tan x}$  کدام است؟

- ۱  $-1$       ۲  $0$       ۳  $1$       ۴  $+\infty$

۸۴ مقدار  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left( \sqrt{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}} \right)$  کدام است؟

- ۱ صفر      ۲  $1$       ۳  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       ۴  $\sqrt{2}$

۸۵ نمودار تابع سهمی  $f$  و خط راست  $g$  در شکل زیر داده شده است. مقدار  $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{f(x) + g(x)}{4 - x}$  ، کدام است؟



- ۱  $-\frac{3}{2}$       ۲  $-\frac{5}{4}$       ۳  $\frac{5}{4}$       ۴  $\frac{3}{2}$

۸۶ مقدار  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1} - x^2}{x}$  ، کدام است؟

- ۱  $\frac{3}{2}$       ۲  $1$       ۳ صفر      ۴  $-1$

۸۷ باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای  $P(x)$  بر  $x-2$  و  $x+3$  به ترتیب  $1$  و  $-4$  است. باقی‌مانده تقسیم  $P(x)$  بر  $x^2 + x - 6$  ، کدام است؟

- ۱  $x-1$       ۲  $x+1$       ۳  $-x+2$       ۴  $2x-1$



۸۸ تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$  را در نظر بگیرید. شیب خط مماس بر منحنی  $f^{-1}(x)$  در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، کدام است؟

۱۲ (۴)

۸ (۳)

-۸ (۲)

-۱۲ (۱)

۸۹ اگر  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[5]{(a^2 x^2 - 1)(a^4 x^4 - 1) \cdots (a^{100} x^{100} - 1)}}{a^{49} x^k - 1} = -1$  آن‌گاه، مقادیر  $k$  و  $a$  کدام‌اند؟

 $k = 49, a = 1$  (۴) $k = 49, a = -1$  (۳) $k = 51, a = 1$  (۲) $k = 51, a = -1$  (۱)

۹۰ مینیمم مطلق تابع  $f(x) = x|3 - x^2|$  در بازه  $[-1, 5, \sqrt{3}]$ ، کدام است؟

 $-\frac{9}{8}$  (۴) $-\sqrt{3}$  (۳)

-۲ (۲)

 $-\frac{9}{4}$  (۱)

۹۱ فرض کنید  $f(x) = x(1 - x^2)$  و  $g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ . تعداد نقاط ناپیوستگی تابع  $(f \circ f) \circ g$ ، کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)



## پاسخنامه تشریحی

① ① ② ③ ④

روش اول: مخرج کسر را گویا می کنیم

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3-x}}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x+3)(2 + \sqrt{2 + \sqrt{3-x}})}{(4-2 - \sqrt{3-x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(1)(4)(2 + \sqrt{3-x})}{(2 - \sqrt{3-x})(2 + \sqrt{3-x})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(1)(4)(4)}{(4-3+x)} = 16$$

روش دوم: با استفاده از هوییتال

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3-x}}} \stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x+5}{\frac{-1}{2\sqrt{3-x}}} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{16}} = 16$$

روش اول: ① ② ③ ④ ⑤

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{ax+b} \times \frac{x + \sqrt{3x-2}}{x + \sqrt{3x-2}} = \frac{x^2 - 3x + 2}{(ax+b)(x + \sqrt{3x-2})} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-1)}{a(x + \frac{b}{a})(x + \sqrt{3x-2})} = \frac{1}{2}$$

با توجه به موجود بودن حد و اینکه عددی مخالف صفر است، نتیجه می گیریم که عدد ۲ ریشهٔ مخرج نیز می باشد.

$$x - 2 = x + \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{a} = -2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)}{a(x + \sqrt{3x-2})} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{a(4)} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow b = -1$$

روش دوم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{ax+b} = \frac{0}{0} \quad \text{چون جواب حد، برابر عدد شده است پس این کسر حتماً} \rightarrow 2a + b = 0 \rightarrow b = -2a$$

$\frac{0}{0}$  بوده که پس از رفع ابهام جوابش  $\frac{1}{2}$  شده است

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{ax+b} \stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \frac{1(3)}{2\sqrt{3x-2}}}{a} = \frac{1 - \frac{3}{4}}{a} = \frac{1}{4a} = \frac{1}{2} \rightarrow a = \frac{1}{2} \xrightarrow{2a+b=0} 1 + b = 0 \rightarrow b = -1$$

① ② ③ ④ ⑤

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x}{(1 - \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x(1 + \sin x)}{1 - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

① ② ③ ④ ⑤ حد داده شده دارای ابهام  $+\infty - \infty$  است که از کتاب حذف شده است و متأسفانه طراحان بدون توجه به کتاب درسی این سؤال را طرح کرده اند. برای رفع

ابهام، عبارت را در مزدوج ضرب و تقسیم کرده و پس از استفاده از اتحاد مزدوج از صورت و مخرج جملات با توان بیشتر را انتخاب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{4x^2 + x}) \times \frac{2x - \sqrt{4x^2 + x}}{2x - \sqrt{4x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 4x^2 - x}{2x - \sqrt{4x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{2x - 2|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{4x} = -\frac{1}{4}$$

① ② ③ ④ ⑤

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n + 15}{2x - \sqrt{4x^2 + 15x}} \stackrel{\text{پرتوان}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n}{2x - \sqrt{4x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n}{2x - 2|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n}{5x}$$

چون جواب حد، عدد شده است پس بزرگترین توان  $x$  صورت و مخرج با هم برابرند یعنی  $n = 1$ . پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax}{5x} = \frac{a}{5} = -1 \rightarrow a = -5$$



$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5x + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}} \times \frac{3x + \sqrt{4x^2 + 15x}}{3x + \sqrt{4x^2 + 15x}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(-5x + 15)(3x + \sqrt{4x^2 + 15x})}{\underbrace{9x^2 - 4x^2 - 15x}_{5x^2 - 15x}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5(x-3)(3x + \sqrt{4x^2 + 15x})}{5x(x-3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(3x + \sqrt{4x^2 + 15x})}{x} = \frac{-(9+9)}{3} = -6$$

البته حد را می‌توان از قاعده هوییتال نیز محاسبه کرد.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5x + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5}{3 - \frac{1(8x+15)}{2\sqrt{4x^2+15x}}} = \frac{-5}{3 - \frac{39}{18}} = \frac{-5}{\frac{15}{18}} = -6$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶

کافی است حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در  $x = 1$  به دست آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\overbrace{(x+2)(x-1)}^+}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\overbrace{(x+2)(x-1)}^-}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x+2)(x-1)}{(x-1)} = -3$$

این تابع در  $x = 1$  پیوسته نمی‌باشد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۷

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2 + x}}{x} \stackrel{\text{توان بیشتر}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \overbrace{2|x|}^-}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

روش اول: ۱ ۲ ۳ ۴ ۸

با ابهام  $\frac{0}{0}$  مواجه هستیم که برای رفع ابهام از اتحاد جاق‌ولافر کمک می‌گیریم  $((a+b)(a^r + b^r - ab) = a^r + b^r)$

$$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{x^r + 10x + 16}{6(2 + \sqrt[r]{x})} \times \frac{4 + \sqrt[r]{x^r} - 2\sqrt[r]{x}}{4 + \sqrt[r]{x^r} - 2\sqrt[r]{x}} = \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(x+8)(x+2)(4 + \sqrt[r]{x^r} - 2\sqrt[r]{x})}{6(8+x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(x+2)(4 + \sqrt[r]{x^r} - 2\sqrt[r]{x})}{6} = \frac{-6(12)}{6} = -12$$

روش دوم:

از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{x^r + 10x + 16}{12 + 6\sqrt[r]{x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow -8} \frac{rx + 10}{6(\frac{1}{\sqrt[r]{x^r}})} = \frac{-6}{6(\frac{1}{12})} = -12$$

گزینه چهارم صحیح است زیرا: ۱ ۲ ۳ ۴ ۹

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^r - 1}{x + \underbrace{|x|}_+} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^r - 1}{x + x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^r - 1}{2x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

توجه کنید تابع در همسایگی چپ صفر، تعریف نمی‌شود زیرا مخرج به صورت  $x - x$  یعنی صفر مطلق می‌شود.

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰

$$\text{درست: } \lim_{x \rightarrow (\frac{2\pi}{3})^+} \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} = -\infty$$

گزینه اول:



گزینه سوم : نادرست :  $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^-} \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + 2(\frac{-1}{2})^+} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^+} = +\infty$

گزینه چهارم : نادرست  $\rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^+} \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} = \frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{1 + 2(\frac{-1}{2})^+} = \frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^-} \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} = \frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{1 + 2(\frac{-1}{2})^-} = \frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{0^-} = +\infty \end{cases}$$

توجه کنید:

$$\sin \frac{2\pi}{3} = \sin(\pi - \frac{\pi}{3}) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{2\pi}{3} = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} \cos(\frac{2\pi}{3})^+ = (-\frac{1}{2})^- \\ \cos(\frac{2\pi}{3})^- = (-\frac{1}{2})^+ \end{cases}$$

$$\sin \frac{4\pi}{3} = \sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{4\pi}{3} = \cos(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} \cos(\frac{4\pi}{3})^+ = (-\frac{1}{2})^+ \\ \cos(\frac{4\pi}{3})^- = (-\frac{1}{2})^- \end{cases}$$

روش اول: 1 2 3 4 11

با ابهام  $\frac{0}{0}$  مواجه هستیم که برای رفع ابهام از اتحاد چاق ولاغر کمک می‌گیریم  $((a-b)(a^r + b^r + ab) = a^r - b^r)$  و مخرج را بر عامل ابهام یعنی  $x - 2$  تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{3x+2}}{5x^2 - 18x + 16} &\times \frac{2 + \sqrt{3x+2}}{2 + \sqrt{3x+2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\overbrace{4 - (3x+2)}^{-3x+6}}{(x-2)(5x-8)(2 + \sqrt{3x+2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3(x-2)}{(x-2)(5x-8)(2 + \sqrt{3x+2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3}{(5x-8)(2 + \sqrt{3x+2})} \\ &= \frac{-3}{(2)(4+4+4)} = \frac{-3}{24} = \frac{-1}{8} \end{aligned}$$

روش دوم:

از قاعده هوییتال کمک می‌گیریم.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{3x+2}}{5x^2 - 18x + 16} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{-3}{2\sqrt{3x+2}}}{10x - 18} = \frac{\frac{-1}{4}}{2} = \frac{-1}{8}$$

1 2 3 4 12

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin^2 \pi x}{[x] + \cos \pi x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \cos^2 \pi x}{1 + \cos \pi x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1 - \cos \pi x)(1 + \cos \pi x)}{1 + \cos \pi x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (1 - \cos \pi x) = 1 - \cos \pi = 1 - (-1) = 2$$



$$f(x) = \begin{cases} x-1 & x > 1 \text{ یا } x < -1 \\ 2x & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

حد راست و حد چپ و مقدار تابع را باید در  $x = 1$  و  $x = -1$  بدست آوریم.

$$x = 1 : \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 1-1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2(1) = 2 \\ f(1) = 2(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{تابع در } x = 1 \text{ ناپیوسته است.}$$

$$x = -1 : \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} 2x = 2(-1) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (x-1) = -1-1 = -2 \\ f(-1) = 2(-1) = -2 \end{cases} \Rightarrow \text{تابع در } x = -1 \text{ پیوسته است.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(3-x)\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(3-|x|)\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x-3|}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-(x-3)}{x-3} = -1$$

۱۵) ۱ ۲ ۳ ۴ روش اول: تابع به فرم  $y = [f(x)]$  در نقاطی که داخل جزء صحیح مقداری صحیح شود و به شرط آنکه این نقطه طول  $Min$  نسبی پیوسته تابع  $f$  نباشد ناپیوسته است.

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2} \rightarrow 0 \leq \pi x \leq \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 \leq \sin^2 \pi x \leq 1 \rightarrow 0 \leq 4 \sin^2 \pi x \leq 4$$

$$4 \sin^2 \pi x = 0 \rightarrow \sin \pi x = 0 \rightarrow \pi x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$4 \sin^2 \pi x = 1 \rightarrow \sin^2 \pi x = \frac{1}{4} = \sin^2 \frac{\pi}{6} \rightarrow \pi x = \frac{\pi}{6} \rightarrow x = \frac{1}{6}$$

$$4 \sin^2 \pi x = 2 \rightarrow \sin^2 \pi x = \frac{1}{2} = \sin^2 \frac{\pi}{4} \rightarrow \pi x = \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$4 \sin^2 \pi x = 3 \rightarrow \sin^2 \pi x = \frac{3}{4} = \sin^2 \frac{\pi}{3} \rightarrow \pi x = \frac{\pi}{3} \rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$4 \sin^2 \pi x = 4 \rightarrow \sin^2 \pi x = 1 = \sin^2 \frac{\pi}{2} \rightarrow \pi x = \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

ابتدای بازه‌ی بسته پیوستگی راست و انتهای بازه‌ی بسته پیوستگی چپ اگر برقرار باشد نقطه، نقطه‌ی ناپیوستگی نمی‌باشد. تابع در  $x = 0$  پیوستگی راست دارد پس  $x = 0$  نقطه‌ی ناپیوستگی نمی‌باشد و تابع در  $x = \frac{1}{2}$  پیوستگی چپ ندارد پس نقطه‌ی ناپیوستگی محسوب می‌شود بنابراین مجموعه نقاط ناپیوستگی تابع به صورت  $\left\{ \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right\}$  است.

هرگاه  $x$  به سمت عددی میل کند که به موجب آن جواب حد یک نوع بی‌نهایت شود (مثلاً فقط  $-\infty$ ) آن عدد ریشه مضاعف مخرج است. یعنی  $x = 2$  ریشه مضاعف مخرج است. بنابراین:

$$x^2 + ax + b = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow a = -4, b = 4$$

در نتیجه داریم:

$$a + b = -4 + 4 = 0$$

روش اول: با ابهام  $\frac{0}{0}$  مواجه هستیم، برای رفع ابهام صورت را بر  $x-4$  تقسیم می‌کنیم و عبارت را در مزدوج مخرج، ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 10x - 8}{\sqrt{3-\sqrt{x}}-1} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 10x - 8}{\sqrt{3-\sqrt{x}}-1} \times \frac{\sqrt{3-\sqrt{x}}+1}{\sqrt{3-\sqrt{x}}+1} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(3x+2)(\sqrt{3-\sqrt{x}}+1)}{3-\sqrt{x}-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(3x+2)(\sqrt{3-\sqrt{x}}+1)}{-(\sqrt{x}-2)} = -(4)(14)(2) = -112$$

روش دوم:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 10x - 8}{\sqrt{3-\sqrt{x}}-1} \stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{6x-10}{\frac{-1}{2\sqrt{x}}} = \frac{14}{\frac{-1}{2}} = \frac{14}{-\frac{1}{2}} = -112$$





۱۸) کافی است شرط پیوستگی را در  $x = \frac{\pi}{2}$  بررسی کنید (تساوی حد راست و چپ و مقدار تابع در  $x = \frac{\pi}{2}$ )

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} b \cos 2x = b \cos \pi = -b \\ \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} (a + \sin 2x) = a + \sin \pi = a \\ f(\frac{\pi}{2}) = 2 \end{cases}$$

پس:  $-b = 2 \rightarrow b = -2$ ,  $a - 1 = 2 \rightarrow a = 3 \rightarrow a - b = 5$

۱۹) شرط اینکه تابع  $f$  در  $x = a$  پیوسته باشد آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در  $x = a$  موجود و متناهی و باهم برابر باشند.

راه حل اول:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}} \times \frac{1 + \sqrt{1-x}}{1 + \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \sqrt{1-x})}{1 - (1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \sqrt{1-x})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \sqrt{1-x} = 2$$

به علاوه  $f(0) = a = 2$  در نتیجه  $a = 2$

راه حل دوم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1(-1)}{2\sqrt{1-x}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$f(0) = a$

پس  $a = 2$  است.

۲۰) ۱ ۲ ۳ ۴

روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}} \times \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}} \times \frac{\sqrt{2+3x} + \sqrt{2-x}}{\sqrt{2+3x} + \sqrt{2-x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(2+3x-2+x)(\sqrt{2})}{(\sqrt{1-\cos^2 x})(2\sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4x}{2|\sin x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{-\sin x} = -2$$

روش دوم: می‌دانیم که  $\lim_{u \rightarrow 0} (1 - \cos u) \sim \frac{u^2}{2}$  است.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{\frac{x^2}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{\frac{1}{\sqrt{2}}|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}x} = \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1(3)}{2\sqrt{2+3x}} - \frac{1(-1)}{2\sqrt{2-x}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{4}{2\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = -2$$

۲۱) چون هر دو ضابطه پیوسته هستند، برای آنکه تابع دو ضابطه‌ای  $f$  روی  $R$  (مجموعه‌ای اعداد حقیقی) پیوسته باشد، کافی است شرایط پیوستگی تابع را تنها در نقطه

ی مرزی آن، یعنی  $x = 2$  برقرار نماییم.

$$\begin{cases} \text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + ax - 5) = 4 + 2a - 5 = 2a - 1 \\ \text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax - 1) = 2a - 1 \end{cases}$$

چون به ازای هر مقدار  $a$ ، حد راست و حد چپ و مقدار تابع در  $x = 2$  با هم برابر هستند، پس نتیجه می‌گیریم که به ازای هر مقدار حقیقی  $a$ ، تابع  $f$  روی مجموعه‌ای اعداد حقیقی پیوسته است.

۲۲) ۱ ۲ ۳ ۴

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{\cos x})}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{\cos x})}{(1 - \sqrt{\cos x})(1 + \sqrt{\cos x})(1 + \cos x)} = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$$

۲۳) چون تابع، بر روی مجموعه اعداد حقیقی بزرگ‌تر از یک پیوسته است پس حتماً در  $x = 6$  نیز باید پیوسته باشد، یعنی حد راست و حد چپ و مقدار تابع در

$x = 6$  باید با هم برابر باشند.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 6^+} (a + \cos^2 \frac{\pi x}{36}) = a + \cos^2 \frac{\pi}{6} = a + \frac{3}{4} \\ \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 6^-} \sin \frac{\pi}{x} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ f(6) &= \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{-1}{4}$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۲۴

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{1}{f(x)} \rightarrow 4 + a = \frac{1}{-6 + 4} \rightarrow 4 + a = \frac{-1}{2}$$

$$\rightarrow 8 + 2a = -1 \rightarrow 2a = -9 \rightarrow a = -\frac{9}{2} = -4,5$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۵

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + 9}{1 - x + \sqrt{x+1}} \stackrel{\text{پرتوان}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{-x} = -a = 3 \Rightarrow a = -3$$

$$\text{پس: } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3x + 9}{1 - x + \sqrt{x+1}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3}{-1 + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}} = \frac{-3}{-1 + \frac{1}{4}} = \frac{-3}{-\frac{3}{4}} = 4$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۶

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 3 - 1 = 2$$

کافی است حد چپ تابع در  $x = -2$  و مقدار تابع در  $x = -2$  با هم برابر باشند.

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۷

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{\lambda + x^r}{|x + 2|} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{(x + 2)(x^r - 2x + 4)}{-(x + 2)} = -12$$

در ضمن  $f(-2) = a$  پس  $a = -12$  است.

می‌دانیم اگر  $k$  یکی از ریشه‌های تابع  $f(x)$  باشد آن‌گاه  $f(x)$  بر  $x - k$  بخش پذیر است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۸

کافی است شرط پیوستگی (تساوی حد راست و حد چپ و مقدار تابع) را در  $x = 2$  اعمال کنیم.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^r - 3x^r + 4}{x - 2} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x^r - x - 2)}{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^r - x - 2) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x + b) = 4 + b \\ f(2) &= 4 + b \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 = 4 + b \Rightarrow b = -4$$

شرط پیوستگی تابع  $f$  در  $x = a$  آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در  $x = a$  موجود و متناهی با هم برابر باشند.

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۹

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} (a \log_p^{1+x}) = a \log_p^e = a \log_p^r = 2a \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} (ax + 2^{x-3}) = 3a + 1 \\ f(3) &= a \log_p^e = a \log_p^r = 2 \end{aligned} \right\} \rightarrow 3a + 1 = 2a \rightarrow a = -1$$

$$\text{پس: } f(2) \stackrel{\text{ضابطه‌ی بالا}}{=} 2a + 2^{-1} = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} = -1,5$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۰

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + \sqrt{4x^r + 5}}{2x + 2} \stackrel{\text{پرتوان}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + \sqrt{4x^r}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + 2|x|}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + 2x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a+2)x}{2x} = \frac{a+2}{2} = \frac{5}{2} \rightarrow a = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x + \sqrt{4x^r + 5}}{2x + 2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3 + \frac{1}{2\sqrt{4x^r + 5}}}{2} = \frac{3 - \frac{1}{6}}{2} = \frac{\frac{10}{6}}{2} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۱

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\tan x}{\cot x} = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\tan x}{\frac{1}{\tan x}} = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \tan^2 x = (-\infty)^2 = +\infty$$

در ناحیه‌ی دوم است و در این ناحیه تانژانت، منفی است.

در صورتی بازه برای یک عدد همسایگی محسوب می‌شود که آن عدد درون بازه باشد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۲

پس:

$$x + 1 < 3 < 2x - 1 \Rightarrow \begin{cases} x + 1 < 3 \rightarrow x < 2 \\ 2x - 1 > 3 \rightarrow x > 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \emptyset$$

در ده‌های کسری وقتی  $x$  به سمت بی‌نهایت میل کند و جواب عدد شود باید بزرگ‌ترین توان  $x$  صورت و مخرج باید با هم برابر باشند و دقت کنید چون

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۳

$n > 3$  است در نتیجه  $n - 2 > 1$  و جمله‌ی پرتوان مخرج حتماً  $mx^{n-2}$  است.

$$m + 3 = n - 2 \Rightarrow m - n = -5$$



مخرج پرتوان صورت و مخرج  $\rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{m+n}}{mx^{n-2}} = \frac{1}{m} = -2 \Rightarrow m = \frac{-1}{2}, n = \frac{9}{2} \Rightarrow m+n = 4$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۴

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 1}{\cos 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x (\cos^2 x - \sin^2 x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{-1}{\cos^2 x} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$$

توجه کنید  $\tan \frac{3\pi}{4} = -1$  می باشد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۵

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{ax^n - 6} \stackrel{\text{پرتوان}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2}}{ax^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2}}{ax^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{ax^n}$$

چون جواب حد، عدد شده است پس بزرگترین توان  $x$  صورت و مخرج با هم برابرند یعنی  $n = 1$  پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{ax} = \frac{3}{a} = -\frac{1}{2} \rightarrow a = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{-6x - 6} = \frac{0}{0} \stackrel{HOP}{\rightarrow} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 + \frac{1(2x-3)}{2\sqrt{x^2-3x}}}{-6} = \frac{2 - \frac{5}{4}}{-6} = \frac{-1}{8}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۶

شرط اینکه تابع  $f$  در  $x = a$  پیوسته باشد آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در  $x = a$  موجود و متناهی و باهم برابر باشند.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + ax) = 1 + a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{ax + 3} = \sqrt{a + 3} \rightarrow \sqrt{a + 3} = 1 + a \xrightarrow{\text{توان ۲}} a + 3 = a^2 + a + 2a$$

$$a^2 + a - 2 = 0 \rightarrow (a + 2)(a - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = 1 \end{cases} \text{ غلطی}$$

$$\text{پس: } f\left(\frac{-3}{4}\right) = \sqrt{-\frac{3}{4}a + 3} = \sqrt{-\frac{3}{4} + 3} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$\text{می دانیم که } k > 0 \text{ و } |f(x)| \leq k \xrightarrow{k > 0} -k \leq f(x) \leq k \text{ یا } |f(x)| \geq k \xrightarrow{k > 0} \begin{cases} f(x) \geq k \\ f(x) \leq -k \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & -1 < x-1 < 1 \\ x^2 + ax + b & x-1 \geq 1 \text{ یا } x-1 \leq -1 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & 0 < x < 2 \\ x^2 + ax + b & x \geq 2 \text{ یا } x \leq 0 \end{cases}$$

چون تابع همواره پیوسته است، پس حتماً در  $x = 2$  و  $x = 0$  نیز پیوسته است.

$$x = 0 \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1)[x] = -1[0^+] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + ax + b) = b \rightarrow b = 0 \\ f(0) = b \end{cases}$$

$$x = 2 \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + ax + b) = 4 + 2a \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x-1)[x] = 1[2^-] = 1 \rightarrow 4 + 2a = 1 \rightarrow a = \frac{-3}{2} \\ f(2) = 4 + 2a \end{cases}$$

چون نمودار تابع  $f$  از نقطه  $(2, 1)$  می گذرد، مختصات آن در ضابطه‌ی تابع  $f$  صدق می کند، پس داریم:

$$f(2) = 1 \Rightarrow \frac{2a + 1 + \sqrt{25}}{3(2) - 2} = 1 \Rightarrow \frac{2a + 6}{4} = 1 \Rightarrow 2a + 6 = 4 \Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow a = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 1 + \sqrt{4x^2 + 9}}{3x - 2} \stackrel{\text{پرتوان}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + \sqrt{4x^2}}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 2|x|}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۸



۱ ۲ ۳ ۴ ۳۹

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt{x+6}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt{x+6}}{\sqrt{(x-2)^2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt{x+6}}{\underbrace{|x-2|}_{+}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt{x+6}}{x-2} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt{x+6}}{x-2} \times \frac{(4 + 2\sqrt{x+6} + \sqrt{(x+6)^2})}{(4 + 2\sqrt{x+6} + \sqrt{(x+6)^2})} \\ &\rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\cancel{(2-\sqrt{x+6})}^{-(x-2)}}{(x-2)(12)} = -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

باید حد راست و حد چپ و مقدار تابع در  $x = \frac{\pi}{4}$  با هم برابر باشند. ۱ ۲ ۳ ۴ ۴۰

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} a \cos 2x = a \cos \frac{2\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} a$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} \frac{1 - \tan^2 x}{\cos 2x} = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x (\cos^2 x - \sin^2 x)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$f(\frac{\pi}{4}) = a \cos \frac{2\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} a$$

$$\text{پس: } -\frac{\sqrt{2}}{2} a = 2 \Rightarrow -a\sqrt{2} = 4 \Rightarrow a = -\frac{4}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = -2\sqrt{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۱

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= 3 \Rightarrow (2+a)[2^+] - (2+a)[2^-] = 3 \\ \Rightarrow (2+a)(2) - (2+a)(1) &= 3 \Rightarrow 4 + 2a - 2 - a = 3 \Rightarrow a = 1 \end{aligned}$$

باقی مانده تقسیم  $P(x)$  بر  $x-1$  برابر ۸ است، پس  $P(1) = 8$  و باقی مانده تقسیم بر  $2x+1$  برابر ۵ است پس  $P(-\frac{1}{2}) = 5$ . باقی مانده تقسیم  $P(x)$  بر  $2x^2 - x - 1$  یک چندجمله‌ای درجه اول به صورت  $mx+n$  است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۴۲

$$P(x) = (2x^2 - x - 1)Q(x) + mx + n \Rightarrow \begin{cases} P(1) = m + n = 8 \\ P(-\frac{1}{2}) = -\frac{m}{2} + n = 5 \end{cases} \Rightarrow m = 2, n = 6$$

بنابراین باقی مانده این تقسیم  $2x+6$  است.

کافی است شرط پیوستگی یعنی تساوی حدود راست و چپ و مقدار تابع با هم را در  $x=1$  بررسی کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۴۳

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x^2 + 4) = -1 + 4 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax + 5x - a) = a + 5 - a = 5 \\ f(1) = -1 + 4 = 3 \end{cases}$$

تابع  $f$  در  $x=1$  پیوسته نمی‌باشد. بنابراین به ازای هیچ مقداری برای  $a$  تابع  $f$  در بازه  $[-2, 2]$  پیوسته نمی‌باشد.

ابتدا  $f(x) + g(x)$  را تشکیل می‌دهیم و سپس شرط پیوستگی (یعنی تساوی حد راست و حد چپ و مقدار تابع) را در  $x=1$  اعمال می‌کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۴۴

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} 2x + a + 1 & x < 1 \\ \frac{a}{x+1} + 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{حد راست: } \lim_{x \rightarrow 1^+} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{a}{x+1} + 1\right) = \frac{a}{2} + 1$$

$$\text{حد چپ: } \lim_{x \rightarrow 1^-} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + a + 1) = 2 + a + 1 = a + 3$$

$$\text{مقدار تابع: } (f+g)(1) = \frac{a}{2} + 1$$

$$\text{پس: } \frac{a}{2} + 1 = a + 3 \rightarrow a + 2 = 2a + 6 \rightarrow a = -4$$

برای پیوستگی  $f$  در بازه  $[\frac{\pi}{4}, 2\pi]$  تنها کافی است شرایط پیوستگی را در نقطه‌ی مرزی  $x = \frac{3\pi}{4}$  اعمال کنیم. (تساوی حد راست و حد چپ و مقدار تابع) ۱ ۲ ۳ ۴ ۴۵



معین کرمی

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{4})^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{4})^+} \cos(x + \frac{\pi}{4}) = \cos \pi = -1 \\ \lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{4})^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{4})^-} a \sin 2x = a \sin \frac{3\pi}{2} = -a \\ f(\frac{3\pi}{4}) &= \cos(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) = \cos \pi = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -a = -1 \Rightarrow a = 1$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۶

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - 4|}{ax^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4}{ax^2 - x + 2} \stackrel{\text{پرتوان}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{ax^2} = \frac{1}{a} = -1 \Rightarrow a = -1$$

وقتی  $x \rightarrow (-2)^+$ ،  $x^2 - 4 < 0$  و لذا  $x^2 - 4 = 4 - x^2$  می شود. بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{|x^2 - 4|}{ax^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{4 - x^2}{-x^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{-(x-2)(x+2)}{-(x+2)(x-1)} = \frac{4}{3}$$

دقت کنید  $(-2)^+$  را حدوداً  $-1.99$  در نظر می گیریم.

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۷

$$f(x) = [x] \sin \pi x, \quad -2 \leq x \leq 2$$

اعداد  $-1, 0, 1$  داخل جزء صحیح را صحیح کرده و باعث ناپیوستگی آن می شوند ولی چون این سه عدد  $\sin \pi x$  را صفر می کنند (ضریب صفرشونده) نقاط ناپیوستگی محسوب نمی شوند و  $x = 2$  و  $x = -2$  چون ابتدا و انتهای بازه بسته هستند نقاط ناپیوستگی محسوب می شوند پس این تابع ۲ نقطه ناپیوستگی دارد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۸

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{ax + 3a}{1 - \sqrt{5x + 16}} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{a(x+3)(1 + \sqrt{5x+16})}{(1 - \sqrt{5x+16})(1 + \sqrt{5x+16})}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{a(x+3)(2)}{-5(x+3)} = \frac{2a}{-5} = 2 \Rightarrow 2a = -10 \Rightarrow a = -5$$

روش اول: عبارت را در مزدوج صورت، ضرب و تقسیم می کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۴۹

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + \sqrt{2x+8}}{x+2} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + \sqrt{2x+8})(x - \sqrt{2x+8})}{(x+2)(x - \sqrt{2x+8})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x - 8}{(x+2)(x - \sqrt{2x+8})} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(x - \sqrt{2x+8})} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

روش دوم:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + \sqrt{2x+8}}{x+2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1 + \frac{2}{2\sqrt{2x+8}}}{1} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{1} = \frac{3}{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۰

شرط پیوستگی یک تابع در نقطه ای به طول  $x = a$  آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در  $x = a$  با هم برابر باشند.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x}(\sqrt{\cos x} - 1)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x}(\sqrt{\cos x} - 1)}{(1 - \sqrt{\cos x})(1 + \sqrt{\cos x})(1 + \cos x)} = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$$

بنابراین  $f(0) = a = -\frac{1}{4}$  است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۱

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$

تنها گزینه ای که جواب آن عدد یک می شود گزینه ی اول است زیرا برای محاسبه ی  $f(0)$  باید سراغ ضابطه ی پایین برویم که جواب یک می شود.



۱ ۲ ۳ ۴ ۵۲

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{ax^n + 4} \stackrel{\text{پرتوان}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\sqrt{x^2}}{ax^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-|x|}{ax^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{ax^n} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ a = -2 \end{cases}$$

$$\text{پس } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{-2x + 4} = \frac{0}{0} \stackrel{HOP}{\rightarrow} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x}{2\sqrt{x^2 + 5}} = \frac{-4}{6} = \frac{1}{3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۳ می‌دانیم که  $0 = \infty^{-1}$  (عدد بزرگتر از یک) است.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n+1} - 2^{1-2n}}{2^{2n+1} + 3 \times 2^{1-2n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n+1} - 0}{2^{2n+1} + 0} = 1$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۴ شرط پیوسته بودن تابع  $f$  در  $x = a$  آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در  $x = a$  موجود و متناهی و با هم برابر باشند.

$$f(x) = \begin{cases} x[x] & -1 < x < 1 \\ ax + b & x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1 \end{cases}$$

چون تابع بر روی  $\mathbb{R}$  پیوسته است پس حتما در  $x = 1$  و  $x = -1$  نیز پیوسته است.

$$x = 1 \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + b) = a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x[x] = 1 \times 0 = 0 \rightarrow a + b = 0 \quad (I) \\ f(1) = a + b \end{cases}$$

$$x = -1 \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} x[x] = -1[(-1)^+] = 1 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (ax + b) = -a + b \rightarrow -a + b = 1 \quad (II) \\ f(-1) = -a + b \end{cases}$$

از  $I$  و  $II$  نتیجه می‌شود که  $b = \frac{1}{2}$  و  $a = -\frac{1}{2}$  است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۵

برای این که تابع  $f$  در نقطه  $x = -1$  مرزی  $x = -1$  پیوسته باشد، باید حد راست، حد چپ و مقدار تابع در این نقطه برابر باشند.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{x+a} = \frac{1}{-1+a} = \frac{-1}{1-a} \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (x^r + ax) = (-1)^r + a(-1) = 1 - a \\ f(-1) &= \frac{1}{-1+a} = \frac{-1}{1-a} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{-1}{1-a} = 1 - a \Rightarrow (1-a)^r = -1 \Rightarrow \text{امکان ندارد}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۶

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{2}{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n - 3x + 1}{3x^r + x} \stackrel{\text{پرتوان}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n}{3x^r} \stackrel{n=r}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^r}{3x^r} = \frac{a}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow a = 2$$

حال با معلوم بودن مقادیر  $a$  و  $n$  مقدار  $f(-1)$  را به دست می‌آوریم. داریم:

$$\xrightarrow{a=2} \xrightarrow{n=2} f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x} \Rightarrow f(-1) = \frac{2(-1)^2 - 3(-1) + 1}{3(-1)^2 + (-1)} = \frac{2 + 3 + 1}{3 - 1} = \frac{6}{2} = 3$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۷ شرط پیوسته بودن تابع در نقطه‌ای به طول  $x = a$  آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در  $x = a$  موجود و متناهی و باهم برابر باشند.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{x(\sqrt{x}-1)} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax - a + 2) = a - a + 2 = 2$$

$$f(1) = a - a + 2 = 2$$

بنابراین به ازای هر مقدار  $a$ ، تابع در  $x = 1$  پیوسته است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۸ برای پیوستگی تابع  $f$  در بازه  $[0, 2\pi]$ ، تنها کافی است شرایط پیوستگی تابع را در نقطه‌ی مرزی به طول  $x = \frac{\pi}{4}$  اعمال کنیم. (تساوی حد راست و حد چپ و

مقدار تابع)



$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \sqrt{2} \cos 2x = \sqrt{2} \cos \frac{2\pi}{2} = \sqrt{2} \cos \pi = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (a + \sin^2 x) = a + \sin^2 \frac{\pi}{2} = a + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a + \frac{1}{2} \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \sqrt{2} \cos \frac{2\pi}{2} = \sqrt{2} \cos \pi = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + \frac{1}{2} = -1 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۹

می‌دانیم  $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$  است.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x - 1}{\cos 2x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - 1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\sin x - \cos x}{\cos x}}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos x (\cos^2 x - \sin^2 x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-(\cos x - \sin x)}{\cos x (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-1}{\cos x (\cos x + \sin x)} = \frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = -1 \end{aligned}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۰ می‌دانیم که  $0 = \infty^{-\infty}$  (عدد بزرگتر از یک) است.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n} - 2^{-2n+1}}{2 \times 2^{2n} + 2^{-2n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n} - 0}{2 \times 2^{2n} - 0} = \frac{1}{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۱

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x + \sqrt{x+2}}{x+2} = \frac{-2 + 0}{\underbrace{(-2)^+ + 2}_{-1, 0^+}} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۲ روش اول: از اتحاد مزدوج برای رفع ابهام، استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{3x+1}}{2x - \sqrt{3x+1}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x+5) - \sqrt{3x+1}}{2x - \sqrt{3x+1}} \times \frac{(2x+5) + \sqrt{3x+1}}{(2x+5) + \sqrt{3x+1}} \times \frac{2x + \sqrt{3x+1}}{2x + \sqrt{3x+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x+5)^2 - 3x-1}{(2x+5) + \sqrt{3x+1}} \times \frac{2x + \sqrt{3x+1}}{(2x+5) + \sqrt{3x+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(4x-25)}{(x-1)(4x+1)} \times \frac{2x + \sqrt{3x+1}}{(2x+5) + \sqrt{3x+1}} = \frac{-21}{5} \times \frac{4}{14} = -1, 2 \end{aligned}$$

روش دوم: از قاعده هوییتال کمک می‌گیریم.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{3x+1}}{2x - \sqrt{3x+1}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2 - \frac{1}{2\sqrt{3x+1}}} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{4}} = -1, 2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۳

روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - \sqrt{x})}{2 - \sqrt{5-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(2 + \sqrt{5-x})}{(4 + x - 5)(1 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 + \sqrt{5-x}}{-(1 + \sqrt{x})} = \frac{4}{-2} = -2$$

روش دوم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{2 - \sqrt{5-x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{-\frac{1}{2\sqrt{5-x}}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = -2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۴ چون  $P(x) = 2x - 1$  بخش پذیر است پس  $P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$  است.



$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{16}\right) + a\left(\frac{1}{8}\right) + 2\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{a}{8} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow 1 + a + 4 - 12 = 0 \Rightarrow a = 7$$

بنابراین  $P(x) = 2x^4 + 7x^3 + 2x^2 - 3x$  است. اکنون برای پیدا کردن باقی‌مانده آن بر  $x + 2$  کافی است که  $P(-2)$  را حساب کنید.

$$P(-2) = 2(16) + 7(-8) + 2(4) - 3(-2) = 32 - 56 + 8 + 6 = -10.$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۵

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^n - 6x^2 + 1}{ax^2 + 7x^2 - 2} \stackrel{\text{توان بیشتر}}{\sim} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^n}{ax^2} \stackrel{n=2}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2}{ax^2} = \frac{4}{a} = 2 \rightarrow a = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^3 - 6x^2 + 1}{2x^2 + 7x^2 - 2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{12x^2 - 12x}{6x^2 + 14x} = \frac{3 - 6}{\frac{3}{2} + 7} = \frac{-3}{\frac{17}{2}} = \frac{-6}{17}$$

کافی است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در  $x = 2$  محاسبه کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۶۶

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{2|x - 2|} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x+2)(x-2)}{2(x-2)} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{2|x - 2|} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x+2)(x-2)}{-2(x-2)} = \frac{4}{-2} = -2$$

$$f(2) = 2$$

بنابراین تابع در  $x = 2$  از راست پیوسته است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۷

شرط پیوستگی تابع  $f$  در  $x = a$  این است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در موجود و متناهی و باهم برابر باشند.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{2x}}{2 - x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{Hop} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \frac{1(2)}{2\sqrt{2x}}}{-1} = -\frac{1}{2}$$

پس  $f(2) = a = -\frac{1}{2}$  است

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۸

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{[x] + 3}{x + 2} = \frac{[(-2)^-] + 3}{(-2)^- + 2} = \frac{-3 + 3}{0^-} = \frac{0}{0^-} = 0$$

شرط اینکه تابع  $f$  در  $x = a$  پیوسته باشد آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در  $x = a$  موجود و متناهی و باهم برابر باشند. ۱ ۲ ۳ ۴ ۶۹

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x - 6}{x - \sqrt{x+2}} \times \frac{x + \sqrt{x+2}}{x + \sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(3x - 6)(x + \sqrt{x+2})}{x^2 - x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-2)(x + \sqrt{x+2})}{(x-2)(x+1)} = \frac{3(4)}{3} = 4 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = 2a - 1 \rightarrow 2a - 1 = 4 \rightarrow 2a = 5 \rightarrow a = \frac{5}{2} = 2,5$$

البته توجه کنید که حد راست تابع را می‌توان با استفاده از قاعده هوییتال نیز به دست آورد.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x - 6}{x - \sqrt{x+2}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{1 - \frac{1(1)}{2\sqrt{x+2}}} = \frac{3}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{3}{\frac{3}{4}} = 4$$

شرط آن که تابع  $f$  در  $x = a$  پیوسته باشد آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در  $x = a$  موجود و متناهی و باهم برابر باشند. ۱ ۲ ۳ ۴ ۷۰

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin^2 x - \sin x - 1}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(2 \sin x + 1)(\sin x - 1)}{1 - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(2 \sin x + 1)(\sin x - 1)}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-(2 \sin x + 1)(1 - \sin x)}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} = \frac{-(2 + 1)}{2 + 0} = -1,5$$





توجه کنید که  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$  است، پس  $a = -1.5$  است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۱

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2 + 9x}}{3x + \sqrt{x}} \stackrel{\text{بر توان}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2}}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2|x|}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2x}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{3x} = \frac{-1}{3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۲

حد راست و حد چپ و مقدار تابع در  $x = 0$  باید با هم برابر باشند.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} a \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = a \sin \frac{\pi}{6} = \frac{a}{2} \\ f(0) &= a \sin \frac{\pi}{6} = \frac{a}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{a}{2} = 2 \Rightarrow a = 4$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۳

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax - \sqrt[3]{x^3 - 1}}{4x^n - 12} \stackrel{\text{توان بیشتر}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax}{4x^n} \stackrel{n=1}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax}{4x} = \frac{a}{4} = \frac{1}{6} \rightarrow 6a = 4 \rightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2}{3}x - \sqrt[3]{x^3 - 1}}{4x - 12} \stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2}{3} - \frac{1(2x)}{3\sqrt[3]{(x^3 - 1)^2}}}{4} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{6}{12}}{4} = \frac{\frac{1}{6}}{4} = \frac{1}{24}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۴

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - x - 1}{|x - 1|} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(2x + 1)}{(x - 1)} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - x - 1}{|x - 1|} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - x - 1}{-(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(2x + 1)}{-(x - 1)} = -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow |-3 - (3)| = |-6| = 6$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۵

روش اول: با ابهام صفر صفر مواجه هستیم، عبارت را در مزدوج صورت، ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{3 - x}}{x^2 + x} \times \frac{2x - \sqrt{3 - x}}{2x - \sqrt{3 - x}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 + x - 3}{x(x + 1)(2x - \sqrt{3 - x})}$$

$$\stackrel{\text{صورت را بر } x+1 \text{ تقسیم می‌کنیم.}}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(4x - 3)}{x(x + 1)(2x - \sqrt{3 - x})} = \frac{-7}{(-1)(-4)} = \frac{-7}{4}$$

روش دوم:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{3 - x}}{x^2 + x} \stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 + \frac{1(-1)}{2\sqrt{3 - x}}}{2x + 1} = \frac{2 - \frac{1}{4}}{-1} = \frac{-7}{4}$$

برای آن که تابع  $f$  بر  $\mathbb{R}$  پیوسته باشد، کافی است در نقطه‌ای به طول  $x = 2$  پیوسته باشد. برای این منظور حد راست، حد چپ و مقدار تابع را در  $x = 2$  محاسبه کرده و برابر هم قرار می‌دهیم. داریم:

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۶

$$\left\{ \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (ax + b) = 2a + b \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + bx - 1) = 4 + 2b - 1 = 2b + 3 \Rightarrow 2b + 3 = 5 \Rightarrow b = 1 \\ f(2) &= 5 \end{aligned} \right.$$

$$2a + b = 5 \Rightarrow 2a + 1 = 5 \Rightarrow a = 2$$

باقی‌مانده تقسیم چند جمله  $p(x)$  بر  $x - 4$  برابر ۳ است پس  $p(4) = 3$  می‌باشد و باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای  $p(x)$  بر  $x + 2$  برابر ۱ است پس

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۷

$p(-2) = 1$  می‌باشد. اکنون برای پیدا کردن باقی‌مانده، تقسیم  $4p(-x) + p(x^2)$  بر  $x - 2$  کافی است که به جای  $x$  عدد  $2$  را قرار دهیم.

$$x = 2 \rightarrow p(4) + 4p(-2) = 3 + 4(1) = 7$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۸

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 + 6x}}{ax - 2}$$



$$\text{بر توان} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{x}}{ax} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - (-x)}{ax} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{ax} = \frac{3}{a} = 3 \Rightarrow a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - \sqrt{x^2 + 6x}}{x - 2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \frac{2x+6}{2\sqrt{x^2+6x}}}{1} = \frac{2 - \frac{5}{4}}{1} = \frac{3}{4}$$

روش اول: عبارت را در مزدوج صورت و مخرج، ضرب و تقسیم می‌کنیم. 1 2 3 4 79

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{2x+1}}{2 - \sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(3 - \sqrt{2x+1})(3 + \sqrt{2x+1})(2 + \sqrt{x})}{(2 - \sqrt{x})(2 + \sqrt{x})(3 + \sqrt{2x+1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(9 - 2x - 1)(2 + \sqrt{x})}{(4 - x)(3 + \sqrt{2x+1})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-2(x-4)(2 + \sqrt{x})}{-(x-4)(3 + \sqrt{2x+1})} = \frac{2 \times 4}{3 + 3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

روش دوم:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{2x+1}}{2 - \sqrt{x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{-2}{2\sqrt{2x+1}}}{\frac{-1}{2\sqrt{x}}} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3} = \frac{4}{3}$$

ابتدا عبارت داخل براکت را تعیین عدد می‌کنیم. 1 2 3 4 80

$$x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^- \Rightarrow x^2 \rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^+ \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{x^2} \rightarrow 12^- \\ \frac{2}{x^2} = 8^- \Rightarrow -\frac{2}{x^2} \rightarrow (-8)^+ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[\frac{3}{x^2}\right] = 11 \\ \left[-\frac{2}{x^2}\right] = -8 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{10x - 5 + 11}{16x + 8} = \frac{-5 - 5 + 11}{-8 + 8} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

چندجمله‌ای  $p(x)$  بر  $x^2 - 1$  یا همان  $(x+1)(x-1)$  بخش‌پذیر است بنابراین  $p(1) = p(-1) = 0$  است. اکنون برای محاسبه باقی‌مانده  $Q(x)$  بر  $x - 2$  کافی است که  $Q(2)$  را حساب کنیم. 1 2 3 4 81

$$Q(x) = p(x-1) + p(1-x) \rightarrow Q(2) = p(1) + p(-1) = 0 + 0 = 0$$

تابع سینوس در ربع اول افزایش می‌یابد پس  $\left(\frac{1}{2}\right)^- = \sin \frac{\pi}{6}$  داریم: 1 2 3 4 82

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} [2 \sin x - 1] = \left[2 \left(\frac{1}{2}\right)^- - 1\right] = [1^- - 1] = [0^-] = -1$$

1 2 3 4 83

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{1 + \cot x}{1 + \tan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{1 + \frac{1}{\tan x}}{1 + \tan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{(1 + \tan x)}{\tan x(1 + \tan x)} = \frac{1}{-1} = -1$$

توجه کنید که  $\tan \frac{3\pi}{4} = \cot \frac{3\pi}{4} = -1$  است. 1 2 3 4 84

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left( \sqrt{\frac{2x+1}{x^2+x}} - \sqrt{\frac{1}{x^2+x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{\frac{2x+1}{x+1}} - \sqrt{\frac{1}{x^2+x}} \right) = \sqrt{2} - 0 = \sqrt{2}$$

در واقع رفع ابهام  $\infty \times 0$  است که مربوط به نظام قدیم است اما با ساده‌سازی عبارت می‌توان به جواب رسید.

ابتدا باید معادله سهمی را بنویسیم که محور  $x$ ها را در دو نقطه به طول‌های  $0$  و  $4$  قطع کرده است (طول رأس سهمی وسط دو نقطه هم‌عرض روی سهمی است). 1 2 3 4 85

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \rightarrow f(x) = ax(x - 4) \xrightarrow{\text{صنق}} 1 = 2a(-2) \rightarrow a = -\frac{1}{4} \rightarrow f(x) = -\frac{1}{4}x(x - 4) = -\frac{1}{4}x^2 + x$$

اکنون باید معادله خط راست  $g$  را با داشتن  $2$  نقطه بنویسیم.

$$\begin{cases} A \\ B \end{cases} \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases} \rightarrow \frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \rightarrow \frac{y - 1}{x} = \frac{1}{-4} \rightarrow -4y + 4 = x \rightarrow -4y = x - 4 \rightarrow y = -\frac{1}{4}x + 1 \rightarrow g(x) = -\frac{1}{4}x + 1$$



پس :  $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{f(x) + g(x)}{4 - x} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-\frac{1}{4}x^2 + x - \frac{1}{4}x + 1}{4 - x} \stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-\frac{1}{4}x + 1 - \frac{1}{4}}{-1} = \frac{-2 + 1 - \frac{1}{4}}{-1} = \frac{5}{4}$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۶

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1 - x^2}}{x} \stackrel{\text{توان بیشتر}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2} - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + |x| - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\overbrace{x}^x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} = -1$

توجه: اگر باقی‌مانده تقسیم  $P(x)$  بر  $(x - m)$  برابر  $k_1$  و بر  $(x - n)$  برابر  $k_2$  باشد، آنگاه باقی‌مانده تقسیم  $P(x)$  بر  $(x - m) \cdot (x - n)$  عبارت  $ax + b$  است به طوری که:

$$\Rightarrow \begin{cases} x = m : am + b = k_1 \\ x = n : an + b = k_2 \end{cases}$$

بنابراین، در این سؤال اگر باقی‌مانده تقسیم  $P(x)$  بر  $x^2 + x - 6$  برابر  $ax + b$  باشد، آنگاه:

$$\begin{aligned} x = 2 &\Rightarrow 2a + b = 1 \\ x = -3 &\Rightarrow -3a + b = -4 \end{aligned} \Rightarrow a = 1, b = -1$$

پس باقی‌مانده تقسیم  $(x - 1)$  است.

ابتدا ضابطه وارون تابع داده شده را به دست می‌آوریم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۸۸

$$y = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \rightarrow \sqrt{xy} - y = \sqrt{x} + 1 \rightarrow \sqrt{xy} - \sqrt{x} = y + 1 \rightarrow \sqrt{x}(y - 1) = y + 1 \rightarrow \sqrt{x} = \frac{y + 1}{y - 1} \rightarrow x = \left(\frac{y + 1}{y - 1}\right)^2 \rightarrow f^{-1}(x) = \left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)^2$$

اکنون از تابع معکوس، مشتق گرفته و به جای  $x$  عدد ۲ را قرار می‌دهیم.

$$\text{مشتق} = 2 \left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)^1 \left(\frac{1(x - 1) - 1(x + 1)}{(x - 1)^2}\right) \rightarrow m_{\text{مماس}} = 2(3)(-2) = -12$$

می‌دانیم:  $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n \cdot (n + 1)$  مجموع  $n$  عدد زوج ۱ ۲ ۳ ۴ ۸۹

چون حد تابع در منفی بی‌نهایت خواسته شده است پس از قاعده پر توان استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[5]{a^{2+4+\dots+100} x^{2+4+\dots+100}}}{a^{49} x^k} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[5]{a^{50 \times 51} x^{50 \times 51}}}{a^{49} x^k} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|a^{51} x^{51}|}{a^{49} x^k} = -1$$

واضح است که  $k = 51$  است. از طرفی اگر  $a = -1$  باشد با توجه به اینکه  $x \rightarrow -\infty$  می‌رود عبارت از داخل قدرمطلق مثبت خارج می‌شود و خواهیم داشت  $a^2 = -1$  که نادرست است پس  $a = 1$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-a^{51} x^{51}}{a^{49} x^k} = -1 \Rightarrow a^2 = 1 \xrightarrow{a > 0} a = 1$$

در بازه داده شده داخل قدرمطلق، مثبت است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۹۰

$$f(x) = x(3 - x^2) = -x^3 + 3x \rightarrow f'(x) = -3x^2 + 3 = 0 \rightarrow x = 1, x = -1 \rightarrow \begin{cases} f(-1, 5) = f(-\frac{3}{2}) = -\frac{9}{8} \\ f(\sqrt{3}) = 0 \\ f(1) = 2 \\ f(-1) = -2 \rightarrow \text{مطلق } Min \end{cases}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۹۱

$$(f \circ f) \circ g = f \circ f(g(x)) \rightarrow \begin{cases} ff(-1) = f(0) = 0 \\ ff(0) = f(0) = 0 \\ ff(1) = f(0) = 0 \end{cases}$$

پس تابع  $(f \circ f) \circ g = 0$  است (تابع ثابت) و هیچ نقطه ناپیوستگی ندارد.

# پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴

۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴
۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴
۴۱	۱	۲	۳	۴
۴۲	۱	۲	۳	۴
۴۳	۱	۲	۳	۴
۴۴	۱	۲	۳	۴
۴۵	۱	۲	۳	۴
۴۶	۱	۲	۳	۴

۴۷	۱	۲	۳	۴
۴۸	۱	۲	۳	۴
۴۹	۱	۲	۳	۴
۵۰	۱	۲	۳	۴
۵۱	۱	۲	۳	۴
۵۲	۱	۲	۳	۴
۵۳	۱	۲	۳	۴
۵۴	۱	۲	۳	۴
۵۵	۱	۲	۳	۴
۵۶	۱	۲	۳	۴
۵۷	۱	۲	۳	۴
۵۸	۱	۲	۳	۴
۵۹	۱	۲	۳	۴
۶۰	۱	۲	۳	۴
۶۱	۱	۲	۳	۴
۶۲	۱	۲	۳	۴
۶۳	۱	۲	۳	۴
۶۴	۱	۲	۳	۴
۶۵	۱	۲	۳	۴
۶۶	۱	۲	۳	۴
۶۷	۱	۲	۳	۴
۶۸	۱	۲	۳	۴
۶۹	۱	۲	۳	۴

۷۰	۱	۲	۳	۴
۷۱	۱	۲	۳	۴
۷۲	۱	۲	۳	۴
۷۳	۱	۲	۳	۴
۷۴	۱	۲	۳	۴
۷۵	۱	۲	۳	۴
۷۶	۱	۲	۳	۴
۷۷	۱	۲	۳	۴
۷۸	۱	۲	۳	۴
۷۹	۱	۲	۳	۴
۸۰	۱	۲	۳	۴
۸۱	۱	۲	۳	۴
۸۲	۱	۲	۳	۴
۸۳	۱	۲	۳	۴
۸۴	۱	۲	۳	۴
۸۵	۱	۲	۳	۴
۸۶	۱	۲	۳	۴
۸۷	۱	۲	۳	۴
۸۸	۱	۲	۳	۴
۸۹	۱	۲	۳	۴
۹۰	۱	۲	۳	۴
۹۱	۱	۲	۳	۴



معین کرمی

# سوالات سراسری هفته سوم

## مستقیم

۱ اگر  $f(x) = \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}|x|$  و  $g(x) = 4x + |x|$  باشند، مشتق تابع  $f \circ g$ ، کدام است؟

- ۱) ۲      ۲) ۳      ۳) ۴      ۴) مشتق ندارد.

۲ در تابع با ضابطه  $f(x) = \left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}\right)^3$  حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ ، کدام است؟

- ۱) -۲۱      ۲) -۱۸      ۳) ۱۲      ۴) ۱۵

۳ خط مماس بر منحنی به معادله  $y = x^3 + 3x^2 + 1$ ، بر خط به معادله  $x - 3y = 2$  عمود است. این خط مماس از نقطه‌ای با کدام مختصات می‌گذرد؟

- ۱) (۱ و ۳)      ۲) (۱ و ۴)      ۳) (۲ و -۴)      ۴) (۲ و -۶)

۴ خط مماس بر منحنی به معادله  $y = \frac{1}{\sqrt[3]{4x}}$  در نقطه  $(2, \frac{1}{2})$ ، محور  $y$ ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

- ۱)  $\frac{2}{3}$       ۲)  $\frac{5}{6}$       ۳)  $\frac{7}{6}$       ۴)  $\frac{4}{3}$

۵ منحنی‌های تابع با ضابطه  $f(x) = -x^2 + bx + 3$  بر خط به معادله  $y = 7$  مماس‌اند. فاصله‌ی دو نقطه‌ی تماس کدام است؟

- ۱) ۳      ۲) ۴      ۳) ۵      ۴) ۶

۶ اگر  $f(x) = x^2 - x$  و  $g(x) = \sqrt{2x}$  حاصل  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x)g(2 + \Delta x) - f(2)g(2)}{\Delta x}$  برابر با کدام گزینه است؟

- ۱) ۳      ۲) ۴      ۳) ۶      ۴) ۷

۷ خط مماس بر منحنی به معادله  $y = \frac{2x-1}{x+1}$  در نقطه‌ای به طول  $\alpha$  واقع بر آن، از نقطه  $(-1, 0)$  می‌گذرد.  $\alpha$  کدام است؟

- ۱) -۱      ۲) ۱      ۳)  $\frac{3}{2}$       ۴) ۲

۸ تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{4x-5}{x+1}$  و دامنه  $[0, 8]$ ، خط مماس بر نمودار آن موازی پاره‌خطی است که ابتدا و انتهای منحنی را به هم وصل کند. این

خط مماس، محور  $y$ ها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟

- ۱) -۲      ۲) -۱٫۵      ۳) -۱      ۴) -۰٫۵

۹ اگر تابع  $f$  در  $x = 4$  مشتق‌پذیر و  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) + 7}{x - 4} = \frac{-3}{2}$  باشد، آنگاه مشتق  $y = \frac{f(2x)}{x}$  در  $x = 2$ ، کدام است؟

- ۱)  $-\frac{1}{4}$       ۲)  $-\frac{1}{2}$       ۳)  $\frac{1}{4}$       ۴)  $\frac{1}{2}$

۱۰ در تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{8}{ax+b} & ; x > 2 \\ -x^3 + 6x & ; x \leq 2 \end{cases}$  اگر  $f'(2)$  موجود باشد،  $a$  کدام است؟

- ۱) ۱      ۲) ۲      ۳) ۳      ۴) ۴



۱۱) به ازای کدام مقدار  $a$ ، منحنی به معادله  $ay = x^2 + 5x + 4$  بر نیمساز ناحیه‌ی اول مماس است؟

- ۱) ۱      ۲) ۴      ۳) ۵      ۴) ۹

۱۲) تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{|x^3 - 2x|}{x}$ ، در چند نقطه مشتق ناپذیر است؟

- ۱) ۱      ۲) ۲      ۳) ۳      ۴) ۴

۱۳) اگر  $f(x) = (x-2)\sqrt[3]{x^2}$  حاصل  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-1+\Delta x) - f(-1)}{\Delta x}$  کدام است؟

- ۱) ۲      ۲) ۳      ۳) ۲      ۴)  $\frac{4}{3}$

۱۴) در تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{(2x+6)^2} & ; x > 1 \\ ax+b & ; x \leq 1 \end{cases}$  مقدار  $f'(1)$  موجود است.  $b$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{4}{3}$       ۲)  $\frac{7}{3}$       ۳)  $\frac{8}{3}$       ۴)  $\frac{10}{3}$

۱۵) در تابع با ضابطه  $f(x) = x\sqrt{x} + |x-1|$  مقدار  $f'_+(1) + 3f'_-(1)$  کدام است؟

- ۱) ۵      ۲) ۳      ۳) ۴      ۴) ۲

۱۶) مشتق  $f(\sqrt[3]{6x+2})$  در نقطه‌ای به طول  $x=1$  برابر  $-2$  است. شیب خط مماس بر نمودار  $f$  در نقطه‌ای به طول  $2$  کدام است؟

- ۱)  $-4$       ۲)  $\frac{1}{3}$       ۳) ۳      ۴) ۴

۱۷) خط به معادله  $y = 3x - 5$  در نقطه  $x=2$  بر نمودار تابع  $y = g(x)$  مماس است. اگر  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{2x - 2} = \frac{2}{3}$  باشد،  $(f \circ g)'(2)$  کدام است؟

- ۱) ۱      ۲) ۲      ۳) ۳      ۴) ۴

۱۸) در تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{5 - 2x}$  حاصل  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{4}{9}$       ۲)  $\frac{5}{12}$       ۳)  $\frac{7}{12}$       ۴)  $\frac{5}{6}$

۱۹) خط مماس بر منحنی به معادله  $y = x^3 - x^2$  در نقطه‌ای به طول  $x=1$  واقع بر آن، منحنی را در نقطه دیگری به نام  $A$  قطع می‌کند. عرض نقطه  $A$  کدام است؟

- ۱)  $-3$       ۲)  $-2$       ۳) ۲      ۴) ۳

۲۰) اگر تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 4 & ; x \geq -2 \\ x^3 - x & ; x < -2 \end{cases}$  همواره مشتق‌پذیر باشد،  $f(1)$  کدام است؟

- ۱)  $-3$       ۲) صفر      ۳) ۱      ۴) ۲

۲۱) به ازای کدام مقادیر  $m$ ، خط به معادله  $y = mx + 2$  بر منحنی به معادله  $x^2 + y^2 - 2x = 3$  مماس است؟

- ۱)  $-\frac{4}{3}$  و  $0$       ۲)  $\frac{4}{3}$  و  $0$       ۳)  $-\frac{2}{3}$  و  $1$       ۴)  $\frac{2}{3}$  و  $1$

۲۲) تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} (x-1)|x-1| & ; x \neq 1 \\ a & ; x = 1 \end{cases}$  در نقطه  $x=1$  مشتق‌پذیر است و  $a$  کدام است؟

- ۱)  $0$       ۲) ۱      ۳) ۲      ۴)  $-2$



۲۳ در تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = (2x + 1)^{-\frac{1}{2}}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع، از  $x_1 = 4$  تا  $x_2 = 12$ ، از آهنگ لحظه‌ای آن در  $x = 4$ ، چقدر بیشتر است؟

۱۱  
۲۷۰ (۴)

۷  
۲۷۰ (۳)

۱۱  
۵۴۰ (۲)

۷  
۵۴۰ (۱)

۲۴ اگر  $g(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}$  و  $(fog)'(2) = 6$  باشد،  $f'(5)$  کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

۲۵ در تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر از عدد ۲ به عدد  $2 + h$  تغییر کند برابر  $\frac{h}{9}$  است،  $h$  کدام است؟

۳ (۴)

۲٫۵ (۳)

۲ (۲)

۱٫۵ (۱)

۲۶ خط به معادله‌ی  $f(x) = 2x - 5$  در نقطه‌ای به طول ۱ بر منحنی به معادله‌ی  $g(x) = ax^2 + bx + 1$  مماس است.  $a$  کدام است؟

۶ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

۲۷ اگر  $g(x) = x + \sqrt{x}$  و  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{4}{3}$  باشد،  $(fog)'(1)$  کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

$\frac{3}{2}$  (۲)

$\frac{2}{3}$  (۱)

۲۸ در تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر  $x$ ، در نقطه‌ی  $x = 1$  با نمو متغیر  $0,21$ ، از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چقدر کمتر است؟

$\frac{2}{21}$  (۴)

$\frac{3}{42}$  (۳)

$\frac{1}{21}$  (۲)

$\frac{1}{42}$  (۱)

۲۹ در تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x}$ ، اختلاف آهنگ تغییر لحظه‌ای در  $x = 2$ ، از آهنگ تغییر متوسط در بازه  $[1, 4]$ ، کدام است؟

۰٫۷۵ (۴)

۰٫۴۵ (۳)

۰٫۵ (۲)

۰٫۲۵ (۱)

۳۰ اگر  $f(x) = x^3 - [2x^2]x$  باشد، مقدار  $f'_+(\sqrt{2})$  کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

۳۱ تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & ; x \geq 2 \\ -x^2 + ax + b & ; x < 2 \end{cases}$ ، روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی مشتق پذیر است.  $b$  کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

۳۲ مشتق تابع  $f(x) = x\sqrt{\frac{3x+1}{x+2}}$  در نقطه‌ی  $x = -3$ ، کدام است؟

$\frac{3}{2}$  (۴)

$\frac{4}{3}$  (۳)

$\frac{3}{4}$  (۲)

$\frac{2}{3}$  (۱)

۳۳ مشتق تابع  $y = \frac{f(x)}{g(x)}$  در نقطه‌ی  $x = 1$  برابر ۳ است. اگر  $f(1) = 0$ ،  $f'(1) = -4$  و  $g'(1)$  موجود باشد مقدار  $g(1)$  کدام است؟

$\frac{4}{3}$  (۴)

$\frac{3}{4}$  (۳)

$-\frac{3}{4}$  (۲)

$-\frac{4}{3}$  (۱)

۳۴ خط  $y = -1$  بر نمودار تابع  $f$  با ضابطه‌ی  $f(x) = 2x^2 - x + a$  مماس است.  $a$  کدام است؟

$\frac{9}{8}$  (۴)

$\frac{7}{8}$  (۳)

$-\frac{7}{8}$  (۲)

$-\frac{9}{8}$  (۱)



۳۵ در تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{-x-1}{\sqrt{x}}$  حاصل  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\frac{1}{4} + h) - f(\frac{1}{4})}{h}$  کدام است؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

۳۶ در تابع با ضابطه  $f(x) = (x+2)\sqrt{4x+1}$  آهنگ تغییر متوسط تابع در بازه  $[0, 2]$  از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در  $x = \frac{3}{4}$  چقدر بیشتر است؟

- ۰٫۱۰ (۱)      ۰٫۱۵ (۲)      ۰٫۲۰ (۳)      ۰٫۲۵ (۴)

۳۷ در تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$  آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر  $x$  در  $x = 1$  با نمو  $0,44$  از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چقدر کمتر است؟

- $\frac{1}{30}$  (۱)       $\frac{1}{24}$  (۲)       $\frac{1}{12}$  (۳)       $\frac{1}{6}$  (۴)

۳۸ در تابع با ضابطه  $f(x) = |x| \cdot [x]$  مقدار  $f'(0^-) - f'(0^+)$  کدام است؟

- ۱ (۱)      ۰ (۲)      ۱ (۳)      ۲ (۴)

۳۹ خط مماس بر منحنی تابع  $f(x) = \frac{5x-4}{\sqrt{x}}$  در نقطه  $x = 4$  واقع بر آن، محور  $y$ ها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟

- ۴ (۱)      -۱ (۲)      ۲ (۳)      ۳ (۴)

۴۰ در تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{x} & x \geq 1 \\ x^2 + ax + b & x < 1 \end{cases}$  مقدار  $f'(1)$  موجود است،  $f(1 - \sqrt{2})$  کدام می‌باشد؟

- $3 - \sqrt{2}$  (۱)       $2 - \sqrt{2}$  (۲)       $2 - 2\sqrt{2}$  (۳)       $3 - 2\sqrt{2}$  (۴)

۴۱ اگر آهنگ لحظه‌ای تغییر  $f$  در واحد تغییر  $x$  در  $x = 2$  برابر  $-\frac{3}{2}$  باشد، آن‌گاه حد عبارت  $\frac{f(2) - f(2+h)}{h}$  وقتی  $h \rightarrow 0$  برابر کدام است؟

- ۳ (۱)       $-\frac{3}{2}$  (۲)       $\frac{3}{2}$  (۳)      ۳ (۴)

۴۲ اگر تابع  $f$  در  $x = -2$  مشتق‌پذیر و  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) + 3}{h} = \frac{1}{2}$  باشد، آنگاه مشتق  $f(x) = x^2$  در  $x = -2$  کدام است؟

- ۸ (۱)      ۱۰ (۲)      ۱۲ (۳)      ۱۴ (۴)

۴۳ تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} ax^3 + bx & ; x < 1 \\ 2\sqrt{4x-3} & ; x \geq 1 \end{cases}$  بر روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی مشتق‌پذیر است.  $b$  کدام است؟

- $\frac{1}{2}$  (۱)      ۱ (۲)       $\frac{3}{2}$  (۳)      ۲ (۴)

۴۴ اگر  $f(x) = |x-2| + \sqrt{2x}$  حاصل  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$  کدام است؟

- ۲ (۱)       $-\frac{1}{2}$  (۲)       $\frac{1}{2}$  (۳)       $\frac{3}{2}$  (۴)

۴۵ در تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{x}$  آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر  $x$  از ۴ به ۲۵ تغییر کند برابر با آهنگ لحظه‌ای در نقطه‌ای به طول  $x = a$  است،  $a$  کدام می‌باشد؟

- ۱۱٫۷۵ (۱)      ۱۲٫۲۵ (۲)      ۱۲٫۵ (۳)      ۱۳٫۵ (۴)





۴۶) عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی به معادله  $y = \sqrt{x^2 + 3x}$  در نقطه‌ای به طول  $x = 1$  واقع بر آن کدام است؟

- ۱)  $-\frac{3}{5}$       ۲)  $\frac{3}{4}$       ۳)  $\frac{3}{2}$       ۴) ۲

۴۷) تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} |x^2 - 2x| & ; x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2 + ax + b & ; x \geq 2 \end{cases}$  در نقطه  $x = 2$  مشتق پذیر است.  $a + b$  کدام است؟

- ۱) ۲      ۲) ۳      ۳) ۴      ۴) ۵

۴۸) در تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{2x+1} + \frac{1}{x+1}$ ، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازه  $[0, 4]$  از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در  $x = \frac{3}{2}$  چقدر کمتر است؟

- ۱)  $0,03$       ۲)  $0,04$       ۳)  $0,05$       ۴)  $0,06$

۴۹) در تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}$ ، حاصل  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ ، کدام است؟

- ۱)  $\frac{7}{48}$       ۲)  $\frac{5}{24}$       ۳)  $\frac{7}{24}$       ۴)  $\frac{7}{16}$

۵۰) آهنگ آنی تغییر مساحت یک دایره نسبت به شعاع  $r$  در  $r_0 = 10$  کدام است؟

- ۱)  $10\pi$       ۲)  $15\pi$       ۳)  $25\pi$       ۴)  $20\pi$

۵۱) آهنگ متوسط تغییر تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{x^2 + 144}$  نسبت به متغیر  $x$  روی بازه‌ای از  $x_1 = 5$  تا  $x_2 = 9$  کدام است؟

- ۱)  $0,4$       ۲)  $0,5$       ۳)  $0,6$       ۴)  $0,7$

۵۲) در تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{36}{x^2}$ ، آهنگ متوسط تابع از  $x_1 = 2$  تا  $x_2 = 3$  چقدر از آهنگ لحظه‌ای آن در  $x = \sqrt{12}$  بیشتر است؟

- ۱)  $2,5$       ۲)  $1,5$       ۳) ۲      ۴) ۱

۵۳) به ازای کدام مقدار  $a$ ، خط به معادله  $y = 5x + a$  بر نمودار تابع  $y = 2x^2 - 3x + 6$  مماس است؟

- ۱)  $-3$       ۲)  $-2$       ۳) ۲      ۴) ۳

۵۴) آهنگ متوسط تغییر تابع  $f(x) = \sqrt{x^2 + 16}$  نسبت به متغیر  $x$  روی بازه  $[0, 3]$ ، از آهنگ لحظه‌ای تابع در  $x = \sqrt{2}$  چقدر کمتر است؟

- ۱) ۰      ۲)  $\frac{1}{18}$       ۳)  $\frac{1}{12}$       ۴)  $\frac{1}{9}$

۵۵) نقطه‌ی  $M(x, y)$  بر روی منحنی به معادله  $y = \sqrt{x+8}$  در حرکت است.  $T$  فاصله‌ی نقطه‌ی  $M$  تا مبدأ مختصات است. آهنگ لحظه‌ای تغییر  $T$  در نقطه‌ای به طول  $x = 7$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{15}{16}$       ۲)  $\frac{15}{8}$       ۳)  $\frac{3}{7}$       ۴)  $\frac{5}{4}$

۵۶) در تابع  $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ، روی بازه  $[2, 2,02]$  آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به متغیر  $x$ ، از آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در  $x = 2$  چه قدر بیشتر است؟

- ۱)  $\frac{1}{202}$       ۲)  $\frac{1}{101}$       ۳)  $\frac{1}{51}$       ۴)  $\frac{2}{51}$

۵۷) در تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ، آهنگ متوسط از  $x_1 = 2$  تا  $x_2 = 5$ ، برابر آهنگ لحظه‌ای آن در  $x = \alpha$  است.  $\alpha$  کدام است؟

- ۱)  $2,5$       ۲)  $1 + \sqrt{3}$       ۳) ۳      ۴) ۴



۵۸ مشتق تابع با ضابطه  $f(x) = \left( \frac{\sqrt[3]{x^2 + 2x}}{x^2 - x} \right)^3$  در نقطه  $x = 2$  کدام است؟

- ۱  $-\frac{3}{4}$       ۲  $-\frac{5}{4}$       ۳  $-\frac{5}{2}$       ۴  $-\frac{15}{4}$

۵۹ تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5-2x} & ; x \leq -2 \\ -\frac{1}{2}x^2 + bx + c & ; x > -2 \end{cases}$  در  $x = -2$  مشتق پذیر است. مقدار  $c$  کدام است؟

- ۱  $-\frac{2}{3}$       ۲  $-\frac{1}{3}$       ۳  $\frac{1}{3}$       ۴  $\frac{2}{3}$

۶۰ در تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر، روی بازه  $[2, 25]$  از آهنگ آنی در شروع این بازه چه قدر کمتر است؟

- ۱  $\frac{1}{93}$       ۲  $\frac{2}{93}$       ۳  $\frac{1}{62}$       ۴  $\frac{1}{31}$

۶۱ در تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع، از  $x_1 = 4$  تا  $x_2 = 6, 25$ ، از آهنگ لحظه‌ای آن در  $x = 4$  چقدر کمتر است؟

- ۱  $\frac{1}{36}$       ۲  $\frac{1}{18}$       ۳  $\frac{5}{72}$       ۴  $\frac{1}{12}$

۶۲ در تابع با ضابطه  $f(x) = 3x^2 + 4x - 2$ ، تفاضل آهنگ لحظه‌ای در  $x = a + \frac{h}{2}$  از آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر  $x$  از عدد  $a$  به عدد  $a + h$  تغییر کند، کدام است؟

- ۱  $h$       ۲  $2h$       ۳  $3h$       ۴  $0$

۶۳ در تابعی با ضابطه  $f(t) = \frac{240}{t}$ ، آهنگ آنی تغییر  $f$  در  $t = 4$  چقدر از آهنگ متوسط تغییر  $f$  از لحظه‌ی  $t = 3$  تا  $t = 5$  بیش تر است؟

- ۱  $1$       ۲  $\frac{1}{2}$       ۳  $2$       ۴  $\frac{3}{2}$

۶۴ خط مماس بر نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های  $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$  و  $g(x) = ax^2 + bx$ ، در نقطه  $x = 2$ ، مشترک‌اند. مقدار  $b$ ، کدام است؟

- ۱  $4$       ۲  $5$       ۳  $6$       ۴  $7$

۶۵ نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = x^3 + ax + b$  و خط به معادله  $y = -2x + b$ ، در نقطه‌ای به طول ۱ روی محور  $x$ ها متقاطع‌اند. طول‌های دو نقطه تقاطع دیگر این منحنی و خط کدام است؟

- ۱  $-1$  و  $2$       ۲  $3$  و  $-1$       ۳  $-1$  و  $0$       ۴  $2$  و  $0$

۶۶ در تابع با ضابطه  $f(x) = x^3$ ، آهنگ متوسط تغییر این تابع وقتی  $x = 3$  و  $\Delta x = 0, 1$ ، از آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطه‌ای به طول  $x = 3$  چه قدر بیش تر است؟

- ۱  $0, 31$       ۲  $0, 42$       ۳  $0, 62$       ۴  $0, 91$

۶۷ مقدار مشتق تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt[3]{\left(\frac{2x-x^2}{3x+5}\right)^2}$ ، در نقطه  $x = -2$ ، کدام است؟

- ۱  $3$       ۲  $4$       ۳  $5$       ۴  $6$

۶۸ تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} - 5 & ; x \geq 1 \\ x^2 + ax + b & ; x < 1 \end{cases}$  در نقطه‌ی  $x = 1$  مشتق پذیر است.  $b$  کدام است؟

- ۱  $1$       ۲  $2$       ۳  $3$       ۴  $4$



۶۹ در تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 6x} & ; 0 \leq x < 4 \\ \left[\frac{x}{4}\right](x^2 - 9x) & ; 4 \leq x < 8 \end{cases}$  مقدار  $f'(2) - f'(5)$  کدام است؟

$\frac{3}{2}$  (۴)

$\frac{3}{4}$  (۳)

$\frac{1}{2}$  (۲)

$\frac{1}{4}$  (۱)

۷۰ فرض کنید  $g(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ )،  $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq k \\ g'(x) & x < k \end{cases}$  باشد اگر  $f$  یک تابع مشتق پذیر باشد حداکثر مقدار  $k$  با شرط  $b + c = a$  کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۱ (۲)

$\frac{3}{4}$  (۱)

۷۱ فرض کنید نمودارهای دو تابع  $y = x\sqrt{x}$  و  $y = x^2 + ax + b$  در یک نقطه مشترک، بر یک خط مماس باشند. اگر طول نقطه مشترک ۴ باشد، مقدار  $b$  کدام است؟

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

۷۲ آهنگ متوسط تغییر تابع  $y = \sqrt{21 - x^2} + 4x$  در بازه  $[5, 6]$ ، برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع، با کدام مقدار  $x$  است؟

$2 + \frac{5}{3}\sqrt{2}$  (۴)

$2 + \frac{3}{4}\sqrt{2}$  (۳)

$3 + 2\sqrt{2}$  (۲)

$4 + \sqrt{2}$  (۱)

۷۳ مشتق راست تابع  $f(x) = ([x] - |x|)\sqrt[3]{9x}$ ، در نقطه  $x = -3$ ، کدام است؟ (نماد جزء صحیح است)

$\frac{7}{3}$  (۴)

-۴ (۳)

-۵ (۲)

$-\frac{16}{3}$  (۱)

۷۴ تابع چند جمله‌ای درجه دوم با ضرایب طبیعی  $p(x)$  مفروض است. اگر باقی مانده و خارج قسمت تقسیم  $p(x)$  به  $p'(x)$  (مشتق تابع  $p(x)$ ) به ترتیب  $-2$  و  $\frac{1}{2}x + 1$  باشند کمترین مقدار مجموع ضرایب  $p(x)$  کدام است؟

۹ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)

۷۵ فرض کنید  $f(x) = (x[x^2 + \frac{1}{2}])^2 + 1$  و  $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$ ، مقدار مشتق تابع  $f \circ g$  در  $x = \frac{3}{\sqrt{8}}$  چند برابر  $(-128\sqrt{2})$  است؟

۴ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

-۴ (۱)

۷۶ فرض کنید  $g(x) = ax^2 + 5x + b$  اگر  $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \leq 2 \\ g'(x) & x > 2 \end{cases}$  مشتق پذیر باشد، مقدار  $a + b$ ، کدام است؟

$\frac{15}{2}$  (۴)

$\frac{5}{2}$  (۳)

$-\frac{5}{2}$  (۲)

$-\frac{15}{2}$  (۱)



## پاسخنامه تشریحی

در ابتدا قدر مطلق‌های توابع  $f$  و  $g$  را از بین می‌بریم. (۱) (۲) (۳) (۴) (۱)

$$f(x) = \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}|x| \rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}x & x \geq 0 \\ \frac{4}{5}x + \frac{1}{5}x & x < 0 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{3}{5}x & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = 4x + |x| \rightarrow g(x) = \begin{cases} 4x + x & x \geq 0 \\ 4x - x & x < 0 \end{cases} \rightarrow g(x) = \begin{cases} 5x & x \geq 0 \\ 3x & x < 0 \end{cases}$$

$$x \geq 0 : fog(x) = f(g(x)) = \frac{3}{5}(5x) = 3x$$

$$x < 0 : fog(x) = f(g(x)) = 3x$$

یعنی  $fog(x) = 3x$  است پس مشتق آن برابر ۳ می‌باشد.

(۱) (۲) (۳) (۴) (۲)

مشخص است که  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2)$  می‌باشد. بنابراین، کافی است از تابع مشتق گرفته و به جای  $x$  عدد ۲ را قرار دهیم.

$$f(x) = \left( \sqrt{\frac{x+2}{2x-3}} \right)^3 \rightarrow f'(x) = 3 \left( \sqrt{\frac{x+2}{2x-3}} \right)^2 \left( \frac{\frac{1(2x-3) - 2(x+2)}{(2x-3)^2}}{2\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}} \right)$$

$$= \frac{3}{2} \left( \sqrt{\frac{x+2}{2x-3}} \right) \left( \frac{-7}{(2x-3)^2} \right) \rightarrow f'(2) = \frac{3}{2}(2)(-7) = -21$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۳)

$$x - 3y = 2 \rightarrow m_{\text{خط}} = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{عمود}} m_{\text{مماس}} = -3$$

شیب خط مماس همان مشتق است، بنابراین کافی است که از تابع، مشتق گرفته و مساوی ۳- قرار دهیم.

$$y' = 3x^2 + 6x = -3 \rightarrow 3x^2 + 6x + 3 = 0 \rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \rightarrow (x+1)^2 = 0$$

$$\rightarrow x = -1 \xrightarrow{\text{تعلق}} y = -1 + 3 + 1 = 3$$

$$A \Big|_{x=-1}^{-1}, m = -3 \rightarrow y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow y - 3 = -3(x + 1) \rightarrow y = -3x$$

فقط گزینه‌ی چهارم در معادله‌ی خط صدق می‌کند.

برای تعیین عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی  $y = \frac{1}{\sqrt[3]{4x}}$  در نقطه‌ی  $(2, \frac{1}{2})$ ، ابتدا باید معادله‌ی خط مماس در این نقطه را بنویسیم. (۱) (۲) (۳) (۴) (۴)

$$y' = \frac{-\frac{4}{3\sqrt[3]{(4x)^2}}}{(\sqrt[3]{4x})^2} \Rightarrow m_{\text{مماس}} = \frac{-\frac{4}{12}}{4} = -\frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{12}(x - 2) \xrightarrow{x=0} y - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \rightarrow y = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

چون خط بر نمودار توابع مماس است پس معادله‌ی تلاقی آن‌ها ریشه‌ی مضاعف دارد. (۱) (۲) (۳) (۴) (۵)

$$-x^2 + bx + 3 = 7 \rightarrow \boxed{x^2 - bx + 4 = 0} : \text{معادله‌ی تلاقی}$$

$$\text{شرط ریشه‌ی مضاعف} : \Delta = 0 \rightarrow b^2 - 4ac = 0 \rightarrow b^2 - 16 = 0 \rightarrow b = \pm 4$$

$$b = 4 \xrightarrow{\text{معادله‌ی تلاقی}} x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow (x-2)^2 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow A \Big|_{x=2}^2 \text{ نقطه‌ی تماس}$$

$$b = -4 \xrightarrow{\text{معادله‌ی تلاقی}} x^2 + 4x + 4 = 0 \rightarrow (x+2)^2 = 0 \rightarrow x = -2 \rightarrow A' \Big|_{x=-2}^{-2}$$

$$\text{پس} : AA' = \sqrt{(2+2)^2 + (2-2)^2} = 4$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۶)

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x)g(2 + \Delta x) - f(2)g(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f \times g)(2 + \Delta x) - (f \times g)(2)}{\Delta x} = (f \times g)'(2)$$

حاصل عبارت، تعریف مشتق  $(f \times g)(x)$  در نقطه‌ی  $x_0 = 2$  است. یعنی مشتق اولی در دومی به اضافه‌ی مشتق دومی در اولی.

$$y' = (2x-1)\sqrt{2x} + \frac{2}{2\sqrt{2x}}(x^2-x) \Rightarrow y'(2) = (2(2)-1)\sqrt{4} + \frac{2}{2\sqrt{4}}(4-2) = 6 + 1 = 7$$



ابتدا شیب خط مماس بر منحنی را در نقطه به طول  $\alpha$  محاسبه می‌کنیم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۷**

$$f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2} \Rightarrow m = f'(\alpha) = \frac{3}{(\alpha+1)^2}$$

با توجه به این که این خط از نقطه  $(\alpha, \frac{2\alpha-1}{\alpha+1})$  می‌گذرد، معادله‌ی خط مورد نظر به صورت زیر می‌شود:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - \frac{2\alpha-1}{\alpha+1} = \frac{3}{(\alpha+1)^2}(x - \alpha)$$

نقطه  $(-1, 0)$  روی خط فوق است؛ بنابراین با قرار دادن مختصات نقطه  $(-1, 0)$  به جای  $x$  و  $y$  در معادله این خط داریم:

$$0 - \frac{2\alpha-1}{\alpha+1} = \frac{3}{(\alpha+1)^2}(-1 - \alpha) \Rightarrow 2\alpha - 1 = 3 \Rightarrow \alpha = 2$$

ابتدا شیب پاره‌خطی که ابتدا و انتهای منحنی را به هم وصل می‌کند را به دست می‌آوریم. **۱ ۲ ۳ ۴ ۸**

$$\left\{ \begin{array}{l} A \\ B \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0 \\ -5 \\ 8 \\ 3 \end{array} \rightarrow m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-5 - 3}{0 - 8} = \frac{-8}{-8} = 1 \xrightarrow{\text{موازی}} m_{\text{مماس}} = 1$$

کافی است از تابع، مشتق گرفته و برابر یک قرار دهیم.

$$y' = \frac{f(x+1) - f(x-5)}{(x+1)^2} \rightarrow 1 = \frac{9}{(x+1)^2} \rightarrow (x+1)^2 = 9 \rightarrow \begin{cases} x+1 = 3 \rightarrow x = 2 \rightarrow y = 1 \rightarrow C \\ x+1 = -3 \rightarrow x = -4 \end{cases}$$

اکنون باید معادله خط مماس را در نقطه  $C$  و با شیب یک بنویسیم.

$$y - y_C = m(x - x_C) \rightarrow y - 1 = 1(x - 2) \xrightarrow{x=0} y = -1$$

$$y = f(u) \rightarrow y' = u' f'(u) \text{ می‌دانیم: } \mathbf{1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 9}$$

ابتدا حد عبارت داده شده را محاسبه کرده و اطلاعات مورد نظر را بدست می‌آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) + 7}{x - 4} = \frac{f(4) + 7}{0} \rightarrow f(4) + 7 = 0 \rightarrow f(4) = -7$$

چون جواب حد، عدد شده است پس این

کسر بوده که پس از رفع ابهام جوابش عدد شده است

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) + 7}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - (-7)}{x - 4} \xrightarrow{\text{طبق تعریف مشتق}} f'(4) = -\frac{3}{2}$$

$$y = \frac{f(2x)}{x} \text{ اکنون مشتق } y = \frac{f(2x)}{x} \text{ را حساب می‌کنیم.}$$

$$y = \frac{f(2x)}{x} \rightarrow y' = \frac{2f'(2x) \cdot x - 1f(2x)}{x^2}$$

$$\rightarrow y'(2) = \frac{4f'(4) - f(4)}{4} = \frac{4(-\frac{3}{2}) - (-7)}{4} = \frac{-6 + 7}{4} = \frac{1}{4}$$

شرط اینکه تابع  $f$  در  $x = a$  مشتق پذیر باشد آن است که تابع  $f$  در  $x = a$  پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ تابع  $f$  در  $x = a$  با هم برابر باشند. **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰**

$$\text{پیوستگی: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{8}{ax+b} = \frac{8}{2a+b} \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x^2 + 6x) = -8 + 12 = 4 \\ f(2) = -8 + 12 = 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{8}{2a+b} = 4 \Rightarrow 2a+b = 2$$

$$f'(2^+) = f'(2^-) \rightarrow \frac{-8a}{(ax+b)^2} = -3x^2 + 6 \rightarrow \frac{-8a}{(2a+b)^2} = -12 + 6$$

$$\xrightarrow{2a+b=2} \frac{-8a}{4} = -6 \rightarrow -8a = -24 \rightarrow a = 3, b = -4$$

**۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱**

منحنی داده شده و خط  $y = x$  (نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم) را تلاقی می‌دهیم.

$$\begin{cases} ay = x^2 + 5x + 4 \\ y = x \end{cases} \text{ معادله‌ی تلاقی: } \boxed{x^2 + (5-a)x + 4 = 0}$$

$$\Delta = 0 \xrightarrow{b^2 - 4ac = 0} (5-a)^2 - 16 = 0 \Rightarrow a - 5 = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 9 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$a = 9 \xrightarrow{\text{معادله‌ی تلاقی}} x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow (x-2)^2 = 0 \rightarrow x = 2 \checkmark$$

$$a = 1 \xrightarrow{\text{معادله‌ی تلاقی}} x^2 + 4x + 4 = 0 \rightarrow (x+2)^2 = 0 \rightarrow x = -2 \times$$

دقت کنید در ناحیه‌ی اول،  $x$  مثبت است.



۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲

$$f(x) = \frac{|x^r - 2x|}{x}, \quad D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

چون تابع در  $x = 0$  تعریف نشده است، پس در این نقطه ناپیوسته و در نتیجه مشتق ناپذیر است. از طرفی ریشه‌های ساده قدرمطلق نقاط مشتق ناپذیر است، پس داریم:

$$x^r - 2x = 0 \Rightarrow x(x^r - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^r - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt[r]{2} \end{cases}$$

بنابراین تابع در ۳ نقطه  $x = 0$  و  $x = \pm\sqrt[r]{2}$  مشتق ناپذیر است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳

می‌دانیم:  $(uv)' = u'v + v'u$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-1 + \Delta x) - f(-1)}{\Delta x} = f'(-1)$$

کافی است که از تابع داده شده، مشتق بگیریم و سپس  $x = -1$  را جایگزین کنیم.

$$f(x) = (x - 2) \cdot \sqrt[r]{x^r} \rightarrow f'(x) = \sqrt[r]{x^r} + \frac{2(1)}{3\sqrt[r]{x}}(x - 2)$$

$$\rightarrow f'(-1) = 1 + \frac{-6}{3(-1)} = 1 + 2 = 3$$

چون  $f'(1)$  موجود است، لذا  $f$  در  $x = 1$  پیوسته است و مشتق چپ و راست  $f$  در  $x = 1$  با هم برابرند، پس داریم:

$$\text{شرط پیوستگی: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt[r]{(2x + 6)^r} = \sqrt[r]{8^r} = \sqrt[r]{(2^r)^r} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax + b) = a + b \\ f(1) = a + b \end{cases} \Rightarrow a + b = 4 \quad (*)$$

$$\left. \begin{aligned} x > 1 \rightarrow f(x) = \sqrt[r]{(2x + 6)^r} \rightarrow f'(x) = \frac{2(2)}{3\sqrt[r]{2x+6}} \rightarrow f'(1^+) = \frac{4}{3(2)} = \frac{2}{3} \\ x < 1 \rightarrow f(x) = ax + b \rightarrow f'(x) = a \rightarrow f'(1^-) = a \end{aligned} \right\} \rightarrow a = \frac{2}{3}, b = \frac{10}{3}$$

وقتی  $x \rightarrow 1^+$  میل می‌کند، داخل قدر مطلق، مثبت است و وقتی  $x \rightarrow 1^-$  میل می‌کند، داخل قدر مطلق، منفی است.

$$x \rightarrow 1^+ : f(x) = x\sqrt{x} + x - 1 = x^{\frac{3}{2}} + x - 1 \rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + 1 \rightarrow f'_+(1) = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$

$$x \rightarrow 1^- : f(x) = x\sqrt{x} - x + 1 = x^{\frac{3}{2}} - x + 1 \rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 1 \rightarrow f'_-(1) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{پس: } f'_+(1) + 3f'_-(1) = \frac{5}{2} + 3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{2} = 4$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶

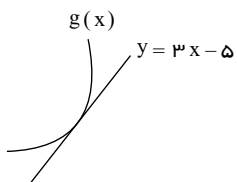
می‌دانیم که شیب خط مماس بر نمودار  $f$  در  $x = a$ ،  $f'(a)$  است.

و می‌دانیم:  $y = f(u) \rightarrow y' = u'f'(u)$

$$y = f(\sqrt[3]{6x + 2}) \Rightarrow y' = \frac{6}{3\sqrt[3]{(6x + 2)^2}} f'(\sqrt[3]{6x + 2}) \xrightarrow{x=1} y' = \frac{6}{12} f'(2) = -2 \Rightarrow f'(2) = -4$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷

می‌دانیم که  $(f \circ g)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x))$  و  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$  است.



$$\Rightarrow g(2) = 1, \text{ شیب خط مماس } = 3 \Rightarrow g'(2) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{2(x - 1)} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} f'(1) = \frac{2}{3} \Rightarrow f'(1) = \frac{4}{3}$$

$$(f \circ g)'(2) = g'(2) \cdot f'(g(2)) = 3 f'(1) = 3 \times \frac{4}{3} = 4$$



۱۸ می‌دانیم  $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  است پس عبارت خواسته شده  $f'(4)$  است.

$$f(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{5 - 2x} \rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(5 - 2x) - (-2)(1 + \sqrt{x})}{(5 - 2x)^2}$$

$$\rightarrow f'(4) = \frac{\frac{1}{4}(-3) - (-2)(3)}{(-3)^2} = \frac{-\frac{3}{4} + 6}{9} = \frac{\frac{21}{4}}{9} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

۱۹ ابتدا معادلهٔ خط مماس بر منحنی در نقطه‌ای به طول  $x = 1$  را نوشته و سپس معادلهٔ تلاقی این خط و منحنی را تشکیل داده و حل می‌کنیم.

$$1) x = 1 \xrightarrow{\text{تعیین}} y = 0 \rightarrow A \Big|_0^1$$

$$2) y' = 3x^2 - 2x \rightarrow m_{\text{مماس}} = 3 - 2 = 1$$

$$3) y - 0 = 1(x - 1) \rightarrow y = x - 1$$

$$\begin{cases} y = x^3 - x^2 & \xrightarrow{\text{تلاقی}} x^3 - x^2 = x - 1 \Rightarrow x^3 - x^2 - x + 1 = 0 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2(x - 1) - (x - 1) = 0 \Rightarrow (x - 1)(x^2 - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \xrightarrow{\text{تعیین}} y = -1 - 1 = -2 \end{cases}$$

۲۰ شرط مشتق‌پذیری تابع  $f$  در  $x = a$  آن است که: تابع  $f$  در  $x = a$  پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ تابع  $f$  در  $x = a$  باهم برابر باشند.

$$\text{پیوستگی: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (ax^2 + bx + 4) = 4a - 2b + 4 \\ \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} (x^2 - x) = -8 + 2 = -6 \end{cases} \Rightarrow 4a - 2b + 4 = -6 \rightarrow 4a - 2b = -10$$

$$f'((-2)^+) = f'((-2)^-) \rightarrow 2ax + b = 3x^2 - 1 \rightarrow -4a + b = 11$$

از حل  $\begin{cases} 4a - 2b = -10 \\ -4a + b = 11 \end{cases}$  به جواب  $b = -1$  و  $a = -3$  می‌رسیم.

$$\text{پس: } f(1) \stackrel{\text{ضابطه بالا}}{=} a + b + 4 = -3 - 1 + 4 = 0$$

۲۱ هرگاه دو تابع برهم مماس باشند، معادله‌ی تلاقی آنها ریشه‌ی مضاعف دارد.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 & \xrightarrow{\text{تلاقی}} x^2 + (mx + 2)^2 - 2x - 3 = 0 \\ y = mx + 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + m^2x^2 + 4 + 4mx - 2x - 3 = 0 \rightarrow \boxed{(1 + m^2)x^2 + (4m - 2)x + 1 = 0} : \text{ معادله‌ی تلاقی}$$

$$\text{شرط ریشه‌ی مضاعف: } \Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (4m - 2)^2 - 4(1 + m^2)(1) = 0$$

$$\Rightarrow 16m^2 + 4 - 16m - 4 - 4m^2 = 0 \Rightarrow 12m^2 - 16m = 0 \Rightarrow m(12m - 16) = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

۲۲ چون تابع در  $x = 1$  مشتق‌پذیر است لذا تابع  $f$  در نقطه  $x = 1$  پیوسته خواهد بود. در نتیجه داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \stackrel{\text{ضابطه‌ی بالا}}{=} 0 \Rightarrow f(1) = a = 0$$

۲۳

$$f(x) = (2x + 1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2x + 1}}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{آهنگ متوسط از } 12 \text{ تا } 4 &= \frac{f(12) - f(4)}{12 - 4} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{3}}{8} = \frac{-\frac{2}{15}}{8} = -\frac{1}{60} \\ \text{مشتق=آهنگ لحظه‌ای} &= \frac{-\frac{1}{2}}{2\sqrt{2x+1}} \Big|_{x=4} = \frac{-\frac{1}{2}}{9} = -\frac{1}{18} \end{aligned} \right\} \Rightarrow -\frac{1}{60} - \left(-\frac{1}{18}\right) = \frac{11}{540}$$

۲۴ می‌دانیم  $(f(g(x)))' = g'(x) \cdot f'(g(x))$  است.

$$(f \circ g)'(2) = 6 \rightarrow g'(2) \cdot f'(g(2)) = 6$$



$$\text{توجه کنید: } \begin{cases} g(x) = \frac{2x+1}{x-1} \rightarrow g(2) = \frac{4+1}{2-1} = 5 \\ g(x) = \frac{2x+1}{x-1} \rightarrow g'(x) = \frac{2(x-1) - 1(2x+1)}{(x-1)^2} \rightarrow g'(2) = -3 \end{cases}$$

$$g'(2) \cdot f'(g(2)) = 6 \rightarrow -3f'(5) = 6 \rightarrow f'(5) = -2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۵

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{2+h-2} = \frac{8}{9} \Rightarrow \frac{2+h + \frac{1}{2+h} - 2 - \frac{1}{2}}{h} = \frac{8}{9} \Rightarrow 8h = 9h + \frac{9}{2+h} - \frac{9}{2}$$

$$h = \frac{9}{2} - \frac{9}{2+h} \Rightarrow h = \frac{18 + 9h - 18}{2(2+h)} \Rightarrow 1 = \frac{9}{2(2+h)} \Rightarrow 4 + 2h = 9 \Rightarrow h = \frac{5}{2} = 2,5$$

هرگاه دو تابع  $f(x)$  و  $g(x)$  در  $x = a$  بر هم مماس باشند آنگاه  $\begin{cases} f(a) = g(a) \\ f'(a) = g'(a) \end{cases}$  است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۶

$$\begin{aligned} f(1) = g(1) &\rightarrow 2 - 5 = a + b + 1 \rightarrow a + b = -4 \\ f'(1) = g'(1) &\rightarrow 2 = 2ax + b \rightarrow 2a + b = 2 \end{aligned} \rightarrow a = 6, b = -10$$

می دانیم که  $(f \circ g)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x))$  است.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$  ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۷

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{4}{3} \Rightarrow f'(2) = \frac{4}{3}$$

$$(f \circ g)'(1) = g'(1) \cdot f'(g(1)) \rightarrow \begin{cases} g(1) = 1 + 1 = 2 \\ g'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow g'(1) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{پس: } g'(1) \cdot f'(g(1)) = \frac{3}{2} \times f'(2) = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 2$$

وقتی  $x$  اولیه، یک می باشد و نمو متغیر  $0,21$  است پس  $x$  ثانویه  $1,21$  است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۸

$$[1, 1,21] \text{ آهنگ متوسط} = \frac{f(1,21) - f(1)}{1,21 - 1} = \frac{\sqrt{1,21} - \sqrt{1}}{0,21} = \frac{1,1 - 1}{0,21} = \frac{1,0}{21} = \frac{10}{21}$$

$$x = 1 \text{ آهنگ لحظه‌ای در } f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

بنابراین تفاضل آنها  $\frac{1}{2} - \frac{10}{21} = \frac{1}{42}$  است.

تابع داده شده  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x}$  است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۹

$$[1, 4] \text{ آهنگ تغییر متوسط در} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{(8 - \frac{1}{4}) - (\frac{1}{2} - 1)}{3} = \frac{\frac{31}{4} + \frac{1}{2}}{3} = \frac{11}{4}$$

$$x = 2 \text{ آهنگ تغییر لحظه‌ای در } f'(2) \rightarrow f'(x) = x + \frac{1}{x^2} \rightarrow f'(2) = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

اختلاف این دو  $\frac{11}{4} - \frac{9}{4} = \frac{2}{4} = 0,5$  است.

تابع در نقطه  $2 = x$  پیوستگی از راست دارد برای محاسبه مشتق راست، براکت را تعیین عدد می کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۰

$$x \rightarrow (\sqrt{2})^+ \Rightarrow f(x) = x^3 - [\sqrt{2}] x \rightarrow f(x) = x^3 - 2x$$

$$\text{بنابراین: } f'(x) = 3x^2 - 2 \rightarrow f'_+(\sqrt{2}) = 3(2) - 2 = 4$$

شرط اینکه تابع  $f$  در  $x = a$  مشتق پذیر باشد آن است که تابع  $f$  در  $x = a$  پیوسته باشد و مشتق های راست و چپ تابع  $f$  در  $x = a$  با هم برابر باشند. ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۱

$$\text{پیوستگی: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x^2 + ax + b) = -4 + 2a + b \\ f(2) = 1 \end{cases}$$



پس  $2a + b = 1$  و در نتیجه  $5 = 2a + b$  است.

$$f'(2^+) = f'(2^-) \rightarrow \frac{-1}{(x-1)^2} = -2x + a \rightarrow -1 = -4 + a \rightarrow a = 3$$

$$\begin{aligned} 2a+b=5 \\ \rightarrow 6+b=5 \rightarrow b=-1 \end{aligned}$$

برای حل این سؤال از مشتق حاصل ضرب استفاده می‌کنیم.  $((uv)' = u'v + v'u)$  (۱) (۲) (۳) (۴) (۳۲)

$$f(x) = x \cdot \sqrt{\frac{3x+1}{x+2}} \rightarrow f'(x) = \sqrt{\frac{3x+1}{x+2}} + \frac{1 \left( \frac{3(x+2) - 1(3x+1)}{(x+2)^2} \right)}{\sqrt{\left( \frac{3x+1}{x+2} \right)^2}} x$$

$$\rightarrow f'(-3) = \sqrt{\frac{5}{8}} + \frac{\frac{1}{\sqrt{64}}(-3)}{\sqrt{\frac{3x+1}{x+2}}} = 2 - \frac{15}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۳۳)

$$y' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2} = 3 \Rightarrow \frac{f'(1)g(1) - g'(1)f(1)}{(g(1))^2} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{-4g(1) - 0}{(g(1))^2} = 3 \Rightarrow 3g(1) = -4 \Rightarrow g(1) = -\frac{4}{3}$$

با توجه به این که خط  $y = -1$  بر نمودار تابع  $f(x)$  مماس است، لذا معادله‌ی تلاقی خط و تابع درجه‌ی دوم، ریشه‌ی مضاعف دارد. (۱) (۲) (۳) (۴) (۳۴)

$$2x^2 - x + a = -1 \Rightarrow \boxed{2x^2 - x + (a+1) = 0} : \text{معادله‌ی تلاقی}$$

$$\Delta = 0 \xrightarrow{b^2 - 4ac = 0} (-1)^2 - 4(2)(a+1) = 0 \Rightarrow 1 - 8a - 8 = 0 \Rightarrow a = -\frac{7}{8}$$

می‌دانیم  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  است پس عبارت خواسته شده  $f'\left(\frac{1}{4}\right)$  (۱) (۲) (۳) (۴) (۳۵)

$$f(x) = \frac{-x-1}{\sqrt{x}} \rightarrow f'(x) = \frac{-1(\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)}{x} \rightarrow f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{-\frac{1}{2} - (-\frac{5}{4})}{\frac{1}{4}} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{5}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{1} = 3$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۳۶)

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{12 - 2}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای} = f'(x) = \sqrt{4x+1} + \frac{4}{2\sqrt{4x+1}}(x+2) \rightarrow f'\left(\frac{3}{4}\right) = 2 + \frac{11}{4} = \frac{19}{4} = 4,75$$

پس  $0,25 = 4,75 - 5$  است.وقتی  $x$  اولیه، یک می‌شود و نمو متغیر  $0,44$  است، پس  $x$  ثانویه  $1,44$  است. (۱) (۲) (۳) (۴) (۳۷)

$$\text{آهنگ متوسط در } [1, 1,44] = \frac{f(1,44) - f(1)}{1,44 - 1} = \frac{\frac{1,44 - 1}{\sqrt{1,44}} - 0}{0,44} = \frac{\frac{0,44}{1,2}}{0,44} = \frac{0,44}{0,528} = \frac{440}{528} = \frac{5}{6}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = f'(x) = \frac{1(\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)}{x} \rightarrow f'(1) = 1$$

بنابراین تفاضل آن دو  $1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$  می‌شود.(۱) (۲) (۳) (۴) (۳۸)دقت کنید که وقتی  $x \rightarrow 0^-$  داخل قدر مطلق منفی و  $0^- = -1$  است و وقتی  $x \rightarrow 0^+$  داخل قدر مطلق مثبت و  $0^+ = 1$  است.

$$\left. \begin{aligned} x = 0^- \Rightarrow f(x) = (-x)(-1) \Rightarrow f(x) = x \Rightarrow f'(0^-) = 1 \\ x = 0^+ \Rightarrow f(x) = (x)(0) \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow f'(0^+) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 - 0 = 1$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۳۹)

$$1) x = 4 \xrightarrow{\text{تابع}} y = 8 \rightarrow A \Big|_8^4$$



$$۲) y' = \frac{5\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(\Delta x - 4)}{x} \xrightarrow{x=4} m_{مماس} = \frac{10 - \frac{1}{4}(16)}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$۳) y - 8 = \frac{3}{2}(x - 4) \rightarrow y = \frac{3}{2}x + 2 \xrightarrow{x=0} y = 2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۰

$$\text{شرط پیوستگی: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - \frac{1}{x}) = 1 - 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + ax + b) = 1 + a + b \Rightarrow 1 + a + b = 0 \\ f(1) = 1 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{تساوی مشتق‌های راست و چپ: } f'_+(1) = f'_-(1) \rightarrow 1 + \frac{1}{x^2} = 2x + a \rightarrow 1 + 1 = 2 + a \rightarrow a = 0, b = -1$$

$$\text{پس } f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x} & x \geq 1 \\ x^2 - 1 & x < 1 \end{cases} \text{ می‌باشد.}$$

$$f(1 - \sqrt{2}) = (1 - \sqrt{2})^2 - 1 = 1 + 2 - 2\sqrt{2} - 1 = 2 - 2\sqrt{2}$$

$$\text{با توجه به این که آهنگ لحظه‌ای تغییر } f \text{ در } x = 2 \text{ برابر } -\frac{3}{2} \text{ است. در نتیجه } f'(2) = -\frac{3}{2} \text{ می‌باشد.}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۱

$$\begin{aligned} \text{پس: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= -\frac{3}{2} \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2+h)}{h} \\ &= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = -f'(2) = -(-\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$y = f(u) \rightarrow y' = u' \cdot f'(u) \text{ می‌دانیم: } ۱ ۲ ۳ ۴ ۴۲$$

ابتدا حد عبارت داده شده را محاسبه کرده و اطلاعات مورد نظر را بدست می‌آوریم.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) + 3}{h} = \frac{f(-2) + 3}{0}$$

چون جواب حد، عدد شده است پس این کسر  $\frac{0}{0}$  بوده که پس از رفع ابهام جوابش عدد شده است.

$$f(-2) + 3 = 0 \rightarrow f(-2) = -3$$

$$\text{پس: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) + 3}{h} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(-2+h)}{1} = f'(-2) = \frac{1}{2}$$

$$y = x^2 \cdot f(x) \rightarrow y' = 2x \cdot f(x) + x^2 \cdot f'(x) \rightarrow y'(-2) = (-4)f(-2) + 4f'(-2)$$

$$\rightarrow y'(-2) = (-4)(-3) + 4(\frac{1}{2}) = 12 + 2 = 14$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۳

شرط مشتق پذیری تابع  $f$  در  $x = a$  آن است که تابع  $f$  در  $x = a$  پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ آن در  $x = a$  با هم برابر باشند.

$$\text{شرط پیوستگی: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2\sqrt{4x-3} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + bx) = a + b \Rightarrow a + b = 2 \quad (I) \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

$$\text{تساوی مشتق‌های راست و چپ: } f'_+(1) = f'_-(1) \rightarrow 2 \times \frac{4}{2\sqrt{4x-3}} = 3ax^2 + b \rightarrow 4 = 3a + b \quad (II)$$

از  $I$  و  $II$  جواب  $b = 1$  و  $a = 1$  بدست می‌آید.

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۴

$$\text{می‌دانیم که } \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = f'_-(2) \text{ است.}$$

دقت کنید وقتی  $x \rightarrow 2^-$  داخل قدر مطلق منفی است پس داریم:

$$f(x) = -x + 2 + \sqrt{2x} \Rightarrow f'(x) = -1 + \frac{1(2)}{2\sqrt{2x}} \Rightarrow f'_-(2) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۵

آهنگ لحظه‌ای تابع  $y = f(x)$  در  $x = a$  برابر  $f'(a)$  است.

$$\text{متوسط آهنگ} = \frac{f(25) - f(4)}{25 - 4} = \frac{5 - 2}{21} = \frac{1}{7} \text{ و آهنگ لحظه‌ای} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$



$$\frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{1}{4a} = \frac{1}{49} \Rightarrow 4a = 49 \Rightarrow a = 12,25$$

1 2 3 4 46

$$1) x = 1 \rightarrow y = \sqrt{4} = 2 \rightarrow A \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$$

$$2) y' = \frac{1(2x+3)}{2\sqrt{x^2+3x}} \rightarrow m_{مماس} = \frac{5}{4}$$

$$3) y - 2 = \frac{5}{4}(x - 1) \xrightarrow{x=0} y - 2 = -\frac{5}{4} \rightarrow y = \frac{3}{4}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2 + ax + b & x \geq 2 \end{cases} \quad \text{به ازای } x < 2 \text{ داخل قدرمطلق منفی است، پس: } \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 47$$

شرط مشتق پذیر بودن تابع  $f$  در  $x = a$  آن است که تابع در  $x = a$  پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ تابع در  $x = a$  با هم برابر باشند.

$$x = 2 \text{ در پیوستگی در } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (\frac{1}{2}x^2 + ax + b) = 2 + 2a + b \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x - x^2) = 4 - 4 = 0 \end{cases} \rightarrow 2 + 2a + b = 0 \rightarrow 2a + b = -2$$

$$f(2) = 2 + 2a + b$$

$$f'(2^+) = f'(2^-) \rightarrow x + a = 2 - 2x \rightarrow 2 + a = 2 - 4 \rightarrow a = -4, b = 6$$

پس  $a + b = 2$  است.

1 2 3 4 48

$$f(x) = \sqrt{2x+1} + \frac{1}{x+1} \rightarrow \begin{cases} f(0) = 1 + 1 = 2 \\ f(4) = 3 + \frac{1}{5} = 3,2 \end{cases}$$

$$[0, 4] \text{ آهنگ تغییر متوسط تابع در } = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{3,2 - 2}{4} = \frac{1,2}{4} = 0,3$$

$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای} = \text{مشتق} \rightarrow f'(x) = \frac{1(2)}{2\sqrt{2x+1}} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\rightarrow f'(\frac{3}{2}) = \frac{1}{\sqrt{3+1}} - \frac{1}{(\frac{3}{2}+1)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{25}{4}} = \frac{1}{2} - \frac{4}{25} = \frac{25-8}{50} = \frac{17}{50} = 0,34$$

بنابراین تفاضل آن‌ها برابر  $0,4 - 0,3 = 0,1$  است.

1 2 3 4 49

مشخص است که  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1)$  می‌باشد، بنابراین کافی است از تابع، مشتق گرفته و به جای  $x$  آن عدد یک را قرار دهیم.

$$f(x) = \sqrt{\frac{4x+5}{x+3}} \rightarrow f'(x) = \frac{\frac{4(x+3)-1(4x+5)}{(x+3)^2}}{2\sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}} \rightarrow f'(1) = \frac{\frac{7}{16}}{2(\frac{7}{4})} = \frac{7}{48}$$

از آن جا که مساحت دایره برابر  $S = \pi r^2$  است و آهنگ آنی تغییر  $S$  نسبت به شعاع برابر مشتق  $S$  نسبت به  $r$  است، لذا داریم:

$$S = \pi r^2 \rightarrow \frac{dS}{dr} = 2\pi r \xrightarrow{r=1} 2\pi$$

1 2 3 4 50

$$\frac{f(9) - f(5)}{9 - 5} = \frac{\sqrt{81+144} - \sqrt{25+144}}{9 - 5} = \frac{\sqrt{225} - \sqrt{169}}{4} = \frac{15 - 13}{4} = \frac{1}{2}$$

1 2 3 4 51

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{4 - 9}{1} = -5$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = f'(x) = \frac{-72x}{x^4} = \frac{-72}{x^3} \xrightarrow{x=\sqrt[3]{12}} \frac{-72}{12} = -6$$

پس آهنگ متوسط یک واحد از آهنگ آنی بیشتر است.

شرط اینکه دو تابع برهم مماس باشند آن است که معادله‌ی تلاقی آن‌ها دارای ریشه‌ی مضاعف باشد. 1 2 3 4 52



$$\begin{cases} y = 2x^2 - 3x + 6 \\ y = 5x + a \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} 2x^2 - 3x + 6 = 5x + a \rightarrow 2x^2 - 8x + 6 - a = 0$$

$$\Delta = 0 \rightarrow b^2 - 4ac = 0 \rightarrow 64 - 8(6 - a) = 0$$

$$\rightarrow 8 - (6 - a) = 0 \rightarrow 8 - 6 + a = 0 \rightarrow a = -2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۴

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{5 - 4}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = f'(x) = \frac{4x}{2\sqrt{x^2 + 16}} \Rightarrow f'(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$$

بنابراین تفاضل آهنگ متوسط و لحظه‌ای، برابر صفر است.

فاصله‌ی نقطه‌ی  $M$  تا مبدأ مختصات از رابطه‌ی  $\sqrt{x^2 + y^2}$  به دست می‌آید و می‌دانیم آهنگ لحظه‌ای همان مشتق است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۵۵

$$T = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (\sqrt{x+8})^2} = \sqrt{x^2 + x + 8}$$

$$\rightarrow T'_x = \frac{1(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x+8}} \xrightarrow{x=7} \frac{15}{2\sqrt{64}} = \frac{15}{16}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۶

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(2.02) - f(2)}{2.02 - 2} = \frac{2.02 - 2}{0.02} = \frac{2.02 - 2}{0.02} = \frac{-2}{0.02} = -\frac{50}{1}$$

$$x = 2 \text{ در } \text{آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع} = f'(2) = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = -1$$

$$\text{پس: } -\frac{50}{1} - (-1) = -\frac{50}{1} + 1 = \frac{1}{1}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۷

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع} = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{\frac{5}{4} - 2}{3} = \frac{5 - 8}{12} = \frac{-3}{12} = \frac{-1}{4}$$

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2} \xrightarrow{x=\alpha} f'(\alpha) = \frac{-1}{(\alpha-1)^2}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = \frac{-1}{4} = \frac{-1}{(\alpha-1)^2} \Rightarrow (\alpha-1)^2 = 4$$

$$\alpha - 1 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 + 1 = 3 \\ \alpha = -2 + 1 = -1 \end{cases}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۸

$$f(x) = \left( \frac{\sqrt[3]{x^2 + 2x}}{x^2 - x} \right)^2 = \frac{x^2 + 2x}{(x^2 - x)^2} \rightarrow f'(x) = \frac{(2x+2)(x^2-x)^2 - 2(x^2-x)(2x-1)(x^2+2x)}{(x^2-x)^4} \rightarrow f'(2) = \frac{(6)(8) - 2(4)(3)(8)}{64}$$

$$= \frac{48 - 288}{64} = \frac{-240}{64} = \frac{-15}{4}$$

شرط اینکه تابع  $f$  در  $x = a$  مشتق‌پذیر باشد آن است که تابع  $f$  در  $x = a$  پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ آن در  $x = a$  با هم برابر باشند. ۱ ۲ ۳ ۴ ۵۹

$$x_{\text{پیوستگی}} = -2 \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \left( -\frac{1}{2}x^2 + bx + c \right) = -2 - 2b + c \\ \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \sqrt{5 - 2x} = \sqrt{5 + 4} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow -2 - 2b + c = 3 \\ f(-2) = \sqrt{5 + 4} = \sqrt{9} = 3 \end{cases}$$

$$f'((-2)^+) = f'((-2)^-) \rightarrow -x + b = \frac{1(-2)}{2\sqrt{5-2x}} \rightarrow 2 + b = \frac{-2}{6} \rightarrow 12 + 6b = -2 \rightarrow 6b = -14 \rightarrow b = \frac{-7}{3} \xrightarrow{-2b+c=5} \frac{14}{3} + c = 5 \rightarrow c = \frac{1}{3}$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۶۰

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(2,56) - f(2,25)}{2,56 - 2,25} = \frac{\sqrt{2,56} - \sqrt{2,25}}{2,56 - 2,25} = \frac{1,6 - 1,5}{0,31} = \frac{0,1}{0,31} = \frac{10}{31}$$

$$\text{آهنگ آنی (لحظه‌ای)} = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(2,25) = \frac{1}{2 \times 1,5} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} - \frac{10}{31} = \frac{1}{93}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۱

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(6,25) - f(4)}{6,25 - 4} = \frac{\sqrt{6,25} - \sqrt{4}}{2,25} = \frac{2,5 - 2}{2,25} = \frac{0,5}{2,25} = \frac{2}{9}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = \text{مشتق} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Big|_{x=4} = \frac{1}{4}$$

پس تفاضل آنها  $\frac{1}{4} - \frac{2}{9} = \frac{1}{36}$  می‌شود.

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۲

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = \text{مشتق} = 6x + 4 \xrightarrow{x=a+\frac{h}{2}} 6\left(a + \frac{h}{2}\right) + 4 = 6a + 3h + 4$$

$$\text{آهنگ متوسط از } a \text{ تا } a+h = \frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \frac{3(a+h)^2 + 4(a+h) - 2 - 3a^2 + 4a - 2}{h}$$

$$= \frac{6ah + 3h^2 + 4h}{h} = 6a + 3h + 4$$

واضح است تفاضل این دو مقدار برابر صفر است.

روش دوم: در تابع درجه‌ی دوم  $f(x) = ax^2 + bx + c$  آهنگ متوسط در هر بازه با مشتق تابع در وسط آن بازه برابر است. در تابع درجه‌ی دوم داده شده آهنگ متوسط در بازه  $[a, a+h]$  با آهنگ لحظه‌ای در وسط این بازه  $\left(a + \frac{h}{2}\right)$  برابر است و تفاضل آن‌ها صفر است.

همانگونه که می‌دانیم آهنگ آنی تغییر تابع  $f$  در نقطه‌ی  $t = 4$  برابر با مشتق تابع در این نقطه است. پس داریم:

$$f'(t) = -\frac{240}{t^2} \Rightarrow f'(4) = -\frac{240}{16} = -15$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{\frac{240}{5} - \frac{240}{3}}{2} = \frac{48 - 80}{2} = -16$$

پس آهنگ آنی یک واحد از آهنگ متوسط بیشتر است.

اگر دو تابع  $f(x)$  و  $g(x)$  در  $x = a$  بر هم مماس باشند، آن‌گاه  $f(a) = g(a)$  و  $f'(a) = g'(a)$  است.

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x+2}{x-1} \rightarrow f(2) = g(2) \rightarrow 4 = 4a + 2b \quad (I) \\ g(x) = ax^2 + bx \end{cases}$$

$$f'(2) = g'(2) \rightarrow \frac{1(x-1) - 1(x+2)}{(x-1)^2} = 2ax + b \rightarrow -3 = 4a + b \quad (II)$$

از حل دستگاه  $a = -\frac{5}{2}$  و  $b = 7$  به دست می‌آید.چون نمودار تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = x^3 + ax + b$  و خط به معادله‌ی  $y + 2x = b$  در نقطه‌ای به طول یک روی محور  $x$ ها متقاطع هستند پس نقطه‌ی

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 + ax + b \xrightarrow{0} 0 = 1 + a + b \\ y + 2x = b \xrightarrow{0} 0 + 2 = b \end{array} \right\} \rightarrow b = 2, a = -3$$

برای پیدا کردن طول‌های دو نقطه‌ی تقاطع دیگر منحنی و خط، باید آنها را تلافی دهیم.



$$x^3 + ax + b = b - 2x \xrightarrow{a=-2, b=2} x^3 - 2x + 2 = 2 - 2x$$

$$\rightarrow x^3 - x = 0 \rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۶

$$x + \Delta x \text{ تا } x \text{ تغییر از } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \xrightarrow{x=3} \frac{f(3.1) - f(3)}{0.1}$$

$$= \frac{(3.1)^3 - 3^3}{0.1} = \frac{29.791 - 27}{0.1} = 27.91$$

$$x = 3 \text{ در } f'(x) = 3x^2 \xrightarrow{x=3} 27$$

بنابراین تفاضل آنها می شود  $27.91 - 27 = 0.91$  است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۷

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{2x - x^2}{3x + 5}} \rightarrow f'(x) = \frac{2 \left( \frac{(2-2x)(3x+5) - 3(2x-x^2)}{(3x+5)^2} \right)}{3 \sqrt[3]{\frac{2x-x^2}{3x+5}}} \rightarrow f'(-2) = \frac{2 \left( \frac{(6)(-1) - 3(-8)}{1} \right)}{3 \sqrt[3]{\frac{-8}{-1}}} = \frac{2(18)}{6} = 6$$

برای مشتق پذیری در یک نقطه، تابع باید در آن نقطه پیوسته باشد و مشتق های راست و چپ، در آن نقطه با هم برابر باشند.

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۸

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{3}{x} - 5 \right) = 3 - 5 = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + ax + b) = 1 + a + b \\ f(1) &= 3 - 5 = -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 + a + b = -2 \Rightarrow a + b = -3$$

$$\left. \begin{aligned} f'_+(1) &= -\frac{3}{x^2} = -3 \\ f'_-(1) &= 2x + a = 2 + a \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2 + a = -3 \Rightarrow a = -5, b = 2$$

توجه کنید که وقتی  $4 \leq x < 8$  است آن گاه  $2 < \frac{x}{4} < 1$  بوده و  $1 < \left| \frac{x}{4} \right|$  می باشد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۹

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 6x} & 0 \leq x < 4 \\ x^2 - 9x & 4 \leq x < 8 \end{cases}$$

برای محاسبه  $f'(2)$  سراغ ضابطه بالا و برای محاسبه  $f'(5)$  سراغ ضابطه پایین می رویم.

$$f'(2) = \frac{1(2x+6)}{2\sqrt{x^2+6x}} = \frac{4+6}{2\sqrt{4+12}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$$f'(5) = 2x - 9 = 10 - 9 = 1$$

$$\text{پس: } f'(2) - f'(5) = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۰

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & x \geq k \\ 2ax + b & x < k \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & x \geq k \\ 2a & x < k \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} (1) \text{ شرط پیوستگی: } ak^2 + bk + c &= 2ak + b \\ (2) \text{ شرط مشتق پذیری: } 2ak + b &= 2a \end{aligned} \right\} \Rightarrow ak^2 + bk + c = 2a \xrightarrow{c=2a-b} b=2a-2ak$$

$$ak^2 + (2a - 2ak)k + a - (2a - 2ak) = 2a$$

$$ak^2 + 2ak - 2ak^2 + a - 2a + 2ak = 2a \Rightarrow -ak^2 + 4ak - 2a = 0 \xrightarrow{\div(-a)} k^2 - 4k + 2 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر}} \begin{cases} k = 1 \\ k = 3(\text{max}) \end{cases}$$

اگر دو تابع  $f(x)$  و  $g(x)$  در  $x = a$  بر هم مماس باشند آن گاه  $f(a) = g(a)$  و  $f'(a) = g'(a)$  است. دو تابع  $f(x) = x\sqrt{x}$  و  $g(x) = x^2 + ax + b$  داده شده است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۱

$$f(4) = g(4) \rightarrow 8 = 16 + 4a + b \rightarrow 4a + b = -8$$

$$f'(4) = g'(4) \rightarrow \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot 4 = 2x + a \rightarrow 2 + 1 = 8 + a \rightarrow a = -5 \xrightarrow{4a+b=-8} -20 + b = -8 \rightarrow b = 12$$



$$\text{آهنگ تغییر متوسط در } [5, 6] = \frac{f(6) - f(5)}{6 - 5} = \frac{\sqrt{21 - 36 + 24} - \sqrt{21 - 25 + 20}}{1} = 3 - 4 = -1$$

$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای} = y' = \frac{1(-2x + 4)}{2\sqrt{21 - x^2 + 4x}} = \frac{-x + 2}{\sqrt{21 - x^2 + 4x}}$$

$$\rightarrow \frac{-x + 2}{\sqrt{21 - x^2 + 4x}} = -1 \rightarrow -x + 2 = -\sqrt{21 - x^2 + 4x} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2 + 4 - 4x = 21 - x^2 + 4x \rightarrow 2x^2 - 8x - 17 = 0 \rightarrow \Delta = 64 + 136 = 200$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \frac{8 + \sqrt{200}}{4} = \frac{8 + 10\sqrt{2}}{4} = 2 + \frac{5}{2}\sqrt{2} \\ x = \frac{8 - \sqrt{200}}{4} = \frac{8 - 10\sqrt{2}}{4} = 2 - \frac{5}{2}\sqrt{2} \text{ (در معادله صدق نمی‌کند)} \end{cases}$$

در همسایگی راست  $x = -3$  ابتدا براکت را تعیین عدد و قدرمطلق را تعیین علامت می‌کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۷۳

$$x \rightarrow (-3)^+ \Rightarrow \{ [x] = -3 \quad |x| = -x \Rightarrow f(x) = (-3 + x)\sqrt[3]{9x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sqrt[3]{9x} + \frac{9}{3\sqrt[3]{(9x)^2}}(-3 + x) \Rightarrow f'(-3) = \sqrt[3]{-27} + \frac{3}{(\sqrt[3]{-27})^2}(-3 - 3) = -3 - \frac{6}{3} = -5$$

می‌دانیم:

$$P(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow P'(x) = 2ax + b$$

$$ax^2 + bx + c = (2ax + b)\left(\frac{1}{2}x + 1\right) - 2$$

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c = ax^2 + 2ax + \frac{b}{2}x + b - 2$$

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c = ax^2 + \left(2a + \frac{b}{2}\right)x + (b - 2) \Rightarrow \begin{cases} b = 2a + \frac{b}{2} \Rightarrow b = 4a \\ c = b - 2 \end{cases}$$

برای آن که کمترین میزان مجموع ضرایب به دست آید  $a = 1$  قابل قبول است. (برای هر مقدار  $a$  قابل قبول است.)

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 4 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 1 + 4 + 2 = 7$$

در واقع  $(f \circ g(x))' = f'(g(x)) \times g'(x)$  قدم اول  $g\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)$  رو به دست می‌آوریم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۷۵

$$g\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{3}{8} - 1}} = 2 \Rightarrow f'(2) \times g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) = ?$$

قدم دوم از تابع  $g(x)$  مشتق بگیریم.

$$g(x) = (x^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{3}(x^2 - 1)^{-\frac{4}{3}} \times 2x = \frac{-2x}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^4}}$$

$$g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) = \frac{-2 \times \frac{3}{\sqrt{8}}}{3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)^4}} = \frac{-16}{\sqrt{2}} = -8\sqrt{2}$$

قدم سوم محاسبه  $f'(2)$ . چون براکت داریم اول  $x = 2$  را در براکت قرار می‌دهیم (البته نباید داخل براکت صحیح شود).

$$ifx = 2 \Rightarrow [x^2 + \frac{1}{x}] = 4 \Rightarrow f(x) = (4x)^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 8x \Rightarrow f'(2) = 16$$

$$\text{در نهایت} \quad -8\sqrt{2} \times 16 = -128\sqrt{2} \times 4 \Rightarrow \text{برابر ۴}$$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 5x + b & x \leq 2 \\ 2ax + 5 & x > 2 \end{cases}$$

شرط مشتق پذیر بودن تابع  $f$  در  $x = a$  آن است که تابع در  $x = a$  پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ تابع در  $x = a$  با هم برابر باشند.



$$\text{پیوستگی: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4a + 5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4a + 10 + b \rightarrow 4a + 10 + b = 4a + 5 \rightarrow b = -5 \\ f(2) = 4a + 10 + b \end{cases}$$

$$f'(2^+) = f'(2^-) \rightarrow 2a = 2ax + 5 \rightarrow 2a = 4a + 5 \rightarrow a = -\frac{5}{2}$$

$$\text{پس } a + b = -\frac{5}{2} - 5 = -\frac{15}{2}$$



# پاسخنامه کلیبی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴

۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴
۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴

۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴
۴۱	۱	۲	۳	۴
۴۲	۱	۲	۳	۴
۴۳	۱	۲	۳	۴
۴۴	۱	۲	۳	۴
۴۵	۱	۲	۳	۴
۴۶	۱	۲	۳	۴
۴۷	۱	۲	۳	۴
۴۸	۱	۲	۳	۴
۴۹	۱	۲	۳	۴
۵۰	۱	۲	۳	۴
۵۱	۱	۲	۳	۴
۵۲	۱	۲	۳	۴
۵۳	۱	۲	۳	۴
۵۴	۱	۲	۳	۴
۵۵	۱	۲	۳	۴
۵۶	۱	۲	۳	۴
۵۷	۱	۲	۳	۴

۵۸	۱	۲	۳	۴
۵۹	۱	۲	۳	۴
۶۰	۱	۲	۳	۴
۶۱	۱	۲	۳	۴
۶۲	۱	۲	۳	۴
۶۳	۱	۲	۳	۴
۶۴	۱	۲	۳	۴
۶۵	۱	۲	۳	۴
۶۶	۱	۲	۳	۴
۶۷	۱	۲	۳	۴
۶۸	۱	۲	۳	۴
۶۹	۱	۲	۳	۴
۷۰	۱	۲	۳	۴
۷۱	۱	۲	۳	۴
۷۲	۱	۲	۳	۴
۷۳	۱	۲	۳	۴
۷۴	۱	۲	۳	۴
۷۵	۱	۲	۳	۴
۷۶	۱	۲	۳	۴



معین کریمی

# سوالات سراسری هفته هفتم کاربرد مشتق

۱ تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = x^3 + ax^2 + x$  همواره صعودی است. تغییرات  $a$  کدام است؟

- ۱  $0 \leq a < 2$       ۲  $-\sqrt{3} \leq a < 2$       ۳  $|a| < \sqrt{3}$       ۴  $|a| \leq 2$

۲ نقاط بحرانی تابع با ضابطه  $f(x) = x^2(x-2)^2$  سه رأس یک مثلث اند. نوع این مثلث کدام است؟

- ۱ متساوی الاضلاع      ۲ فقط متساوی الساقین      ۳ فقط قائم الزاویه      ۴ قائم الزاویه و متساوی الساقین

۳ ماکسیمم مطلق تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{1}{x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5}$  کدام است؟

- ۱  $\frac{1}{6}$       ۲  $\frac{1}{5}$       ۳  $\frac{1}{3}$       ۴  $\frac{1}{2}$

۴ نقطه‌ی بحرانی تابع با ضابطه  $f(x) = (x^3 - 3x^2 + 4)^{\frac{1}{3}}$  روی بازه  $(-1, 2)$  چگونه است؟

- ۱ مینیمم      ۲ ماکسیمم      ۳ عادی      ۴ مشتق ناپذیر

۵ دو نقطه به طول‌های ۳ و ۵- نقاط بحرانی تابع با ضابطه  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$  هستند. مقدار مینیمم نسبی این تابع، کدام است؟

- ۱ -۸۴      ۲ -۸۱      ۳ -۵۷      ۴ -۷۵

۶ بیشترین مساحت مستطیلی که یک ضلع آن بر قطر نیم‌دایره به شعاع ۶ واحد و دو رأس دیگر آن روی این نیم‌دایره باشد، کدام است؟

- ۱ ۱۸      ۲ ۲۴      ۳ ۲۷      ۴ ۳۶

۷ تابع با ضابطه  $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x$  از نظر اکسترمم نسبی کدام وضع را دارد؟

- ۱ یک مینیمم نسبی دارد.      ۲ یک ماکسیمم نسبی دارد.      ۳ مینیمم نسبی و ماکسیمم نسبی دارد.      ۴ فاقد اکسترمم نسبی است.

۸ کم‌ترین فاصله نقطه  $(4, 0)$  از نقاط منحنی به معادله  $y = \sqrt{2x+9}$  کدام است؟

- ۱  $\sqrt{5}$       ۲  $2\sqrt{2}$       ۳ ۳      ۴ ۴

۹ اگر تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x+a}$  دارای اکسترمم نسبی باشد، مقادیر  $a$  کدام است؟

- ۱  $a < -2$  یا  $a > 0$       ۲  $a < 0$  یا  $a > 2$       ۳  $-2 < a < 0$       ۴  $0 < a < 2$

۱۰ نقاط بحرانی تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{2}{3}}$  در بازه  $(-1, 1)$  کدام است؟

- ۱  $-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$       ۲  $-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}$       ۳  $-\frac{\sqrt{2}}{4}, 0, \frac{\sqrt{2}}{4}$       ۴  $-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۱ مقادیر مینیمم و ماکسیمم مطلق تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x$  در بازه  $[-4, 3]$ ، کدام است؟

- ۱ -۱۸ و ۲۴      ۲ -۴۵ و ۲۷      ۳ -۳۶ و ۲۷      ۴ -۲۷ و ۳۶

۱۲ نقطه‌ای با کدام طول بر روی محور  $x$ ‌ها انتخاب شود، به طوری که تفاضل فواصل آن، از دو نقطه  $A$  و  $B$  بیش‌ترین مقدار را داشته

- ۱ ۸      ۲ ۹      ۳ ۱۰      ۴ ۱۱



۱۳) نمودار  $y = (x - 1)^3(x + 1)$  در کدام فاصله نزولی است؟

- ①  $x < 1$       ②  $x < -\frac{1}{2}$       ③  $x > 1$       ④  $x > -\frac{1}{2}$

۱۴) مجموعه‌ی طول‌های نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = |x - 2|\sqrt{x^2}$  کدام است؟

- ①  $\{0, \frac{4}{5}, 2\}$       ②  $\{0, \frac{2}{3}, 2\}$       ③  $\{0, 1\}$       ④  $\{\frac{2}{3}, 2\}$

۱۵) مستطیل محاط در دایره به قطر ۶ واحد را حول یک ضلع خود دوران می‌دهیم تا استوانه‌های قائم ایجاد شود. وقتی حجم این استوانه‌ها بیشترین مقدار را دارد، ارتفاع آن کدام است؟

- ① ۴      ②  $2\sqrt{3}$       ③  $2\sqrt{6}$       ④  $3\sqrt{2}$

۱۶) در تابع با ضابطه  $f(x) = x|x| - 2x$ ، فاصله دو نقطهٔ ماکسیم نسبی و مینیم نسبی آن، کدام است؟

- ①  $2\sqrt{2}$       ② ۳      ③  $3\sqrt{2}$       ④ ۴

۱۷) بیش‌ترین مساحت از زمینی را که می‌توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود چند مترمربع است؟

- ① ۹۵۸      ② ۹۶۸      ③ ۹۷۸      ④ ۹۸۸

۱۸) تعداد نقاط بحرانی تابع  $f$  با ضابطه‌ی  $f(x) = |\sin x|$  در بازه‌ی  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$  کدام است؟

- ① ۲      ② ۳      ③ ۴      ④ ۵

۱۹) به ازای کدام مقدار  $k$ ، بیشترین مقدار و کم‌ترین مقدار تابع  $f(x) = x^3 - 3x^2 + k$  در بازه‌ی  $[1, 3]$  قرینه‌ی یکدیگرند؟

- ① ۱      ② ۲      ③ ۳      ④ ۴

۲۰) کم‌ترین مقدار تابع  $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2$  کدام است؟

- ① -۳۶      ② -۳۲      ③ -۲۴      ④ -۱۸

۲۱) طول نقطه‌ی ماکسیم نسبی تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2$  کدام است؟

- ① -۲      ② -۱      ③ ۰      ④ ۱

۲۲) ماکسیم تابع  $y = -|x|$  در فاصله‌ی  $[-1, 1]$  چقدر است؟

- ① -۱      ② ۰      ③  $\frac{1}{2}$       ④ ۱

۲۳) بیش‌ترین مساحت از مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که مجموع یک ضلع زاویهٔ قائمه و وتر آن برابر ۶ باشد، کدام است؟

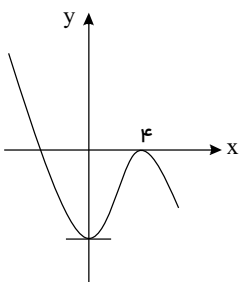
- ① ۳      ②  $2\sqrt{3}$       ③ ۴      ④  $3\sqrt{2}$

۲۴) در تابع با ضابطه  $f(x) = x|x - 4|$ ، فاصله دو نقطهٔ ماکسیم نسبی و مینیم نسبی آن، کدام است؟

- ①  $\sqrt{5}$       ②  $2\sqrt{2}$       ③  $3\sqrt{2}$       ④  $2\sqrt{5}$

۲۵) شکل مقابل نمودار تابع به معادله‌ی  $y = ax^3 + bx^2 - 16$  است.  $a$  کدام است؟

- ① -۱      ②  $\frac{1}{2}$       ③  $-\frac{1}{2}$       ④  $-\frac{2}{3}$





۲۶ به ازای کدام مقادیر  $x$ ، نمودار تابع  $y = 1 - 4x^2$  صعودی است؟

- ۱  $x < 0$     ۲  $x > 0$     ۳  $-2 < x < 2$     ۴  $-4 < x < 4$

۲۷ بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن، بر روی منحنی به معادله  $y = \sqrt{12 - x}$  در ناحیه اول واقع شود، کدام است؟

- ۱  $8\sqrt{2}$     ۲  $8\sqrt{3}$     ۳ ۱۶    ۴ ۱۸

۲۸ در ساخت یک کیف به شکل مخروط قائم به حجم  $\frac{\pi}{3}$ ، با کدام ارتفاع، کمترین مقدار جنس مصرف می‌شود؟

- ۱  $\frac{\sqrt{2}}{2}$     ۲ ۱    ۳  $\sqrt{2}$     ۴  $\sqrt{2}$

۲۹ کمترین مقدار تابع با ضابطه  $f(x) = 1 - \cos^2 x - \sin x$  کدام است؟

- ۱ -۱    ۲  $-\frac{1}{2}$     ۳  $-\frac{1}{4}$     ۴ ۰

۳۰ مجموعه‌ی طول‌های نقاط بحرانی تابع با ضابطه  $f(x) = (x^2 - 28) \cdot \sqrt[3]{x}$  کدام است؟

- ۱  $\{-2, 2\}$     ۲  $\{-\sqrt{7}, \sqrt{7}\}$     ۳  $\{-2, 0, 2\}$     ۴  $\{-7, 0, 1\}$

۳۱ فاصله‌نقطه‌ی ماکسیمم نسبی تابع با ضابطه  $f(x) = x + \sqrt{4x - x^2}$  از نیمساز ناحیه‌ی اول کدام است؟

- ۱ ۱    ۲  $\sqrt{2}$     ۳ ۲    ۴  $2\sqrt{2}$

۳۲ می‌نیمم مطلق تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2$  روی بازه  $[-1, 3]$  کدام است؟

- ۱  $-\frac{11}{3}$     ۲  $-\frac{10}{3}$     ۳  $-\frac{8}{3}$     ۴  $-\frac{7}{3}$

۳۳ کوتاه‌ترین فاصله‌ی نقطه  $A(5, 0)$  از نقاط منحنی به معادله  $y = \sqrt{2x + 7}$ ، کدام است؟

- ۱ ۴    ۲ ۴٫۵    ۳ ۵    ۴  $3\sqrt{3}$

۳۴ اگر تابع  $f$  در نقطه‌ی  $c$  دارای اکسترمم نسبی باشد، الزاماً تابع  $f$  چگونه است؟

- ۱  $f'(c) = 0$     ۲ در  $c$  پیوسته    ۳ در همسایگی، تعریف شده    ۴ در  $c$  مشتق پذیر

۳۵ دو برابر عددی از عدد دیگر ۶ واحد بیشتر است. اگر حاصلضرب آن‌ها مینیمم باشد، مجموع آن دو عدد کدام است؟

- ۱  $-\frac{3}{2}$     ۲  $-\frac{1}{2}$     ۳  $\frac{1}{2}$     ۴  $\frac{3}{2}$

۳۶ از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با اندازه‌ی وتر ۱۰ واحد، دو ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شود تا حجم حاصل از دوران این مثلث حول ضلع قائم، بیش‌ترین باشد؟

- ۱  $\frac{2}{1}$     ۲  $\frac{\sqrt{3}}{1}$     ۳  $\frac{3}{2}$     ۴  $\frac{\sqrt{2}}{1}$

۳۷ مقدار ماکسیمم نسبی تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 1}$ ، کدام است؟

- ۱  $-1 + \sqrt{5}$     ۲  $1 + \sqrt{5}$     ۳  $-1 + \sqrt{3}$     ۴  $1 + \sqrt{3}$

۳۸ کوتاه‌ترین فاصله‌ی سهمی  $y^2 = 4x$  از نقطه  $M(3, 0)$ ، کدام است؟

- ۱  $\sqrt{2}$     ۲  $\frac{3}{2}$     ۳  $2\sqrt{2}$     ۴ ۳



۳۹ فرض کنید  $A$  و  $B$  نقاط اکسترمم تابع  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$  باشند چند نقطه روی منحنی  $f$  وجود دارد که خطوط مماس بر آن‌ها موازی پاره خط  $AB$  است؟

- ① صفر      ② ۱      ③ ۲      ④ ۳

۴۰ حداکثر مساحت جانبی استوانه‌ای که درون یک کره به شعاع  $4\sqrt{2}$  محاط می‌شود کدام است؟

- ①  $32\pi$       ②  $64\pi$       ③  $\frac{256\pi}{3}$       ④  $\frac{512\pi}{3}$

۴۱ قرینه نقطه  $A$  واقع بر سهمی  $f(x) = x^2$  را نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم صفحه مختصات تعیین کرده و آن را  $A'$  می‌نامیم. اگر طول نقطه  $A$  بین دو طول متوالی از محل بر تقاطع تابع  $f$  با خط نیمساز مورد نظر باشد ماکزیم طول پاره خط  $AA'$  کدام است؟

- ①  $\sqrt{2}$       ②  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       ③  $\frac{\sqrt{2}}{4}$       ④  $\frac{\sqrt{2}}{8}$

۴۲ تعداد نقاط اکسترمم نسبی تابع  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1} |x^2 - 4|$  کدام است؟

- ① ۲      ② ۳      ③ ۴      ④ ۵

۴۳ فرض کنید  $f(x) = (x[x])^3$  و  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ . مقدار مشتق چپ تابع  $x = \frac{\sqrt{5}}{2}$  چند برابر  $(-48\sqrt{5})$  است؟

- ① ۱      ② ۲      ③ ۴      ④ ۸

۴۴ قرینه نقطه  $A$  واقع بر منحنی  $f(x) = \sqrt[3]{-x}$  را در دامنه  $[0, 1]$  نسبت به نیمساز ناحیه دوم و چهارم صفحه مختصات تعیین و آن را  $A'$  می‌نامیم. ماکزیم طول پاره خط  $AA'$ ، کدام است؟

- ①  $\frac{2}{3\sqrt{6}}$       ②  $\frac{4}{3\sqrt{6}}$       ③  $\frac{2}{3\sqrt{2}}$       ④  $\frac{4}{3\sqrt{2}}$



## پاسخنامه تشریحی

1 2 3 4 1

برای اینکه تابع صعودی باشد مشتق باید همواره مثبت باشد و شرط آنکه یک عبارت درجه دوم، مثبت باشد آن است که  $a > 0$  و  $\Delta < 0$  باشد.

$$y' = 3x^2 + 2ax + 1 > 0 \rightarrow \begin{cases} a > 0 \rightarrow 3 > 0 \\ \Delta < 0 \rightarrow 4a^2 - 12 < 0 \rightarrow a^2 < 3 \rightarrow -\sqrt{3} < a < \sqrt{3} \rightarrow |a| < \sqrt{3} \end{cases}$$

1 2 3 4 2

نقاط بحرانی، نقاطی از درون دامنه‌ی تعریف هستند که در آنها مشتق برابر صفر است یا مشتق وجود ندارد.

$$y = x^2(x-2)^2 \Rightarrow y' = 2x(x-2)^2 + 2(x-2) \cdot x^2 = \underbrace{2x(x-2)}_{\text{فکتور}}(x-2+x) = 0$$

$$\Rightarrow 2x(x-2)(2x-2) = 0$$

$$x = 0 \xrightarrow{\text{تعیین}} y = 0 \rightarrow A \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$x = 2 \xrightarrow{\text{تعیین}} y = 0 \rightarrow B \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow AB = \sqrt{4+0} = 2, AC = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, BC = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$x = 1 \xrightarrow{\text{تعیین}} y = 1 \rightarrow C \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

مثلث متساوی الساقین است و چون  $2^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2$  پس مثلث قائم‌الزاویه نیز می‌باشد.

روش اول: 1 2 3 4 3

$$y = \frac{1}{x^2 - 4x^3 + 4x^2 + 5} = \frac{1}{x^2(x^2 - 4x + 4) + 5} = \frac{1}{x^2(x-2)^2 + 5}$$

کم‌ترین مقدار عبارت  $x^2(x-2)^2$  مساوی صفر است بنابراین کم‌ترین مقدار مخرج کسر مساوی 5 است پس ماکسیمم مطلق تابع  $\frac{1}{5}$  است. (صورت کسر یک عدد مثبت است پس بیش‌ترین

مقدار کسر وقتی بدست می‌آید که مخرج کسر، کم‌ترین مقدار را داشته باشد)

روش دوم:

$$D_f = R = (-\infty, +\infty)$$

$$y' = \frac{-(4x^3 - 12x^2 + 8x)}{(x^2 - 4x^3 + 4x^2 + 5)^2} = \frac{-4x(x^2 - 3x + 2)}{(x^2 - 4x^3 + 4x^2 + 5)^2} = \frac{-4x(x-1)(x-2)}{(x^2 - 4x^3 + 4x^2 + 5)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

حال مقادیر تابع را به ازای  $\pm\infty$  و طول‌های نقاط بحرانی حساب می‌کنیم.

$$f(0) = \frac{1}{5} \text{ مطلق min و } f(1) = \frac{1}{6}, f(2) = \frac{1}{5}, f(\pm\infty) = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

اگر بیش‌ترین یا کم‌ترین مقدار تابع به ازای  $\pm\infty$  بدست می‌آید تابع max یا min مطلق نداشته.

نقاط بحرانی نقاطی از درون دامنه‌ی تعریف هستند که در آن نقاط، مشتق برابر صفر است یا مشتق وجود ندارد. 1 2 3 4 4

$$f(x) = (x^3 - 3x^2 + 4)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 4} \rightarrow f'(x) = \frac{3x^2 - 6x}{3\sqrt[3]{(x^3 - 3x^2 + 4)^2}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{ق ق} & x = 0 \rightarrow 3x(x-2) = 0 \rightarrow \text{صورت} = 0 \\ \text{غ ق} & \text{ق} \text{ (در بازه قرار ندارد)} & x = 2 \\ \text{مخرج} = 0 & \rightarrow x^3 - 3x^2 + 4 = 0 \rightarrow (x+1)(x-2)^2 = 0 \\ \text{غ ق} & \text{ق} \text{ (در بازه قرار ندارد)} & x = -1 \\ \text{غ ق} & \text{ق} \text{ (در بازه قرار ندارد)} & x = 2 \end{cases}$$

کافی است مشتق را در اطراف  $x = 0$  (ریشه‌ی ساده‌ی مشتق) تعیین علامت کنیم.

$x$	-1	0	2
$y'$	+	0	-
$y$	↗	Max	↘

$\rightarrow$  طول نقطه‌ی  $Max$  است  $x = 0$

برای تجزیه‌ی عبارت درجه‌ی سوم  $x^3 - 3x^2 + 4$  توجه کنید که چون  $x = 2$  عبارت را صفر می‌کند پس این عبارت بر  $x - 2$  بخش پذیر است. با تقسیم عبارت درجه‌ی سوم بر  $x - 2$  چندجمله‌ای تجزیه می‌شود.

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx \text{ دو نقطه به طول‌های 3 و -5 نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی } f(x) = x^3 + ax^2 + bx \text{ هستند. پس به ازای این دو طول، مشتق تابع برابر صفر می‌شود. داریم: } 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow \begin{cases} f'(3) = 0 \Rightarrow 27 + 6a + b = 0 \\ f'(-5) = 0 \Rightarrow 75 - 10a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 3, b = -45$$



حال با معلوم شدن ضابطه‌ی  $f$ ، برای تعیین عرض مینیمم نسبی این تابع، ابتدا طول مینیمم نسبی را از روی ریشه‌های ساده‌ی  $f'$  مشخص می‌کنیم و با جای‌گذاری طول مینیمم نسبی در تابع، عرض آن را محاسبه می‌نماییم. اما با توجه به صورت تست،  $x = 3$ ،  $x = -5$  همان طول نقاط اکسترمم نسبی تابع می‌باشند.

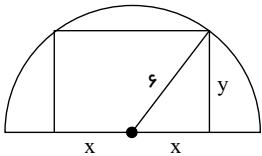
$$f(x) = x^2 + 3x^2 - 45x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6x - 45 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 5)(x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 3 \end{cases}$$

$x$	$-\infty$	$-5$	$3$	$+\infty$
$f'$		+	0	-
$f$			↘	↗
			Max	Min

$$y_{Min} = f(3) = 27 + 27 - 135 = -81$$

روش اول: 1 2 3 4 6



$$\Rightarrow S = 2xy : \text{دومتغیره}$$

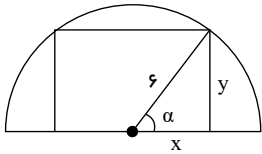
$$x^2 + y^2 = 36 \rightarrow y^2 = 36 - x^2 \rightarrow y = \sqrt{36 - x^2}$$

$$\text{پس : } S(x) = 2x \cdot \sqrt{36 - x^2} : \text{یک متغیره} \xrightarrow{S'=0} 2\sqrt{36 - x^2} + \frac{1(-2x)}{2\sqrt{36 - x^2}}(2x) = 0$$

$$\rightarrow 2\sqrt{36 - x^2} = \frac{2x^2}{\sqrt{36 - x^2}} \rightarrow 36 - x^2 = x^2 \rightarrow 2x^2 = 36$$

$$\rightarrow x^2 = 18 \rightarrow x = 3\sqrt{2}, y = 3\sqrt{2} \rightarrow S_{Max} = 2(3\sqrt{2})(3\sqrt{2}) = 36$$

روش دوم:



$$\sin \alpha = \frac{y}{6} \rightarrow y = 6 \sin \alpha, \cos \alpha = \frac{x}{6} \rightarrow x = 6 \cos \alpha$$

$$S = 2xy = 2(6 \cos \alpha)(6 \sin \alpha) = 72 \sin \alpha \cos \alpha = 36 \sin 2\alpha$$

این عبارت وقتی  $Max$  است که  $\sin 2\alpha = 1$  باشد، پس  $S_{Max} = 36$  است.

1 2 3 4 7

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 8 = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0$$

برای حل این معادله درجه سوم دقت کنید که چون مجموع ضرایب آن صفر است یک ریشه معادله  $x = 1$  می‌باشد و معادله بر  $x - 1$  بخش پذیر است.

$$(x - 1)(x^2 + x - 2) = 0 \Rightarrow (x - 1)(x + 2)(x - 1) = 0 \rightarrow (x - 1)^2(x + 2) = 0 \rightarrow x = 1, x = -2$$

با استفاده از آزمون مشتق اول، داریم:

$x$	$-\infty$	$-2$	$1$	$+\infty$
$f'$		-	0	+
$y$			↘	↗
			Min	

فاصله‌ی نقطه‌ی  $A(x, y)$  از نقطه‌ی  $B(4, 0)$  برابر با  $d = \sqrt{(x - 4)^2 + y^2}$  است، از طرفی نقطه‌ی  $A$  روی منحنی تابع  $y = \sqrt{2x + 9}$  است، بنابراین

1 2 3 4 8

$$d = \sqrt{(x - 4)^2 + y^2} = \sqrt{(x - 4)^2 + (2x + 9)} = \sqrt{x^2 - 6x + 25} : \text{یک متغیره}$$

داریم:

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{1(2x - 6)}{2\sqrt{x^2 - 6x + 25}} = 0 \rightarrow x = 3$$

در نتیجه داریم:



$$d_{\min} = \sqrt{9 - 18 + 25} = \sqrt{16} = 4$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۹

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x+a} \rightarrow f'(x) = \frac{(2x-2)(x+a) - (x^2-2x)}{(x+a)^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2ax - 2x - 2a - x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x^2 + 2ax - 2a = 0$$

معادله  $f'(x) = 0$  باید دارای ریشه ساده باشد پس  $\Delta$  باید مثبت باشد.

$$\Delta > 0 \rightarrow b^2 - 4ac > 0 \rightarrow 4a^2 + 8a > 0 \Rightarrow a^2 + 2a > 0 \Rightarrow a(a+2) > 0 \Rightarrow \begin{cases} a < -2 \\ \text{یا} \\ a > 0 \end{cases}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰

نقاط بحرانی، نقاطی از دامنه‌ی تعریف هستند که در آنها مشتق صفر است یا وجود ندارد.

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}(2x^{\frac{2}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}) = \frac{2}{3}\left(\frac{2\sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt[3]{x}}\right)$$

$$\text{صورت} = 0 \Rightarrow 2\sqrt[3]{x^2} - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{توان ۳}} x^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt[3]{2}}{4} \in (-1, 1)$$

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow x = 0 \in (-1, 1)$$

پس  $\pm \frac{\sqrt[3]{2}}{4}$  و  $0$  طول نقاط بحرانی تابع هستند.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x \rightarrow f'(x) = x^2 - 2x - 15 = (x-5)(x+3) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 5 \rightarrow \text{غ ق ق (در بازه قرار ندارد)} \\ x = -3 \end{cases}$$

اکنون باید مقدار تابع را به ازای طول نقطه‌ی بحرانی و ابتدا و انتهای بازه، بدست آوریم.

$$f(-4) = -\frac{64}{3} - 16 + 60 = \frac{68}{3} \sim 22,6$$

$$f(3) = 9 - 9 - 45 = -45 \rightarrow \text{مطلق } Min$$

$$f(-3) = -9 - 9 + 45 = 27 \rightarrow \text{مطلق } Max$$

فاصله دو نقطه  $A \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix}$  و  $B \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix}$  برابر  $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$  می‌باشد.

$$d = AM - BM = \sqrt{(x-1)^2 + 25} - \sqrt{(x-7)^2 + 4}$$

نقطه  $M(x, y)$  را در نظر می‌گیریم؛ داریم:

می‌خواهیم  $d$  ماکسیمم شود، بنابراین:

$$d' = \frac{2(x-1)}{2\sqrt{(x-1)^2 + 25}} - \frac{2(x-7)}{2\sqrt{(x-7)^2 + 4}} = 0 \Rightarrow \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2 + 25}} = \frac{x-7}{\sqrt{(x-7)^2 + 4}}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2 + 25} = \frac{(x-7)^2}{(x-7)^2 + 4}$$

$$\Rightarrow (x-1)^2(x-7)^2 + 4(x-1)^2 = (x-7)^2(x-1)^2 + 25(x-7)^2 \rightarrow 4(x-1)^2 = 25(x-7)^2$$

$$\Rightarrow 2|x-1| = 5|x-7| \xrightarrow{x>7} 2x-2 = 5x-35 \Rightarrow x = 11$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳

از تابع، مشتق گرفته و کوچکتر از صفر قرار می‌دهیم.

$$y' = 3(x-1)^2(x+1) + (x-1)^3 = (x-1)^2(3(x+1) + x-1) = \underbrace{(x-1)^2}_{+}(4x+2) < 0$$

$$\rightarrow 4x+2 < 0 \rightarrow 4x < -2 \rightarrow x < -\frac{1}{2}$$

نقاط بحرانی، نقاطی از درون دامنه‌ی تعریف هستند که در آنها مشتق صفر است یا وجود ندارد. دامنه‌ی تعریف این تابع، مجموعه‌ی اعداد حقیقی

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴

است.  $D_f = (-\infty, +\infty)$

ابتدا قدرمطلق را با تعیین علامت، از بین می‌بریم:

$$x \geq 2 \rightarrow f(x) = (x-2)x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{5}{3}} - 2x^{\frac{2}{3}} \rightarrow f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 0 \xrightarrow{\times 3} 5x^{\frac{2}{3}} - 4x^{-\frac{1}{3}} = 0$$

$$\rightarrow 5\sqrt[3]{x^2} - \frac{4}{\sqrt[3]{x}} = 0 \rightarrow \frac{5x-4}{\sqrt[3]{x}} = 0 \rightarrow x = \frac{4}{5}, \text{ در } x=0 \text{ مشتق وجود ندارد.}$$

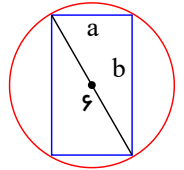
به ازای  $x < 2$  نیز همین دو نقطه‌ی بحرانی بدست می‌آید. دقت کنید  $x = 2$  ریشه‌ی ساده داخل قدرمطلق می‌باشد، بنابراین تابع در  $x = 2$  مشتق‌ناپذیر است پس بحرانی می‌باشد. (نقطه‌ی





۱۵) مطابق شکل، مستطیل محاط در دایره را حول ضلع به طول  $b$  دوران می دهیم تا استوانه‌ای با ارتفاع  $b$  و شعاع قاعده‌ی  $a$  حاصل شود. بنابراین می خواهیم  $V = \pi a^2 b$  ماکسیم شود. از آنجا که  $a^2 + b^2 = 36$  در نتیجه داریم:

$$a^2 = 36 - b^2 \Rightarrow V = \pi a^2 b = \pi(36 - b^2)b = \pi(36b - b^3) \\ \Rightarrow V'(b) = \pi(36 - 3b^2) = 0 \Rightarrow b^2 = 12 \Rightarrow b = 2\sqrt{3}$$



روش اول: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶

$$x \geq 0 \rightarrow f(x) = x^2 - 2x \rightarrow f'(x) = 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1$$

$$x < 0 \rightarrow f(x) = -x^2 - 2x \rightarrow f'(x) = -2x - 2 = 0 \rightarrow x = -1$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$y'$	$+$	$0$	$-$	$0$
$y$	$\nearrow$	$\uparrow$ Max	$\searrow$ Min	$\nearrow$

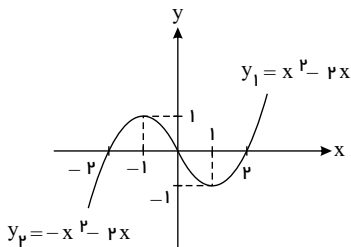
$$\left\{ \begin{array}{l} A \\ B \end{array} \right| \begin{array}{l} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{array} \quad AB = \sqrt{(-1-1)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

روش دوم:

می توانیم نمودار تابع داده شده را رسم کنیم.

$$x \geq 0 \rightarrow y = x^2 - 2x \rightarrow S \Big|_{-1}^1, \quad x = 0, 2 \quad \text{محل برخورد تابع با محور } x \text{ ها}$$

$$x < 0 \rightarrow y = -x^2 - 2x \rightarrow S \Big|_{-1}^1, \quad x = 0, -2 \quad \text{محل برخورد تابع با محور } x \text{ ها}$$

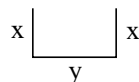


$$\left\{ \begin{array}{l} A \\ B \end{array} \right| \begin{array}{l} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{array} \quad AB = \sqrt{(-1-1)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷

باتوجه به شکل و فرض مسئله،  $y = 88 - 2x$  است، پس  $y = 88 - 2x$

تابع مساحت مستطیل برابر است با:



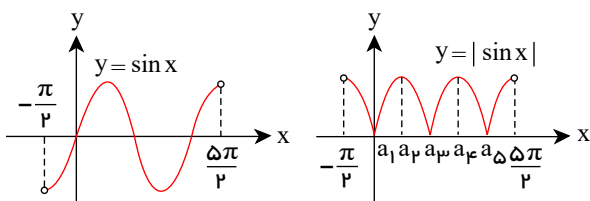
$$S(x, y) = xy \Rightarrow S(x) = x(88 - 2x) = 88x - 2x^2$$

برای به دست آوردن بیشترین مقدار تابع  $S$ ، از آن مشتق گرفته و برابر صفر قرار می دهیم:

$$S'(x) = 88 - 4x = 0 \Rightarrow x = 22 \Rightarrow S_{\max} = S(22) = 22(88 - 44) = 22 \times 44 = 968$$

راه اول: با رسم شکل، مشاهده می شود نقاط  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  نقاط بحرانی می باشند. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸

در نقاط  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  مشتق ناپذیر بوده و مشتق تابع در نقاط  $a_2, a_4$  برابر صفر می باشد.



۱۹) برای محاسبه‌ی اکستریم‌های مطلق در توابع پیوسته باید عرض‌های نقاط بحرانی را محاسبه نموده و با مقادیر تابع در ابتدا و انتهای بازه مقایسه نمود. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۹

نقاط بحرانی تابع  $f(x)$  را در بازه  $[1, 3]$  می‌یابیم. لذا داریم:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \text{ (در بازه قرار ندارد)}$$

$$\begin{cases} f(2) = k - 4 \rightarrow Min \\ f(1) = k - 2 \\ f(3) = k \rightarrow Max \end{cases} \Rightarrow f(2) + f(3) = k + k - 4 = 2k - 4 = 0 \Rightarrow k = 2$$

چون بازه‌ای داده نشده است دامنه‌ی تعریف این تابع را به عنوان بازه در نظر می‌گیریم  $D_f = (-\infty, +\infty)$  ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۰

$$y = \frac{1}{4}x^4 - x^2 - 2x^3 \Rightarrow y' = x^3 - 3x^2 - 4x = x(x^2 - 3x - 4) = x(x-4)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \\ x = -1 \end{cases}$$

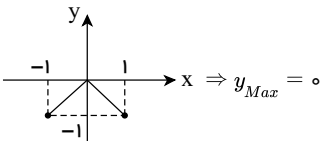
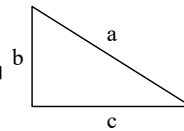
حال مقادیر تابع را به ازای طول‌های نقاط بحرانی و ابتدا و انتهای بازه بدست می‌آوریم.

$$f(\pm\infty) = \frac{1}{4}(\pm\infty)^4 = +\infty, f(0) = 0, f(4) = -32, f(-1) = -\frac{3}{4}$$

کمترین مقدار تابع برابر  $-32$  می‌باشد.۱ ۲ ۳ ۴ ۲۱

$$f'(x) = 4x^3 + 4x^2 - 8x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 + x - 2) = 0 \Rightarrow 4x(x-1)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		$Min$	$Max$	$Min$	

پس، طول نقطه‌ی  $Max$  نسبی تابع برابر صفر است.بهترین روش برای حل این مسئله رسم نمودار است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۲است. فرض مسئله به صورت  $a + b = 6$  است.شکل مسئله به صورت ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۳

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 - b^2 = c^2 \rightarrow (a+b)(a-b) = c^2 \rightarrow 6(a-b) = c^2 \rightarrow a-b = \frac{c^2}{6}$$

$$\text{پس: } \begin{cases} a+b=6 \\ a-b=\frac{c^2}{6} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a+b=6 \\ -a+b=-\frac{c^2}{6} \end{cases} \rightarrow 2b=6-\frac{c^2}{6} \rightarrow b=3-\frac{c^2}{12}$$

$$S = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}\left(3-\frac{c^2}{12}\right)(c) = \frac{1}{2}\left(3c-\frac{1}{12}c^3\right) \text{ یک متغیره:}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{4}c^2\right) = 0 \rightarrow \frac{1}{4}c^2 = 3 \rightarrow c^2 = 12 \rightarrow c = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$b = 3 - \frac{c^2}{12} \rightarrow b = 3 - 1 = 2$$

$$\text{پس: } S_{Max} = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}(2)(2\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$$

روش اول: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۴ $x = 4$  ریشه ساده داخل قدرمطلق است (نقطه گوشه) بنابراین در  $x = 4$  مشتق وجود ندارد (بحرانی).

$$f(x) = \begin{cases} x(x-4) & x \geq 4 \\ -x(x-4) & x < 4 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & x \geq 4 \\ -x^2 + 4x & x < 4 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & x > 4 \\ -2x + 4 & x < 4 \end{cases}$$

اگر مشتق را مساوی صفر قرار دهیم  $x = 2$  به دست می‌آید.



$x$	$-\infty$	$2$	$4$	$+\infty$		
$y'$		$+$	$0$	$-$	وجود ندارد	$+$
$y$		$\nearrow$	$4$	$\searrow$	$0$	$\nearrow$
			Max		Min	

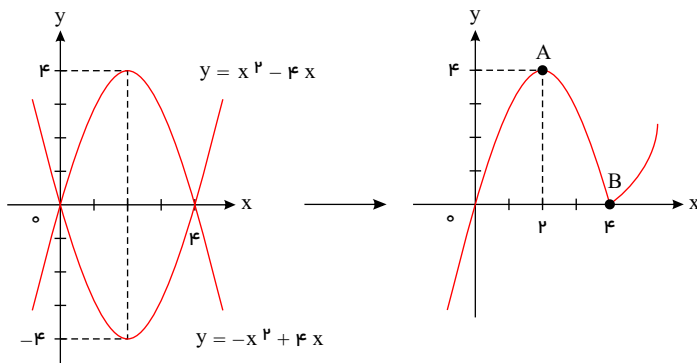
$$\begin{cases} A \\ B \end{cases} \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{matrix} \rightarrow AB = \sqrt{(2-4)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

روش دوم:

می توانیم نمودار تابع داده شده را رسم کنیم.

$x \geq 4 \rightarrow y = x^2 - 4x \rightarrow S \begin{matrix} 2 \\ -4 \end{matrix}$  و  $x = 0, 4$  محل برخورد تابع با محور  $x$  ها

$x < 4 \rightarrow y = -x^2 + 4x \rightarrow S \begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix}$  و  $x = 0, 4$  محل برخورد تابع با محور  $x$  ها



$$\begin{cases} A \\ B \end{cases} \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{matrix} \rightarrow AB = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$x = 4$  طول نقطه‌ی  $Max$  است، بنابراین مشتق به ازای  $x = 4$  برابر صفر است. (۱) (۲) (۳) (۴) (۲۵)

$$y = ax^3 + bx^2 - 16 \rightarrow y' = 3ax^2 + 2bx \xrightarrow{y'(4)=0} 0 = 48a + 8b \rightarrow 6a + b = 0$$

نقطه‌ی  $(4, 0)$  روی تابع قرار دارد پس در تابع صدق می‌کند.

صنق در تابع  $\rightarrow 0 = 64a + 16b - 16 \rightarrow 0 = 4a + b - 1 \rightarrow 4a + b = 1$

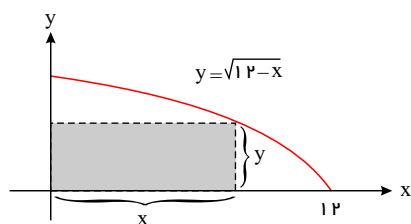
$$\begin{cases} 6a + b = 0 \\ 4a + b = 1 \end{cases} \rightarrow a = -\frac{1}{2}, b = 3$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۲۶)

برای بررسی صعودی یا نزولی بودن تابع مشتق اول را بررسی می‌کنیم ضمناً برای آنکه تابع، صعودی باشد باید  $y' > 0$  باشد.

$$y' = -8x \rightarrow \frac{x}{y'} \begin{matrix} -\infty & 0 & +\infty \\ + & 0 & - \end{matrix} \rightarrow x < 0$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۲۷)

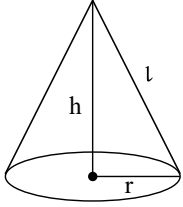


$$S = x \cdot y = x \cdot \sqrt{12-x} \xrightarrow{S'=0} \sqrt{12-x} + \frac{-1}{2\sqrt{12-x}}x = 0$$



$$\rightarrow \sqrt{12-x} = \frac{x}{2\sqrt{12-x}} \rightarrow 2(12-x) = x \rightarrow 24 - 2x = x$$

$$\rightarrow 3x = 24 \rightarrow x = 8 \rightarrow S_{Max} = 8\sqrt{12-8} = 8 \times 2 = 16$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۲۸

$$\text{حجم استوانه} = \frac{1}{3} \times \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع} \rightarrow \frac{\pi}{3} = \frac{1}{3} \pi r^2 h \rightarrow r^2 h = 1 \rightarrow r^2 = \frac{1}{h}$$

$$\text{مساحت جانبی: } S = \pi r l = \pi r \sqrt{r^2 + h^2} = \pi \sqrt{\frac{1}{h} \sqrt{\frac{1}{h} + h^2}} \rightarrow S = \pi \sqrt{h + \frac{1}{h^2}}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} \pi \times \frac{1 - \frac{2h}{h^2}}{2\sqrt{h + \frac{1}{h^2}}} = 0 \rightarrow 1 = \frac{2}{h^2} \rightarrow h^2 = 2 \rightarrow h = \sqrt{2}$$

روش اول: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۹

$$y = 1 - \cos^2 x - \sin x \rightarrow y = \sin^2 x - \sin x \xrightarrow{\sin x=A} y = A^2 - A, \quad A \in [-1, 1]$$

حال کافی است از تابع مشتق گرفته و طول نقطه‌ی بحرانی را بدست آورده و سپس مقدار تابع را به ازای این طول و دو سر بازه بدست آوریم.

$$y' = 2A - 1 = 0 \rightarrow A = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} y(-1) = 1 + 1 = 2 \\ y(1) = 1 - 1 = 0 \\ y(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \rightarrow \text{مطلق } Min \end{cases}$$

روش دوم:

$$y = 1 - \cos^2 x - \sin x = \sin^2 x - \sin x = (\sin x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$$

این عبارت وقتی کمترین مقدار را به خود می‌گیرد که عبارت  $(\sin x - \frac{1}{2})^2$  که مربع کامل است کمترین مقدار یعنی صفر شود پس:

$$y_{\text{مطلق } Min} = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۰

نقاط بحرانی، نقاطی از درون دامنه‌ی تعریف هستند که در آنها مشتق صفر است یا وجود ندارد.

دامنه‌ی تعریف تابع، مجموعه‌ی اعداد حقیقی است، یعنی  $D_f = (-\infty, +\infty)$  است.

$$f(x) = (x^2 - 28)\sqrt[3]{x} \Rightarrow f'(x) = 2x \cdot \sqrt[3]{x} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x^2 - 28)$$

$$= \frac{6x\sqrt[3]{x^3} + x^2 - 28}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{6x^2 + x^2 - 28}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{7x^2 - 28}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\text{صورت} = 0 \Rightarrow 7x^2 - 28 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

پس طول‌های نقاط بحرانی این تابع ۲ و -۲ و ۰ می‌باشند.

توجه کنید دامنه‌ی تعریف تابع  $[0, 4]$  است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۱

$$f(x) = x + \sqrt{4x - x^2} \rightarrow f'(x) = 1 + \frac{1(4 - 2x)}{2\sqrt{4x - x^2}} \rightarrow \frac{2x - 4}{2\sqrt{4x - x^2}} = 1 \rightarrow \frac{x - 2}{\sqrt{4x - x^2}} = 1 \rightarrow \sqrt{4x - x^2} = x - 2 \rightarrow 4x - x^2 = x^2 + 4 - 4x$$



$$\rightarrow 2x^2 - 8x + 4 = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \rightarrow \Delta = 16 - 8 = 8 \rightarrow \begin{cases} x = \frac{4 + \sqrt{8}}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2} \\ x = \frac{4 - \sqrt{8}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2} \end{cases} \rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & 0 & 2 - \sqrt{2} & 2 + \sqrt{2} & 4 \\ \hline y' & & - & + & - \\ \hline y & & & \nearrow 2 + 2\sqrt{2} & \searrow \\ & & & \text{Max} & \end{array}$$

$$\begin{cases} A \left| \begin{array}{l} 2 + \sqrt{2} \\ 2 + 2\sqrt{2} \end{array} \right. \\ y = x \rightarrow x - y = 0 \end{cases} \rightarrow AH = \frac{|2 + \sqrt{2} - 2 - 2\sqrt{2}|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

توجه کنید فاصله نقطه  $A \left| \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \end{array} \right.$  از خط به معادله  $ax + by + c = 0$  از رابطه  $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  بدست می‌آید.

- ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۲

$$f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{3} - x^2$$

$$f'(x) = x^2 - x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 - x - 2) = 0 \Rightarrow x(x - 2)(x + 1) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

حال، مقادیر تابع را به ازای ابتدا و انتهای بازه و طول نقاط بحرانی حساب می‌کنیم.

$$f(0) = 0, f(-1) = \frac{-5}{12}, f(2) = -\frac{8}{3}, f(3) = \frac{9}{4}$$

پس کمترین مقدار تابع برابر  $-\frac{8}{3}$  می‌باشد.

نقطه  $B \left| \begin{array}{l} x \\ \sqrt{2x+7} \end{array} \right.$  را روی منحنی در نظر می‌گیریم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۳

$$A \left| \begin{array}{l} 5 \\ 0 \end{array} \right., \left| \begin{array}{l} x \\ \sqrt{2x+7} \end{array} \right. \rightarrow AB = \sqrt{(5-x)^2 + (0 - \sqrt{2x+7})^2} = \sqrt{25 + x^2 - 10x + 2x + 7} = \sqrt{x^2 - 8x + 32} \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{2x - 8}{2\sqrt{x^2 - 8x + 32}} = 0$$

$$\rightarrow x = 4 \rightarrow \text{فاصله } Min = \sqrt{16 - 32 + 32} = 4$$

اگر تابع  $f$  در نقطه‌ی  $c$  دارای اکسترمم نسبی باشد، الزاماً  $f$  در یک همسایگی، تعریف می‌شود اگر  $c$  طول  $Max$  نسبی تابع باشد  $f(c)$  از مقادیر تابع در یک همسایگی  $c$  بزرگ‌تر بوده یا مساوی با آن‌هاست و اگر  $c$  طول  $Min$  نسبی تابع باشد،  $f(c)$  از مقادیر تابع در یک همسایگی  $c$  کوچک‌تر بوده یا مساوی با آن‌هاست.

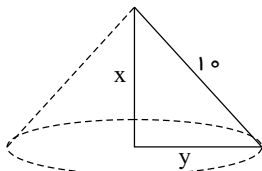
- ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۵

$$2x = y + 6 \rightarrow y = 2x - 6$$

$$\text{پس } xy = x(2x - 6) = 2x^2 - 6x \xrightarrow{\text{مشتق}} 4x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{y=2x-6} y = 3 - 6 = -3 \rightarrow x + y = \frac{3}{2} - 3 = -\frac{3}{2}$$

اگر مثلث قائم‌الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه‌اش دوران کند شکل حاصل، مخروط است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۶



$$\text{دو متغیره: } \frac{1}{3}\pi y^2 x = \frac{1}{3}\pi x^2 y \text{ (ارتفاع) (مساحت قاعده) مخروط } V$$

$$\text{از طرفی: } x^2 + y^2 = 100 \rightarrow y^2 = 100 - x^2$$

$$\text{یک متغیره: } V = \frac{1}{3}\pi x(100 - x^2) = \frac{100\pi}{3}x - \frac{1}{3}\pi x^3$$



$$\xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{100\pi}{3} - \pi x^r = 0 \rightarrow \pi x^r = \frac{100\pi}{3} \rightarrow x^r = \frac{100}{3} \rightarrow x = \frac{10}{\sqrt{3}} \xrightarrow{y^r = 100 - x^r} y^r = 100 - \frac{100}{3} = \frac{200}{3} \rightarrow y = \frac{\sqrt{200}}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{بنابراین: } \frac{x}{y} = \frac{\frac{10}{\sqrt{3}}}{\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \sqrt{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۷

$$f(x) = \frac{x^r + 2x - 3}{x^r + 1} \rightarrow f'(x) = \frac{(2x + 2)(x^r + 1) - 2x(x^r + 2x - 3)}{(x^r + 1)^2} \rightarrow f'(x) = \frac{2x^r + 2x + 2x^r + 2 - 2x^r - 4x^r + 6x}{(x^r + 1)^2}$$

$$= \frac{-2x^r + 8x + 2}{(x^r + 1)^2} = 0 \rightarrow -2x^r + 8x + 2 = 0$$

$$\rightarrow x^r - 4x - 1 = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 16 + 4 = 20 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{4 + \sqrt{20}}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{5}}{2} = 2 + \sqrt{5} \\ x_2 = \frac{4 - \sqrt{20}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{5}}{2} = 2 - \sqrt{5} \end{cases} \rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -\infty & 2 - \sqrt{5} & 2 + \sqrt{5} & +\infty \\ \hline y' & & - & + & - \\ \hline y & & \searrow & \nearrow & \searrow \end{array}$$

برای پیدا کردن عرض ماکسیمم، کافی است  $2 + \sqrt{5}$  را در تابع قرار دهیم.

$$f(2 + \sqrt{5}) = \frac{(2 + \sqrt{5})^r + 2(2 + \sqrt{5}) - 3}{(2 + \sqrt{5})^r + 1} = \frac{4 + 5 + 4\sqrt{5} + 4 + 2\sqrt{5} - 3}{4 + 5 + 4\sqrt{5} + 1}$$

$$= \frac{6\sqrt{5} + 10}{4\sqrt{5} + 10} = \frac{2(3\sqrt{5} + 5)}{2(2\sqrt{5} + 5)} = \frac{3\sqrt{5} + 5}{2\sqrt{5} + 5} \times \frac{2\sqrt{5} - 5}{2\sqrt{5} - 5}$$

$$= \frac{30 - 15\sqrt{5} + 10\sqrt{5} - 25}{20 - 25} = \frac{5 - 5\sqrt{5}}{-5} = \frac{-5(-1 + \sqrt{5})}{-5} = -1 + \sqrt{5}$$

نقطه  $A(2\sqrt{\alpha}, \alpha)$  را روی منحنی  $y^r = 4x$  در نظر می‌گیریم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۸

$$AM = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (2\sqrt{\alpha} - 0)^2} = \sqrt{\alpha^2 + 9 - 6\alpha + 4\alpha} = \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + 9}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{1(2\alpha - 2)}{2\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + 9}} = 0 \rightarrow \alpha = 1 \rightarrow AA' = \sqrt{1 - 2 + 9} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۹

$$f'(x) = 6x^r - 6x - 12 \xrightarrow{f'(x)=0} x^r - x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A(-1, 8) \\ B(2, -19) \end{cases} \Rightarrow m_{AB} = \frac{8 - (-19)}{-1 - 2} = -9 \Rightarrow \text{شیب خطی که از نقاط اکسترمم تابع عبور می‌کند.}$$

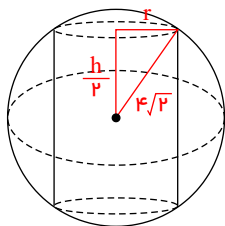
نقاط مدنظر باید دارای مشتق  $-9$  باشند تا شیب خط مماس بر آن‌ها موازی پاره‌خط  $AB$  باشد.

$$6x^r - 6x - 12 = -9 \Rightarrow 6x^r - 6x - 3 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \text{۲ جواب دارد.}$$

یعنی ۲ نقطه یافت می‌شود.

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۰

$$S_{\text{جانبی}} = 2\pi r \times h \begin{pmatrix} r > 0 \\ h > 0 \end{pmatrix} \text{: مساحت جانبی استوانه}$$





$$(4\sqrt{2})^r = r^r + \left(\frac{h}{2}\right)^r \Rightarrow r^r = 32 - \frac{h^r}{4} \Rightarrow r = \sqrt[3]{32 - \frac{h^r}{4}}$$

پس:

$$S_{\text{جانبی}} = 2\pi \times \sqrt{32 - \frac{h^r}{4}} \times h$$

$$\Rightarrow S = 2\pi \times \sqrt{32h^r - \frac{h^r}{4}} \Rightarrow S' = 2\pi \times \frac{64h - h^r}{2\sqrt{32h^r - \frac{h^r}{4}}}$$

$$\xrightarrow{S'=0} 64h - h^r = 0 \xrightarrow{h>0} \begin{cases} h = 0 \times \\ h = 8 \Rightarrow r = 4 \end{cases}$$

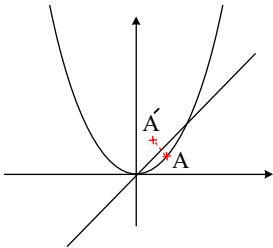
$$\Rightarrow S_{\text{max}} = 2\pi \times 4 \times 8 = 64\pi$$

روش دوم: از معادله  $r^r + \frac{h^r}{4} = 32$  می‌توان  $r$  و  $h$  را حدس زد.

$$\begin{cases} r = 4 \\ h = 8 \end{cases}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۱

نقطه  $A$  روی سهمی پس مختصات آن به صورت  $A(\alpha, \alpha^2)$  خواهد بود همچنین  $A'$  قرینه  $A$  نسبت به  $y = k$  است پس  $A'(\alpha^2, \alpha)$  فاصله این دو نقطه از هم برابر است با:



$$|AA'| = \sqrt{(\alpha^2 - \alpha)^2 + (\alpha - \alpha^2)^2} = \sqrt{2\alpha^4 - 4\alpha^3 + 2\alpha^2} = d$$

$$\xrightarrow{d'=0} d' = \frac{8\alpha^3 - 12\alpha^2 + 4\alpha}{2\sqrt{2\alpha^4 - 4\alpha^3 + 2\alpha^2}} \xrightarrow{d'=0} 8\alpha^3 - 12\alpha^2 + 4\alpha = 0$$

$$\Rightarrow 4\alpha(2\alpha^2 - 3\alpha + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{بین دو نقطه تقاطع}} \alpha = \frac{1}{2} \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d = |AA'| = \sqrt{2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

نکته: ریشه‌های ساده داخل قدرمطلق به شرط آن که عامل صفرشونده پشت آن‌ها نباشد زاویه‌دار (گوشه) هستند که مشتق‌پذیر نبود و جزء نقاط بحرانی و

اکسترم نسبی به حساب می‌آیند.  $x = -2$  و  $x = 2$

این دو نقطه در واقع نقاط مرزی هستند که در تابع دو ضابطه‌ای یا همان قدرمطلق وجود دارند.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\overbrace{x^4 - 4x^2}^{x^2(x^2 - 4)}}{x^2 - 1} & x \geq 2 \text{ یا } x \leq -2 \\ \frac{\underbrace{-(x^4 - 4x^2)}_{-x^2(x^2 - 4)}}{x^2 - 1} & -2 < x < 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{(4x^3 - 8x)(x^2 - 1) - 2x(x^4 - 4x^2)}{(x^2 - 1)^2} & x > 2 \text{ یا } x < -2 \\ \frac{-[(4x^3 - 8x)(x^2 - 1) - 2x(x^4 - 4x^2)]}{(x^2 - 1)^2} & -2 < x < 2 \end{cases}$$



ریشه‌های هر دو قسمت یکسان هستند پس نقطه عبارت اول را مساوی صفر قرار می‌دهیم داریم:

$$4x^5 - 4x^3 - 8x^2 + 8x - 2x^5 + 8x^3 = 0 \Rightarrow 2x^5 - 4x^3 + 8x = 0 \Rightarrow 2x(x^4 - 2x^2 + 4) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$\Delta < 0$

این ریشه برای عبارت دوم قابل قبول است و نه عبارت اول در کل سه اکستریم نسبی داریم.

می‌دانیم که  $(f \circ g)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x))$  است. بنابراین برای پیدا کردن مشتق چپ در  $x = \frac{\sqrt{5}}{2}$  به  $g'(\frac{\sqrt{5}}{2})$  و  $f'(g(\frac{\sqrt{5}}{2}))$  نیاز داریم. (۱) (۲) (۳) (۴) (۴۳)

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \rightarrow g\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \rightarrow g'(x) = \frac{-\frac{1}{2} \cdot 2x}{x^2 - 1} = \frac{-x}{x^2 - 1} \rightarrow g'\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{5}{4} - 1} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{1}{4}} = -2\sqrt{5}$$

$$f(x) = (x[x])^3 \xrightarrow{x = \frac{\sqrt{5}}{2}} (2x)^3 = 8x^3 \rightarrow f'(x) = 24x^2 \quad *$$

$$\text{پس: } (f \circ g)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x)) = g'\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cdot f'\left(g\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right) = -2\sqrt{5} \cdot f'(2) = -2\sqrt{5} \cdot (24 \times 4) = -192\sqrt{5}$$

که این مقدار ۸ برابر  $24\sqrt{5}$  است.

توجه کنید قرینه نقطه  $A \left| \frac{x}{y} \right|$  نسبت به نیمساز ناحیه دوم و چهارم  $A' \left| \frac{-y}{-x} \right|$  است. اکنون نقطه  $A \left| \frac{\alpha}{-\sqrt[3]{\alpha}} \right|$  را روی تابع  $f$  در نظر می‌گیریم. بنابراین قرینه آن (۱) (۲) (۳) (۴) (۴۴)

نسبت به نیمساز ناحیه دوم و چهارم  $A' \left| \frac{\sqrt[3]{\alpha}}{-\alpha} \right|$  است.

$$AA' = \sqrt{(\alpha - \sqrt[3]{\alpha})^2 + (-\sqrt[3]{\alpha} + \alpha)^2} = \sqrt{(\alpha - \sqrt[3]{\alpha})^2 + (\alpha - \sqrt[3]{\alpha})^2} = \sqrt{2(\alpha - \sqrt[3]{\alpha})^2} = \sqrt{2}|\alpha - \sqrt[3]{\alpha}|$$

داخل قدرمطلق منفی

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} -\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{3\sqrt[3]{\alpha^2}}\right) = 0 \rightarrow \frac{3\sqrt[3]{\alpha^2} - 1}{3\sqrt[3]{\alpha^2}} = 0 \rightarrow 3\sqrt[3]{\alpha^2} - 1 = 0 \rightarrow \sqrt[3]{\alpha^2} = \frac{1}{3} \rightarrow \alpha^2 = \frac{1}{27} \rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{27}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$AA' = -\sqrt{2}(\alpha - \sqrt[3]{\alpha}) = -\sqrt{2}\left(\frac{1}{3\sqrt{3}} - \sqrt[3]{\frac{1}{3\sqrt{3}}}\right) = -\sqrt{2}\left(\frac{1}{3\sqrt{3}} - \sqrt[3]{\frac{1}{(\sqrt{3})^3}}\right) = -\sqrt{2}\left(\frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\sqrt{2}\left(\frac{-2}{3\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4}{3\sqrt{6}}$$



## پاسخنامه کاپری

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴

۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴

۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴
۳۳	۱	۲	۳	۴

۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴
۴۱	۱	۲	۳	۴
۴۲	۱	۲	۳	۴
۴۳	۱	۲	۳	۴
۴۴	۱	۲	۳	۴



معین کرمی

# سوالات سراسری هفته هفتم

## مجموعه مسائل، امتحان

۱) اجتماع دو مجموعه  $A$  و  $B$  دارای ۴۰ عضو است. مجموعه‌های  $(A - B)$  و  $(B - A)$  به ترتیب ۱۲ و ۱۸ عضو دارند. اگر از هر یک از مجموعه‌های  $A$  و  $B$ ، ۹ عضو برداشته شود، از مجموعه‌ی اشتراک آن‌ها ۴ عضو کم می‌شود. تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه‌ی جدید، کدام است؟

- ۱) ۲۲      ۲) ۲۳      ۳) ۲۴      ۴) ۲۶

۲) مجموعه‌ی  $A$  دارای ۳۶ عضو و مجموعه‌ی  $B$  دارای ۲۸ عضو است. اشتراک آن‌ها ۱۵ عضو دارد. اگر ۱۶ عضو از مجموعه‌ی  $A$  حذف شود، از اشتراک آن‌ها ۹ عضو حذف می‌شود، تعداد عضوهای اجتماع مجموعه‌ی جدید با مجموعه‌ی  $B$ ، کدام است؟

- ۱) ۴۰      ۲) ۴۱      ۳) ۴۲      ۴) ۴۵

۳) اگر مجموعه‌های  $A = \left\{ \frac{1}{x} \mid x \in N \right\}$  و  $B = \left\{ \frac{x}{8} \mid x \in N \right\}$  مفروض باشند، کدام یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟

- ۱)  $A - B$       ۲)  $B - A$       ۳)  $A \cap B$       ۴)  $A \cup B$

۴) اگر  $A$  مجموعه‌ی اعداد اول و  $B$  مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد باشند. کدام یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟

- ۱)  $A \cup B$       ۲)  $A \cap B$       ۳)  $B - A$       ۴)  $A - B$

۵) اگر  $A = \{2, 3, 6, 7, 8\}$  و  $B = \{2, 4, 5, 6\}$  باشند، مجموعه‌ی  $(A \cup B) - [A - (A \cap B)]$  چند عضو دارد؟

- ۱) ۲      ۲) ۳      ۳) ۴      ۴) ۵

۶) اگر  $A$  مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد و  $B$  مجموعه‌ی اعداد اول باشند، کدام مجموعه متناهی و غیر تهی است؟

- ۱)  $A - B$       ۲)  $B - A$       ۳)  $A \cap B$       ۴)  $A - (A \cup B)$

۷) اگر  $A \cap B = \emptyset$  و  $A \cap C = \emptyset$ ، آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری درست است؟

- ۱)  $B \cap C = \emptyset$       ۲)  $B \cap C \neq \emptyset$       ۳)  $A \cap (B \cup C) = \emptyset$       ۴)  $A \cap (B - C) \neq \emptyset$

۸) اگر  $A$  مجموعه‌ی اعداد طبیعی که بر ۶ بخش پذیرند،  $B$  مجموعه‌ی اعداد طبیعی دو رقمی کمتر از ۴۰ که بخش پذیر بر ۳ باشند. مجموعه‌ی  $B - A$  چند عضو دارد؟

- ۱) ۴      ۲) ۵      ۳) ۶      ۴) ۷

۹) اگر  $A$  مجموعه‌ای نامتناهی و  $B$  مجموعه‌ای متناهی باشد، کدام مجموعه نامتناهی است؟

- ۱)  $A \cap B$       ۲)  $B - A$       ۳)  $A - B$       ۴)  $(A - B) - A$

۱۰) به چند طریق می‌توان ۵ نفر از ۹ دوست صمیمی خود را به مهمانی دعوت کرد، به طوری که دو نفر آنان، نخواهند با هم در مهمانی شرکت کنند؟

- ۱) ۸۴      ۲) ۸۷      ۳) ۹۱      ۴) ۹۵

۱۱) از ۱۰ پرسش موجود، به چند طریق می‌توان ۸ پرسش را جهت پاسخ‌گویی انتخاب کرد، به شرط آنکه حداقل ۴ پرسش از ۵ پرسش اول، انتخاب شود؟

- ۱) ۲۵      ۲) ۳۲      ۳) ۳۰      ۴) ۳۵

۱۲) به چند طریق می‌توان ۵ کتاب متمایز را بین ۳ نفر توزیع کرد، به شرط آن‌که هر نفر حداقل یک کتاب، دریافت کند؟

- ۱) ۱۰۵      ۲) ۱۲۵      ۳) ۱۳۵      ۴) ۱۵۰



۱۳) ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ را به طریقی کنار هم قرار داده ایم که همواره رقم های فرد کنار هم باشند. تعداد پنج رقمی های حاصل کدام است؟

- ۱۲ (۱)      ۲۴ (۲)      ۳۶ (۳)      ۴۸ (۴)

۱۴) چند عدد چهار رقمی با ارقام متمایز و فرد، بزرگتر از ۳۰۰۰ وجود دارد؟

- ۱۰۸ (۱)      ۸۴ (۲)      ۹۶ (۳)      ۷۲ (۴)

۱۵) در یک همایش ۵ نفر جهت سخنرانی ثبت نام کرده اند. چند طریق ترتیب سخنرانی برای آنها وجود دارد، به طوری که بین سخنرانی دو فرد مورد نظر  $a$  و  $b$  از آنان فقط یک نفر سخنرانی کند؟

- ۲۰ (۱)      ۲۴ (۲)      ۳۶ (۳)      ۴۰ (۴)

۱۶) از هر ۵ مدرسه نمونه، ۴ نفر در اردویی شرکت دارند. به چند طریق می توان از بین آنان ۳ نفر انتخاب کرد، به طوری که هیچ دو نفر انتخاب شده، از یک مدرسه نباشند؟

- ۱۳۵ (۱)      ۲۷۰ (۲)      ۳۲۰ (۳)      ۶۴۰ (۴)

۱۷) تعداد زیرمجموعه های سه عضوی از مجموعه  $\{a, b, c, d, e, f\}$  شامل عضو  $a$  کدام است؟

- ۸ (۱)      ۱۰ (۲)      ۱۲ (۳)      ۱۵ (۴)

۱۸) تعداد جایگشت های حروف کلمه  $SYSTEM$  به طوری که  $S$  ها کنار هم نباشند، کدام است؟

- ۱۲۰ (۱)      ۱۸۰ (۲)      ۲۴۰ (۳)      ۳۶۰ (۴)

۱۹) از هر یک از مدارس  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  و  $E$  چهار نفر به اردوگاه دانش آموزی دعوت شده اند، به چند طریق می توان سه دانش آموز که دو به دو غیر هم مدرسه باشند، انتخاب کرد؟

- ۱۶۰ (۱)      ۳۲۰ (۲)      ۴۸۰ (۳)      ۶۴۰ (۴)

۲۰) حروف کلمه  $LAGRANGE$  را با جایگشت های مختلف کنار هم قرار می دهیم در چند حالت حروف یکسان کنار هم قرار می گیرند؟

- ۳۶۰ (۱)      ۵۴۰ (۲)      ۷۲۰ (۳)      ۱۴۴۰ (۴)

۲۱) گل فروشی از ۸ شاخه گل مختلف، به چند طریق می تواند دسته گل هایی درست کند به طوری که در هر دسته ۴ یا ۵ یا ۶ شاخه گل موجود باشد؟

- ۱۲۶ (۱)      ۱۴۰ (۲)      ۱۵۴ (۳)      ۱۶۸ (۴)

۲۲) از بین ۵ دانش آموز تجربی و ۳ دانش آموز ریاضی، به چند طریق می توان سه نفر برای کار در آزمایشگاه انتخاب کرد به طوری که لااقل دو نفر از آنها دانش آموز تجربی باشند؟

- ۲۵ (۱)      ۳۰ (۲)      ۳۵ (۳)      ۴۰ (۴)

۲۳) از هر یک از ۶ منطقه کشوری، ۱۵ دانش آموز به یک اردوگاه فرهنگی دعوت شده اند، به چند طریق می توان ۳ دانش آموز از بین آنها که دوهو غیر هم منطقه ای هستند انتخاب کرد؟

- ۵۷۶۰۰ (۱)      ۶۷۵۰۰ (۲)      ۷۵۶۰۰ (۳)      ۷۶۵۰۰ (۴)

۲۴) اگر  $\frac{P(n, 4)}{C(n-1, 4)} = 26$  مقدار  $n$  کدام است؟

- ۵۲ (۱)      ۵۳ (۲)      ۵۴ (۳)      ۵۵ (۴)

۲۵) برای دانش آموزان یک شهر از مقطع ابتدایی تا کلاس دوازدهم یک عدد ۵ رقمی به صورت زیر اختصاص می یابد: دو رقم اول سمت راست نمایش پایه تحصیلی (از ۰۱ تا ۱۲) دو رقم دوم نمایش سن (از ۰۷ تا ۱۸) و رقم پنجم جنسیت (پسر ۱ دختر ۲)، سپس اعداد را به ترتیب صعودی در یک مجموعه قرار می دهیم. سن صدمین عضو مجموعه کدام است؟

(ممکن است عدد پنج رقمی موردنظر به هیچ فردی اختصاص نیابد ولی در محاسبه شمرده شود.)

- ۱۳ (۱)      ۱۴ (۲)      ۱۵ (۳)      ۱۶ (۴)



۲۶ به چند طریق ۳ بازیکن فوتبال، ۲ بازیکن والیبال و ۳ شناگر دور یک میز بنشینند، به طوری که افراد هم تیمی کنار هم باشند؟

- ۱) ۷۲      ۲) ۱۴۴      ۳) ۲۱۶      ۴) ۴۳۲

۲۷ در یک جلسه آموزشی میزگردی شامل ۴ دانش آموز پایه یازدهم و ۴ دانش آموز پایه دوازدهم تشکیل شده است. به چند حالت دانش آموزان در صندلی‌ها بنشینند به طوری که در کنار هر دانش آموزی دانش آموز هم پایه قرار نگیرد؟

- ۱) ۱۴۴      ۲) ۲۸۸      ۳) ۲۷۶      ۴) ۱۱۵۲

۲۸ بر روی هر یک از چند کارت یکسان اعداد سه رقمی حاصل از جایگشت ترکیبات مجموعه‌ی اعداد  $\{۲, ۴, ۵, ۶, ۷\}$  را نوشته، به تصادف یک کارت از بین آنها بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال دو رقم از اعداد این کارت‌ها فرد می‌باشند؟

- ۱) ۰٫۲      ۲) ۰٫۲۵      ۳) ۰٫۳      ۴) ۰٫۴

۲۹ در کیسه‌ای ۵ مهره با شماره های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره‌ها را به طور تصادفی پی در پی بدون جای گذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره با شماره‌ی فرد متوالیاً خارج نمی‌شوند؟

- ۱) ۰٫۱      ۲) ۰٫۱۵      ۳) ۰٫۲      ۴) ۰٫۲۵

۳۰ دو تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار هر دو عدد رو شده زوج باشند. با کدام احتمال حداکثر در سه پرتاب نتیجه حاصل می‌شود؟

- ۱)  $\frac{۲۷}{۶۴}$       ۲)  $\frac{۳۷}{۶۴}$       ۳)  $\frac{۱۹}{۳۲}$       ۴)  $\frac{۳۹}{۶۴}$

۳۱ هر یک از ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱، بر روی پنج کارت یکسان نوشته شده است، به تصادف سه کارت از آن‌ها را کنار هم قرار می‌دهیم. با کدام احتمال عدد سه رقمی حاصل مضرب ۳ می‌باشد؟

- ۱) ۰٫۳      ۲) ۰٫۴      ۳) ۰٫۵      ۴) ۰٫۶

۳۲ اعداد ۱ تا ۶ را بر روی ۶ کارت یکسان نوشته اند. اگر به تصادف دو کارت از بین آنها بیرون آوریم، با کدام احتمال جمع اعداد این دو کارت زوج است؟

- ۱)  $\frac{۱}{۲}$       ۲)  $\frac{۴}{۹}$       ۳)  $\frac{۲}{۵}$       ۴)  $\frac{۵}{۹}$

۳۳ در یک خانواده‌ی سه فرزندی، می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است. با کدام احتمال دو فرزند دیگر، دختر است؟

- ۱)  $\frac{۳}{۸}$       ۲)  $\frac{۳}{۷}$       ۳)  $\frac{۴}{۷}$       ۴)  $\frac{۵}{۸}$

۳۴ دو سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال هر دو سکه «رو» یا تاس ۶ ظاهر می‌شود؟

- ۱)  $\frac{۳}{۸}$       ۲)  $\frac{۵}{۸}$       ۳)  $\frac{۵}{۱۲}$       ۴)  $\frac{۷}{۱۲}$

۳۵ شش گوی یکسان با شماره های ۱ تا ۶ در یک ظرف قرار دارند، به تصادف دو گوی از آنها برمی‌داریم، با کدام احتمال جمع اعداد این دو گوی کم تر از ۶ است؟

- ۱)  $\frac{۴}{۱۵}$       ۲)  $\frac{۱}{۴}$       ۳)  $\frac{۱}{۳}$       ۴)  $\frac{۵}{۱۲}$

۳۶ در جعبه‌ای ۳ مهره‌ی سفید ۲ مهره‌ی سیاه و ۵ مهره‌ی قرمز موجود است. اگر دو مهره از آن بیرون آوریم، با کدام احتمال این دو مهره هم‌رنگ نیستند؟

- ۱)  $\frac{۲۸}{۴۵}$       ۲)  $\frac{۲۹}{۴۵}$       ۳)  $\frac{۳۱}{۴۵}$       ۴)  $\frac{۳۲}{۴۵}$

۳۷ حروف کلمه‌ی ATAXIA را بریده به‌طور تصادفی کنار هم قرار می‌دهیم با کدام احتمال هر سه حرف A کنار هم قرار می‌گیرند؟

- ۱)  $\frac{۱}{۴}$       ۲)  $\frac{۱}{۵}$       ۳)  $\frac{۱}{۸}$       ۴)  $\frac{۱}{۳}$



۳۸ خانواده ای دارای چهار فرزند است می دانیم که دو فرزند اول آن ها پسر است. احتمال آن که دو فرزند دیگر این خانواده دختر باشد کدام است؟

۳/۸ (۴)

۵/۱۶ (۳)

۱/۴ (۲)

۳/۱۶ (۱)

۳۹ دو تاس را با هم می اندازیم. با کدام احتمال دو عدد رو شده، متوالی هستند؟

۴/۹ (۴)

۷/۱۸ (۳)

۵/۱۸ (۲)

۲/۹ (۱)

۴۰ در ظرفی شش مهره با شماره های ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶ ریخته شده اند، دو مهره با هم بیرون می آوریم، با کدام احتمال شماره های این دو مهره اعداد متوالی اند؟

۲/۳ (۴)

۳/۵ (۳)

۲/۵ (۲)

۱/۳ (۱)

۴۱ در آزمایشگاهی ۷ موش نگهداری می شوند که بر روی ۳ موش آزمون مهارت انجام شده است. اگر ۲ موش از بین آنان تصادفی انتخاب شوند، با کدام احتمال، لااقل بر روی یکی از آن دو، آزمون انجام شده است؟

۱۶/۲۱ (۴)

۵/۷ (۳)

۴/۷ (۲)

۱۰/۲۱ (۱)

۴۲ در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۳ موش سیاه نگهداری می شوند. به تصادف متوالیاً سه موش از بین آن ها انتخاب می شود. با کدام احتمال، اولین موش سفید و سومین موش سیاه است؟

۱۵/۵۶ (۴)

۱۳/۵۶ (۳)

۱۷/۵۶ (۲)

۱۱/۵۶ (۱)

۴۳ در جعبه ای ۵ مهره سفید و ۶ مهره سیاه است. ابتدا یک مهره را بدون رویت خارج می کنیم. سپس از بین بقیه مهره ها، ۲ مهره بیرون می کشیم. با کدام احتمال هر دو مهره اخیر، سفید است؟

۵/۲۲ (۴)

۴/۱۱ (۳)

۲/۱۱ (۲)

۱/۱۱ (۱)

۴۴ از بین ۳ کارت سفید و ۴ کارت سبز یکسان به تصادف یک کارت بدون جاگذاری بیرون می آوریم، سپس کارت دوم را خارج می کنیم. با کدام احتمال هر دو کارت هم رنگ هستند؟

۴/۷ (۴)

۳/۷ (۳)

۵/۱۴ (۲)

۲/۷ (۱)

۴۵ در آزمایشگاهی ۳ موش سفید و ۵ موش سیاه نگهداری می شوند. اگر به طور تصادفی ۴ موش از بین آن ها جهت آزمایش برداشته شوند، با کدام احتمال فقط یکی از موش های مورد آزمایش، سفید است؟

۳/۵ (۴)

۳/۷ (۳)

۲/۵ (۲)

۲/۷ (۱)

۴۶ احتمال موفقیت فردی، در یک آزمون مستقل، ۲ برابر احتمال موفقیت دوست وی است. احتمال موفقیت لااقل یکی از آن دو،  $\frac{7}{9}$  است. احتمال موفقیت این فرد کدام است؟

۲/۳ (۴)

۴/۹ (۳)

۱/۳ (۲)

۱/۶ (۱)

۴۷ احتمال موفقیت عمل جراحی برای شخص A برابر ۰٫۹ و برای شخص B برابر ۰٫۸ است. با کدام احتمال، لااقل عمل جراحی برای یکی از این دو نفر، موفقیت آمیز است؟

۰٫۹۸ (۴)

۰٫۹۶ (۳)

۰٫۹۴ (۲)

۰٫۹۲ (۱)



۴۸) چهار رقم ۳ و ۲ و ۱ و ۰ را به تصادف در کنار هم قرار می دهیم تا عددی چهار رقمی حاصل شود با کدام احتمال یک عدد چهار رقمی مضرب ۶، حاصل می شود؟

- ①  $\frac{1}{3}$       ②  $\frac{5}{12}$       ③  $\frac{4}{9}$       ④  $\frac{5}{9}$

۴۹) دو تاس را با هم پرتاب می کنیم. با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده، مضرب ۴ است؟

- ①  $\frac{2}{9}$       ②  $\frac{5}{18}$       ③  $\frac{1}{4}$       ④  $\frac{5}{12}$

۵۰) در یک خانواده ی ۴ فرزند ی با کدام احتمال ۲ فرزند پسر یا ۳ فرزند دختر است؟

- ①  $\frac{3}{4}$       ②  $\frac{9}{16}$       ③  $\frac{5}{8}$       ④  $\frac{3}{8}$

۵۱) بهروز جهت مشارکت در یک مسابقه، از بین پرسش های ۵ بسته ریاضی، ۷ بسته تجربی و ۶ بسته علوم انسانی، به تصادف یک بسته اختیار کرده است. احتمال برنده شدن در هر بسته این دروس به ترتیب ۰٫۷ و ۰٫۸ و ۰٫۹ است. با کدام احتمال، بهروز برنده می شود؟

- ①  $\frac{25}{36}$       ②  $\frac{29}{36}$       ③  $\frac{30}{36}$       ④  $\frac{31}{36}$

۵۲) دو تاس را با هم می اندازیم، احتمال آن که مجموع دو عدد رو شده مضرب ۴ باشد، کدام است؟

- ①  $\frac{1}{4}$       ②  $\frac{1}{3}$       ③  $\frac{2}{9}$       ④  $\frac{5}{18}$

۵۳) در آزمایشگاهی ۵ موش سالم و ۳ موش دیابتی نگهداری می شوند، اگر دو موش از محفظه گریخته باشند، با کدام احتمال فقط یکی از موش های فراری دیابتی است؟

- ①  $\frac{15}{56}$       ②  $\frac{5}{14}$       ③  $\frac{3}{8}$       ④  $\frac{15}{28}$

۵۴) احتمال موفقیت فردی، در آزمون اول ۰٫۷ و در آزمون دوم ۰٫۶ است. اگر این فرد در آزمون اول موفق شود، احتمال موفقیت وی در آزمون دوم ۰٫۸ است. با کدام احتمال، لاقل در یکی از دو آزمون، موفق می شود؟

- ① ۰٫۷۴      ② ۰٫۷۶      ③ ۰٫۸۲      ④ ۰٫۸۴

۵۵) در یک شهر صنعتی ۶۰ درصد جمعیت مرد و ۴۰ درصد آن زن هستند. اگر ۱۸ درصد مردان و ۱۲ درصد زنان تحصیلات دانشگاهی داشته باشند، چند درصد این جمعیت تحصیلات دانشگاهی دارند؟

- ① ۱۵٫۲      ② ۱۵٫۶      ③ ۱۵٫۸      ④ ۱۶٫۲

۵۶) در کیسه ای ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و ۳ مهره آبی وجود دارد. سه مهره به تصادف از کیسه خارج می کنیم. با کدام احتمال رنگ مهره های خارج شده، متفاوت است؟

- ①  $\frac{5}{22}$       ②  $\frac{3}{11}$       ③  $\frac{7}{22}$       ④  $\frac{4}{11}$

۵۷) در جعبه ای ۷ مهره سفید و ۵ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز موجود است. به تصادف ۴ مهره از آن بیرون می آوریم. با کدام احتمال یک مهره ی قرمز و حداقل ۲ مهره سفید، خارج شده است؟

- ①  $\frac{30}{91}$       ②  $\frac{25}{77}$       ③  $\frac{40}{143}$       ④  $\frac{50}{143}$

۵۸) ظرف A دارای ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه است و هر یک از دو ظرف یکسان B و C دارای ۶ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است. به تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و ۴ مهره از آن خارج می کنیم. با کدام احتمال دو مهره از مهره های خارج شده، سفید است؟

- ①  $\frac{25}{63}$       ②  $\frac{26}{63}$       ③  $\frac{10}{21}$       ④  $\frac{11}{21}$



۵۹ در گروه زنان ساکن یک روستا ۶۰ درصد آنان تحصیلات ابتدایی و ۲۵ درصد از آنان مهارت قالی بافی دارند، اگر یک فرد از این گروه انتخاب شود با کدام احتمال این فرد تحصیلات ابتدایی یا مهارت قالی بافی دارد؟

- ① ۰٫۸۵      ② ۰٫۷۵      ③ ۰٫۸      ④ ۰٫۷

۶۰ احتمال قبولی فرد  $A$  در یک آزمون ۰٫۸۴ و احتمال قبولی فرد  $B$  در همان آزمون ۰٫۷۵ است. با کدام احتمال لااقل یکی از آنان، در این آزمون قبول می‌شوند؟

- ① ۰٫۹۲      ② ۰٫۹۴      ③ ۰٫۹۶      ④ ۰٫۹۸

۶۱ احتمال آن که از سه موش انتخاب شده از ۶ موش سفید و ۵ موش سیاه، هر سه موش سفید باشند، کدام است؟

- ①  $\frac{1}{8}$       ②  $\frac{4}{33}$       ③  $\frac{5}{32}$       ④  $\frac{5}{33}$

۶۲ یک خانواده‌ی سه فرزندی با کدام احتمال، حداقل دو فرزند دختر دارد؟ (در صورتی که می‌دانیم حداقل یکی از فرزندان، دختر است.)

- ①  $\frac{3}{8}$       ②  $\frac{5}{8}$       ③  $\frac{3}{7}$       ④  $\frac{4}{7}$

۶۳ احتمال انتقال بیماری مسری به افرادی که واکسن زده‌اند ۰٫۲۵ و احتمال انتقال به افراد دیگر ۰٫۲ است.  $\frac{2}{5}$  کارگران یک کارگاه واکسن زده‌اند. اگر فرد حامل بیماری به تصادف با یکی از کارگران ملاقات کند. با کدام احتمال، این بیماری منتقل می‌شود؟

- ① ۰٫۱۳      ② ۰٫۱۴      ③ ۰٫۱۶      ④ ۰٫۱۵

۶۴ احتمال این که از چهار فرزند یک خانواده دو فرزند پسر و دو فرزند دختر باشند کدام است؟

- ①  $\frac{1}{2}$       ②  $\frac{1}{3}$       ③  $\frac{3}{8}$       ④  $\frac{7}{16}$

۶۵ در ظرفی ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است به تصادف ۲ مهره از ظرف بدون رؤیت خارج شده است. از ۵ مهره‌ی باقی‌مانده یک مهره خارج می‌کنیم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟

- ①  $\frac{12}{35}$       ②  $\frac{3}{7}$       ③  $\frac{16}{35}$       ④  $\frac{4}{7}$

۶۶ ۱۰ نفر در یک صف ایستاده‌اند. با کدام احتمال دو فرد موردنظر از آن‌ها، در کنار هم نیستند؟

- ①  $\frac{2}{3}$       ②  $\frac{3}{4}$       ③  $\frac{4}{5}$       ④  $\frac{9}{10}$

۶۷ یک سکه و دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال جمع عدد دو تاس بیشتر از ۴ یا سکه‌ی «رو» ظاهر شده است؟

- ①  $\frac{7}{12}$       ②  $\frac{5}{8}$       ③  $\frac{7}{8}$       ④  $\frac{11}{12}$

۶۸ احتمال انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر ۱۰ درصد و به فرزند دختر ۶ درصد است. با کدام احتمال فرزندی که به دنیا می‌آید این نوع بیماری را ندارد؟

- ① ۰٫۹۱      ② ۰٫۹۲      ③ ۰٫۹۳      ④ ۰٫۹۴

۶۹ در پرتاب دو سکه و یک تاس با هم، احتمال این که حداقل یک سکه رو و عدد تاس مضرب ۳ باشد، کدام است؟

- ①  $\frac{1}{12}$       ②  $\frac{1}{6}$       ③  $\frac{1}{4}$       ④  $\frac{1}{3}$

۷۰ در جعبه‌ای ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز است. به تصادف ۳ مهره از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال فقط یکی از مهره‌ها سفید است؟

- ①  $\frac{8}{21}$       ②  $\frac{17}{42}$       ③  $\frac{10}{21}$       ④  $\frac{9}{14}$



۷۱) در ظرفی ۴ مهره‌ی آبی، ۳ مهره‌ی قرمز، ۲ مهره‌ی سفید موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، حداقل یک مهره‌ی آبی، خارج می‌شود؟

$\frac{31}{42}$  ①       $\frac{37}{42}$  ②       $\frac{67}{84}$  ③       $\frac{73}{84}$  ④

۷۲) در یک بیمارستان ۵ نوزاد در یک روز متولد شده‌اند. با کدام احتمال لااقل دو نفر از آنان دختر است؟

$\frac{5}{16}$  ①       $\frac{3}{8}$  ②       $\frac{7}{16}$  ③       $\frac{13}{16}$  ④

۷۳) در یک خانواده‌ی سه فرزند می‌دانیم فرزند اول آن‌ها دختر است. با کدام احتمال لااقل یکی از فرزندان پسر است؟

$\frac{1}{3}$  ①       $\frac{1}{2}$  ②       $\frac{5}{8}$  ③       $\frac{3}{4}$  ④

۷۴) احتمال این که یک دانش‌آموز در یک امتحان نمره‌ی قبولی بگیرد ۰٫۹ و در دو امتحان متوالی نمره‌ی قبولی بگیرد ۰٫۸۵ است. اگر دانش‌آموز در امتحان دوم موفق باشد احتمال این که در امتحان قبلی نیز موفق شده باشد کدام است؟

$\frac{8}{9}$  ①       $\frac{85}{94}$  ②       $\frac{17}{18}$  ③       $\frac{45}{47}$  ④

۷۵) در کیسه‌ای ۵ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه و ۲ مهره‌ی قرمز وجود دارد. سه مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال فقط دو مهره‌ی خارج شده، هم‌رنگ هستند؟

$\frac{41}{120}$  ①       $\frac{37}{60}$  ②       $\frac{79}{120}$  ③       $\frac{31}{60}$  ④

۷۶) چهار دانش‌آموز یک کلاس که بر یک نیمکت نشسته باشند، با کدام احتمال ماه تولد حداقل دو نفر آنان یکسان است؟

$\frac{19}{48}$  ①       $\frac{41}{96}$  ②       $\frac{23}{48}$  ③       $\frac{55}{96}$  ④

۷۷) در یک خانواده‌ی دو فرزند، می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است. با کدام احتمال این خانواده فرزند دختر دارد؟

$\frac{1}{3}$  ①       $\frac{1}{2}$  ②       $\frac{2}{3}$  ③       $\frac{3}{4}$  ④

۷۸) در جعبه‌ی اول ۴ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه، در جعبه‌ی دوم ۳ مهره‌ی سفید و ۶ مهره‌ی سیاه موجود است. به تصادف یکی از جعبه‌ها را انتخاب کرده و دو مهره با هم از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال هر دو مهره سفید است؟

$\frac{31}{168}$  ①       $\frac{11}{56}$  ②       $\frac{17}{84}$  ③       $\frac{13}{56}$  ④

۷۹) دو تاس را با هم می‌اندازیم. احتمال آن که مجموع اعداد رو شده مضرب ۳ باشد، کدام است؟

$\frac{1}{4}$  ①       $\frac{1}{3}$  ②       $\frac{5}{18}$  ③       $\frac{7}{18}$  ④

۸۰) در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۶ موش سیاه موجود است. به تصادف ۳ موش از بین آن‌ها خارج می‌کنیم. با کدام احتمال لااقل یکی از موش‌ها سفید است؟

$\frac{8}{11}$  ①       $\frac{9}{11}$  ②       $\frac{28}{33}$  ③       $\frac{29}{33}$  ④

۸۱) پنج کتاب زبان فارسی و ۳ کتاب زبان انگلیسی، به تصادف در یک قفسه کنار هم چیده شده‌اند. با کدام احتمال کتاب‌های هم‌زبان، کنار هم قرار می‌گیرند؟

$\frac{1}{14}$  ①       $\frac{1}{21}$  ②       $\frac{1}{28}$  ③       $\frac{1}{56}$  ④





۸۲) در ظرفی ۴ مهره ی سفید و ۵ مهره ی سیاه موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می کنیم. با کدام احتمال مهره های خارج شده هم رنگ اند؟

۴)  $\frac{5}{14}$

۳)  $\frac{2}{9}$

۲)  $\frac{3}{14}$

۱)  $\frac{1}{6}$

۸۳) ۵۵ درصد دانشجویان سال اول، دختر و بقیه پسر هستند. ۶۰ درصد دختران و ۶۴ درصد پسران، تمام واحدهای درسی خود را گذرانده اند. چند درصد کل دانشجویان، تمام واحدهای درسی را گذرانده اند؟

۴) ۶۲٫۸

۳) ۶۲٫۴

۲) ۶۱٫۸

۱) ۶۱٫۴

۸۴) در یک روستا ۵۴ درصد جمعیت را مردان و ۴۶ درصد را زنان تشکیل می دهند. اگر ۶۰ درصد مردان و ۷۵ درصد زنان دفترچه سلامت داشته باشند، با کدام احتمال یک فرد انتخابی به تصادف از بین آن ها، دفترچه سلامت دارد؟

۴) ۰٫۶۹۶

۳) ۰٫۶۸۵

۲) ۰٫۶۶۹

۱) ۰٫۶۵۸

۸۵) با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ زیرمجموعه ای از اعداد طبیعی می سازیم که در آن رقم تکراری به کار نرفته باشد یک عضو از مجموعه فوق انتخاب می کنیم. احتمال این که عضو انتخاب شده بر ۴ بخش پذیر باشد کدام است؟ (با کمی تغییر)

۴)  $\frac{1}{5}$

۳)  $\frac{3}{7}$

۲)  $\frac{4}{7}$

۱)  $\frac{13}{21}$

۸۶) با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ زیرمجموعه ای از اعداد طبیعی می سازیم، که در هر عضو آن، رقم تکراری به کار نرفته باشد. یک عضو از مجموعه فوق انتخاب می کنیم. احتمال این که عضو انتخاب شده بر ۳ بخش پذیر باشد، کدام است؟

۴)  $\frac{177}{325}$

۳)  $\frac{168}{325}$

۲)  $\frac{67}{205}$

۱)  $\frac{66}{205}$

۸۷) احتمال متولد شدن یک خرگوش نر در یک نسل در اولین دوره بارداری مادر، ۷۰ درصد و احتمال متولد شدن دو خرگوش نر در دو بار متوالی زایمان ۶۰ درصد است. اگر دومین فرزند خرگوش، نر باشد، احتمال آن که در زایمان قبلی خرگوش نر به دنیا آمده باشد، کدام است؟ (فرض بر این است که در هر دوره فقط یک تولد صورت می گیرد.)

۴)  $\frac{6}{7}$

۳)  $\frac{7}{10}$

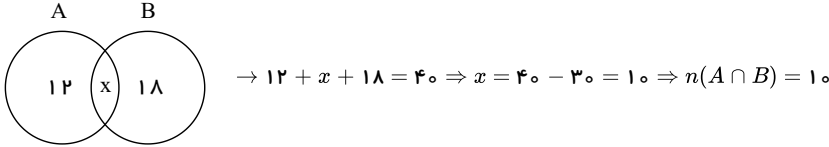
۲)  $\frac{2}{3}$

۱)  $\frac{20}{27}$

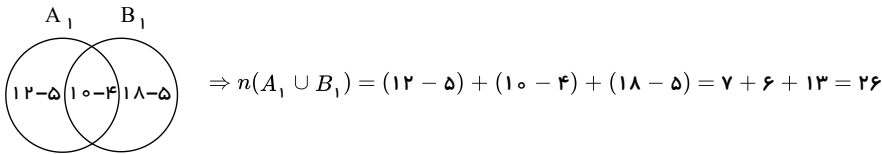


## پاسخنامه تشریحی

باتوجه به اطلاعات مسئله، نمودار ون مقابل را داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱

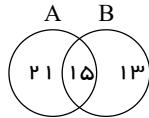


در برداشتن ۹ عضو از هر یک از مجموعه‌های  $A$  و  $B$ ، چون از مجموعه‌ی  $A \cap B$ ، ۴ عضو کم می‌شود، پس ۵ عضو دیگر از  $A - B$  و  $B - A$  کم می‌شود:

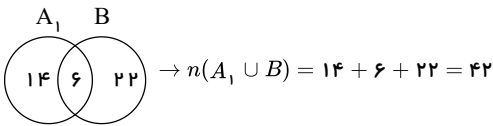


۱ ۲ ۳ ۴ ۲

باتوجه به اطلاعات مسئله، نمودار ون مقابل را داریم:



حال وقتی ۱۶ عضو از مجموعه‌ی  $A$  حذف شود، ۹ عضو از  $A \cap B$  حذف می‌شود، یعنی ۹ عضو از این ۱۶ عضو با  $B$  نیز مشترک است و حذف می‌شوند. پس تنها  $15 - 9 = 6$  عضو از مجموعه‌ی جدید ( $A_1$ ) با  $B$  مشترک است و توجه کنید تعداد اعضای مجموعه‌ی  $B$  نباید تغییر کنند.



ابتدا اعضای دو مجموعه را مشخص می‌کنیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۳

$$A = \left\{ \frac{1}{x} \mid x \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \dots \right\}$$

$$B = \left\{ \frac{x}{8} \mid x \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, \frac{8}{8}, \frac{9}{8}, \frac{10}{8}, \dots \right\}$$

تمام اعضای مجموعه‌ی  $A$  کوچکتر یا مساوی یک هستند ولی در مجموعه‌ی  $B$  فقط ۸ عضو این ویژگی را دارند پس اشتراک این دو مجموعه قطعاً محدود است.

$$A \cap B = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \dots \right\} \cap \left\{ \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, \frac{8}{8}, \dots \right\}$$

$$= \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \right\}$$

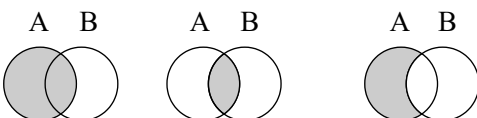
۱ ۲ ۳ ۴ ۴

مجموعه‌ی اعداد اول:  $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$

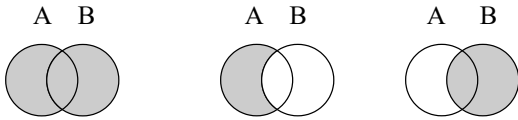
مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد:  $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots\}$

غیر از عدد ۲ که زوج است تمام اعداد اول، فرد هستند پس غیر از عدد ۲ تمام اعضای مجموعه‌ی  $A$  در مجموعه‌ی  $B$  وجود دارند بنابراین:  $A - B = \{2\}$  است که متناهی می‌باشد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵



$$A - (A \cap B) = A - B$$



$$(A \cup B) - (A - B) = B$$

$$A - (A \cap B) = A - B \Rightarrow (A \cup B) - (A - (A \cap B)) = (A \cup B) - (A - B) = B$$

و مجموعه ی  $B$ ، دارای ۴ عضو است.

- 1 2 3 4 6

مجموعه ی  $A = \{1, 3, 5, \dots\}$  به صورت  $A = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$  و مجموعه ی  $B$  به صورت  $B = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$  است. به بررسی گزینه ها می پردازیم:

- نامتناهی و غیر تهی  $A - B = \{1, 9, 15, 21, \dots\}$  :گزینه ی اول
- متناهی و غیر تهی  $B - A = \{2\}$  :گزینه ی دوم
- نامتناهی و غیر تهی  $A \cap B = \{3, 5, 7, \dots\}$  :گزینه ی سوم
- گزینه ی چهارم  $A - (A \cup B) = \emptyset$

چون  $A \subset (A \cup B)$  است، بنابراین مجموعه ی  $A - (A \cup B)$  تهی است.

- 1 2 3 4 7

گزینه ی اول: سه مجموعه ی  $A$  و  $B$  و  $C$  را به صورت در نظر بگیرید.  $A \cap B = \emptyset$  و  $A \cap C = \emptyset$  ولی  $B \cap C$  تهی نمی باشد پس گزینه ی یک نادرست است.

گزینه ی دوم: سه مجموعه ی  $A$  و  $B$  و  $C$  را به صورت در نظر بگیرید.  $A \cap B = \emptyset$  و  $A \cap C = \emptyset$  و  $B \cap C = \emptyset$  است پس گزینه ی دوم نادرست است.

گزینه ی سوم درست است.  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$

گزینه ی چهارم نادرست است.  $A \cap (B - C) = A \cap (B \cap C') = \underbrace{(A \cap B)}_{\emptyset} \cap C' = \emptyset \cap C' = \emptyset \rightarrow$

- 1 2 3 4 8

$$A = \{6, 12, 18, \dots\}, B = \{12, 15, 18, \dots, 39\}$$

$A - B$  از اعضای  $B$  هستند که در  $A$  نباشند، یعنی اعضای  $B$  که بر ۶ بخش پذیر نباشند. می دانیم اعضای  $B$  بر ۳ بخش پذیرند، پس برای آن که بر ۶ بخش پذیر نباشند باید مضرب ۲ نباشند، پس کافی است اعضای فرد  $B$  را جدا کنیم:

$$B - A = \{15, 21, 27, 33, 39\} \Rightarrow \text{عضو دارد. } 5$$

- 1 2 3 4 9

گزینه ی (۱): چون  $A \cap B \subset B$ ، پس تعداد اعضای  $A \cap B$  کم تر یا مساوی تعداد اعضای  $B$  اند و چون  $B$  مجموعه ای متناهی است، بنابراین  $A \cap B$  نیز حتماً متناهی است.

گزینه ی (۲):  $B - A \subset B$  و  $B$  مجموعه ای متناهی است. پس  $B - A$  نیز مجموعه ای متناهی خواهد بود.

گزینه ی (۳):  $A$  نامتناهی و  $B$  متناهی است، پس در مجموعه ی  $A - B$  از نامتناهی عضو تعداد متناهی عضو را برمی داریم، در نتیجه نامتناهی عضو باقی می ماند. یعنی  $A - B$  مجموعه ای نامتناهی است.

گزینه ی (۴):  $A - B \subset A$ ، پس  $(A - B) - A = \emptyset$  و در نتیجه فاقد عضو است، یعنی مجموعه ای متناهی می باشد.

- 1 2 3 4 10

$$\left. \begin{aligned} \text{کل حالات: } \binom{9}{5} &= \frac{9!}{5!4!} = 126 \\ \text{هر دو نفر دعوت شوند (سه نفر از بقیه انتخاب شوند).} & \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!} = 35 \end{aligned} \right\} \rightarrow 126 - 35 = 91$$

- 1 2 3 4 11

این کار بدین صورت انجام پذیر است: ۴ سؤال از ۵ سؤال اول و ۴ سؤال از ۵ سؤال دوم یا ۵ سؤال از ۵ سؤال اول و ۳ سؤال از ۵ سؤال دوم را می توان جهت پاسخ دادن، انتخاب کرد.

$$\binom{5}{4} \times \binom{5}{4} + \binom{5}{5} \times \binom{5}{3} = 35$$



۱۲) دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول: به دو نفر دو کتاب برسد و به یک نفر یک کتاب برسد.

$$\binom{5}{2} \binom{3}{2} \binom{1}{1} \times 3 = 10 \times 3 \times 1 \times 3 = 90$$

$$\begin{cases} 2 & 2 & 1 \\ A, B, C & & \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 & 1 & 2 \\ A, B, C & & \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 & 2 & 2 \\ A, B, C & & \end{cases}$$

حالت دوم: به دو نفر یک کتاب برسد و به یک نفر سه کتاب برسد.

$$\binom{5}{1} \binom{4}{1} \times \binom{3}{3} \times 3 = 5 \times 4 \times 1 \times 3 = 60$$

$$\begin{cases} 1 & 1 & 3 \\ A, B, C & & \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 & 3 & 1 \\ A, B, C & & \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 & 1 & 3 \\ A, B, C & & \end{cases}$$

بنابراین کل حالات  $150 = 90 + 60$  است.

۱۳) ۱ ۲ ۳ ۴

اعداد فرد را یک عدد در نظر گرفته با دو عدد زوج مجموعاً ۳ عدد خواهیم داشت که به ۳! طریق جایجا می‌شوند از طرفی اعداد فرد نیز خود به ۳! طریق جایجا می‌شوند پس  $3! \times 3! = 36$

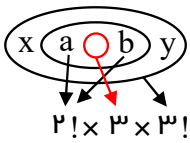
۱۴) منظور طراح این بوده است که با ارقام ۱، ۳، ۵، ۷، ۹، چند عدد چهار رقمی با ارقام متمایز و بزرگتر از ۳۰۰۰ وجود دارد. (رقم ده هزارگان ۳ یا ۵ یا ۷ یا ۹ می‌تواند باشد)

۱۴) ۱ ۲ ۳ ۴

$$\boxed{4} \times \boxed{4} \times \boxed{3} \times \boxed{2} = 96$$

{۳، ۵، ۷، ۹}

۱۵) ۱ ۲ ۳ ۴



$a, b$  به ۲! حالت جایجا می‌شوند، نفر وسط ۳ حالت دارد  $a, b$  و نفر وسط را یک حالت در نظر می‌گیریم با ۲ نفر باقی مانده گروهی ۳ نفره می‌شوند که

۳! حالت جایجا می‌شوند.

۱۶) ابتدا سه مدرسه از بین پنج مدرسه را انتخاب می‌کنیم و سپس از سه مدرسه انتخاب شده از هر مدرسه یک نفر را انتخاب می‌کنیم.

$$\binom{5}{3} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} = 10 \times 4 \times 4 \times 4 = 640$$

۱۷) ۱ ۲ ۳ ۴

چون زیر مجموعه‌های سه عضوی شامل  $a$  می‌خواهیم پس یک عضو مشخص است از بین ۵ عضو باقیمانده دو عضو دیگر باید انتخاب کنیم.

$$\binom{5}{2} = 10$$

۱۸) تعداد کل جایگشت‌ها را حساب کرده سپس از آن جایگشت، حالت‌هایی که  $S$  ها کنار هم هستند را کم می‌کنیم.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{جایگشت حروف SYSTEM} = \frac{6!}{2!} = 360 \\ \text{جایگشت حروف وقتی که S ها کنار هم باشند (SS)YTEM} = 5! = 120 \end{array} \right. \Rightarrow 360 - 120 = 240$$

۱۹) ما نیاز به ۳ دانش آموز غیر هم مدرسه ای داریم برای این کار ابتدا ۳ مدرسه از ۵ مدرسه را انتخاب می‌کنیم و سپس از هر کدام از این ۳ مدرسه یک دانش

آموز را انتخاب می‌کنیم.

$$\binom{5}{3} \binom{4}{1} \binom{4}{1} \binom{4}{1} = 10 \times 4 \times 4 \times 4 = 640$$

۲۰) ۱ ۲ ۳ ۴

$AA$  را یک حرف و  $GG$  را نیز یک حرف در نظر می‌گیریم.

$$\boxed{AA} \boxed{GG} LRNE \Rightarrow 6! = 720$$

جابه‌جایی  $A$  با  $A$  و جابه‌جایی  $G$  با  $G$  چون یکسان هستند اهمیت ندارد.

۲۱) کافی است ۴ شاخه یا ۵ شاخه یا ۶ شاخه یا ۸ شاخه گل را انتخاب کنید.

۲۱) ۱ ۲ ۳ ۴

$$\binom{8}{4} + \binom{8}{5} + \binom{8}{6} = \frac{8!}{4!4!} + \frac{8!}{5!3!} + \frac{8!}{6!2!} = 70 + 56 + 28 = 154$$





$$n(S) = 5!$$

$$n(A) = \underbrace{3!}_{\text{جابجایی مهره‌های زوج}} \times \underbrace{2!}_{\text{جابجایی مهره‌های فرد}} \rightarrow \text{ف ز ف ز ف}$$

$$\text{پس } P(A) = \frac{3!2!}{5!} = \frac{1}{10} \text{ است.}$$

در هر پرتاب احتمال آنکه هر دو تاس زوج باشند، برابر با  $\frac{1}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$  است و لذا احتمال آنکه هر دو تاس زوج نباشند،  $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$  است. اگر  $A_i$

پیشامد این باشد که در پرتاب  $i$  ام نتیجه حاصل شده باشد، یعنی در  $(i-1)$  پرتاب قبلی هر دو تاس زوج نبوده و در پرتاب  $i$  ام هر دو تاس زوج ظاهر شده است، پس  $P(A_i) = \left(\frac{3}{4}\right)^{i-1} \left(\frac{1}{4}\right)$  بنابراین احتمال آنکه حداکثر در ۳ پرتاب نتیجه حاصل شود، برابر است با:

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{9}{64} = \frac{37}{64}$$

یا به زبان ساده تر:

$$\text{پرتاب اول هر دو زوج باشند: } \frac{1}{4}$$

$$\text{پرتاب اول هر دو زوج نباشند و پرتاب دوم هر دو زوج باشند: } \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}$$

$$\text{پرتاب اول و پرتاب دوم هر دو زوج نباشند و پرتاب سوم هر دو زوج باشند: } \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}$$

$$\text{پس } P(A) = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{9}{64} = \frac{37}{64}$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۳۱)

$$5 \times 4 \times 3 = 60 \rightarrow n(s) = 60$$

برای آنکه عدد رو شده، مضرب ۳ باشد، باید مجموع ارقامش باید بر ۳ بخش پذیر باشد که شامل دسته بندی‌های زیر باشد.

$$\left. \begin{array}{l} 1, 2, 3 \rightarrow 3! = 6 \\ 1, 3, 5 \rightarrow 3! = 6 \\ 2, 3, 4 \rightarrow 3! = 6 \\ 3, 4, 5 \rightarrow 3! = 6 \end{array} \right\} \rightarrow n(A) = 4 \times 6 = 24$$

$$\text{پس } P(A) = \frac{24}{60} = \frac{2}{5} \text{ است.}$$

جمع دو کارت وقتی زوج است که هر دو زوج یا هر دو فرد باشد: ۳ کارت رقم فرد و ۳ کارت رقم زوج دارند لذا:

$$n(S) = \binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

$$n(A) = \binom{3}{2} + \binom{3}{2} = 3 + 3 = 6$$

$$\text{پس } P(A) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} \text{ است.}$$

یعنی در این خانواده سه فرزندی حداقل یک فرزند پسر است. پس در این خانواده حالتی که هر ۳ فرزند دختر باشند وجود ندارد.

$$n(S) = 2^3 - 1 = 7$$

$$DDP \Rightarrow n(A) = \frac{3!}{2!} = 3 = \text{تعداد حالت مطلوب یعنی این خانواده دارای دو دختر باشد:}$$

$$\text{پس } P(A) = \frac{3}{7} \text{ است.}$$

اگر  $A$  پیشامد هر دو سکه رو و  $B$  پیشامد آمدن عدد ۶ در تاس باشد داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \xrightarrow{\text{مستقل } A, B} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

$$\rightarrow P(A \cup B) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{6} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} = \frac{6+4-1}{24} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۳۵)

$$n(S) = \binom{6}{2} = 15, A = \{(1,2)(1,3)(1,4)(2,3)\} \Rightarrow P(A) = \frac{4}{15}$$

توجه کنید که چون مهره‌ها را باهم برمی‌داریم تفاوتی بین  $(1,2)$  و  $(2,1)$  وجود ندارد.

(۱) (۲) (۳) (۴) (۳۶)

$$n(S) = \binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$$

برای هم‌رنگ نبودن دو مهره یکی از حالت‌های زیر باید اتفاق بیفتد



$$\left. \begin{aligned} \text{یکی سفید و یکی سیاه} & \binom{3}{1} \binom{2}{1} = 3 \times 2 = 6 \\ \text{یکی سفید و یکی قرمز} & \binom{3}{1} \binom{5}{1} = 3 \times 5 = 15 \\ \text{یکی سیاه و یکی قرمز} & \binom{2}{1} \binom{5}{1} = 2 \times 5 = 10 \end{aligned} \right\} \Rightarrow n(A) = 6 + 15 + 10 = 31$$

پس  $P(A) = \frac{31}{45}$  است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۷

$$n(S) = \frac{6!}{3!} = 120 \text{ (جابه‌جایی حروف ATAXIA)}$$

$\boxed{AAA} \text{ TXI} \Rightarrow n(A) = 4! = 24$  (باجه‌جایی ۳ حرف A باهم اهمیت ندارد)

پس  $P(A) = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$  است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۸

$$S_{\text{جیب}} = \{PPPD, PPDP, PPDD, PPPP\} \Rightarrow n(S) = 4, \quad A = \{PPDD\} \Rightarrow n(A) = 1$$

پس  $P(A) = \frac{1}{4}$  است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۹

$$n(S) = 6^2 = 36$$

$$A = \left\{ (1, 2)(2, 3)(3, 4)(4, 5)(5, 6), (2, 1)(3, 2)(4, 3)(5, 4)(6, 5) \right\} \rightarrow n(A) = 10$$

پس  $P(A) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$  است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۰

توجه کنید چون دو مهره با هم خارج می‌شوند ترتیب خارج شدن مهره‌ها اهمیتی ندارد بنابراین حالاتی که دو مهره، متوالی اند عبارتند از:

$$A = \{ (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6) \} \rightarrow n(A) = 5$$

پس  $P(A) = \frac{5}{\binom{6}{2}} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$  است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۱

بر روی ۳ موش آزمون مهارت انجام شده است و بر روی ۴ موش آزمون مهارت انجام نشده است.

$$n(S) = \binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

لااقل بر روی یکی از آن دو آزمون انجام شده است یعنی: بر روی هر دو آزمون انجام شده است یا بر روی یکی آزمون انجام شده و بر روی دیگری آزمون انجام نشده است.

$$n(A) = \binom{3}{2} + \binom{3}{1} \binom{4}{1} = 3 + 12 = 15$$

پس  $P(A) = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$  است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۲

دو حالت داریم:

(۱) موش اول سفید و موش دوم سفید و موش سوم سیاه

$$\frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{5}{28}$$

(۲) موش اول سفید و موش دوم سیاه و موش سوم سیاه

$$\frac{5}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{5}{56}$$

پس  $P = \frac{5}{28} + \frac{5}{56} = \frac{15}{56}$  است.

روش دوم: چون در تست به رنگ موش دوم اشاره نشده است فرض می‌کنیم موشی که به رنگ آن اشاره نشده است را انتخاب نکرده‌ایم و تنها می‌خواهیم دو موش را پشت سرهم (متوالیاً)

انتخاب کنیم یعنی موش دوم تأثیری در حل مسأله ندارد

$$P(\text{اولی سفید و دومی سیاه}) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۳

$$P(\text{مهره اول سیاه و مهره بعدی سفید}) + P(\text{مهره اول سفید و مهره بعدی سفید}) + P(\text{دو مهره اخیر سفید})$$

$$= \frac{5}{11} \times \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} + \frac{6}{11} \times \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}}$$



$$= \frac{5}{11} \times \frac{6}{45} + \frac{6}{11} \times \frac{10}{45} = \frac{6}{45} \left( \frac{5}{11} + \frac{10}{11} \right) = \frac{6}{45} \times \frac{15}{11} = \frac{2}{11}$$

روش دوم:

وقتی مهره‌ای را خارج می‌کنیم و آن را مشاهده نمی‌کنیم، انگار اصلاً مهره خارج نکرده‌ایم، پس:

$$P(\text{هر دو سفید}) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{11}{2}} = \frac{10}{55} = \frac{2}{11}$$

برای آنکه هر دو کارت هم‌رنگ باشند، باید هر دو سفید یا هر دو سبز باشند، پس داریم:

$$P = \left( \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \right) + \left( \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \right) = \frac{6}{42} + \frac{12}{42} = \frac{18}{42} = \frac{3}{7}$$

اولی سفید      دومی سفید      اولی سبز      دومی سبز

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۵

$$n(S) = \binom{8}{4} = \frac{8!}{4!4!} = 70$$

$$\text{سیاه تا سیاه} \Rightarrow n(A) = \binom{3}{1} \times \binom{5}{3} = 3 \times 10 = 30$$

پس  $P(A) = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}$  است.اگر احتمال موفقیت فرد  $A$  را  $x$  در نظر بگیریم احتمال موفقیت دوست او برابر  $\frac{x}{2}$  است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۶

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

$$\rightarrow \frac{7}{9} = x + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} \xrightarrow{\times 18} 14 = 18x + 9x - 9x^2$$

$$\rightarrow 9x^2 - 27x + 14 = 0 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac = 729 - 504 = 225} \begin{cases} x = \frac{27 + 15}{18} = \frac{42}{18} = \frac{7}{3} \text{ غقیق} \\ x = \frac{27 - 15}{18} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \text{ فقی} \end{cases}$$

پس  $P(A) = x = \frac{2}{3}$  است.

روش اول: ۱ ۲ ۳ ۴ ۴۷

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\xrightarrow{A, B \text{ مستقل هستند}} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = 0,9 + 0,8 - \underbrace{(0,9)(0,8)}_{0,72} = 0,98$$

روش دوم:

$$P(\text{حداقل یکی}) = 1 - P(\text{هیچ کدام}) = 1 - P(A' \cap B')$$

$$= 1 - P(A') \cdot P(B') = 1 - (0,1)(0,2) = 1 - 0,02 = 0,98$$

تعداد حالات انجام تجربه‌ی تصادفی که همان چیدن چهار رقم ۳ و ۲ و ۱ و ۰ به تصادف در کنار هم است، برابر است با:

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۸

$$n(S) = \boxed{3} \times \boxed{3} \times \boxed{2} \times \boxed{1} = 18$$

برای آن که عددی چهار رقمی مضرب ۶ باشد، باید هم زوج و هم بر ۳ بخش پذیر باشد. شرط آن که عددی بر ۳ بخش پذیر باشد آن است که مجموع ارقامش بر ۳ قابل قسمت باشد. چون

همواره مجموع ارقام ۳ و ۲ و ۱ و ۰ برابر ۶ است، پس این عدد چهار رقمی همواره بر ۳ بخش پذیر می‌باشد. لذا باید تنها تعداد اعداد زوج را پیدا کنیم تا عدد مضرب ۶ شود. تعداد اعداد چهار رقمی زوج برابر است با:

$$\left. \begin{array}{l} \boxed{3} \times \boxed{2} \times \boxed{1} \times \boxed{1} = 6 \text{ رقم یکان صفر نباشد} \\ \boxed{2} \times \boxed{2} \times \boxed{1} \times \boxed{1} = 4 \text{ رقم یکان صفر نباشد} \end{array} \right\} \Rightarrow n(A) = 6 + 4 = 10$$

پس  $P(A) = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$  است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۹

$$n(S) = 6^2 = 36$$

$$\left. \begin{array}{l} 4 \Rightarrow (1, 3), (3, 1), (2, 2) \\ 8 \Rightarrow (2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4) \\ 12 \Rightarrow (6, 6) \end{array} \right\} \Rightarrow n(A) = 9$$

پس  $P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$  است.





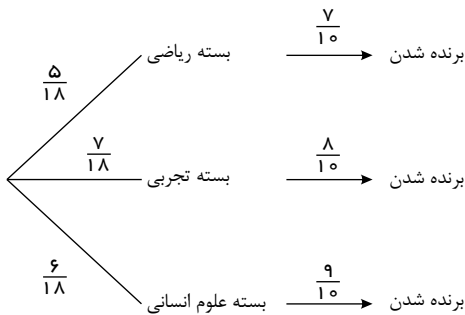
۱ ۲ ۳ ۴ ۵۰

$$n(S) = 2^4 = 16$$

$$PPDD \text{ یا } DDDP \Rightarrow n(A) = \frac{4!}{2!2!} + \frac{4!}{3!} = 6 + 4 = 10$$

$$\text{پس } P(A) = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} \text{ است.}$$

در کل ۱۸ بسته وجود دارد. ۱ ۲ ۳ ۴ ۵۱



$$\text{احتمال مطلوب} = \left(\frac{5}{18} \times \frac{7}{10}\right) + \left(\frac{7}{18} \times \frac{8}{10}\right) + \left(\frac{6}{18} \times \frac{9}{10}\right) = \frac{35 + 56 + 54}{180} = \frac{145}{180} = \frac{29}{36}$$

فضای نمونه‌ای این آزمایش  $n(S) = 6^2 = 36$  است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۵۲

$$\text{حالات مطلوب: } \begin{cases} 4 \rightarrow (1, 3)(3, 1)(2, 2) \\ 8 \rightarrow (2, 6)(6, 2)(3, 5)(5, 3)(4, 4) \\ 12 \rightarrow (6, 6) \end{cases} \Rightarrow n(A) = 9$$

$$\text{پس } P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \text{ است.}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۳

$$n(S) = \binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

$$n(A) = \underbrace{\binom{3}{1}}_{\text{یک دیدنی}} \times \underbrace{\binom{5}{1}}_{\text{یک سالم}} = 3 \times 5 = 15$$

$$\text{پس } P(A) = \frac{15}{28} \text{ است.}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۴

$$P(A) = 0,7 \text{ : احتمال موفقیت فرد در آزمون اول}$$

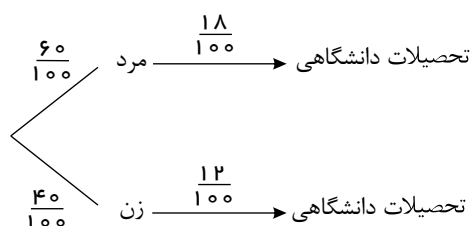
$$P(B) = 0,6 \text{ : احتمال موفقیت فرد در آزمون دوم}$$

$$P(B|A) = 0,8 \text{ : احتمال موفقیت فرد در آزمون دوم به شرط موفقیت در آزمون اول}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow 0,8 = \frac{P(A \cap B)}{0,7} \rightarrow P(A \cap B) = 0,56$$

$$\text{از طرفی } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,7 + 0,6 - 0,56 = 0,74$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۵



$$\text{احتمال مطلوب} = \left(\frac{6}{10} \times \frac{18}{100}\right) + \left(\frac{4}{10} \times \frac{12}{100}\right) = \frac{108 + 48}{1000} = \frac{156}{1000} = 15,6\%$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۵۶

$$n(S) = \binom{12}{3} = \frac{12 \times 11 \times 10}{6} = 220$$

$$n(A) = \underbrace{\binom{5}{1}}_{\text{یک سفید}} \times \underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{یک سیاه}} \times \underbrace{\binom{3}{1}}_{\text{یک آبی}} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

پس  $P(A) = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$  است.

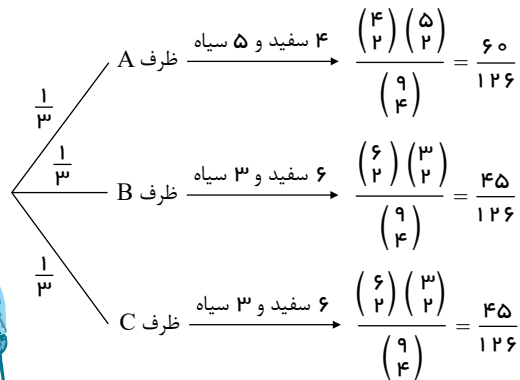
۱ ۲ ۳ ۴ ۵۷

$$n(S) = \binom{14}{4} = \frac{14!}{4!10!} = \frac{14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10!}{24 \times 10!} = 1001$$

$$\begin{cases} \text{یک قرمز} \rightarrow \binom{2}{1} = 2 \\ \text{سه سفید یا دو سفید و یک سیاه} \rightarrow \binom{7}{2} \binom{5}{1} + \binom{7}{3} = 105 + 35 = 140 \end{cases} \Rightarrow n(A) = 2 \times 140 = 280$$

پس  $P(A) = \frac{280}{1001} = \frac{40}{143}$  می‌باشد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۸



$$\text{احتمال} = \left(\frac{1}{3} \times \frac{60}{126}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{45}{126}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{45}{126}\right) = \frac{1}{3} \left(\frac{150}{126}\right) = \frac{50}{126} = \frac{25}{63}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۹

B: مهارت قالی‌بافی داشتن و A: تحصیلات ابتدایی داشتن

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = \frac{60}{100} + \frac{25}{100} - \left(\frac{60}{100} \times \frac{25}{100}\right)$$

$$= \frac{3}{5} + \frac{1}{4} - \frac{3}{20} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10} = 0.7$$

دقت کنید که دو پیشامد A و B مستقل هستند.

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۰

$$P(\underbrace{A \cup B}_{\text{لااقل یکی}}) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

لااقل یکی

A, B مستقل هستند.

$$\rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = 0.84 + 0.75 - \underbrace{(0.84)(0.75)}_{0.63} = 0.96$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۱

$$n(S) = \binom{11}{3} = \frac{11 \times 10 \times 9}{6} = 165$$

$$n(A) = \binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{6} = 20$$

پس  $P(A) = \frac{20}{165} = \frac{4}{33}$  است.

وقتی در این خانواده حداقل یکی از فرزندان دختر است یعنی حالتی که هر ۳ فرزند پسر باشند وجود ندارد.

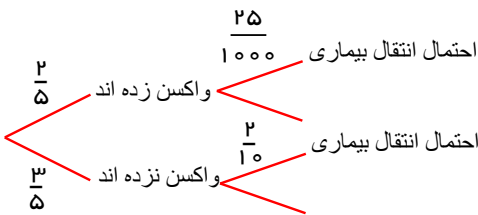
۱ ۲ ۳ ۴ ۶۲

$$n(S) = 2^3 - 1 = 7$$

$$DDP \text{ یا } DDD \rightarrow n(A) = \frac{3!}{2!} + 1 = 3 + 1 = 4$$

تعداد حالات مطلوب یعنی این خانواده حداقل دو فرزند دختر دارد:

پس  $P(A) = \frac{4}{7}$  است.



$$\text{احتمال انتقال بیماری} = \left(\frac{2}{5} \times \frac{25}{1000}\right) + \left(\frac{3}{5} \times \frac{2}{10}\right) = \frac{1}{100} + \frac{6}{50} = \frac{13}{100}$$

$$n(S) = 2^4 = 16$$

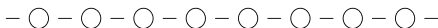
$$PPDD \Rightarrow n(A) = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

پس  $P(A) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$  است.

در صورتی که از رنگ  $n$  مهره‌ی خارج شده اطلاع‌ی نداشته باشیم احتمال آنکه مهره‌ی  $(n+1)$ م خارج شده سفید باشد مانند آن است که اولین مهره‌ی خارج شده سفید باشد یعنی  $P(A) = \frac{4}{7}$  است.

فضای نمونه آزمایش  $n(S) = 10!$  است.

دو فرد مورد نظر در ۹ جایی که مشخص شده است می‌توانند قرار بگیرند.



جابه‌جایی دو فرد مورد نظر

$$n(A) = \binom{9}{2} \times 2! \times 8!$$

جابه‌جایی هشت نفر دیگر

$$P(A) = \frac{\binom{9}{2} \times 2! \times 8!}{10!} = \frac{4}{5}$$

در ابتدا احتمال آنکه مجموع دو تاس بیشتر از ۴ باشد را حساب می‌کنیم (یعنی مجموع دو تاس، برابر ۵ یا ۶ یا ۷ یا ... یا ۱۲ باشد) برای این کار از متمم استفاده می‌کنیم.

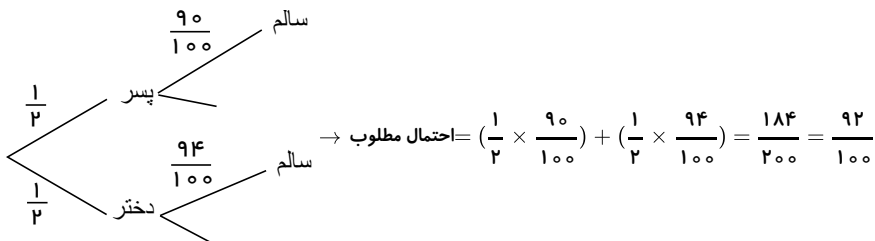
$$\begin{aligned} 4 &\rightarrow (1,3), (3,1), (2,2) \\ 3 &\rightarrow (1,2), (2,1) \\ 2 &\rightarrow (1,1) \end{aligned} \quad \rightarrow n(A) = 36 - 6 = 30 \rightarrow P(A) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

اگر  $A$  پیشامد آنکه مجموع دو تاس بیشتر از ۴ باشد و  $B$  پیشامد آن باشد که سکه رو، ظاهر شود داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مستقل

$$= \frac{5}{6} + \frac{1}{2} - \frac{5}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{6} + \frac{1}{2} - \frac{5}{12} = \frac{11}{12}$$



ابتدا احتمال آنکه در پرتاب دو سکه، حداقل یک سکه رو بیاید را حساب می‌کنیم.

$$n(S) = 2^2 = 4, \quad RR \text{ یا } RP \rightarrow n(A) = 1 + 2 = 3 \rightarrow P(A) = \frac{3}{4}$$

و احتمال آنکه در پرتاب یک تاس، عدد تاس، مضرب ۳ باشد برابر  $\frac{2}{6}$  است. (اعداد ۳ و ۶ مضرب ۳ هستند)



$$P(\text{حداقل یک سکه رو و تاس مضرب ۳ باشد}) = \frac{۳}{۴} \times \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۴}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۰

$$n(S) = \binom{۹}{۳} = \frac{۹ \times ۸ \times ۷}{۶} = ۸۴$$

یکی از مهره‌ها باید سفید باشد و دو مهره‌ی دیگر باید از بین ۵ مهره‌ی قرمز و سیاه باشد.

$$n(A) = \binom{۴}{۱} \times \binom{۵}{۲} = ۴ \times ۱۰ = ۴۰$$

$$\text{پس } P(A) = \frac{۴۰}{۸۴} = \frac{۱۰}{۲۱} \text{ است.}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۱

$$n(S) = \binom{۹}{۳} = \frac{۹ \times ۸ \times ۷}{۶} = ۸۴$$

حداقل یک مهره‌ی آبی خارج شود متمم آن است که اصلاً مهره‌ی آبی خارج نشده باشد یعنی ۳ مهره‌ی خارج شده از بین ۵ مهره‌ی قرمز و سفید باشد.

$$P(\text{حداقل یک مهره آبی}) = 1 - P(\text{هیچ کدام از مهره‌ها آبی نباشند}) = 1 - \frac{\binom{۵}{۳}}{۸۴} = 1 - \frac{۱۰}{۸۴} = \frac{۳۷}{۴۲}$$

لااقل دو دختر یعنی دو دختر یا سه دختر یا چهار دختر یا پنج دختر، برای این منظور از پیشامد متمم استفاده می‌کنیم.

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۲

$$P(\text{لااقل دو دختر}) = 1 - P(\text{یک دختر یا هیچ دختر}) = 1 - \left( \frac{۵}{۳۲} + \frac{۱}{۳۲} \right) = 1 - \frac{۶}{۳۲} = \frac{۱۳}{۱۶}$$

$$\text{دقت کنید: } \begin{cases} P P P P P \rightarrow ۱: \text{تعداد حالات هیچ دختر} \\ D P P P P \rightarrow \frac{۵!}{۴!} = ۵: \text{تعداد حالات یک دختر} \end{cases}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۳

می‌دانیم یکی از فرزندان دختر است پس می‌توان فضای نمونه‌ی جدیدی ساخت:

$$S_{\text{جدید}} = \{DPD, DPP, DDP, DDD\} \Rightarrow n(S) = ۴$$

$$A = \{DPD, DPP, DDP\} \Rightarrow n(A) = ۳$$

$$\text{پس } P(A) = \frac{۳}{۴} \text{ است.}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۴

A: قبولی در آزمون اول

B: قبولی در آزمون دوم

$$P(A) = ۰٫۹, \quad P(B) = ۰٫۹, \quad P(A \cap B) = ۰٫۸۵$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{۰٫۸۵}{۰٫۹} = \frac{۸۵}{۹۰} = \frac{۵ \times ۱۷}{۵ \times ۱۸} = \frac{۱۷}{۱۸}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۵

$$n(S) = \binom{۱۰}{۳} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸}{۶} = ۱۲۰$$

$$n(A) = \underbrace{\binom{۵}{۲} \binom{۵}{۱}}_{\text{بقیه‌ی رنگ‌ها یکی از دو سفید}} + \underbrace{\binom{۳}{۲} \binom{۷}{۱}}_{\text{بقیه‌ی رنگ‌ها یکی از دو سیاه}} + \underbrace{\binom{۲}{۲} \binom{۸}{۱}}_{\text{بقیه‌ی رنگ‌ها یکی از دو قرمز}} = ۵۰ + ۲۱ + ۸ = ۷۹$$

$$\text{پس } P(A) = \frac{۷۹}{۱۲۰} \text{ است.}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۶

(ماه تولد هر چهار نفر، متفاوت باشد)  $1 - P$  (ماه تولد حداقل دو نفر از چهار نفر یکسان باشد)

$$= 1 - \frac{۱۲ \times ۱۱ \times ۱۰ \times ۹}{۱۲^۴} = 1 - \frac{۵۵}{۹۶} = \frac{۴۱}{۹۶}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۷

$$S_{\text{جدید}} = \{(P, P), (P, D), (D, P)\} \rightarrow n(S) = ۳$$

$$A = \{(P, D), (D, P)\} \rightarrow n(A) = ۲$$

$$\text{پس } P(A) = \frac{۲}{۳} \text{ است.}$$



$$\frac{1}{2} \begin{cases} \text{جعبه ی اول} \rightarrow \frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7} \\ \text{جعبه ی دوم} \rightarrow \frac{\binom{3}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \end{cases}$$

$$\text{احتمال مطلوب} = \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{7}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{7} + \frac{1}{24} = \frac{31}{168}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۹ فضای نمونه ای این آزمایش  $n(S) = 6^2 = 36$  است.

$$\text{۳ مضارب: } \begin{cases} 3 \rightarrow (1, 2) (2, 1) \\ 6 \rightarrow (1, 5) (5, 1) (2, 4) (4, 2) (3, 3) \\ 9 \rightarrow (3, 6) (6, 3) (4, 5) (5, 4) \\ 12 \rightarrow (6, 6) \end{cases} \rightarrow n(A) = 12$$

$$\text{پس } P(A) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \text{ است.}$$

$$n(S) = \binom{11}{3} = \frac{11 \times 10 \times 9}{6} = 165$$

$P(\text{هر سه موش سیاه باشند}) = 1 - P(\text{حداقل یکی از موش ها سفید باشد})$

$$= 1 - \frac{\binom{6}{3}}{165} = 1 - \frac{6 \times 5 \times 4}{6 \times 165} = 1 - \frac{20}{165} = 1 - \frac{4}{33} = \frac{29}{33}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۱ فضای نمونه این سؤال  $n(S) = 8!$  است.

$$\text{۳ کتاب زبان} \times \text{۵ کتاب فارسی} \rightarrow n(A) = 3! \times 5! \times 3!$$

$$\text{پس } P(A) = \frac{3! \times 5! \times 3!}{8!} = \frac{1}{28} \text{ است.}$$

$$n(S) = \binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{6} = 84$$

مهره های خارج شده هم رنگ باشند یعنی هر ۳ سفید یا هر ۳ سیاه باشند.

$$n(A) = \binom{4}{3} + \binom{5}{3} = 4 + 10 = 14$$

$$\text{پس } P(A) = \frac{14}{84} = \frac{1}{6} \text{ است.}$$

$$\frac{45}{100} \begin{cases} \text{پسر} \rightarrow \frac{64}{100} \\ \text{دختر} \rightarrow \frac{60}{100} \end{cases}$$

تمام واحد های درسی را گذرانده اند

$$\text{احتمال مطلوب} = \left(\frac{45}{100} \times \frac{64}{100}\right) + \left(\frac{55}{100} \times \frac{60}{100}\right) = \frac{6180}{10000} = 0,618 \text{ یا } 61,8\%$$

$$\begin{matrix} \text{مرد } 54/100 \\ \text{زن } 46/100 \end{matrix} \begin{cases} \text{دفترچه دارند } 6/100 \\ \text{دفترچه ندارند } 75/100 \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{احتمال مطلوب} = \left(\frac{54}{100} \times \frac{60}{100}\right) + \left(\frac{46}{100} \times \frac{75}{100}\right) = \frac{669}{1000}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۵ اعداد حاصل می توانند یک رقمی تا پنج رقمی باشند البته بدون تکرار.



۵ حالت : اعداد یک رقمی

$$\text{دو رقمی} : \binom{5}{2} \times 2! = 20$$

$$\text{سه رقمی} : \binom{5}{3} \times 3! = 60$$

$$\text{چهار رقمی} : \binom{5}{4} \times 4! = 120$$

$$\text{پنج رقمی} : \binom{5}{5} \times 5! = 120$$

$$\text{مجموع} \rightarrow n(S) = \text{حالت } 325$$

می‌دانیم عددی به ۴ بخش پذیر است که دو رقم سمت راست آن مضرب ۴ باشند با ارقام داده شده و بدون تکرار ارقام اعدادی قابل قبول هستند که دو رقم سمت راست آن‌ها به ۵۲ و ۳۲ و ۲۴ و ۱۲ ختم می‌شود. در اعداد تک‌رقمی نیز فقط عدد چهار قابل قبول است. به ازای هر کدام از ۲ رقم قابل قبول صدگان ۳ حالت خواهد داشت.

۱ حالت  $\rightarrow$  تک رقمی

۴ حالت  $\rightarrow$  دو رقمی (۱۲, ۳۴, ۳۲, ۵۲)

$$\text{سه رقمی} \rightarrow \text{حالت } 3 \times \boxed{- \times -} = 12$$

$$\text{چهار رقمی} \rightarrow \text{حالت } 3 \times 2 \times \boxed{- \times -} = 24$$

$$\text{پنج رقمی} \rightarrow \text{حالت } 3 \times 2 \times 1 \times \boxed{- \times -} = 24$$

$$\text{مجموع} \rightarrow n(A) = \text{حالت } 65 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{65}{325} = \frac{1}{5}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۶

$$n(S) = \underbrace{\binom{5}{1}}_{\text{یک عضوی}} + \underbrace{\binom{5}{2} \times 2!}_{\text{دو عضوی}} + \underbrace{\binom{5}{3} \times 3!}_{\text{سه عضوی}} + \underbrace{\binom{5}{4} \times 4!}_{\text{چهار عضوی}} + \underbrace{\binom{5}{5} \times 5!}_{\text{پنج عضوی}} = 5 + 20 + 60 + 120 + 120 = 325$$

عددی بر ۳ بخش پذیر است که مجموع ارقامش بر ۳ بخش پذیر باشد.

یک عدد  $\rightarrow$  ۳: یک رقمی

$$\text{دو رقمی} : \begin{cases} 12 \\ 15 \rightarrow 4 \times 2! = 8 \rightarrow \text{عدد } 8 \\ 24 \\ 54 \end{cases}$$

$$\text{سه رقمی} : \begin{cases} 1, 2, 3 \\ 1, 3, 5 \rightarrow 4 \times 3! = 24 \rightarrow \text{عدد } 24 \\ 2, 3, 4 \\ 3, 4, 5 \end{cases}$$

$$\text{چهار رقمی} : 1, 2, 4, 5 \rightarrow 4! = 24 \rightarrow \text{عدد } 24$$

$$\text{پنج رقمی} : 1, 2, 3, 4, 5 \rightarrow 5! = 120 \rightarrow \text{عدد } 120$$

$$\text{یعنی} : n(A) = 1 + 8 + 24 + 24 + 120 = 177$$

$$\text{پس } P(A) = \frac{177}{325} \text{ است.}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۷  $A, B$  را پیشامد متولد شدن خرگوش نر در دوره اول و دوم بارداری در نظر می‌گیریم.

$$\text{نر} : P(A) = P(B) = \frac{70}{100}$$

$$\text{دو نر} : P(A \cap B) = \frac{60}{100}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{60}{100}}{\frac{70}{100}} = \frac{6}{7}$$

# پاسخنامه کلیبی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴

۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴
۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴
۴۱	۱	۲	۳	۴
۴۲	۱	۲	۳	۴
۴۳	۱	۲	۳	۴
۴۴	۱	۲	۳	۴

۴۵	۱	۲	۳	۴
۴۶	۱	۲	۳	۴
۴۷	۱	۲	۳	۴
۴۸	۱	۲	۳	۴
۴۹	۱	۲	۳	۴
۵۰	۱	۲	۳	۴
۵۱	۱	۲	۳	۴
۵۲	۱	۲	۳	۴
۵۳	۱	۲	۳	۴
۵۴	۱	۲	۳	۴
۵۵	۱	۲	۳	۴
۵۶	۱	۲	۳	۴
۵۷	۱	۲	۳	۴
۵۸	۱	۲	۳	۴
۵۹	۱	۲	۳	۴
۶۰	۱	۲	۳	۴
۶۱	۱	۲	۳	۴
۶۲	۱	۲	۳	۴
۶۳	۱	۲	۳	۴
۶۴	۱	۲	۳	۴
۶۵	۱	۲	۳	۴
۶۶	۱	۲	۳	۴

۶۷	۱	۲	۳	۴
۶۸	۱	۲	۳	۴
۶۹	۱	۲	۳	۴
۷۰	۱	۲	۳	۴
۷۱	۱	۲	۳	۴
۷۲	۱	۲	۳	۴
۷۳	۱	۲	۳	۴
۷۴	۱	۲	۳	۴
۷۵	۱	۲	۳	۴
۷۶	۱	۲	۳	۴
۷۷	۱	۲	۳	۴
۷۸	۱	۲	۳	۴
۷۹	۱	۲	۳	۴
۸۰	۱	۲	۳	۴
۸۱	۱	۲	۳	۴
۸۲	۱	۲	۳	۴
۸۳	۱	۲	۳	۴
۸۴	۱	۲	۳	۴
۸۵	۱	۲	۳	۴
۸۶	۱	۲	۳	۴
۸۷	۱	۲	۳	۴



معین کرمی

# سوالات سراسری هفته پنجم هفته چهل و نهم، نهم و دهم ریاضی

۱ دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات  $y = x + 1$  و  $2x - 2y = 3$  هستند، مساحت این مربع کدام است؟

- ۱  $\frac{9}{8}$     
 ۲  $\frac{9}{4}$     
 ۳  $\frac{25}{8}$     
 ۴  $\frac{25}{4}$

۲ سه ضلع مثلثی به معادلات  $AB: 2y - x = 3$ ,  $AC: y - 2x = 5$ ,  $BC: 2y + 3x = 6$  هستند. معادله ارتفاع  $AH$  از مثلث مفروض، کدام است؟

- ۱  $6y - 4x = 15$     
 ۲  $9y - 6x = 17$     
 ۳  $3y - 2x = 7$     
 ۴  $3y + 2x = 9$

۳ معادله سه ضلع یک مثلث  $x + y = 1$ ,  $y = 2x$ , و  $x = 1$  است. معادله خطی که کوچک ترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد، کدام است؟

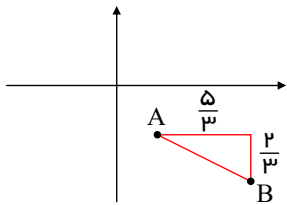
- ۱  $y = \frac{2}{3}$     
 ۲  $x = \frac{2}{3}$     
 ۳  $y + x = \frac{2}{3}$     
 ۴  $y + x = \frac{1}{3}$

۴ به ازای کدام مقدار  $a$ ، سه خط به معادلات  $y + 2x = 0$ ,  $2y + ax + 5 = 0$ , و  $y + 3x = a$  همگی از یک نقطه می گذرند؟

- ۱  $-1$     
 ۲  $1$     
 ۳  $2$     
 ۴ نشدنی

۵ نقطه‌ی  $A(7, 6)$  رأس یک متوازی الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات  $2y - 3x = 11$  و  $3y + 4x = 8$  می باشند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟

- ۱  $(4, 3)$     
 ۲  $(3, 4)$     
 ۳  $(3, 5)$     
 ۴  $(1, 5)$



۶ در شکل زیر شیب خطی که از دو نقطه‌ی  $A, B$  می گذرد کدام است؟

- ۱  $\frac{5}{2}$     
 ۲  $\frac{2}{5}$     
 ۳  $-\frac{2}{5}$     
 ۴  $-\frac{5}{2}$

۷ مساحت مثلثی با سه رأس به مختصات  $A(2, 5)$ ,  $B(3, 0)$ , و  $C(0, 2)$  کدام است؟

- ۱  $6$     
 ۲  $6,5$     
 ۳  $7$     
 ۴  $7,5$

۸ مساحت متوازی الاضلاع محدود به خطوطی به معادلات  $y = x + 3$  و  $x = 4$  و محور  $y$  ها و نیمساز ناحیه‌ی اول برابر کدام است؟

- ۱  $8$     
 ۲  $12$     
 ۳  $14$     
 ۴  $15$

۹ فاصله‌ی بین دو خط به معادلات  $y = \sqrt{3}x + 2$  و  $\sqrt{3}y - 3x + 6 = 0$  کدام است؟

- ۱  $2 - \sqrt{3}$     
 ۲  $\sqrt{3} - 1$     
 ۳  $\sqrt{3} + 1$     
 ۴  $2 + \sqrt{3}$

۱۰ به ازای کدام مقادیر  $a$ ، نقاط  $(a, 3)$  و  $(6, 4a + 1)$  و مبدأ مختصات در یک راستا قرار می گیرند؟

- ۱  $-2, \frac{9}{4}$     
 ۲  $-2, \frac{3}{4}$     
 ۳  $-2, -\frac{3}{4}$     
 ۴  $2, -\frac{9}{4}$

۱۱ معادله‌ی خطی که به موازات نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم بوده و نیمساز ناحیه‌ی دوم را در نقطه‌ای به طول  $x = 2$  قطع می کند کدام است؟

- ۱  $y + x = 4$     
 ۲  $y + x = -4$     
 ۳  $y - x = 4$     
 ۴  $y - x = -4$





۱۲) یک خط از دسته خطوط به معادله  $(k+1)y + 2kx - k + 1 = 0$  برخط گذشته بر دو نقطه  $(2, -1)$  و  $(8, 3)$  عمود است، معادله آن خط کدام است؟

۳)  $2y - 3x = -5$

۴)  $2y + 3x = 1$

۱)  $2y + 3x = 4$

۴)  $3y - 2x = -5$

۱۳) نقطه  $A(3, -1)$  وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله  $2y - x = 5$  است. مساحت این مربع، کدام است؟

۱) ۴۰

۲) ۴۵

۳) ۷۵

۴) ۸۰

۱۴) دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات  $2y + x = 6$  و  $2x - y = 7$  و یک رأس آن نقطه  $A(8, 5)$  است. مساحت این مستطیل کدام است؟

۱) ۷٫۲

۲) ۹٫۶

۳) ۱۱٫۴

۴) ۱۲٫۸

۱۵) مثلثی با رأس‌های  $A(1, 5)$ ،  $B(7, 3)$  و  $C(2, -2)$ ، مفروض است. اندازه ارتفاع  $AH$  در مثلث  $ABC$ ، کدام است؟

۱) ۴

۲)  $3\sqrt{2}$

۳) ۵

۴)  $4\sqrt{2}$

۱۶) مساحت مثلثی که دو ضلع آن واقع بر خطوطی به معادلات  $y + x = 2$  و  $2y - x = 4$  و ضلع دیگر آن بر محور  $x$  قرار دارد کدام است؟

۱) ۵

۲) ۶

۳) ۷

۴) ۸

۱۷) اضلاع مثلثی، منطبق بر سه خط به معادلات  $y + 2x = 16$ ،  $2y - x = 2$  و  $y = 0$  هستند. اندازه میانه نظیر ضلع افقی این مثلث در صفحه مختصات کدام است؟

۱)  $2\sqrt{5}$

۲) ۵

۳)  $3\sqrt{3}$

۴) ۶

۱۸) شیب نیم‌خطی با نقطه شروع  $A(2, 4)$  برابر ۳ است. مستطیل  $ABCD$  را چنان می‌سازیم که نقطه  $B$  روی نیم‌خط فوق و رأس سوم آن  $C(-3, -1)$  باشد محیط مستطیل کدام است؟

۱) ۲۴

۲) ۱۸

۳)  $6\sqrt{10}$

۴)  $3\sqrt{10}$

۱۹) نقطه  $H(2, 1)$  را روی خط  $3x - y = 5$  در نظر بگیرید مثلث متساوی‌الاضلاع  $ABC$  را با ارتفاع  $AH$  می‌سازیم به طوری که محیط مثلث  $\sqrt{270}$  واحد باشد. مختصات یک رأس  $A$  کدام است؟

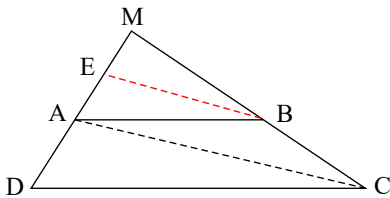
۱)  $(\frac{7}{2}, \frac{1}{2})$

۲)  $(\frac{13}{2}, -\frac{1}{2})$

۳)  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

۴)  $(-\frac{1}{2}, \frac{11}{6})$

۲۰) در دوزنقه‌ی  $ABCD$ ، پاره خط  $BE$  موازی قطر  $AC$  است. اگر  $AD = 7$  و  $AE = 3$  باشد، فاصله‌ی  $MD$  کدام است؟



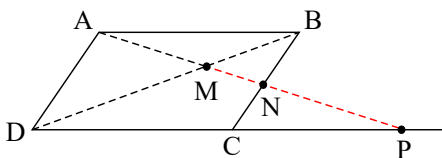
۱) ۱۲

۲) ۱۲٫۲۵

۳) ۱۲٫۵

۴) ۱۲٫۷۵

۲۱) در شکل روبه‌رو،  $ABCD$  متوازی‌الاضلاع است. حاصل  $MP \times MN$  برابر کدام است؟



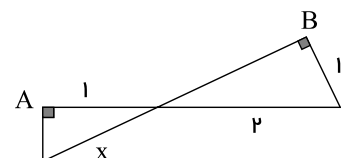
۱)  $AB^2$

۲)  $AD^2$

۳)  $MD^2$

۴)  $MA^2$

۲۲) در شکل مقابل دو زاویه  $A$  و  $B$  قائمه‌اند. مقدار  $x$  چقدر است؟



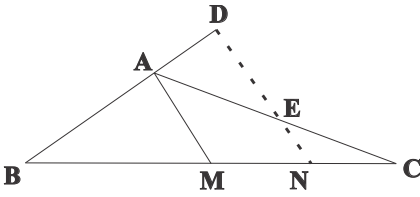
۱)  $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

۲)  $\frac{2}{3}$

۳)  $\frac{4}{3}$



۲۳ در مثلث  $ABC$  ( $AB = \frac{2}{3}AC$ )، پاره خط  $ND$  موازی میانه  $AM$  است. نسبت  $\frac{AD}{AE}$  کدام است؟



۵  
۹ (۲)

۴  
۵ (۴)

۴  
۹ (۱)

۲  
۳ (۳)

۲۴ در یک دایره به مرکز  $O$ ، شعاع  $OA$  را به اندازه خود تا نقطه  $B$  امتداد می‌دهیم. از نقطه  $B$  بر مماس دلخواه دایره عمود  $BD$  را فرود می‌آوریم.

اگر  $\widehat{ADB} = 34^\circ$  باشد، زاویه  $\widehat{OAD}$  چند درجه است؟

۱۴۶ (۴)

۱۰۲ (۳)

۷۳ (۲)

۶۸ (۱)

۲۵ در مثلث قائم الزاویه  $ABC$ ، اضلاع قائم  $AB = 3\sqrt{5}$  و  $AC = 6$  ارتفاع  $AH$  و میانه  $AM$  رسم شده است. مساحت مثلث  $ABC$ ، چند برابر مساحت مثلث  $AMH$  است؟

۱۸ (۴)

۱۵ (۳)

۱۲ (۲)

۱۰ (۱)

۲۶ مثلثی به اضلاع  $a$  و  $b$  و  $3$  با مثلثی به طول اضلاع  $5$  و  $4$  و  $3$  متشابه است. دو مثلث قابل انطباق نیستند، بیشترین محیط از مثلث اول کدام است؟

۷٫۲ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۱۳٫۵ (۱)

۲۷ در یک دوزنقه، پاره خطی که وسط‌های دو ساق را به هم وصل کند، مساحت آن را به نسبت‌های  $1$  و  $2$  تقسیم می‌کند. نسبت قاعده‌های آن دوزنقه، کدام است؟

۲  
۵ (۴)

۱  
۴ (۳)

۱  
۵ (۲)

۱  
۶ (۱)

۲۸ درون مثلثی به اضلاع  $9$  و  $7$  و  $5$  واحد، مثلث دیگر طوری رسم می‌کنیم که اضلاع آن موازی اضلاع مثلث اصلی باشد. اگر بزرگترین ضلع این

مثلث  $6$  واحد باشد مساحت محدود به این دو مثلث، چند برابر مساحت مثلث کوچکتر است؟

۱٫۵ (۴)

۱٫۲۵ (۳)

۱ (۲)

۰٫۷۵ (۱)

۲۹ مثلثی به اضلاع  $5$ ،  $4$ ،  $a$ ، با مثلثی به طول اضلاع  $9$ ،  $7$ ،  $b$ ، متشابه است. بیشترین مقدار ممکن برای عدد  $a$ ، کدام است؟

۳۵  
۴ (۴)

۳۶  
۵ (۳)

۴۵  
۷ (۲)

۳۶  
۷ (۱)

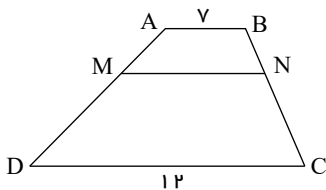
۳۰ در دوزنقه  $ABCD$ ، پاره خط  $MN$  موازی قاعده‌ها و  $\frac{MA}{MD} = \frac{2}{3}$  است. اندازه  $MN$ ، کدام است؟

۸٫۷۵ (۲)

۹٫۵ (۴)

۸ (۱)

۹ (۳)



۳۱ در دوزنقه‌ای اندازه‌ی قاعده‌ها  $9$  و  $4$  واحد و طول ساق‌ها  $6$  و  $5$  واحد است. محیط مثلثی که از امتداد ساق‌ها در بیرون دوزنقه تشکیل شود، کدام

است؟

۱۲٫۸ (۴)

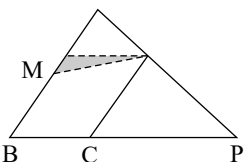
۱۲٫۲ (۳)

۱۱٫۶ (۲)

۱۱٫۴ (۱)

۳۲ در شکل زیر، نقطه‌ی  $M$  وسط ضلع متوازی‌الاضلاع است. اگر  $PC = \frac{2}{3}PB$  باشد، مساحت مثلث سایه‌زده، چند برابر مساحت بزرگ‌ترین

مثلث‌ها است؟



۳  
۱۶ (۴)

۱  
۸ (۳)

۱  
۹ (۲)

۱  
۱۲ (۱)



۳۳ در مستطیل  $ABCD$  به طول  $AB = 17$ ، از نقطه  $A$  عمود  $AH$  بر قطر  $BD$  رسم شده است. اگر  $BH = 15$  باشد، طول قطر مستطیل از عدد ۱۹، چقدر بیشتر است؟

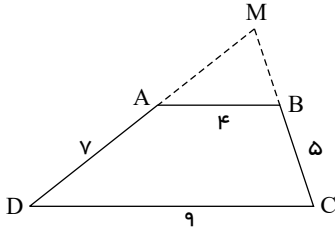
۴  $\frac{3}{5}$

۳  $\frac{7}{15}$

۲  $\frac{1}{3}$

۱  $\frac{4}{15}$

۳۴ اندازه اضلاع دوزنقه  $ABCD$  مطابق شکل زیر داده شده است. محیط مثلث  $MAB$ ، کدام است؟



۱  $13,2$

۲  $13,6$

۳  $14,4$

۴  $14,8$

۳۵ در یک دوزنقه قائم‌الزاویه، از نقطه  $O$  محل تلاقی قطرهای، خطی موازی قاعده‌ها رسم شود. ساق قائم را در  $A$  و ساق مایل را در  $B$  قطع می‌کند. نسبت  $\frac{OA}{OB}$ ، چگونه است؟

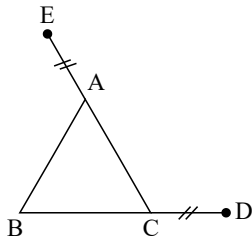
۴ متغیر نسبت به اضلاع

۳ بزرگتر از ۱

۲ مساوی ۱

۱ کوچکتر از ۱

۳۶ در مثلث متساوی‌الاضلاع  $ABC$ ، بر روی امتداد دو ضلع  $BC$  و  $CA$  پاره‌خط‌های  $CD = AE$  جدا شده است. زاویه بین امتداد  $DA$  با  $BE$  چند درجه است؟



۱  $45^\circ$

۲  $60^\circ$

۳  $75^\circ$

۴  $90^\circ$

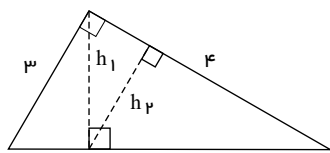
۳۷ در مثلث  $ABC$ ، اضلاع  $AB = 4$  و  $AC = 6$  و  $BC = 7$  است. از رأس  $C$  خطی موازی میانه  $AM$  رسم شده و امتداد  $BA$  را در نقطه  $D$  قطع کرده است. اندازه  $BD$ ، کدام است؟

۴ ۹

۳ ۸,۵

۲ ۸

۱ ۷,۵



۳۸ در شکل زیر،  $h_1$  و  $h_2$  ارتفاع‌های دو مثلث قائم‌الزاویه هستند. نسبت  $\frac{h_2}{h_1}$ ، کدام است؟

۲  $\frac{4}{5}$

۱  $\frac{3}{5}$

۴  $\frac{3}{4}$

۳  $\frac{2}{3}$

۳۹ در چهارضلعی محدب  $ABCD$ ، رابطه‌ی  $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = \frac{5}{12}$ ، بین زوایه‌ها برقرار است. زاویه‌ی حاده بین نیمسازهای داخلی دو زاویه‌ی متقابل  $\hat{C}$  و  $\hat{A}$  چند درجه است؟

۴ ۳۵

۳ ۳۰

۲ ۲۵

۱ ۲۰

۴۰ در مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع و میانه‌ی نظیر وتر، زاویه‌ی  $12^\circ$  درجه با هم ساخته‌اند. کوچک‌ترین زاویه‌ی این مثلث، چند درجه است؟

۴ ۳۹

۳ ۳۷

۲ ۳۸

۱ ۳۴

۴۱ در مثلث  $ABC$ ، ضلع  $AB$  بزرگ‌تر از ضلع  $AC$  است. هر یک از میانه‌های  $BM$  و  $CN$  را از وسط اضلاع به اندازه خود تا  $D$  و  $E$  امتداد می‌دهیم. نسبت مساحت مثلث  $DBC$  به مساحت مثلث  $EBC$ ، کدام است؟

۴ بستگی به ضلع سوم دارد.

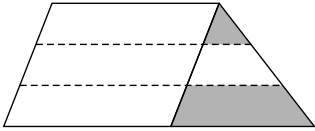
۳ مساوی ۱

۲ بیشتر از ۱

۱ کمتر از ۱

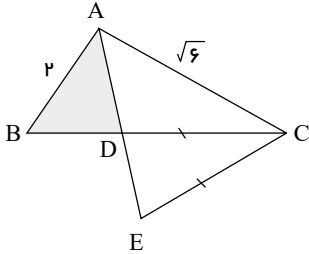


۴۲) یک ساق دوزنقه به سه قسمت مساوی تقسیم شده است. هر چهار پاره‌خط موازی یکدیگرند. نسبت مساحت دو ناحیه سایه‌زده، کدام است؟



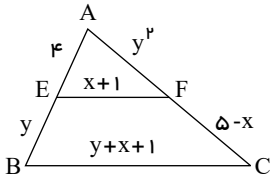
- ۱)  $\frac{1}{6}$
- ۲)  $\frac{1}{5}$
- ۳)  $\frac{2}{9}$
- ۴)  $\frac{1}{4}$

۴۳) در شکل زیر،  $AD$  نیمساز زاویه  $A$  و  $CE = CD$  است. نسبت مساحت‌های دو مثلث  $ACE$  و  $ABD$ ، کدام است؟



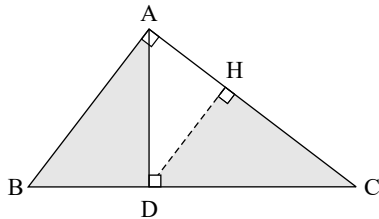
- ۱)  $\frac{1}{3}$
- ۲)  $\frac{2}{3}$
- ۳)  $\frac{3}{4}$
- ۴)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۴۴) در شکل زیر  $EF$  موازی  $BC$  است. مقدار  $y - 2x$  کدام است؟



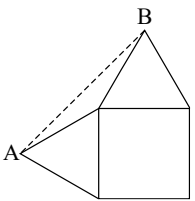
- ۱)  $-۴$
- ۲)  $-۲$
- ۳)  $۲$
- ۴)  $۴$

۴۵) در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$ ، طول اضلاع قائم  $AB = \sqrt{3}$  و  $AC = ۲$  است. نسبت مساحت‌های دو مثلث قائم‌الزاویه  $HCD$  و  $ABD$ ، کدام است؟



- ۱)  $\frac{3}{7}$
- ۲)  $\frac{4}{7}$
- ۳)  $\frac{16}{21}$
- ۴)  $\frac{8}{9}$

۴۶) بر روی دو ضلع مجاور مربعی به ضلع ۲ واحد، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ساخته شده است. فاصله  $AB$  چند واحد است؟

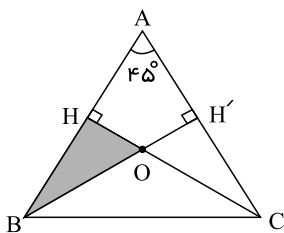


- ۱)  $۱ + ۲\sqrt{3}$
- ۲)  $۳ + \sqrt{3}$
- ۳)  $۳ + \sqrt{2}$
- ۴)  $\sqrt{6} + \sqrt{2}$

۴۷) در یک متوازی‌الاضلاع با زاویه  $۶۰$  درجه، نیمسازهای دو زاویه مجاور ضلع بزرگ، روی ضلع دیگر آن متقاطع‌اند. اگر محیط این متوازی‌الاضلاع  $۱۲\sqrt{3}$  باشد، مساحت آن کدام است؟

- ۱)  $۹\sqrt{3}$
- ۲)  $۱۸$
- ۳)  $۱۲\sqrt{3}$
- ۴)  $۱۸\sqrt{3}$

۴۸) در شکل زیر مثلث  $ABC$  متساوی‌الساقین و طول ساق  $AB$  برابر ۸ واحد است. مساحت مثلث  $OHB$  کدام است؟



- ۱)  $\frac{6}{2 + \sqrt{3}}$
- ۲)  $\frac{8}{2 + \sqrt{3}}$
- ۳)  $\frac{12}{3 + 2\sqrt{3}}$
- ۴)  $\frac{16}{3 + 2\sqrt{3}}$



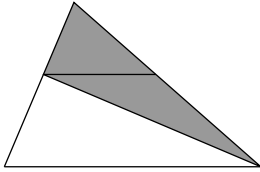
۴۹ در چهارضلعی محدب  $ABCD$ ، رابطه  $\hat{A} = \frac{\hat{B}}{4} = \frac{\hat{C} + \hat{D}}{11}$ ، بین زاویه‌ها برقرار است. زاویه حاده بین نیم‌سازهای داخلی دو زاویه مجاور  $\hat{A}$  و  $\hat{B}$ ، چند درجه است؟

۷۵ (۴)

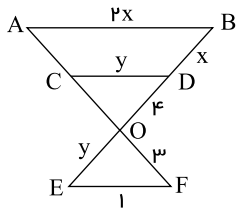
۷۰ (۳)

۶۰ (۲)

۵۰ (۱)



۵۰ در شکل زیر، نسبت قاعده‌های دوزنقه  $\frac{3}{5}$  است. مساحت مثلث سایه زده، چند برابر مساحت دوزنقه است؟

 $\frac{7}{8}$  (۲) $\frac{3}{4}$  (۱) $\frac{15}{16}$  (۴) $\frac{14}{15}$  (۳)

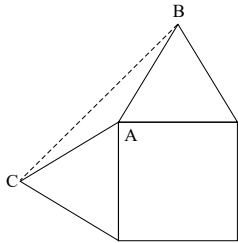
۵۱ در شکل زیر  $AB$ ،  $CD$  و  $EF$  موازی‌اند. طول پاره‌خط  $AC$ ، کدام است؟

 $\frac{4}{3}$  (۲) $\frac{3}{4}$  (۱)

۳ (۴)

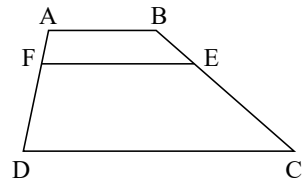
۲ (۳)

۵۲ بر روی دو ضلع مجاور مربعی به ضلع ۲ واحد، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ساخته شده است. مساحت مثلث  $ABC$  چند واحد مربع است؟

 $\frac{1}{2}\sqrt{3}$  (۲) $\sqrt{3} - 1$  (۱) $\sqrt{3}$  (۴)

۱ (۳)

۵۳ در دوزنقه  $ABCD$ ، قاعده بزرگ  $\frac{5}{2}$  قاعده کوچک است و  $AF = \frac{1}{4}AD$  و  $EF$  موازی قاعده است. نسبت  $\frac{EF}{CD}$ ، کدام است؟

 $\frac{7}{15}$  (۲) $\frac{11}{20}$  (۱) $\frac{3}{5}$  (۴) $\frac{8}{15}$  (۳)

۵۴ دایره‌ای از دو نقطه‌ی  $(0, 1)$  و  $(3, 0)$  گذشته و معادله‌ی یک قطر آن به صورت  $x - y = 2$  است. شعاع این دایره کدام است؟

۳ (۴)

 $\sqrt{5}$  (۳)

۲ (۲)

 $\sqrt{2}$  (۱)

۵۵ به ازای کدام مقدار  $a$ ، زاویه‌ی بین خط مماس بر دایره‌ی  $x^2 + y^2 - 2x + y = 1$  و خط به معادله‌ی  $3x + 2y = a$  در نقطه‌ی تلاقی آن‌ها،  $90^\circ$  درجه است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

۵۶ شعاع دایره‌ای که از سه نقطه با مختصات  $(2, 1)$ ،  $(-2, 4)$ ،  $(0, 0)$  می‌گذرد کدام است؟

۳٫۵ (۴)

۳ (۳)

۲٫۵ (۲)

۲ (۱)

۵۷ فاصله‌ی نقطه‌ی  $M(x, y)$  از نقطه‌ی  $A(3, 6)$ ، دو برابر فاصله‌ی آن از مبدأ مختصات است. بزرگترین وتر از مکان نقاط  $M$  کدام است؟

 $4\sqrt{5}$  (۴) $4\sqrt{3}$  (۳) $2\sqrt{5}$  (۲) $2\sqrt{3}$  (۱)

۵۸ دایره‌ای، محور  $x$ ها را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع کرده و مرکز آن، بر روی نیمساز ربع اول است. شعاع این دایره کدام است؟

۳ (۴)

 $\sqrt{5}$  (۳)

۲ (۲)

 $\sqrt{3}$  (۱)



۵۹) دایره‌ی گذرا بر نقطه‌ی  $(-2, 1)$ ، بر هر دو محور مختصات مماس است. شعاع آن کدام است؟

- ۱) ۱ و ۴      ۲) ۱ و ۵      ۳) ۲ و ۴      ۴) ۲ و ۵

۶۰) دایره‌ای از نقطه  $(-1, 2)$  گذشته و بر هر دو محور مختصات مماس است. قطر دایره بزرگتر کدام است؟

- ۱) ۱۵      ۲) ۱۰      ۳) ۱۲      ۴) ۸

۶۱) دایره‌ی  $C$  بر دایره به معادله‌ی  $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 4$  مماس خارج است. هر خط قائم بر دایره‌ی  $C$  از نقطه‌ی  $(8, 7)$  می‌گذرد. شعاع دایره‌ی  $C$  کدام است؟

- ۱) ۶      ۲) ۷      ۳) ۸      ۴) ۹

۶۲) در یک بیضی به کانون‌های  $(2, -1)$  و  $(2, 7)$ ، اندازه‌ی قطر کوچک ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی، کدام است؟

- ۱) ۰٫۶      ۲) ۰٫۶۴      ۳) ۰٫۷۵      ۴) ۰٫۸

۶۳) دایره‌ای به مرکز  $(2, -1)$  و مماس بر خط به معادله‌ی  $x - y = 1$ ، محور  $x$ ها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

- ۱) ۱ و ۳      ۲) ۱ و ۴      ۳) ۲ و ۳      ۴) ۱٫۵ و ۴

۶۴) نقطه‌ی  $C(-1, 4)$  مرکز یک دایره است که بر روی خط  $2x - 3y + 1 = 0$  و تری به طول  $2\sqrt{7}$  جدا می‌کند. این دایره خط  $y = 2$  را با کدام طول، قطع می‌کند؟

- ۱)  $3, -5$       ۲)  $2, -4$       ۳)  $-1 \pm \sqrt{2}$       ۴)  $-1 \pm \sqrt{3}$

۶۵) شعاع دایره‌ی گذرا بر سه نقطه‌ی  $(0, 0)$ ،  $(2, 1)$  و  $(1, -2)$ ، برابر کدام است؟

- ۱)  $\frac{1}{2}\sqrt{10}$       ۲)  $\sqrt{3}$       ۳)  $\sqrt{5}$       ۴)  $\frac{1}{2}\sqrt{13}$

۶۶) شعاع دایره به مرکز  $(-2, 2)$  و مماس خارج بر دایره‌ی  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ ، کدام است؟

- ۱)  $2\sqrt{2}$       ۲) ۳      ۳)  $2\sqrt{3}$       ۴) ۴

۶۷) در بیضی به معادله‌ی  $16y^2 + 5x^2 - 10x = 75$  خط گذرا بر کانون و عمود بر محور کانونی، بیضی را در  $M$  و  $N$  قطع می‌کند، اندازه‌ی  $MN$  کدام است؟

- ۱) ۲      ۲) ۲٫۵      ۳) ۳      ۴) ۳٫۵

۶۸) در داخل یک استوانه به شعاع قاعده ۴ و ارتفاع ۶ واحد، بزرگترین منشور قائم با قاعده مربع، جا گرفته است. حجم این منشور، کدام است؟

- ۱) ۱۷۴      ۲) ۱۸۶      ۳) ۱۹۲      ۴) ۱۹۸

۶۹) یک ظرف استوانه‌ای مدرج به قطر دهانه‌ی ۸، تا ارتفاع ۱۰ واحد پُر از مایع است. اگر یک گوی کروی وزین داخل آن قرار گیرد، ارتفاع مایع  $\frac{2}{3}$  واحد بالا می‌آید. سطح این کره، کدام است؟

- ۱)  $6\pi$       ۲)  $8\pi$       ۳)  $12\pi$       ۴)  $16\pi$

۷۰) قاعده منشور قائم، شش‌ضلعی منتظم به ضلع ۴ واحد و طول یال قائم آن  $7.5$  واحد است. حجم بزرگ‌ترین استوانه که در داخل این منشور جای گیرد، چند برابر  $\pi$  است؟

- ۱) ۷۵      ۲) ۸۴      ۳) ۹۰      ۴) ۱۰۵

۷۱) از داخل یک استوانه‌ی قائم توپُر، به شعاع قاعده ۴ و ارتفاع ۵ واحد، بزرگ‌ترین مخروط قائم ممکن را حذف می‌کنیم. جسم حاصل را با صفحه‌ای موازی قاعده مخروط به فاصله ۳ واحد از آن قطع می‌دهیم. مساحت مقطع حاصل، کدام است؟

- ۱)  $10.36\pi$       ۲)  $11.28\pi$       ۳)  $12.56\pi$       ۴)  $13.44\pi$



۷۲) دایره  $x^2 + y^2 + 2y = 3$  مفروض است. معادله دایره‌ای که با دایره قبلی مماس داخل بوده و از نقطه  $(0, -3)$  گذشته و شعاع آن با قطر دایره قبلی برابر باشد، کدام است؟

۱)  $x^2 + y^2 - 2y = 15$     ۲)  $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$     ۳)  $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$     ۴)  $x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$

۷۳) به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر  $a$ ، منحنی به معادله‌ی  $2x^2 + (a^2 - 7)y^2 + 4y + a = 0$  یک دایره است؟

۱)  $\{-3\}$     ۲)  $\{3\}$     ۳)  $\{-3, 3\}$     ۴)  $\emptyset$

۷۴) دایره‌ای از دو نقطه‌ی  $(2, 0)$  و  $(-2, 0)$  گذشته و بر خط  $y = 1$  مماس است. شعاع این دایره کدام است؟

۱)  $\frac{3}{2}$     ۲)  $\sqrt{5}$     ۳)  $\frac{5}{2}$     ۴) ۳

۷۵) هر خط قائم بر یک دایره، از نقطه  $(-2, 1)$  می‌گذرد. این دایره بر خط به معادله  $y = x - 1$  مماس است. شعاع دایره کدام است؟

۱) ۲    ۲)  $2\sqrt{2}$     ۳) ۳    ۴)  $3\sqrt{2}$

۷۶) دو دایره به معادلات  $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 8$  و  $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 12 = 0$  نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

۱) مماس خارج    ۲) مماس داخل    ۳) متقاطع    ۴) متخارج

۷۷) دایره به مرکز  $(0, 2)$  و مماس بر نیمساز ربع اول، خط به معادله‌ی  $y = 1$  را با کدام طول‌ها قطع می‌کند؟

۱) ۱, ۳    ۲) ۴, ۱    ۳)  $\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$     ۴)  $2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}$

۷۸) دو دایره به معادلات  $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 13$  و  $x^2 + y^2 + 2x = 1$  نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

۱) مماس داخل    ۲) مماس خارج    ۳) متقاطع    ۴) متداخل

۷۹) معادله‌ی وتر مشترک دو دایره به مراکز  $(-1, 2)$  و  $(2, 1)$  و به شعاع‌های مساوی ۲ واحد، کدام است؟

۱)  $x = 2y$     ۲)  $y = 3x$     ۳)  $3y = 2x$     ۴)  $3y = 3x$

۸۰) طول شعاع دایره‌ای که از سه نقطه  $A(-1, 0)$  و  $B(3, 0)$  و  $C(0, -3)$  می‌گذرد کدام است؟

۱)  $\sqrt{3}$     ۲) ۲    ۳)  $\sqrt{5}$     ۴) ۳

۸۱) نقطه‌ی  $(a, 2a)$  مرکز دایره‌ای گذرنده بر دو نقطه‌ی  $(2, 1)$  و  $(-1, 4)$  است. شعاع این دایره کدام است؟

۱) ۳    ۲) ۴    ۳)  $2\sqrt{2}$     ۴)  $3\sqrt{2}$

۸۲) به ازای کدام مقدار  $a$ ، دایره به معادله‌ی  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0$  بر خط به معادله‌ی  $x + 3y = 0$  مماس است؟

۱)  $\frac{3}{2}$     ۲)  $\frac{5}{2}$     ۳) ۲    ۴) ۵

۸۳) دایره‌ای از دو نقطه‌ی  $(0, 0)$  و  $(3, 1)$  گذشته و مرکز آن بر خط به معادله‌ی  $y = 2x$  قرار دارد. شعاع این دایره کدام است؟

۱)  $\sqrt{3}$     ۲) ۲    ۳)  $\sqrt{5}$     ۴) ۳



## پاسخنامه تشریحی

۱ ۲ ۳ ۴ ۱

شیب هر دو خط یک می باشد یعنی این دو خط موازیند یعنی دو ضلع مقابل یک مربع هستند و فاصله‌ی بین این دو، ضلع مربع را می دهد.

$$\begin{aligned} x - y + 1 &= 0 \\ x - y - \frac{3}{2} &= 0 \end{aligned}$$

(در محاسبه‌ی فاصله‌ی بین دو خط موازی حتماً ضرایب  $x$  و  $y$  در هر دو معادله‌ی خط باید یکسان باشند)

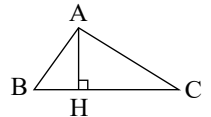
$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 - (-\frac{3}{2})|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5}{2\sqrt{2}}$$

$$S_{\text{مربع}} = (\text{ضلع})^2 = \left(\frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{25}{8}$$

برای محاسبه‌ی فاصله‌ی بین دو خط موازی به معادلات  $ax + by + c = 0$  و  $ax + by + c' = 0$  از رابطه‌ی  $d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  استفاده می کنیم.

۱ ۲ ۳ ۴ ۲

$$BC : 2y + 3x = 6 \rightarrow m_{BC} = -\frac{3}{2} \xrightarrow{\text{ارتفاع } AH \text{ بر ضلع } BC \text{ عمود است}} m_{AH} = \frac{2}{3}$$



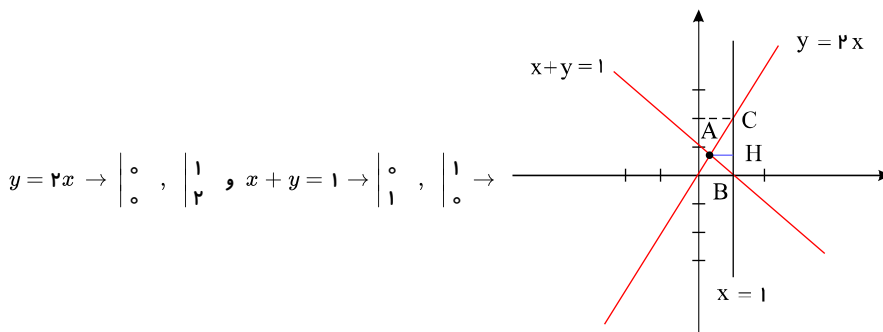
برای پیدا کردن مختصات نقطه  $A$  کافی است معادلات خطوط اضلاع  $AB$  و  $AC$  را تلافی دهیم.

$$\begin{cases} 2y - x = 3 & \text{دستگاه} \\ y - 2x = 5 \end{cases} \rightarrow x = -\frac{7}{3}, y = \frac{1}{3}$$

حال، معادله‌ی ارتفاع  $AH$  را با داشتن شیب و یک نقطه می نویسیم.

$$A \left( -\frac{7}{3}, \frac{1}{3} \right), m_{AH} = \frac{2}{3} \rightarrow y - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \left( x + \frac{7}{3} \right) \rightarrow 3y - 1 = 2x + \frac{14}{3} \xrightarrow{\times 3} 9y - 3 = 6x + 14 \rightarrow 9y - 6x = 17$$

سه خط داده شده را رسم می کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۳



کوچک ترین ارتفاع مثلث  $ABC$  پاره خط  $AH$  می باشد که معادله اش  $y = \frac{2}{3}x + \frac{17}{9}$  است، زیرا اگر با دو خط  $y = 2x$  و  $x + y = 1$  تشکیل دهیم، داریم:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}$$

یعنی مختصات نقطه  $A$  به صورت  $A \left( \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$  است، پس معادله ارتفاع  $AH$  به صورت  $y = \frac{2}{3}x + \frac{17}{9}$  است.

شرط آنکه سه خط در یک نقطه همدیگر را قطع کنند آن است که محل تلافی دو خط در معادله‌ی خط سوم صدق کند. ۱ ۲ ۳ ۴ ۴

$$- \begin{cases} y + 2x = 0 \\ y + 3x = a \end{cases} \Rightarrow x = a, y = -2a$$





$$A \left| \begin{array}{l} a \\ -2a \end{array} \right. \xrightarrow{\text{صدق در خط سوم}} \begin{array}{l} -4a + a^2 + 5 = 0 \\ 2y + ax + 5 = 0 \end{array} \Rightarrow a^2 - 4a + 5 = 0$$

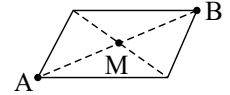
این سه خط هیچگاه متقارب نیستند.  $\rightarrow$  ریشه‌ی حقیقی ندارد.  $\rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 16 - 20 = -4 < 0$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

مختصات نقطه‌ی  $A$  در هیچ‌یک از معادلات دو خط صدق نمی‌کند پس نقطه  $A$  روی این دو خط قرار ندارد و چون این دو خط موازی نیستند کافی است با این دو خط تشکیل دستگاه دهیم تا

مختصات نقطه‌ی  $B$  بدست آید.

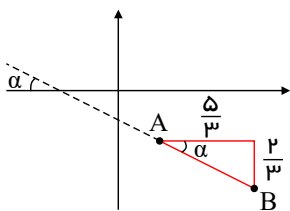
$$\begin{cases} 2y - 3x = 11 \\ -2 \begin{cases} 3y + 4x = 8 \end{cases} \end{cases} \rightarrow -17x = 17 \Rightarrow x = -1, y = 4 \Rightarrow B \left| \begin{array}{l} -1 \\ 4 \end{array} \right.$$



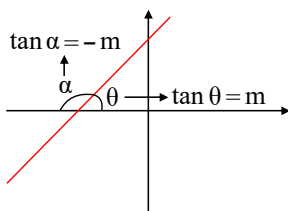
می‌دانیم نقطه‌ی  $M$  وسط پاره‌خط  $AB$  قرار دارد یعنی:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{7 - 1}{2} = 3, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{6 + 4}{2} = 5$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶



شیب خط عبارت است از تانژانت زاویه‌ای که خط با سمت راست محور طول‌ها تشکیل می‌دهد.



$$\text{پس: } \tan \alpha = -m = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{2}{5} \rightarrow m = -\frac{2}{5}$$

روش اول: هرگاه مختصات سه رأس یک مثلث را داشته باشیم می‌توانیم مساحت مثلث را از این رابطه حساب کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۷

$$S = \frac{1}{2} |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|$$

$$= \frac{1}{2} |2(0 - 2) + 3(2 - 5) + 0(5 - 0)| = \frac{1}{2} |-4 - 9 + 0| = \frac{13}{2} = 6,5$$

روش دوم: ابتدا طول یکی از اضلاع مانند  $BC$  را بدست می‌آوریم و آن را به عنوان قاعدهٔ مثلث در نظر می‌گیریم. سپس با پیدا کردن معادلهٔ ضلع  $BC$  فاصلهٔ  $A$  را تا این خط پیدا می‌کنیم تا ارتفاع مثلث ( $AH$ ) معلوم شود و در نهایت مساحت مثلث بدست آید.

$$B(3, 0), C(0, 2) \quad m_{BC} = \frac{2 - 0}{0 - 3} = -\frac{2}{3}$$

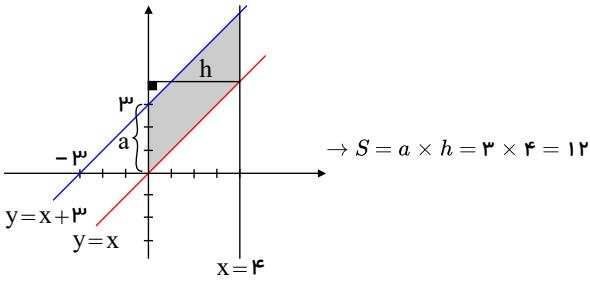
$$BC \text{ معادله خط: } y - 0 = -\frac{2}{3}(x - 3) \Rightarrow y + \frac{2}{3}x - 2 = 0$$

$$AH = \frac{|5 + (\frac{2}{3} \times 2) - 2|}{\sqrt{(1)^2 + (\frac{2}{3})^2}} = \frac{3 + \frac{4}{3}}{\sqrt{\frac{13}{9}}} = \frac{\frac{13}{3}}{\frac{\sqrt{13}}{3}} = \sqrt{13}$$

$$BC = \sqrt{(3 - 0)^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} \times \sqrt{13} \times \sqrt{13} = \frac{13}{2} = 6,5$$

بهترین روش برای حل این تست رسم شکل است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۸



شیب هر دو خط  $\sqrt{3}$  می‌باشد پس با هم موازیند و می‌دانیم برای محاسبه‌ی فاصله‌ی بین دو خط موازی به معادلات  $ax + by + c = 0$  و  $ax + by + c' = 0$  از رابطه‌ی  $d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  استفاده می‌کنیم (ضرایب  $x, y$  در هر دو معادله‌ی خط باید یکسان باشند).

$$\begin{cases} y = \sqrt{3}x + 2 \xrightarrow{\times \sqrt{3}} 3x - \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} = 0 \\ \sqrt{3}y - 3x + 6 = 0 \rightarrow 3x - \sqrt{3}y - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d = \frac{|2\sqrt{3} - (-6)|}{\sqrt{9 + 3}} = \frac{2\sqrt{3} + 6}{\sqrt{12}} = \frac{2(\sqrt{3} + 3)}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3}} = 1 + \frac{3}{\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}$$

1 2 3 4 10

سه نقطه‌ی  $A \left| \begin{matrix} a \\ 3 \end{matrix} \right|, B \left| \begin{matrix} 6 \\ 4a + 1 \end{matrix} \right|, C \left| \begin{matrix} 0 \\ 6 \end{matrix} \right|$  را در نظر می‌گیریم.

شرط هم‌راستا بودن:  $\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} \rightarrow \frac{3 - 4a - 1}{a - 6} = \frac{4a + 1}{6 - 0} \rightarrow \frac{2 - 4a}{a - 6} = \frac{4a + 1}{6}$

$\rightarrow 4a^2 + a - 24a - 6 = 12 - 24a \rightarrow 4a^2 + a - 18 = 0$

$\rightarrow \Delta = 1 - 4(4)(-18) = 289 \rightarrow a = \frac{-1 \pm 17}{8} = 2, -\frac{9}{4}$

معادله‌ی خط نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم  $y = x$  است که شیب آن یک می‌باشد و چون خط باید با نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم موازی باشد پس شیب خط مطلوب هم، یک می‌باشد. چون این خط، نیمساز ناحیه‌ی دوم و چهارم ( $y = -x$ ) را در نقطه‌ای به طول  $x = 2$  قطع می‌کند پس عرض آن  $y = -2$  است.

$A \left| \begin{matrix} 2 \\ -2 \end{matrix} \right|, m = 1 \rightarrow y - (-2) = 1(x - 2) \rightarrow y + 2 = x - 2 \rightarrow y - x = -4$

1 2 3 4 11

ابتدا شیب خط گذرنده از دو نقطه‌ی  $A \left| \begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix} \right|$  و  $B \left| \begin{matrix} 8 \\ 3 \end{matrix} \right|$  را بدست می‌آوریم.

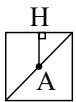
$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-1 - 3}{2 - 8} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{عمود}} m_{\text{خط}} = -\frac{3}{2}$

$m_{\text{خط}} = -\frac{3}{k + 1} = -\frac{3}{2} \rightarrow 4k = 3k + 3 \rightarrow k = 3$

معادله‌ی دسته خطوط  $\div 2 \rightarrow 4y + 6x - 2 = 0 \rightarrow 2y + 3x = 1$

1 2 3 4 13

فاصله‌ی وسط یک قطر مربع از یکی از اضلاع آن برابر نصف ضلع مربع است.



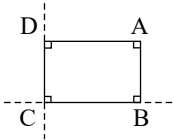
$A \left| \begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix} \right|, x - 2y + 5 = 0 \rightarrow AH = \text{نصف ضلع مربع} = \frac{|3 + 2 + 5|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \rightarrow \text{ضلع مربع} = \frac{20}{\sqrt{5}}$

مساحت مربع = (ضلع مربع)<sup>2</sup> =  $\left(\frac{20}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{400}{5} = 80$

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی  $A \left| \begin{matrix} a \\ \beta \end{matrix} \right|$  از خط به معادله‌ی  $ax + by + c = 0$  از رابطه‌ی  $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  به دست می‌آید.

1 2 3 4 14

$2y + x = 6 \rightarrow m = -\frac{1}{2}, 2x - y = 7 \rightarrow m' = 2$

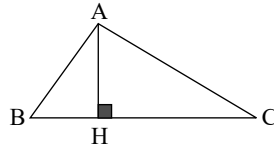


چون شیبها عکس و قرینه ی هم هستند این دو خط بر هم عمودند و نقطه ی A در معادله ی هیچ کدام از این دو خط صدق نمی کند پس می توان شکل را در این گونه در نظر گرفت.

برای یافتن طول و عرض مستطیل کافی است فاصله ی نقطه ی A را از این دو خط بدست آوریم.

$$\left. \begin{aligned} A \left| \begin{matrix} 8 \\ 5 \end{matrix} \right., x + 2y - 6 = 0 \rightarrow AD = \frac{|8 + 10 - 6|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{12}{\sqrt{5}} \\ A \left| \begin{matrix} 8 \\ 5 \end{matrix} \right., 2x - y - 7 = 0 \rightarrow AB = \frac{|16 - 5 - 7|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{مساحت مستطیل} = AD \times AB = \frac{48}{5} = 9.6$$

توجه کنید فاصله ی نقطه ی  $A \left| \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right.$  از خط به معادله ی  $ax + by + c = 0$  از رابطه ی  $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  بدست می آید.



شکل فرضی ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵

را در نظر می گیریم. ابتدا معادله خطی را که از دو نقطه B و C می گذرد می نویسیم و سپس فاصله نقطه

از خط را بدست می آوریم.

$$BC: \frac{y - y_B}{x - x_B} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} \Rightarrow \frac{y - 3}{x - 7} = \frac{3 + 2}{7 - 2} = 1 \Rightarrow y - 3 = x - 7 \Rightarrow x - y - 4 = 0$$

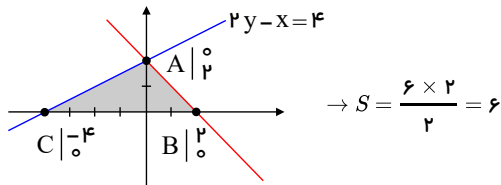
$$\left\{ \begin{aligned} A \left| \begin{matrix} 1 \\ 5 \end{matrix} \right. \\ x - y - 4 = 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow AH = \frac{|1 - 5 - 4|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{8}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

توجه کنید فاصله نقطه  $A \left| \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right.$  از خط به معادله  $ax + by + c = 0$  از رابطه  $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  بدست می آید.

ابتدا محل برخورد این خطوط را با محورهای مختصات پیدا می کنیم.

$$y + x = 2 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 2 \\ y = 0 \rightarrow x = 2 \end{cases}, 2y - x = 4 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 2 \\ y = 0 \rightarrow x = -4 \end{cases}$$

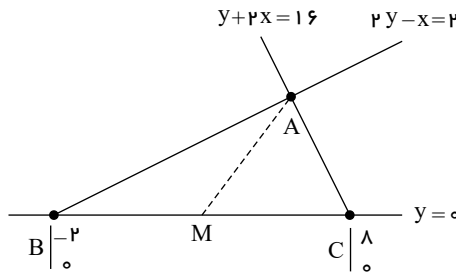
سپس با رسم این خطوط، مساحت مثلث را بدست می آوریم.



$$\rightarrow S = \frac{6 \times 2}{2} = 6$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷

شکل فرضی زیر را در نظر می گیریم:



خطوط  $2y - x = 2$  و  $y + 2x = 16$  را تلاقی می دهیم تا مختصات نقطه A به دست آید.

$$\times 2 \begin{cases} 2y - x = 2 \\ y + 2x = 16 \end{cases} \rightarrow 5y = 20 \rightarrow y = 4, x = 6 \rightarrow A \left| \begin{matrix} 6 \\ 4 \end{matrix} \right.$$

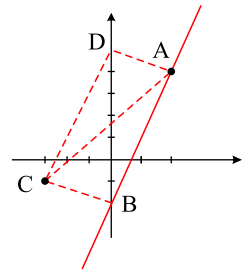
$$BC \text{ وسط } M \left| \begin{matrix} \frac{x_B + x_C}{2} \\ \frac{y_B + y_C}{2} \end{matrix} \right. \rightarrow M \left| \begin{matrix} 3 \\ 0 \end{matrix} \right., A \left| \begin{matrix} 6 \\ 4 \end{matrix} \right. \rightarrow AM = \sqrt{(6 - 3)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

ابتدا معادله خط گذرنده از A را می یابیم:  $A(2, 4)$  و  $m = 3$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸



$$y - 4 = 3(x - 2) \Rightarrow y = 3x - 2$$



حال فاصله نقطه  $C$  از خط فوق که  $A$  و  $B$  روی آن قرار دارند محاسبه می‌کنیم. این مقدار طول یا عرض مستطیل است.

$$|CH| \text{ یا } |CB| = \frac{|y - 3x + 2|}{\sqrt{1+9}} = \frac{|-1 - 3(-2) + 2|}{\sqrt{10}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

قطر مستطیل  $AC$  است آن را نیز محاسبه می‌کنیم:

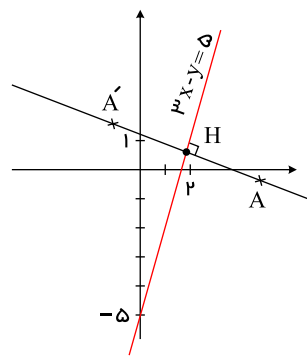
$$|AC| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (4 - (-1))^2} = \sqrt{50}$$

$$\triangle ABC : AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow 50 = AB^2 + 10 \Rightarrow |AB| = \sqrt{40}$$

و در آخر محیط مستطیل برابر است با:

$$\text{محیط} : 2\sqrt{10} + 2\sqrt{40} = 2\sqrt{10} + 4\sqrt{10} = 6\sqrt{10}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۹



محیط مثلث مدنظر  $\sqrt{270} = 3\sqrt{30}$  است پس طول هر ضلع آن  $\sqrt{30}$  خواهد بود و از طرفی می‌دانیم در مثلث متساوی‌الاضلاع ارتفاع  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\text{ضلع است یعنی: } AH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{30} = \frac{\sqrt{90}}{2}$$

پس باید فاصله  $A$  تا  $H$  برابر با  $\frac{\sqrt{90}}{2}$  باشد. دقت کنید  $A$  روی خط عمود بر  $3x - y = 5$  است.

$$\Rightarrow y = 3x - 5 \Rightarrow m = 3 \xrightarrow{\text{عکس و قرینه}} m' = -\frac{1}{3}$$

معادله خط گذرنده از  $A$  و  $H$  را می‌یابیم مختصات  $H(2, 1)$  و  $m' = -\frac{1}{3}$  را داریم.

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 2) \Rightarrow 3y + x = 5$$

پس  $A$  روی خط  $3y + x = 5$  است که می‌توان مختصات  $A$  را به صورت پارامتری  $(\alpha, \frac{5-\alpha}{3})$  در نظر گرفت  $AH$  را برابر با  $\frac{\sqrt{90}}{2}$  قرار می‌دهیم.

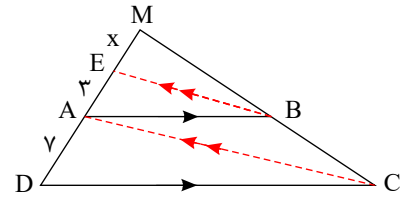
$$\Rightarrow |AH| \Rightarrow (\alpha - 2)^2 + \left(\frac{5-\alpha}{3} - 1\right)^2 = \frac{90}{4} \Rightarrow (\alpha - 2)^2 \left(1 + \frac{1}{9}\right) = \frac{90}{4}$$

$$\Rightarrow (\alpha - 2)^2 = \frac{81}{4} \Rightarrow \alpha - 2 = \pm \frac{9}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{13}{2} \Rightarrow A\left(\frac{13}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\ \alpha = -\frac{5}{2} \Rightarrow \text{در گزینه ها نیست.} \end{cases}$$

کافی است دو بار از قضیه ی تالس استفاده کنیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۰



$$\begin{cases} \triangle MAC : BE \parallel AC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{ME}{AE} = \frac{MB}{BC} \\ \triangle MDC : AB \parallel CD \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MA}{AD} = \frac{MB}{BC} \end{cases} \Rightarrow \frac{ME}{AE} = \frac{MA}{AD}$$

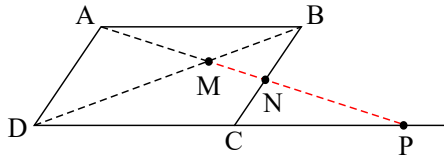


$$\Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{x+3}{7} \Rightarrow 7x = 3x+9 \Rightarrow 4x = 9 \Rightarrow x = 2,25$$

در نتیجه:  $MD = 2,25 + 3 + 7 = 12,25$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۱

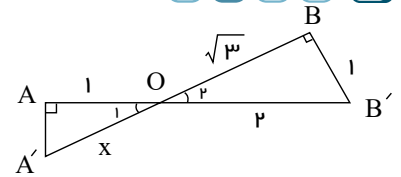
از قضیه تالس به صورت زیر استفاده می‌کنیم.



$$\begin{cases} BN \parallel AD \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MN}{AM} = \frac{BM}{MD} \\ AB \parallel DP \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BM}{MD} = \frac{AM}{MP} \end{cases} \Rightarrow \frac{MN}{AM} = \frac{AM}{MP}$$

$$\Rightarrow AM^2 = MN \times MP$$

ابتدا با رابطه فیثاغورس اندازه OB را به دست می‌آوریم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۲



$$OB = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$$

$$\left. \begin{matrix} \hat{O}_1 = \hat{O}_r \\ \hat{A} = \hat{B} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \triangle AOA' \sim \triangle OBB'$$

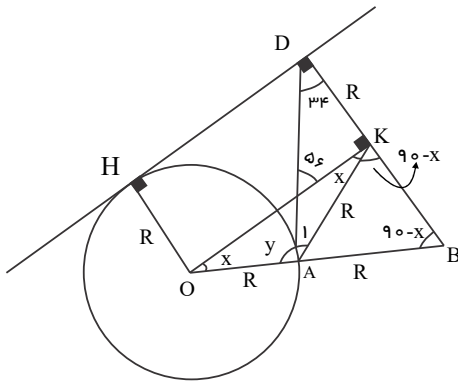
$$\Rightarrow \frac{AA'}{BB'} = \frac{AO}{OB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۳

$$\begin{cases} AM \parallel DN \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AB}{AD} = \frac{BM}{MN} \\ AM \parallel EN \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AE}{AC} = \frac{MN}{MC} \end{cases} \xrightarrow{BM=MC} \frac{AB}{AD} \times \frac{AE}{AC} = \frac{BM}{MN} \times \frac{MN}{MC} = 1 \Rightarrow AB \times AE = AD \times AC \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} \xrightarrow{\frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}} \frac{AD}{AE} = \frac{2}{3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۴

بعد از رسم شکل عمود OK را بر BD رسم می‌کنیم. در این صورت OHDK مستطیل و مثلث OBK قائم‌الزاویه است و AK میانه وارد بر وتر است بنابراین مثلث‌های OAK و AKB و AKD متساوی‌الساقین هستند با توجه به شکل داریم.

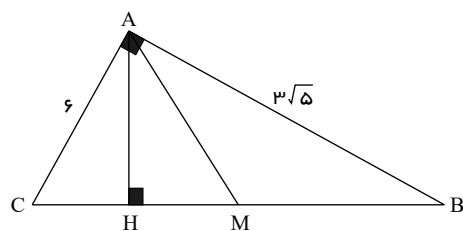


$$\begin{cases} x + y + 56 = 180 \\ y + 2x + 34 = 180 \end{cases} \Rightarrow x + 34 - 56 = 0 \Rightarrow x = 22$$

$$x + y + 56 = 180 \xrightarrow{x=22} y = 102$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۵

ابتدا شکل مسأله را رسم می‌کنیم:



$$\triangle ABC : (AC)^2 + (AB)^2 = (BC)^2 \Rightarrow 36 + 45 = (BC)^2 \Rightarrow 81 = (BC)^2 \Rightarrow BC = 9 \rightarrow BM = CM = 4,5$$

$$\text{می‌دانیم} : (AB)^2 = BH \cdot BC \rightarrow 45 = 9BH \rightarrow BH = 5 \rightarrow MH = 0,5$$



$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMH}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)(h)(BC)}{\left(\frac{1}{2}\right)(h)(MH)} = \frac{9}{0.5} = 18$$

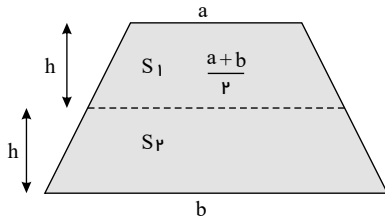
۱ ۲ ۳ ۴ ۲۶

چون دو مثلث قابل انطباق نمی باشند یعنی دو مثلث مساوی نیستند و در نتیجه در دو مثلث، اضلاع به طول ۳ نمی توانند متشابه باشند اگر فرض کنیم  $a > b$  است یکی از این دو حالت رخ می دهد.

$$\frac{3}{4} = \frac{a}{5} = \frac{b}{3} \rightarrow a = \frac{15}{4}, b = \frac{9}{4} \rightarrow \text{محیط} = 3 + \frac{9}{4} + \frac{15}{4} = 9$$

$$\frac{3}{5} = \frac{a}{4} = \frac{b}{3} \rightarrow a = \frac{12}{5}, b = \frac{9}{5} \rightarrow \text{محیط} = 3 + \frac{12}{5} + \frac{9}{5} = 7.2$$

که بیشترین محیط برابر ۹ است.



اندازه پاره خطی که وسطهای دو ساق دوزنقه را به هم وصل می کند برابر میانگین دو قاعده است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۷

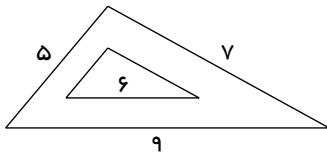
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{(a + \frac{a+b}{2})(h)(\frac{1}{2})}{(b + \frac{a+b}{2})(h)(\frac{1}{2})} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{3a+b}{3b+a} = \frac{1}{2} \rightarrow 6a+2b=3b+a \rightarrow 5a=b$$

یعنی نسبت قاعدههای دوزنقه، ۱ به ۵ است.

دو مثلث با یکدیگر متشابه هستند و اگر مساحت مثلث بزرگتر را  $S$  و مساحت مثلث کوچکتر را  $S'$  بنامیم، داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۸

$$\rightarrow \frac{S}{S'} = K^2 \rightarrow \frac{S}{S'} = \left(\frac{9}{6}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

نسبت تشابه



$$\frac{\text{مساحت محدود به دو مثلث}}{\text{مساحت مثلث کوچکتر}} = \frac{S - S'}{S'} = \frac{S}{S'} - 1 = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4} = 1.25$$

چون بیشترین مقدار ممکن برای عدد  $a$  را می خواهیم، لذا با بزرگترین ضلع از مثلث دوم متناسب است. حالات زیر را در نظر می گیریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۹

$$b < 7 < 9 \Rightarrow \frac{a}{9} = \frac{5}{7} = \frac{4}{b} \Rightarrow a = \frac{45}{7}, b = \frac{28}{5}$$

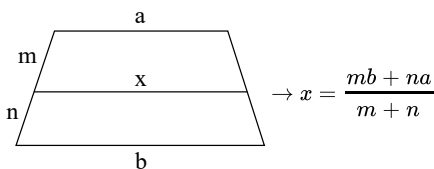
$$7 < b < 9 \Rightarrow \frac{a}{9} = \frac{5}{b} = \frac{4}{7} \Rightarrow a = \frac{36}{7}, b = \frac{35}{4}$$

$$7 < 9 < b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{5}{9} = \frac{4}{7} \Rightarrow \text{غیر قابل قبول}$$

بنابراین بیشترین مقدار  $a$  برابر با  $\frac{45}{7}$  می باشد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۰

می دانیم اگر در یک دوزنقه خطی موازی دو قاعده رسم شود طول پاره خط رسم شده از این رابطه به دست می آید:



$$\text{پس: } MN = \frac{(2 \times 12) + (3 \times 7)}{2 + 3} = \frac{45}{5} = 9$$

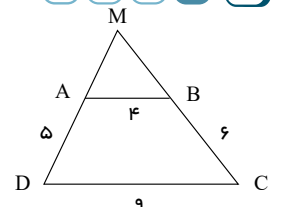
بنابر فرض تست شکل زیر را خواهیم داشت. ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۱

$$AB \parallel DC \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{AB}{DC} = \frac{MB}{MC} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{MA}{MD} = \frac{4}{9} \xrightarrow{\text{تفصیل در مخرج}} \frac{MA}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow MA = 4$$

$$\frac{MB}{MC} = \frac{4}{9} \xrightarrow{\text{تفصیل در مخرج}} \frac{MB}{6} = \frac{4}{5} \Rightarrow MB = \frac{24}{5} = 4.8$$

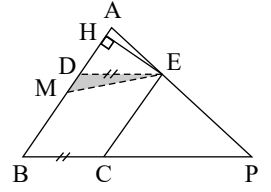
$$\Delta MAB \text{ محیط} = MA + MB + AB = 4 + 4 + 4.8 = 12.8$$





۱ ۲ ۳ ۴ ۳۲

$$\begin{aligned} \triangle PEC \sim \triangle APB &\rightarrow \frac{S_{\triangle PEC}}{S_{\triangle APB}} = \left(\frac{PC}{PB}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \\ \triangle ADE \sim \triangle APB &\rightarrow \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle APB}} = \left(\frac{DE}{BP}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

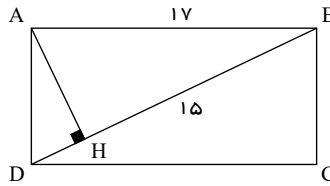


$$\left. \begin{aligned} S_{\triangle DEM} &= \frac{1}{2} \times DM \times HE \\ S_{\triangle DECB} &= BD \times HE = 2DM \times HE \end{aligned} \right\} \rightarrow S_{\triangle DEM} = \frac{1}{4} S_{\triangle DECB}$$

$$\begin{aligned} S_{\triangle DEM} &= \frac{1}{4} (S_{\triangle ABP} - S_{\triangle ADE} - S_{\triangle ECP}) = \frac{1}{4} (S_{\triangle ABP} - \frac{1}{9} S_{\triangle ABP} - \frac{4}{9} S_{\triangle ABP}) = \frac{1}{4} (\frac{4}{9} S_{\triangle ABP}) = \frac{1}{9} S_{\triangle ABP} \\ \rightarrow \frac{S_{\triangle DEM}}{S_{\triangle ABP}} &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۳

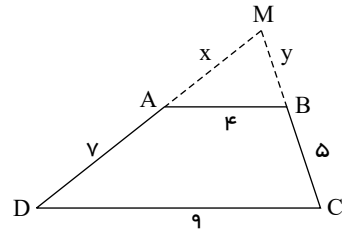
شکل مسئله را رسم می کنیم:



$$(AB)^2 = BH \cdot BD \rightarrow 289 = 15BD \rightarrow BD = \frac{289}{15}$$

$$\frac{289}{15} - 17 = \frac{289 - 255}{15} = \frac{34}{15}$$

اکنون می خواهیم بدانیم این عدد چقدر از ۱۹ بیشتر است پس:



شکل مقابل را در نظر بگیرید: ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۴

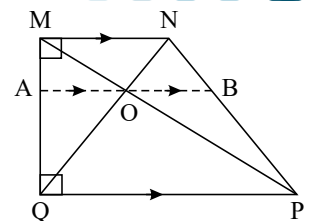
$$AB \parallel CD \xrightarrow{\text{جزء به کل}} \frac{x}{7+x} = \frac{y}{5+y} = \frac{4}{9} \rightarrow \begin{cases} \frac{x}{7+x} = \frac{4}{9} \rightarrow 9x = 4x + 28 \rightarrow x = \frac{28}{5} \\ \frac{y}{5+y} = \frac{4}{9} \rightarrow 9y = 20 + 4y \rightarrow y = 4 \end{cases}$$

$$MAB \text{ محیط مثلث} = x + y + 4 = \frac{28}{5} + 4 + 4 = \frac{68}{5} = 13,6$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۵

$$\triangle MPQ = AO \parallel PQ \Rightarrow \text{تالس} : \frac{AO}{PQ} = \frac{MA}{MQ} \quad (1)$$

$$\triangle PNQ = OB \parallel PQ \Rightarrow \text{تالس} : \frac{OB}{PQ} = \frac{NB}{NP} \quad (2)$$



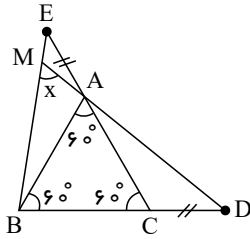
از طرفی چون  $PQ \parallel AB \parallel MN$  پس داریم:

$$\frac{AM}{MQ} = \frac{NB}{NP} \quad (3) \Rightarrow (1), (2), (3) \Rightarrow \frac{AO}{PQ} = \frac{BO}{PQ} \Rightarrow AO = OB \Rightarrow \frac{AO}{OB} = 1$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۳۶

ابتدا ثابت می‌کنیم دو مثلث  $ACD$  و  $ABE$  هم‌نهشت هستند:

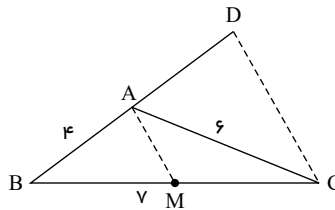


$$\triangle ACD, \triangle ABE : CD = AE, AC = AB, \hat{C} = \hat{A} = 12^\circ \Rightarrow \hat{D} = \hat{E}$$

$$\hat{x} = \hat{E} + \hat{MAE} = \hat{E} + \hat{CAD} = \hat{D} + \hat{CAD} = 6^\circ$$

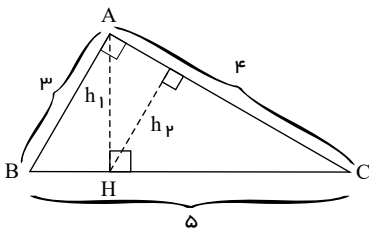
۱ ۲ ۳ ۴ ۳۷

شکل مسئله را رسم می‌کنیم:



$$AM \parallel DC \rightarrow \frac{BA}{BD} = \frac{BM}{BC} \rightarrow \frac{3}{BD} = \frac{3.5}{5} = \frac{1}{2} \rightarrow BD = 6$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۸



دو مثلث  $AHC$  و  $ABC$  متشابه هستند (دو زاویه مساوی) بنابراین نسبت تشابه آن‌ها همان نسبت ارتفاع‌ها است.

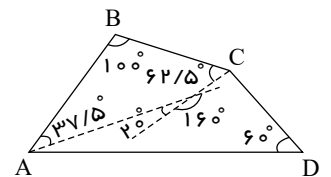
$$k = \frac{h_1}{h_2} = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{4} \rightarrow \frac{h_2}{h_1} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{\hat{A}}{3} = \frac{\hat{B}}{4} = \frac{\hat{C}}{5} = \frac{5\hat{D}}{12} = x \rightarrow \begin{cases} \hat{A} = 3x \\ \hat{B} = 4x \\ \hat{C} = 5x \\ \hat{D} = \frac{12}{5}x \end{cases}$$

$$\text{از طرفی می‌دانیم: } \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = (4 - 2) \times 180^\circ = 360^\circ$$

$$\rightarrow 3x + 4x + 5x + \frac{12}{5}x = 360^\circ \rightarrow x = 25^\circ$$

$$\rightarrow \begin{cases} \hat{A} = 75^\circ \\ \hat{B} = 100^\circ \\ \hat{C} = 125^\circ \\ \hat{D} = 60^\circ \end{cases}$$



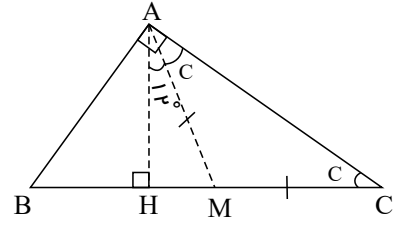
نکته: مجموع زوایای داخلی هر  $n$  ضلعی برابر  $(n - 2) \times 180^\circ$  می‌باشد.

می‌دانیم که میانه وارد بر وتر نصف وتر است. داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۴۰



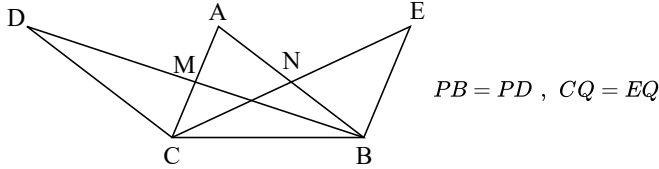


$$\begin{aligned} \Delta AMH : \hat{AMH} &= 90^\circ - 12^\circ = 78^\circ \\ MA = MC &\Rightarrow \hat{MAC} = \hat{C} \end{aligned}$$

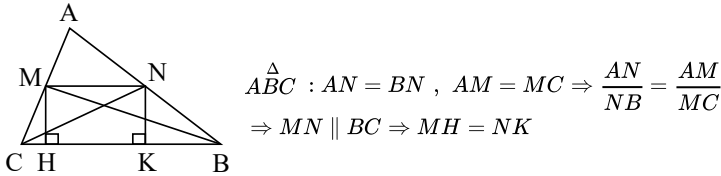


مطابق شکل داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۴۱

$$\Rightarrow \hat{AMH} = 2\hat{C} = 78^\circ \Rightarrow \hat{C} = 39^\circ, \hat{B} = 90^\circ - 39^\circ = 51^\circ$$



$$\begin{cases} \Delta BDC : CM \text{ میانه} \Rightarrow S_{\Delta MDC} = S_{\Delta MCB} \Rightarrow S_{\Delta BCD} = 2S_{\Delta MCB} \quad (1) \\ \Delta BEC : BN \text{ میانه} \Rightarrow S_{\Delta BNE} = S_{\Delta BNC} \Rightarrow S_{\Delta BEC} = 2S_{\Delta BNC} \quad (2) \end{cases}$$

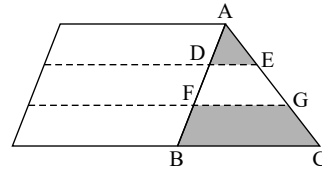


$$\begin{aligned} \Delta ABC : AN = BN, AM = MC &\Rightarrow \frac{AN}{NB} = \frac{AM}{MC} \\ \Rightarrow MN \parallel BC &\Rightarrow MH = NK \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_{\Delta MBC} = S_{\Delta NBC} &= \frac{1}{2}MH \times BC = \frac{1}{2}NK \times BC \quad (3) \\ (1), (2), (3) &\Rightarrow S_{\Delta BCD} = S_{\Delta BEC} \end{aligned}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۲

روش اول:



$$\text{طبق قضیه تالس } \frac{FG}{BC} = \frac{2}{3} \text{ و } \frac{DE}{BC} = \frac{1}{3} \text{ است.}$$

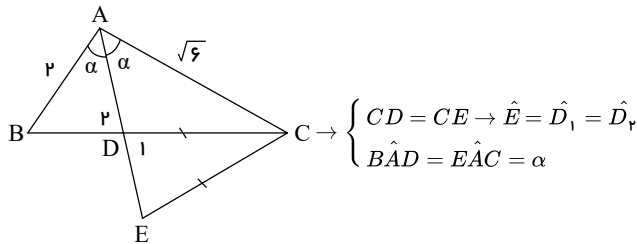
$$\frac{S_{ADE}}{S_{FGCB}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)(h)(DE)}{\left(\frac{1}{2}\right)(h)(FG + BC)} = \frac{DE}{FG + BC} = \frac{\frac{1}{3}BC}{\frac{2}{3}BC + BC} = \frac{\frac{1}{3}BC}{\frac{5}{3}BC} = \frac{1}{5}$$

روش دوم:

نسبت مساحت‌های محصور بین خطوط موازی، ۱ به ۳ به ۵ به ۷ به ۹ به ... است پس طبق این توضیح، خواسته مسئله برابر  $\frac{1}{5}$  است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۳

شکل مقابل را در نظر بگیرید:



$$\begin{cases} CD = CE \rightarrow \hat{E} = \hat{D}_1 = \hat{D}_2 \\ \hat{BAD} = \hat{EAC} = \alpha \end{cases}$$

بنابراین دو مثلث ABD و ACE در حالت دو زاویه مساوی با هم متشابه هستند و می‌دانیم که نسبت مثلث‌ها برابر مجذور نسبت تشابه است.

$$\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACE}} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$



از قضیهٔ عکس تالس کمک می‌گیریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۴۴

$$BC \parallel EF \xrightarrow{\text{جزء به کل}} \frac{4}{4+y} = \frac{x+1}{y+x+1} = \frac{y^2}{y^2+5-x}$$

تساوی اول را حل می‌کنیم که ساده‌تر است.

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 4y + 4x + 4 = 4x + 4 + xy + y \Rightarrow 3y = xy \Rightarrow x = 3$$

برای ساده‌تر بودن محاسبات از جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

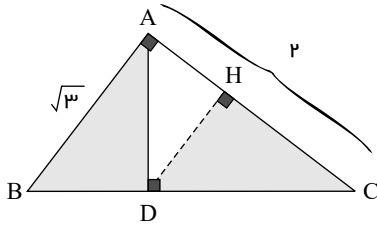
$$\Rightarrow \frac{4}{y} = \frac{y^2}{5-x} \xrightarrow{x=3} 8 = y^3 \Rightarrow y = 2$$

$$\text{بنابراین: } y - 2x = 2 - 2(3) = -4$$

دو مثلث  $HDC$  و  $ABD$  متشابه هستند، پس نسبت مساحت‌های آنها برابر با مجذور نسبت تشابه است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۴۵

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 = 3 + 4 = 7 \rightarrow BC = \sqrt{7}$$

$$(AC)^2 = BC \times DC \rightarrow 4 = \sqrt{7} \times DC \rightarrow DC = \frac{4}{\sqrt{7}}$$



$$\frac{S_{\triangle HDC}}{S_{\triangle ABD}} = \left(\frac{DC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{\frac{4}{\sqrt{7}}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{4}{\sqrt{21}}\right)^2 = \frac{16}{21}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۶

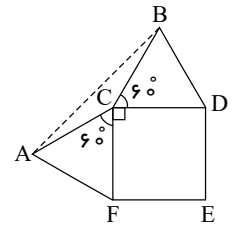
$$\hat{ACB} = 360^\circ - (60^\circ + 60^\circ + 90^\circ) = 150^\circ$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC \times \cos 150^\circ$$

$$\rightarrow AB^2 = 4 + 4 - 2 \times 2 \times 2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8 + 4\sqrt{3}$$

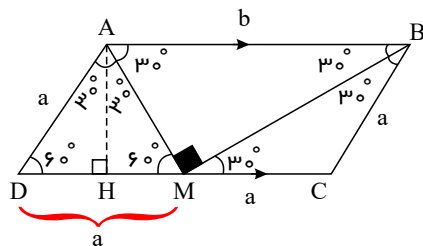
$$\rightarrow AB = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

اکنون در مثلث  $ABC$  قضیه کسینوس‌ها را به کار می‌بریم:



۱ ۲ ۳ ۴ ۴۷

مطابق شکل  $MA$  و  $MB$  نیمساز زوایای  $A$  و  $B$  هستند.



داریم:

$$\triangle ADM: DM = AD = a, \quad \triangle BMC: BC = MC = a \Rightarrow DC = b = 2a$$

$$ABCD \text{ محیط} = a + b + a + 2a = 4a + b = 4a + 2a = 12\sqrt{3} \Rightarrow a = 2\sqrt{3}, \quad CD = 4\sqrt{3}$$

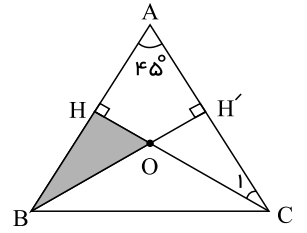
$$\triangle ADM \text{ متساوی‌الاضلاع} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{3} = 3$$

$$S_{ABCD} = AH \times DC = 3 \times 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۴۸

$$\triangle AHC : \left\{ \begin{array}{l} \hat{H} = 90^\circ \text{ از طرفی} \\ \hat{A} = 45^\circ \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{C}_1 = 45^\circ \\ AC = 8 \end{array} \right. \Rightarrow AC^2 = 2AH^2 \Rightarrow AH = 4\sqrt{2} \Rightarrow HB = 8 - 4\sqrt{2}$$



$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{از طرفی}} \left\{ \begin{array}{l} \hat{B}_1 = 45^\circ \\ \hat{O}_1 = 45^\circ \end{array} \right\} &\Rightarrow \triangle OHB \text{ متساوی الساقین} \Rightarrow OH = BH = 8 - 4\sqrt{2} \\ &\Rightarrow S_{OHB} = \frac{BH \times OH}{2} = \frac{(8 - 4\sqrt{2})(8 - 4\sqrt{2})}{2} \\ &= 48 - 32\sqrt{2} = 16(3 - 2\sqrt{2}) \times \frac{3 + 2\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} = \frac{16}{3 + 2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

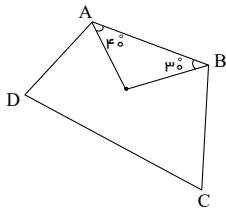
۱ ۲ ۳ ۴ ۴۹

$$\frac{A}{4} = \frac{B}{3} = \frac{C+D}{11} = t \Rightarrow \begin{cases} A = 4t \\ B = 3t \\ C+D = 11t \end{cases}$$

از طرفی می دانیم جمع زوایای داخلی هر ۴ ضلعی محدب برابر ۳۶۰ است:

$$A + B + C + D = 360 \Rightarrow 4t + 3t + 11t = 360 \Rightarrow 18t = 360 \Rightarrow t = 20 \Rightarrow \begin{cases} A = 4t = 80^\circ \\ B = 3t = 60^\circ \end{cases}$$

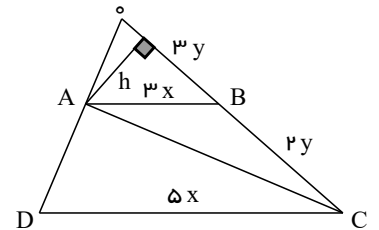
مطابق شکل واضح است زاویه بین نیم سازه‌های رئوس B و C برابر  $O = 180 - (40 - 30) = 110^\circ$  می باشد.



چون زاویه حاده خواسته شده پس زاویه حاده O برابر  $180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$  می باشد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۰

$$AB \parallel DC \xrightarrow{\text{تثلی}} \frac{AB}{DC} = \frac{OB}{OC} = \frac{3}{5} \Rightarrow \begin{cases} OB = 3y \\ OC = 5y \end{cases}$$



از طرفی مثلث‌های  $\triangle OAB$  و  $\triangle ABC$  ارتفاع یکسان h دارند پس:

$$\begin{aligned} \frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{3}{5} &\Rightarrow \begin{cases} S_{\triangle OAB} = 3S \\ S_{\triangle ABC} \cdot 2S = \frac{1}{2} \times 3x \times h \Rightarrow xh = \frac{4S}{3} \end{cases} \\ S_{\text{نوزنقه}} = \frac{8x}{2} \times h = 4xh = 4 \times \frac{4S}{3} = \frac{16S}{3} \\ \frac{S_{\triangle OAC}}{S_{\text{نوزنقه}}} = \frac{5S}{\frac{16S}{3}} = \frac{15}{16} \end{aligned}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۱ دو مثلث OCD و OEF متشابه هستند.

$$\begin{aligned} \frac{CD}{EF} = \frac{OD}{OE} &\rightarrow \frac{y}{1} = \frac{4}{y} \rightarrow y^2 = 4 \rightarrow y = 2 \\ \frac{CD}{EF} = \frac{OC}{OF} &\rightarrow \frac{2}{1} = \frac{OC}{3} \rightarrow OC = 6 \end{aligned}$$

دو مثلث OCD و OAB متشابه هستند.

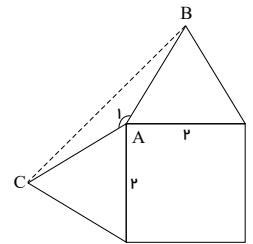
$$\frac{OD}{OB} = \frac{CD}{AB} \rightarrow \frac{4}{4+x} = \frac{y}{2x} \rightarrow \frac{4}{4+x} = \frac{2}{2x} \rightarrow 8 + 2x = 4x \rightarrow x = \frac{4}{2} = 2$$



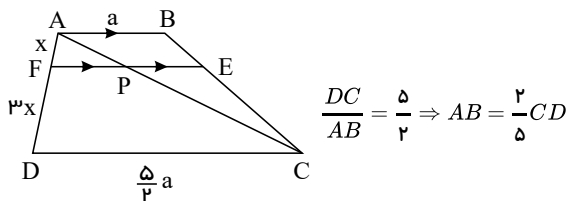
از طرفی  $CD \parallel AB \rightarrow \frac{OD}{DB} = \frac{OC}{AC} \rightarrow \frac{4}{\frac{4}{3}} = \frac{6}{AC} \rightarrow AC = 2$

$AB = AC = 2$   
 $\hat{A}_1 = 360 - (90 + 60 + 60) = 360 - (210)$   
 $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin 150^\circ = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 1$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۲



۱ ۲ ۳ ۴ ۵۳



$\frac{DC}{AB} = \frac{5}{2} \Rightarrow AB = \frac{2}{5} CD$

$\Delta ADC : PF \parallel CD \Rightarrow \frac{PF}{CD} = \frac{x}{4x} = \frac{1}{4} \Rightarrow PF = \frac{CD}{4}$  (۱)

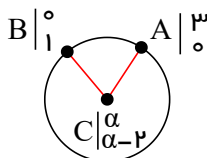
$\Delta ABC : PE \parallel AB \Rightarrow \frac{PE}{AB} = \frac{CE}{CB} = \frac{DF}{AD} = \frac{3x}{4x} = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow PE = \frac{3}{4} AB = \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} CD$

$PE = \frac{3}{10} CD$  (۲)

(۱) + (۲)  $\Rightarrow PE + PF = EF = \frac{CD}{4} + \frac{3}{10} CD = \frac{11}{20} CD$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۴



قطر دایره از مرکز دایره می‌گذرد پس مختصات مرکز به صورت  $C \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha - 2 \end{pmatrix}$  می‌باشد. (زیرا معادله قطر دایره به صورت  $y = x - 2$  می‌باشد)

$R = AC = \sqrt{(3 - \alpha)^2 + (-\alpha + 2)^2}$  ,  $R = BC = \sqrt{\alpha^2 + (-\alpha + 3)^2}$

$\Rightarrow \sqrt{(3 - \alpha)^2 + (-\alpha + 2)^2} = \sqrt{\alpha^2 + (-\alpha + 3)^2}$

توان  $\rightarrow 9 - 6\alpha + \alpha^2 + \alpha^2 - 4\alpha + 4 = \alpha^2 + \alpha^2 - 6\alpha + 9 \Rightarrow -4\alpha = -4 \Rightarrow \alpha = 1$

بنابراین  $R = AC \stackrel{\alpha=1}{=} \sqrt{(3 - 1)^2 + (-1 + 2)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$

خطی که در نقطه‌ی تماس، بر خط مماس بر دایره عمود شود از مرکز دایره می‌گذرد. ۱ ۲ ۳ ۴ ۵۵

$f'_x = 0 \rightarrow 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1$  ,  $f'_y = 0 \rightarrow 2y + 1 = 0 \rightarrow y = -\frac{1}{2}$

اکنون کافی است که مختصات مرکز دایره  $C \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$  را در خط به معادله‌ی  $3x + 2y = a$  صدق دهیم.

$3(1) + 2(-\frac{1}{2}) = a \rightarrow 3 - 1 = a \rightarrow a = 2$

معادله‌ی دایره در حالت گسترده به صورت  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  است. این سه نقطه را در معادله‌ی دایره صدق می‌دهیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۵۶

$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{صدق}} c = 0$

$B \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{صدق}} 4 + 16 - 2a + 4b = 0$   
 $C \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{صدق}} 4 + 1 + 2a + b = 0$  }  $\rightarrow a = 0, b = -5$

حال با معلوم بودن مقادیر  $a$  و  $b$  و  $c$ ، شعاع دایره برابر است با:



$$R^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} = \frac{0 + 25 - 0}{4} = \frac{25}{4} \rightarrow R = \frac{5}{2} = 2,5$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۷

$$AM = 2OM \rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-6)^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow (x-3)^2 + (y-6)^2 = 4x^2 + 4y^2$$

$$\rightarrow x^2 + 9 - 6x + y^2 + 36 - 12y = 4x^2 + 4y^2 \rightarrow 3x^2 + 3y^2 + 6x + 12y - 45 = 0$$

معادله‌ی دایره:  $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 15 = 0$

$$R^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} = \frac{4 + 16 + 60}{4} = \frac{80}{4} = 20 \rightarrow R = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\rightarrow \text{بزرگترین وتر} = 4\sqrt{5}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۸ چون مرکز دایره بر روی نیمساز ربع اول  $(y=x)$  قرار دارد، بنابراین مختصات آن به صورت  $C(\alpha, \alpha)$  است. و چون دایره محور  $x$ ها را در دو نقطه به طولهای ۱

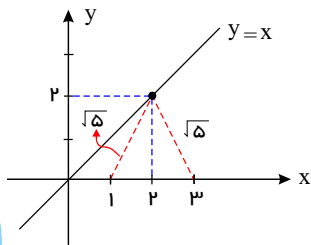
و ۳ قطع کرده است، پس نقاط  $A(1, 0)$  و  $B(3, 0)$  روی دایره قرار دارند و فاصله‌ی هر کدام از این نقاط از مرکز دایره، برابر شعاع دایره است.

$$R = AC = \sqrt{(1-\alpha)^2 + \alpha^2}, \quad R = BC = \sqrt{(3-\alpha)^2 + \alpha^2}$$

$$\rightarrow \sqrt{(1-\alpha)^2 + \alpha^2} = \sqrt{(3-\alpha)^2 + \alpha^2} \rightarrow (1-\alpha)^2 + \alpha^2 = (3-\alpha)^2 + \alpha^2$$

$$\rightarrow 1 + \alpha^2 - 2\alpha = 9 + \alpha^2 - 6\alpha \rightarrow 4\alpha = 8 \rightarrow \alpha = 2 \rightarrow R = BC = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

از روش شکل، مشخص است که مرکز دایره نقطه‌ی  $(2, 2)$  بوده و شعاع دایره برابر  $\sqrt{5}$  است.



۱ ۲ ۳ ۴ ۵۹ نقطه‌ی داده شده روی دایره در ناحیه‌ی چهارم است و می‌دانیم مرکز دایره‌ای که در ناحیه‌ی چهارم بر محورهای مختصات مماس است به صورت  $C\left(\frac{R}{-R}, \frac{R}{-R}\right)$  است.

است.

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \rightarrow (x-R)^2 + (y+R)^2 = R^2 \xrightarrow[\text{صدق}]{\begin{matrix} | \\ - \\ 2 \end{matrix}} (1-R)^2 + (-2+R)^2 = R^2$$

$$\rightarrow 1 + R^2 - 2R + 4 + R^2 - 4R = R^2 \rightarrow R^2 - 6R + 5 = 0 \rightarrow (R-1)(R-5) = 0$$

$$\rightarrow R = 1, \quad R = 5$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۰ ۱- مرکز دایره‌ای که در ربع اول بر محورهای مختصات مماس است، نقطه‌ی  $(R, R)$  است.

۲- مرکز دایره‌ای که در ربع دوم بر محورهای مختصات مماس است، نقطه‌ی  $(-R, R)$  است.

۳- مرکز دایره‌ای که در ربع سوم بر محورهای مختصات مماس است، نقطه‌ی  $(-R, -R)$  است.

۴- مرکز دایره‌ای که در ربع چهارم بر محورهای مختصات مماس است، نقطه‌ی  $(R, -R)$  است.

که  $R$  شعاع دایره است.

از نقطه‌ی داده شده روی دایره متوجه می‌شویم دایره در ناحیه‌ی دوم بر هر دو محور مختصات مماس است پس مرکز آن  $C\left(\frac{-R}{R}, \frac{-R}{R}\right)$  است.

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \Rightarrow (x+R)^2 + (y-R)^2 = R^2 \xrightarrow[\text{صدق}]{\begin{matrix} | \\ - \\ 2 \end{matrix}} (-1+R)^2 + (2-R)^2 = R^2$$

$$\Rightarrow 1 - 2R + R^2 + 4 - 4R + R^2 = R^2 \Rightarrow R^2 - 6R + 5 = 0$$

$$\Rightarrow (R-1)(R-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} R=1 \\ R=5 \end{cases} \Rightarrow \text{قطر دایره بزرگتر} = 10$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۱

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} f'_x = 0 \rightarrow 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2 \\ f'_y = 0 \rightarrow 2y + 2 = 0 \rightarrow y = -1 \end{cases} \rightarrow C' \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \end{vmatrix}$$

$$R'^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} = \frac{16 + 4 + 16}{4} = \frac{36}{4} = 9 \rightarrow R' = 3$$

می‌دانیم قائم بر دایره از مرکز دایره می‌گذرد بنابراین مرکز دایره‌ی  $C$  نقطه‌ی  $A\left(\frac{8}{3}, \frac{1}{3}\right)$  است.



شرط مماس خارج:  $CC' = R + R' \rightarrow \sqrt{(4-2)^2 + (7+1)^2} = R + 3 \rightarrow \sqrt{36 + 64} = R + 3$

$\rightarrow 10 = R + 3 \rightarrow R = 7$

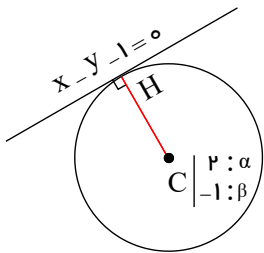
قطر کوچک یعنی  $2b$  برابر ۶ است پس  $b = 3$  است. (۱) (۲) (۳) (۴) (۶۲)

$$\begin{cases} F \begin{vmatrix} 2 \\ 7 \end{vmatrix} \\ F' \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \end{vmatrix} \end{cases} \rightarrow FF' = 2c \rightarrow 14 = 2c \Rightarrow c = 7$$

$c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow 16 = a^2 - 9 \rightarrow a^2 = 25 \rightarrow a = 5$

$e = \frac{c}{a} = \frac{7}{5} = 1.4$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۶۳)



$$R = CH = \frac{|2 + 1 - 1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

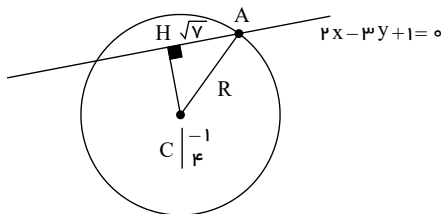
فاصله مرکز دایره تا خط مماس بر دایره، نشان دهنده شعاع دایره می باشد.

معادله دایره:  $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \rightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 2 \xrightarrow{y=0} (x - 2)^2 + 1 = 2$

$\rightarrow (x - 2)^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \rightarrow x = 3 \\ x - 2 = -1 \rightarrow x = 1 \end{cases}$

توجه کنید فاصله نقطه  $A \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$  از خط به معادله  $ax + by + c = 0$  از رابطه  $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  به دست می آید.

در ابتدا باید فاصله مرکز دایره تا خط داده شده را به دست آوریم. (۱) (۲) (۳) (۴) (۶۴)



$$\Rightarrow CH = \frac{|-2 - 12 + 1|}{\sqrt{4+9}} = \frac{13}{\sqrt{13}} \times \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

$\triangle ACH: R^2 = (AH)^2 + (CH)^2 \rightarrow R^2 = 7 + 13 = 20 \rightarrow R = 2\sqrt{5}$

پس:  $\begin{cases} C \begin{vmatrix} -1 \\ 4 \end{vmatrix} : \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \\ R = 2\sqrt{5} \end{cases} \xrightarrow{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2} (x+1)^2 + (y-4)^2 = 20 \xrightarrow{y=2} (x+1)^2 + 4 = 20$

$\rightarrow (x+1)^2 = 16 \rightarrow \begin{cases} x+1 = 4 \rightarrow x = 3 \\ x+1 = -4 \rightarrow x = -5 \end{cases}$

توجه کنید فاصله نقطه  $A \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$  از خط به معادله  $ax + by + c = 0$  از رابطه  $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  به دست می آید.

معادله دایره در حالت گسترده به صورت  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  است این سه نقطه را در معادله دایره صدق می دهیم. (۱) (۲) (۳) (۴) (۶۵)

$$\left. \begin{array}{l} A \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{صدق}} c = 0 \\ B \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{صدق}} 4 + 1 + 2a + b = 0 \Rightarrow 2a + b = -5 \\ C \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{صدق}} 1 + 4 + a - 2b = 0 \Rightarrow a - 2b = -5 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{مستگاه}} a = -3, b = 1$$



$$R^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} = \frac{9 + 1 - 0}{4} = \frac{10}{4} \Rightarrow R = \frac{1}{2}\sqrt{10}$$

۶۶ اگر دو دایره به مراکز  $C$  و  $C'$  و شعاع‌های  $R$  و  $R'$  مماس خارج باشند  $CC' = R + R'$  است. ۱ ۲ ۳ ۴

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} f'_x = 0 \rightarrow 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \\ f'_y = 0 \rightarrow 2y + 4 = 0 \rightarrow y = -2 \end{cases} \Rightarrow C' \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \end{vmatrix}$$

$$R'^2 = \alpha^2 + \beta^2 - c = 1 + 4 - 1 = 4 \rightarrow R' = 2$$

$$\text{شرط مماس خارج: } CC' = R + R' \rightarrow \sqrt{(-2-1)^2 + (2+2)^2} = R + 2 \rightarrow \sqrt{9+16} = R + 2 \rightarrow R = 3$$

۶۷ سؤال، اندازه‌ی وتر کانونی  $(MN = \frac{2b^2}{a})$  را خواسته است. ۱ ۲ ۳ ۴

$$16y^2 + 5x^2 - 10x = 75 \rightarrow 16y^2 + 5(x^2 - 2x) = 75 \rightarrow 16y^2 + 5((x-1)^2 - 1) = 75$$

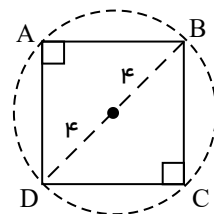
$$\rightarrow 16y^2 + 5(x-1)^2 = 80 \rightarrow \frac{y^2}{5} + \frac{(x-1)^2}{16} = 1 \rightarrow \begin{cases} a^2 = 16 \rightarrow a = 4 \\ b^2 = 5 \end{cases}$$

$$MN = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(5)}{4} = \frac{5}{2} = 2,5$$

۶۸ مقطع قاعده منشور مطابق شکل می‌باشد: ۱ ۲ ۳ ۴

$$DB = 2 \times 4 = 8, \quad AB = AD \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 8 = 4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = AB^2 = (4\sqrt{2})^2 = 32$$



$$S_{ABCD} \times 6 = 32 \times 6 = 192 = \text{حجم منشور}$$

۶۹ حجم کره همان حجم افزایش یافته‌ی مایع درون استوانه است. پس: ۱ ۲ ۳ ۴

$$V_{\text{کره}} = \pi r^2 (\Delta h) = \pi \times 4^2 \times \frac{2}{3} = \frac{32}{3}\pi$$

$$V_{\text{کره}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{32}{3}\pi \rightarrow R^3 = 8 \rightarrow R = 2 \quad \text{شعاع کره}$$

$$S_{\text{کره}} = 4\pi R^2 = 4\pi \times 2^2 = 16\pi$$

۷۰ ۱ ۲ ۳ ۴

$$7,5 = \text{یال قائم} = \text{ارتفاع منشور} = \text{ارتفاع استوانه‌ای } b \text{ در منشور}$$

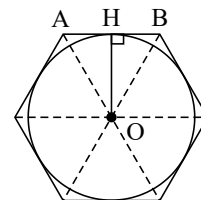
$$\text{مساحت دایره محاطی شش ضلعی منتظم به طول ضلع } 4 = \text{مساحت قاعده استوانه محاط در منشور}$$

مطابق شکل،  $OH$  شعاع دایره محاط در شش ضلعی منتظم می‌باشد.

$$\Delta OAB: \text{ مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع } 4 \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$$

$$\text{دایره } S = \pi \times OH^2 = \pi(2\sqrt{3})^2 = 12\pi$$

$$\text{حجم استوانه} = 12\pi \times 7,5 = 90\pi$$

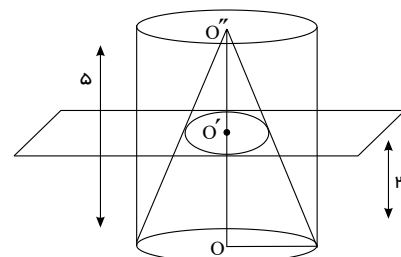


۷۱ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\frac{S_{\text{دایره به مرکز } O'}}{S_{\text{دایره به مرکز } O}} = \left(\frac{O'O}{O'O}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25} \quad \boxed{1}$$

$$S_{\text{دایره به مرکز } O} = \pi(4)^2 = 16\pi$$

$$\boxed{1}: S_{\text{دایره به مرکز } O'} = \frac{4}{25} \times 16\pi = \frac{64\pi}{25} = 2,56\pi$$



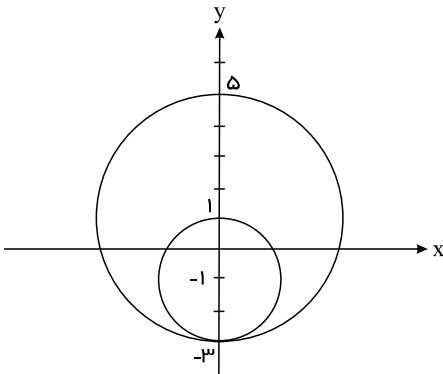
$$13,44\pi = \text{مساحت مقطع از برخورد صفحه دایره به مرکز } O' - S_{\text{دایره به مرکز } O} = 16\pi - 2,56\pi$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۷۲

$$x^2 + y^2 + 2y = 3 \Rightarrow \begin{cases} O(0, -1) \\ R = \frac{\sqrt{4+12}}{2} = 2 \end{cases}$$

پس شعاع دایره خواسته شده باید ۴ باشد یعنی  $R' = 4$  از رسم شکل کمک می‌گیریم.



با توجه به شکل  $O'(0, 1)$ ،  $R' = 4$  است و داریم:

$$C' : x^2 + (y - 1)^2 = 16 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y = 15$$

در معادله گسترده‌ی دایره ضرایب  $x^2$ ،  $y^2$  با هم برابرند پس: ۱ ۲ ۳ ۴ ۷۳

$$a^2 - 7 = 2 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

$$a = 3 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 4y + 3 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2y + \frac{3}{2} = 0$$

$$\rightarrow R^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} = \frac{0 + 4 - 6}{4} = \frac{-1}{2} < 0 \text{ امکان ندارد}$$

$$a = -3 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 4y - 3 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2y - \frac{3}{2} = 0$$

$$\rightarrow R^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} = \frac{0 + 4 + 6}{4} = \frac{5}{2} > 0$$

پس فقط  $a = -3$  قابل قبول است.

چون دایره از نقاط  $A \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix}$ ،  $B \begin{vmatrix} -2 \\ 0 \end{vmatrix}$  می‌گذرد پس مرکز دایره روی عمودمنصف پاره‌خط  $AB$  یا همان محور  $y$  ها قرار دارد پس مختصات مرکز دایره  $C \begin{vmatrix} 0 \\ \beta \end{vmatrix}$  است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۷۴

$$R = AC = \sqrt{(2 - 0)^2 + (0 - \beta)^2} = \sqrt{4 + \beta^2}$$

$$R = CH = \sqrt{(0 - 0)^2 + (\beta - 1)^2} = \sqrt{\beta^2 - 2\beta + 1}$$

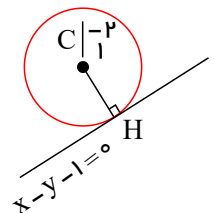
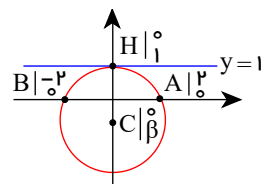
$$\rightarrow \sqrt{4 + \beta^2} = \sqrt{\beta^2 - 2\beta + 1}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 4 + \beta^2 = \beta^2 - 2\beta + 1 \rightarrow 2\beta = -3 \rightarrow \beta = -\frac{3}{2}$$

$$\text{پس : } R = AC \xrightarrow{\beta = -\frac{3}{2}} \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

قائم بر دایره از مرکز دایره می‌گذرد پس  $C \begin{vmatrix} -2 \\ 1 \end{vmatrix}$  می‌باشد. ۱ ۲ ۳ ۴ ۷۵

$$R = CH = \frac{|-2 - 1 - 1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$



توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی  $A \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$  از خط به معادله‌ی  $ax + by + c = 0$  از رابطه‌ی  $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  به دست می‌آید.





۱ ۲ ۳ ۴ ۷۶

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} f'_x = 0 \rightarrow 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \\ f'_y = 0 \rightarrow 2y + 6 = 0 \rightarrow y = -3 \end{cases} \Rightarrow C \begin{vmatrix} 1 \\ -3 \end{vmatrix}$$

$$R^2 = \alpha^2 + \beta^2 - c = 1 + 9 + 8 = 18 \Rightarrow R = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$x^2 + y^2 + 8x - 4y + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} f'_x = 0 \rightarrow 2x + 8 = 0 \rightarrow x = -4 \\ f'_y = 0 \rightarrow 2y - 4 = 0 \rightarrow y = 2 \end{cases} \Rightarrow C' \begin{vmatrix} -4 \\ 2 \end{vmatrix}$$

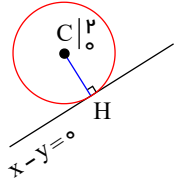
$$R'^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 - c = 16 + 4 - 12 = 8 \rightarrow R' = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{فاصله } CC' = \sqrt{(1+4)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

چون  $CC' = R + R'$  است دو دایره مماس خارج هستند.

فاصله‌ی مرکز دایره تا خط  $y = x$  (نیم‌ساز ناحیه‌ی اول) شعاع دایره را می‌دهد. ۱ ۲ ۳ ۴ ۷۷

$$R = CH = \frac{|2 + 0 + 0|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$



حال با داشتن مرکز دایره و شعاع دایره، معادله‌ی آن را می‌نویسیم.

$$C \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix}, R = \sqrt{2} \Rightarrow (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 2 \xrightarrow{y=1} (x-2)^2 + 1 = 2$$

$$(x-2)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x-2=1 \Rightarrow x=3 \\ x-2=-1 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی  $A \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$  از خط به معادله‌ی  $ax + by + c = 0$  از رابطه‌ی  $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  به دست می‌آید.

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۸

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 13 = 0 \Rightarrow \begin{cases} f'_x = 0 \rightarrow 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \\ f'_y = 0 \rightarrow 2y + 4 = 0 \rightarrow y = -2 \end{cases} \Rightarrow C \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \end{vmatrix}$$

$$R^2 = \alpha^2 + \beta^2 - c = 1 + 4 + 13 = 18 \rightarrow R = 3\sqrt{2}$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} f'_x = 0 \rightarrow 2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1 \\ f'_y = 0 \rightarrow 2y = 0 \rightarrow y = 0 \end{cases} \Rightarrow C' \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$R'^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 - c = 1 + 0 + 1 = 2 \rightarrow R' = \sqrt{2}$$

$$\text{از طرفی: } CC' = \sqrt{(1+1)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

چون  $CC' = |R - R'|$  است پس دو دایره مماس داخل هستند.

معادله‌ی دایره در حالت استاندارد به صورت  $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$  است، با داشتن مرکز و شعاع هر دو دایره، معادلات آن‌ها را می‌نویسیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۷۹

$$\begin{cases} C \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \end{vmatrix} \rightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4 \rightarrow x^2 + 1 + 2x + y^2 + 4 - 4y = 4 \\ R = 2 \end{cases}$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$$

$$\begin{cases} C' \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} \rightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4 \rightarrow x^2 + 4 - 4x + y^2 + 1 - 2y = 4 \\ R' = 2 \end{cases}$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$$

برای پیدا کردن معادله‌ی وتر مشترک بین دو دایره، کافی است که جملات از درجه‌ی دوم را بین آن‌ها حذف کنیم.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \rightarrow 6x - 2y = 0 \rightarrow 6x = 2y \rightarrow y = 3x \\ x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

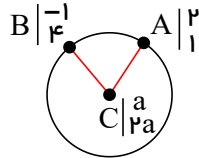
کافی است معادله گسترده دایره یعنی  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  را بنویسیم و این نقاط را در معادله دایره صدق دهیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۸۰



$$\left. \begin{array}{l} A \begin{cases} -1 \\ 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{صدق}} 1 - a + c = 0 \\ B \begin{cases} 3 \\ 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{صدق}} 9 + 3a + c = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{دستگاه}} a = -2, c = -3$$

$$C \begin{cases} 0 \\ -3 \end{cases} \xrightarrow{\text{صدق}} 9 - 3b + c = 0 \xrightarrow{c = -3} b = 2$$

$$R^2 = \frac{a^2 + b^2 - 3c}{4} = \frac{4 + 4 + 12}{4} = \frac{20}{4} = 5 \Rightarrow R = \sqrt{5}$$



$$R = AC = \sqrt{(3-a)^2 + (1-2a)^2}, R = BC = \sqrt{(-1-a)^2 + (4-2a)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(3-a)^2 + (1-2a)^2} = \sqrt{(-1-a)^2 + (4-2a)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 4 - 6a + a^2 + 1 - 4a + 4a^2 = 1 + 2a + a^2 + 16 - 16a + 4a^2 \Rightarrow 6a = 12 \Rightarrow a = 2$$

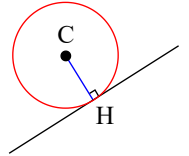
$$R = AC = \sqrt{(3-2)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{0 + 9} = 3$$

فاصله‌ی مرکز دایره تا خط مماس بر دایره برابر شعاع دایره است.

$$f'_x = 0 \rightarrow 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1$$

$$f'_y = 0 \rightarrow 2y + 4 = 0 \rightarrow y = -2 \Rightarrow C \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

$$R^2 = \alpha^2 + \beta^2 - c = 1 + 4 - a = 5 - a \rightarrow R = \sqrt{5 - a}$$

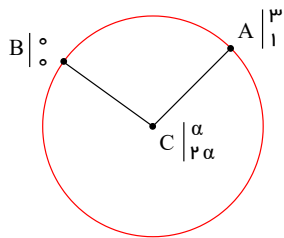


$$x + 3y = 0 \text{ فاصله‌ی مرکز دایره تا خط } = CH = R = \frac{|1 - 6 + 0|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{5}{\sqrt{10}}$$

$$\text{بنابراین: } \frac{5}{\sqrt{10}} = \sqrt{5 - a} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{25}{10} = 5 - a \rightarrow a = \frac{5}{2}$$

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی  $A \begin{cases} \alpha \\ \beta \end{cases}$  از خط به معادله‌ی  $ax + by + c = 0$  از رابطه‌ی  $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  به دست می‌آید.

چون مرکز دایره روی خط به معادله‌ی  $y = 2x$  قرار دارد بنابراین می‌توان مرکز دایره را به صورت  $C \begin{cases} \alpha \\ 2\alpha \end{cases}$  در نظر گرفت.



$$R = AC = \sqrt{(3-\alpha)^2 + (1-2\alpha)^2}, R = BC = \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha^2} = \sqrt{5\alpha^2}$$

$$AC = BC \rightarrow \sqrt{(3-\alpha)^2 + (1-2\alpha)^2} = \sqrt{5\alpha^2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} (3-\alpha)^2 + (1-2\alpha)^2 = 5\alpha^2$$

$$\rightarrow 9 + \alpha^2 - 6\alpha + 1 + 4\alpha^2 - 4\alpha = 5\alpha^2 \rightarrow 10\alpha = 10 \rightarrow \alpha = 1$$

$$R = AC \xrightarrow{\alpha=1} \sqrt{4 + 5} = \sqrt{5}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۱

شکل مسأله به صورت مقابل می‌باشد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۲

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۳

# پاسخنامه کاپری

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴

۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴
۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴
۴۱	۱	۲	۳	۴
۴۲	۱	۲	۳	۴

۴۳	۱	۲	۳	۴
۴۴	۱	۲	۳	۴
۴۵	۱	۲	۳	۴
۴۶	۱	۲	۳	۴
۴۷	۱	۲	۳	۴
۴۸	۱	۲	۳	۴
۴۹	۱	۲	۳	۴
۵۰	۱	۲	۳	۴
۵۱	۱	۲	۳	۴
۵۲	۱	۲	۳	۴
۵۳	۱	۲	۳	۴
۵۴	۱	۲	۳	۴
۵۵	۱	۲	۳	۴
۵۶	۱	۲	۳	۴
۵۷	۱	۲	۳	۴
۵۸	۱	۲	۳	۴
۵۹	۱	۲	۳	۴
۶۰	۱	۲	۳	۴
۶۱	۱	۲	۳	۴
۶۲	۱	۲	۳	۴
۶۳	۱	۲	۳	۴

۶۴	۱	۲	۳	۴
۶۵	۱	۲	۳	۴
۶۶	۱	۲	۳	۴
۶۷	۱	۲	۳	۴
۶۸	۱	۲	۳	۴
۶۹	۱	۲	۳	۴
۷۰	۱	۲	۳	۴
۷۱	۱	۲	۳	۴
۷۲	۱	۲	۳	۴
۷۳	۱	۲	۳	۴
۷۴	۱	۲	۳	۴
۷۵	۱	۲	۳	۴
۷۶	۱	۲	۳	۴
۷۷	۱	۲	۳	۴
۷۸	۱	۲	۳	۴
۷۹	۱	۲	۳	۴
۸۰	۱	۲	۳	۴
۸۱	۱	۲	۳	۴
۸۲	۱	۲	۳	۴
۸۳	۱	۲	۳	۴



# سوالات آماری هفته دوم

## آمار، رنباله والگو، تواسخ رسانی واتررها



معین کریمی

۱) یک جامعه با اندازه ی ۱۲ و واریانس ۱۲٫۶، با جامعه ی دیگری به اندازه ی ۲۴ و واریانس ۷٫۲، تشکیل جامعه ی جدیدی داده اند. اگر میانگین این دو جامعه یکسان باشد، انحراف معیار جامعه ی جدید، کدام است؟

- ۱) ۲٫۹      ۲) ۳      ۳) ۳٫۱      ۴) ۳٫۲

۲) در ۵۰ داده ی آماری، مجموع اختلافات داده ها از عدد ۱۲، برابر صفر است و مجموع مجذورات اختلاف داده ها از عدد ۱۲، برابر ۴۵۰ می باشد. ضریب تغییرات این داده ها، کدام است؟

- ۱) ۰٫۲      ۲) ۰٫۲۵      ۳) ۰٫۳      ۴) ۰٫۳۵

۳) در داده های آماری ۱۳، ۱۲، ۱۲، ۱۱، ۹، ۸، ۸، ۶، ۶، ۴، ۳، ۳ داده های کم تر از چارک اول و بیش تر از چارک سوم را حذف کنید. ضریب تغییرات داده های باقی مانده کدام است؟

- ۱) ۰٫۱۵      ۲) ۰٫۱۷      ۳) ۰٫۲۱      ۴) ۰٫۲۵

۴) در کدام مورد، عمل سرشماری انجام نشده است؟

- ۱) تمام افراد جامعه مورد مطالعه قرار گیرد.  
۲) نمونه برابر جامعه آماری  
۳) اندازه ی نمونه برابر اندازه ی جامعه  
۴) نمونه، زیرمجموعه ی محض جامعه ی آماری

۵) اگر میانگین ۱۰ داده ی آماری ۱۶، ۱۱، ۱۷، ۱۰،  $a$ ، ۱۰، ۱۳، ۱۷، ۹، ۱۶ برابر ۱۳٫۱ باشد، میانه کدام است؟

- ۱) ۱۱٫۵      ۲) ۱۲      ۳) ۱۲٫۵      ۴) ۱۳

۶) در یک کارگاه، دو گروه مشغول کار هستند، میانگین نمرات مسئولیت پذیری و واریانس در گروه اول به ترتیب ۸۰ و ۲۵ و در گروه دوم ۷۲ و ۱۶ می باشد. کدام گروه از نظر مسئولیت پذیری یکدست تر است؟ (با تغییر)

- ۱) گروه اول      ۲) گروه دوم      ۳) یکسان      ۴) اظهار نظر نمی توان کرد.

۷) دستگاه  $A$  کالایی را با میانگین وزن ۱۵۰ و انحراف معیار ۳٫۶ و دستگاه  $B$  همان کالا را با میانگین وزن ۱۶۰ و انحراف معیار ۳٫۸۴ بسته بندی می کنند. دقت عمل کدام، پیرامون میانگین با اطمینان بیشتر است؟

- ۱) یکسان      ۲)  $A$       ۳)  $B$       ۴) نمی توان اظهار نظر کرد.

۸) در ۱۵۰ داده ی آماری با میانگین ۱۲، به دو برابر هر یک از داده ها ۳ واحد اضافه می کنیم. تا داده های جدیدی حاصل شود. ضریب تغییرات داده های جدید چند برابر ضریب تغییرات داده های قبلی است؟

- ۱)  $\frac{7}{9}$       ۲)  $\frac{5}{6}$       ۳)  $\frac{7}{8}$       ۴)  $\frac{8}{9}$

۹) ضریب تغییرات داده های آماری ۱٫۳۵ می باشد. به ۲ برابر این داده های آماری،  $\frac{1}{4}$  میانگین آن ها افزوده شده است. ضریب تغییرات داده های جدید، کدام است؟

- ۱) ۰٫۹۶      ۲) ۱٫۰۸      ۳) ۱٫۱۵      ۴) ۱٫۲

۱۰) شش داده آماری با میانگین ۱۲ و واریانس ۶ با ۹ داده دیگر با میانگین ۱۴ و واریانس ۴ ترکیب شده اند. انحراف معیار گروه جدید، کدام است؟

- ۱) ۲٫۲      ۲) ۲٫۳      ۳) ۲٫۴      ۴) ۲٫۵



۱۱) نمرات مهارت برای کارگر (A): ۱۶، ۱۵، ۱۴، ۱۳ و ۱۲ و برای کارگر (B): ۱۶، ۱۶، ۱۵، ۱۳ و ۱۱٫۵ بوده است. دقت عمل کدام بیشتر است؟

- ۱) A      ۲) B      ۳) یکسان      ۴) اظهار نظر نمی‌توان کرد.

۱۲) در ۴۵ داده‌ی آماری مقدار میانگین ۱۱۲۴ محاسبه شده است. در بررسی مجدد داده‌ها متوجه شدیم که به جای داده‌ی ۱۰۲۴ عدد ۱۲۰۴ محاسبه شده است. با رفع اشتباه میانگین واقعی، کدام است؟

- ۱) ۱۱۱۹      ۲) ۱۱۲۰      ۳) ۱۱۲۱      ۴) ۱۱۲۲

۱۳) ضریب تغییرات در داده‌های آماری، ۰٫۸ محاسبه شده است. اگر به هر داده‌ی مفروض ۵ واحد اضافه شود، ضریب تغییرات حاصل ۰٫۷۵ خواهد شد. میانگین داده‌های اولیه کدام است؟

- ۱) ۵۶      ۲) ۶۴      ۳) ۷۵      ۴) ۸۰

۱۴) اگر میانگین ۹ عدد ۲، ۹، ۱۸، ۱۶، ۱۱، ۱۴، ۱۰، ۷ و  $a$ ، برابر ۱۳ باشد، میانه‌ی آن‌ها کدام است؟

- ۱) ۱۰      ۲) ۱۱      ۳) ۱۲      ۴) ۱۴

۱۵) میانگین و واریانس ۲۹ داده‌ی آماری به ترتیب ۱۷ و ۵ می‌باشد. اگر داده‌های ۱۲ و ۱۳ و ۲۱ و ۲۲، از بین آنان حذف شوند، واریانس داده‌های باقی‌مانده، کدام است؟

- ۱) ۲٫۵۲      ۲) ۲٫۵۴      ۳) ۲٫۶۴      ۴) ۲٫۶۶

۱۶) در ۲۵ داده‌ی آماری میانگین و انحراف معیار به ترتیب ۳ و ۸ می‌باشد. اگر داده‌های ناجور ۱۰، ۱۵، ۴۵ و ۵۰، از بین آن‌ها حذف شوند، واریانس داده‌های باقی‌مانده، کدام است؟

- ۱) ۱۴٫۷۲      ۲) ۱۴٫۸۱      ۳) ۱۵٫۳۳      ۴) ۱۶٫۶۶

۱۷) میانگین طول ضلع مربع‌هایی ۲۵ واحد، با ضریب تغییرات ۰٫۰۶ است. میانگین مساحت این مربع‌ها، کدام است؟

- ۱) ۶۲۶٫۵      ۲) ۶۲۷٫۲۵      ۳) ۶۲۷٫۷۵      ۴) ۶۲۸٫۵

۱۸) امتیازات مهارت کاری دو فرد A و B در پنج روز متوالی چنین است: A: ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۷، ۲۹ و B: ۲۱، ۲۴، ۲۵، ۲۷، ۲۸. دقت عمل کدام فرد بیشتر است؟

- ۱) یکسان      ۲) غیر قابل بررسی      ۳) A      ۴) B

۱۹) میانگین طول اضلاع مربع‌هایی ۱۵ واحد با ضریب تغییرات ۰٫۲ محاسبه شده است. میانگین مساحت این مربع‌ها، کدام است؟

- ۱) ۲۲۹      ۲) ۲۳۲      ۳) ۲۳۴      ۴) ۲۳۶

۲۰) میانگین محیط مربع‌هایی برابر ۸۴ و میانگین مساحت این مربع‌ها ۴۹۰ می‌باشند. ضریب تغییرات در طول ضلع این مربع‌ها، کدام است؟

- ۱) ۰٫۲۵      ۲) ۰٫۲۷      ۳) ۰٫۲۸      ۴) ۰٫۳۳

۲۱) دو نفر در یک آزمایشگاه، در ۵ روز متوالی همزمان شروع به کار کردند. امتیازات دقت کاری آنان، مطابق جدول زیر است، دقت کاری کدام بیشتر است؟

نفر اول	۷	۹	۸	۹	۷
نفر دوم	۱۰	۸	۶	۷	۹

- ۱) نفر اول      ۲) نفر دوم      ۳) یکسان      ۴) نیاز به اطلاعات بیشتر

۲۲) در ۲۵ داده‌ی آماری، مجموع تمام داده‌ها ۲۷۵ و مجموع مربعات آن‌ها ۳۲۵۰ می‌باشد. ضریب تغییرات در این داده‌ها کدام است؟

- ۱) ۰٫۲۵۷۲      ۲) ۰٫۲۶۴۵      ۳) ۰٫۲۶۷۲      ۴) ۰٫۲۷۲۷

۲۳) در ۳۰ داده‌ی آماری، مجموع تمام داده‌ها برابر ۲۴۰ و مجموع مربعات این داده‌ها ۲۱۹۰ می‌باشد. ضریب تغییرات، کدام است؟

- ۱) ۰٫۲۲۵      ۲) ۰٫۲۷۵      ۳) ۰٫۳۲۵      ۴) ۰٫۳۷۵



۲۴ در ۱۲ داده آماری مجموع تمام داده‌ها ۷۲ و مجموع مجذورات آن‌ها ۴۸۰ می‌باشد. ضریب تغییرات این داده‌ها کدام است؟

۱/۴ (۴)

۱/۳ (۳)

۲/۹ (۲)

۲/۵ (۱)

۲۵ میانگین و انحراف معیار ۲۲ داده آماری به ترتیب ۱۶ و ۲ می‌باشد، اگر داده‌های ۱۷ و ۲۰ و ۱۱، به آنان افزوده شوند، واریانس ۲۵ داده حاصل، کدام است؟

۵٫۲ (۴)

۵٫۱ (۳)

۴٫۹ (۲)

۴٫۸ (۱)

۲۶ ضریب تغییرات داده‌های آماری به صورت جدول زیر، کدام است؟

داده	
۱۰, ۱۰, ۱۰, ۱۰, ۱۰, ۱۱, ۱۱, ۱۱, ۱۱, ۱۴, ۱۴, ۱۴, ۱۴, ۱۴, ۱۴, ۱۴	

۰٫۱۸ (۴)

۰٫۱۷ (۳)

۰٫۱۵ (۲)

۰٫۱۲ (۱)

۲۷ میانگین اضلاع مربع‌هایی برابر ۸ و میانگین مساحت آن‌ها ۶۵٫۴۴ می‌باشد. ضریب تغییرات در طول اضلاع این مربع‌ها، کدام است؟

۰٫۲۵ (۴)

۰٫۲ (۳)

۰٫۱۵ (۲)

۰٫۱۲ (۱)

۲۸ پانزده داده آماری با واریانس ۱۲ و ده داده آماری دیگر با واریانس ۷٫۶ را با هم ترکیب می‌کنیم اگر میانگین هر دو گروه یکسان باشند، انحراف معیار ۲۵ داده حاصل کدام است؟

۳٫۵ (۴)

۳٫۲۵ (۳)

۳٫۲ (۲)

۳٫۱ (۱)

۲۹ انحراف معیار ۲۶ داده آماری برابر ۲ می‌باشد اگر یکی از داده‌ها که با میانگین برابر است از بین آنان حذف شود واریانس ۲۵ داده دیگر کدام است؟

۴٫۱۶ (۴)

۴٫۱۲ (۳)

۴٫۰۸ (۲)

۳٫۹۶ (۱)

۳۰ میانگین و انحراف معیار ۱۸ داده آماری به ترتیب ۲۵ و ۳ می‌باشد. اگر داده‌های ۲۰، ۲۷ و ۲۸ به آنان افزوده شود، واریانس ۲۱ داده جدید کدام است؟

۹٫۶۳ (۴)

۹٫۵۲ (۳)

۹٫۳۶ (۲)

۹٫۲۵ (۱)

۳۱ واریانس ۱۱ داده آماری صفر است. اگر داده‌های ۲۴، ۱۶ و ۲۶ به آن‌ها اضافه شود، میانگین داده‌ها تغییر نمی‌کند، انحراف معیار ۱۴ داده حاصل کدام است؟

۲ (۴)

۱٫۵ (۳)

۱٫۲۵ (۲)

۰٫۷۵ (۱)

۳۲ میانگین طول اضلاع مربع‌هایی ۱۲ واریانس آن‌ها ۵ می‌باشد. میانگین مساحت این مربع‌ها کدام می‌باشد؟

۱۶۹ (۴)

۱۴۹ (۳)

۱۳۴ (۲)

۱۲۴ (۱)

۳۳ نمرات آزمون مهارت فنی دو کارگر  $A$  و  $B$  به صورت زیر است:

$A: 15, 14, 15, 16, 17, 19$

$B: 16, 14, 17, 14, 17, 18$

دقت عمل کدام بیش تر است؟

غیرپیش بینی (۴)

یکسان (۳)

$B$  (۲)

$A$  (۱)

۳۴ داده‌های  $x_i = 1, 2, 3, 4, 5$  مفروض است. ضریب تغییرات داده‌های  $u_i = 12x_i + 6$  کدام است؟

۰٫۶ (۴)

۰٫۵۲ (۳)

۰٫۴۸ (۲)

۰٫۴ (۱)

۳۵ داده‌های آماری ۵، ۷، ۸، ۸، ۸، ۱۰ و ۱۰ مفروض‌اند. ضریب تغییرات داده‌ها، کدام است؟  $(\sqrt{\frac{2}{7}} \cong 0,534)$

۰٫۳۰ (۴)

۰٫۲۵ (۳)

۰٫۲۰ (۲)

۰٫۱۵ (۱)



۳۶ در داده‌های آماری ۹، ۱۱، ۱۱، ۱۲، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۴ ضریب تغییرات کدام است؟

- ۱) ۰٫۰۸      ۲) ۰٫۰۹      ۳) ۰٫۱۳      ۴) ۰٫۱۶

۳۷ مجموع ۸ داده آماری برابر ۴۸ و ضریب تغییرات آن‌ها ۰٫۵ می‌باشد، مجموع مربعات این داده‌ها کدام است؟

- ۱) ۲۴۰      ۲) ۳۲۰      ۳) ۳۶۰      ۴) ۴۵۰

۳۸ اگر میانگین و ضریب تغییرات اندازه‌ی اضلاع مربع‌هایی ۱۵ و ۰٫۲ باشد میانگین مساحت این مربع‌ها کدام است؟

- ۱) ۲۲۷      ۲) ۲۲۹      ۳) ۲۳۲      ۴) ۲۳۴

۳۹ در یک دنباله حسابی، جملات سوم، هفتم و نهم می‌توانند سه جمله متوالی از دنباله هندسی باشند. چندمین جمله این دنباله حسابی، صفر است؟

- ۱) ۹      ۲) ۱۰      ۳) ۱۱      ۴) ۱۲

۴۰ در یک دنباله هندسی، «جمله دوم»، «دو برابر جمله پنجم» و «جمله هشتم» می‌توانند سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند، بزرگ‌ترین این سه عدد چند برابر کوچک‌ترین آن‌ها است؟

- ۱)  $2 + \sqrt{3}$       ۲)  $5 + 2\sqrt{3}$       ۳)  $5 + 4\sqrt{3}$       ۴)  $7 + 4\sqrt{3}$

۴۱ در یک دنباله حسابی، مجموع چهار جمله اول ۱۵ و مجموع پنج جمله بعدی آن ۳۰ می‌باشد. جمله یازدهم این دنباله کدام است؟

- ۱) ۷٫۵      ۲) ۸      ۳) ۸٫۵      ۴) ۹

۴۲ در الگوی زیر، تعداد نقطه‌ها، در شکل نهم، کدام است؟

- ۱) ۱۱۷      ۲) ۱۲۰      ۳) ۱۲۳      ۴) ۱۲۵
- 

۴۳ اعداد طبیعی فرد را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته، برابر شماره آن دسته باشد، یعنی  $\{1\}, \{3, 5\}, \{7, 9, 11\}, \dots$  در این صورت جمله آخر واقع در دسته شماره چهارم کدام است؟

- ۱) ۱۵۶۳      ۲) ۱۵۸۹      ۳) ۱۶۳۹      ۴) ۱۶۵۱

۴۴ اعداد طبیعی متوالی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم، که آخرین عدد هر گروه مربع کامل باشد، یعنی  $\{1\}, \{2, 3, 4\}, \dots$  در دسته نهم، واسطه حسابی بین دو عدد اول و آخر آن، کدام است؟

- ۱) ۷۱      ۲) ۷۲      ۳) ۷۳      ۴) ۷۴

۴۵ در الگوی زیر، تعداد نقطه‌ها، در شکل دوازدهم، کدام است؟

- ۱) ۳۴      ۲) ۳۶      ۳) ۳۸      ۴) ۴۰
- 

۴۶ جملات سوم، هفتم و شانزدهم یک دنباله حسابی، جملات متوالی یک دنباله هندسی، هستند. قدرنسبت دنباله هندسی، کدام است؟

- ۱)  $\frac{4}{3}$       ۲)  $\frac{3}{2}$       ۳) ۲      ۴)  $\frac{9}{4}$

۴۷ جملات دوم و پنجم و دوازدهم از یک دنباله حسابی، می‌توانند سه جمله متوالی از دنباله هندسی باشند، قدرنسبت دنباله هندسی کدام است؟

- ۱)  $\frac{5}{3}$       ۲)  $\frac{7}{4}$       ۳)  $\frac{9}{4}$       ۴)  $\frac{7}{3}$

۴۸ در یک دنباله اعداد  $a_1 = 3$  و برای هر  $n \geq 2$  داریم:  $a_n = 2a_{n-1} - 2$ ، حاصل  $a_8 - a_7$ ، کدام است؟

- ۱) ۳۲      ۲) ۴۸      ۳) ۵۶      ۴) ۶۴



۴۹ اگر  $\frac{3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4} + 3^{x+5}}{2^{x-2} + 2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3}} = 52$  باشد مقدار  $x$  کدام است؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

۵۰ اگر  $x = 7 - 2\sqrt{6}$  باشد، حاصل عبارت  $\sqrt{\frac{x+2}{25}} + \frac{1}{x}$ ، کدام است؟

- ۰٫۶ (۱)      ۰٫۸ (۲)      ۱٫۲ (۳)      ۱٫۴ (۴)

۵۱ در تجزیه عبارت  $(x-2)(x^2 - 4x + 4) - 1$ ، کدام عامل ضرب، موجود است؟

- $x-3$  (۱)       $x-2$  (۲)       $x-1$  (۳)       $x+3$  (۴)

۵۲ ساده شده عبارت  $\left(\sqrt[3]{5 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4} + (-\sqrt{2})^2\right)^{-\frac{2}{3}} + \left(\sqrt[3]{\frac{2}{4}}\right)^3$ ، کدام است؟

- ۳٫۲۵ (۱)      ۳٫۵ (۲)      ۳٫۷۵ (۳)      ۴٫۵ (۴)

۵۳ خلاصه شده عبارت  $\frac{4x^2 + 4x + 1}{2x^2 + x} \div \left(x - 2 - \frac{x^2 + 1}{x}\right)$ ، کدام است؟

- $\frac{1}{x-1}$  (۱)       $\frac{-1}{x+1}$  (۲)      ۱ (۳)      -۱ (۴)

۵۴ در تجزیه عبارت  $x^6 - 3x^3 + 8x - 24$ ، کدام عامل ضرب وجود دارد؟

- $x-4$  (۱)       $x-2$  (۲)       $x+2$  (۳)       $x+3$  (۴)

۵۵ مجموع سه عدد  $a, b, c$  برابر ۱۱ و مجموع حاصل ضرب دوی آن‌ها برابر ۳ می‌باشد. مجموع مجذورات این سه عدد کدام است؟

- ۹۰ (۱)      ۱۰۵ (۲)      ۱۱۰ (۳)      ۱۱۵ (۴)

۵۶ ساده شده عبارت  $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}} + \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2}} - \left(\frac{1}{4}\right)^{-0/25}$ ، کدام است؟

- ۲٫۵ (۱)      -۲٫۲۵ (۲)      -۱٫۷۵ (۳)      -۱٫۵ (۴)

۵۷ حاصل عبارت  $\frac{\sqrt{27}-1}{4+\sqrt{3}} + (2-\sqrt{3})^{-1}$ ، کدام است؟

- $1 + 2\sqrt{3}$  (۱)       $2\sqrt{3}$  (۲)       $1 + \sqrt{3}$  (۳)      ۱ (۴)

۵۸ حاصل عبارت  $\sqrt[3]{24} \times \sqrt[3]{9} + \frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} - \sqrt{80}$ ، کدام است؟

- ۴ (۱)      -۳ (۲)       $-1 - 2\sqrt{5}$  (۳)       $3 - 2\sqrt{5}$  (۴)

۵۹ خلاصه شده عبارت  $(1 - \frac{6}{x+2})\left(\frac{5x-2}{x-4} + x\right)$ ، کدام است؟

- $x-2$  (۱)       $x-1$  (۲)       $x+1$  (۳)       $x+2$  (۴)

۶۰ حاصل عبارت  $\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} - \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{12}}$ ، کدام است؟

- ۳ (۱)      -۲ (۲)      -۱ (۳)      صفر (۴)

۶۱ اگر  $(5x - \frac{3}{2x}) = 4$  باشد، حاصل  $(25x^2 + \frac{9}{4x^2})$ ، کدام است؟

- ۲۴ (۱)      ۲۹ (۲)      ۳۱ (۳)      ۳۲ (۴)





۶۲ اگر  $A = 2\sqrt{50} + 4\sqrt{75} - 5\sqrt{48} - 3\sqrt{8}$  باشد،  $A^2$  برابر کدام است؟

- ۳۶ (۴)                      ۳۲ (۳)                      ۳۰ (۲)                      ۲۴ (۱)

۶۳ حاصل عبارت  $(x^3 - 6x^2 + 12x - 8)\left(\frac{x}{x^2 - 4x + 4} - \frac{1}{x - 2}\right)$ ، کدام است؟

- ۲x (۴)                      ۲x - ۱ (۳)                      ۲x - ۲ (۲)                      ۲x - ۴ (۱)

۶۴ خلاصه شده عبارت  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6 \times \left(2\frac{1}{4}\right) \times (0,75)^{-3}$  کدام است؟

- ۳ (۴)                      ۲ (۳)                       $\frac{3}{2}$  (۲)                       $\frac{2}{3}$  (۱)

۶۵ اگر  $A = \sqrt[5]{4\sqrt[3]{16}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}$  باشد، حاصل  $(2A)^{-\frac{1}{3}}$ ، کدام است؟

- ۱ (۴)                      ۰,۷۵ (۳)                      ۰,۵ (۲)                      ۰,۲۵ (۱)

۶۶ اگر  $x = 5 + \sqrt{17}$  باشد، حاصل عبارت  $\sqrt{\frac{x-1}{16} + \frac{1}{2x}}$ ، کدام است؟

- ۱,۵ (۴)                      ۱,۲۵ (۳)                      ۰,۷۵ (۲)                      ۰,۵ (۱)

۶۷ حاصل عبارت  $\frac{\sqrt{8} + \sqrt{27}}{5 - \sqrt{6}} - 2(\sqrt[4]{9} - 1)^{-1}$ ، کدام است؟

- $\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$  (۴)                       $1 - \sqrt{2}$  (۳)                       $-1 + \sqrt{2}$  (۲)                       $1 + \sqrt{3}$  (۱)

۶۸ حاصل  $\left(x + \frac{2}{x-3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{x-2}\right)$  کدام است؟

- $2x + 1$  (۴)                       $x + 2$  (۳)                       $x + 1$  (۲)                       $x - 1$  (۱)

۶۹ حاصل عبارت  $(2x + 1 - \frac{3}{x}) \div (2 + \frac{1}{x+1})$  کدام است؟

- $x - \frac{1}{x}$  (۴)                       $x + \frac{1}{x}$  (۳)                       $2 + \frac{1}{x}$  (۲)                       $2 - \frac{2}{x}$  (۱)

۷۰ حاصل عبارت  $\left(1 + \frac{3x}{x^2 - 4}\right) \times \left(1 - \frac{1}{x-1}\right)$ ، کدام است؟

- $\frac{x+4}{x-2}$  (۴)                       $\frac{x-4}{x+2}$  (۳)                       $\frac{x-4}{x-2}$  (۲)                       $\frac{x+4}{x+2}$  (۱)

۷۱ حاصل عبارت  $\frac{3x(2x^2 - 1)}{2x + 2} - \frac{x-2}{2x+2} + 2x$ ، با شرط  $x \neq -1$ ، برابر کدام سه جمله‌ای است؟

- $3x^2 + 2x - 1$  (۴)                       $3x^2 - 2x + 1$  (۳)                       $3x^2 + x - 1$  (۲)                       $3x^2 - x + 1$  (۱)

۷۲ در تجزیه عبارت  $(x^2 - 12)^2 - 16x^2$ ، کدام عامل ضرب وجود ندارد؟

- $x + 6$  (۴)                       $x + 3$  (۳)                       $x + 2$  (۲)                       $x - 6$  (۱)

۷۳ در تجزیه عبارت  $a(a-3)(a-4) - 12a + 36$ ، کدام عامل ضرب وجود ندارد؟

- $a + 2$  (۴)                       $a - 2$  (۳)                       $a - 3$  (۲)                       $a - 6$  (۱)

۷۴ حاصل  $\frac{6}{2 - \sqrt{7}} + (1 + \sqrt{7})^2$ ، کدام است؟

- ۱۲ (۴)                       $4 + \sqrt{7}$  (۳)                      ۴ (۲)                       $4 - \sqrt{7}$  (۱)



۷۵ خلاصه شده ی عبارت  $\sqrt[3]{\frac{3}{8}} \times (18)^{-2} \times (1,5)^4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$  کدام است؟

- ۱٫۵ (۱)      ۲ (۲)      ۲٫۵ (۳)      ۳ (۴)

۷۶ حاصل عبارت  $\sqrt{25} \times \sqrt{40} + \frac{\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{72}$  کدام است؟

- ۴ (۱)      ۳ +  $\sqrt{2}$  (۲)      ۵ (۳)      ۶ (۴)

۷۷ حاصل  $\frac{2}{2+\sqrt{5}} - \sqrt{20} + \sqrt{48} \times \frac{\sqrt{3}}{3}$  ، کدام است؟

- صفر (۱)      ۱ (۲)      ۲ (۳)       $\sqrt{5}$  (۴)

۷۸ در تجزیه ی عبارت  $4x^3 - 6x^2 + 2x$  ، کدام عامل ضرب وجود دارد؟

- $2x + 1$  (۱)       $2x - 1$  (۲)       $x + 1$  (۳)       $x + 2$  (۴)

۷۹ حاصل عبارت  $(1 - \frac{2}{x^2 + x})(1 + \frac{2}{x^2 - 1}) - \frac{2}{x^2}$  ، برابر کدام است؟

- $\frac{1}{x^2}$  (۱)      ۱ (۲)       $1 + \frac{1}{x^2}$  (۳)      صفر (۴)

۸۰ اگر  $A = \frac{2}{3}\sqrt{18} + 2\sqrt{27} - \sqrt{108} + 0,3\sqrt{200}$  باشد،  $A^2$  برابر کدام است؟

- ۳۲ (۱)      ۴۵ (۲)      ۴۸ (۳)      ۵۰ (۴)

۸۱ اگر  $(3x + \frac{1}{2x}) = 5$  باشد، حاصل  $(9x^2 + \frac{1}{4x^2})$  ، کدام است؟

- ۱۸ (۱)      ۲۰ (۲)      ۲۱ (۳)      ۲۲ (۴)

۸۲ حاصل عبارت  $A = (\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}) \cdot \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2}$  ، کدام است؟

- $\sqrt{3}$  (۱)      ۲ (۲)       $1 + \sqrt{3}$  (۳)       $2\sqrt{3}$  (۴)

۸۳ حاصل عبارت  $\frac{2}{3 - \sqrt{7}} + \sqrt{(2 - \sqrt{7})^2} - \sqrt{28} + \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$  ، کدام است؟

- $\sqrt{7}$  (۱)      ۳ (۲)      ۴ (۳)       $2 + \sqrt{7}$  (۴)

۸۴ در تجزیه ی عبارت  $(x^2 - 6x - 4)^2 - 144$  ، کدام عامل ضرب وجود ندارد؟

- $x - 8$  (۱)       $x - 4$  (۲)       $x + 2$  (۳)       $x + 4$  (۴)

۸۵ حاصل  $\frac{2}{2 + \sqrt{6}} + (2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})$  ، کدام است؟

- ۲ (۱)      -۱ (۲)      ۱ (۳)      ۲ (۴)

۸۶ اگر  $xy^2 = \frac{4}{3}$  باشد، حاصل  $(x + 3y^2)^2 - (x - 3y^2)^2$  ، کدام است؟

- ۸ (۱)      ۱۲ (۲)      ۱۶ (۳)      ۱۸ (۴)

۸۷ حاصل عبارت  $\frac{x}{x-1} + \frac{3}{x+1} - \frac{4x-2}{x^2-1}$  برابر کدام است؟

- ۲ (۱)      -۱ (۲)      ۱ (۳)      ۲ (۴)



۸۸ مجموع دو کسر تعریف شده  $\frac{x^3 + 4}{x + 4}$  و  $\frac{3x(x-1)}{x+4}$ ، برابر کدام سه جمله‌ای است؟

- ①  $x^2 - x + 1$       ②  $x^2 - x - 1$       ③  $x^2 + x - 1$       ④  $x^2 + x + 1$

۸۹ فرض کنید  $a = \sqrt[4]{\sqrt{6} - 2}$  و  $b = \sqrt[4]{\sqrt{6} + 2}$  مقدار  $(a^2 + b^2 - 2ab)^2 (a^2 + b^2 + 2ab)^2$  کدام است؟

- ①  $4(2 + \sqrt{3})$       ②  $4(2 - \sqrt{3})$       ③  $16(2 + \sqrt{3})$       ④  $16(2 - \sqrt{3})$

۹۰ حاصل  $\frac{7 - 3\sqrt{7}}{3 - \sqrt{7}} + \sqrt{(2 - \sqrt{7})^2}$  برابر کدام است؟

- ①  $-2$       ②  $1 - \sqrt{7}$       ③  $2$       ④  $2\sqrt{7}$

۹۱ ساده شده عبارت  $\frac{4x^2 - 12x + 9}{4x - 6} \div (2 - \frac{4x - 3}{x})$  کدام است؟

- ①  $-\frac{x}{2}$       ②  $\frac{x}{2}$       ③  $-\frac{1}{2x}$       ④  $\frac{2x - 3}{x}$

۹۲ خلاصه شده عبارت  $(x - \frac{x+6}{x-4})(\frac{x^2+9}{x+1} - 5)$  کدام است؟

- ①  $x^2 + 3x - 4$       ②  $x^2 - 3x + 4$       ③  $x^2 + 5x + 6$       ④  $x^2 - 7x + 6$

۹۳ حاصل عبارت  $\sqrt[6]{12} \times \sqrt[4]{54} \times \sqrt[3]{2} \sqrt[4]{6}$  کدام است؟

- ①  $6\sqrt[6]{2}$       ②  $3\sqrt[6]{32}$       ③  $2\sqrt[6]{9}$       ④  $6$

۹۴ حاصل  $(2 + \frac{x^2}{x-4}) \div (1 + \frac{8}{x-4})$  کدام است؟

- ①  $2x - 2$       ②  $x - 2$       ③  $x + 1$       ④  $x + 2$

۹۵ فرض کنید  $x_1$  و  $x_2$  جواب‌های معادله  $(\sqrt[3]{x^2} - 1) = 2\sqrt[3]{x} (\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1)$  باشند مقدار  $x_1 + x_2$  کدام است؟

- ①  $-1$       ② صفر      ③  $1$       ④  $2$

۹۶ فرض کنید  $a = \sqrt[4]{7 - 4\sqrt{3}}$  مقدار  $(a + \frac{1}{a} + \sqrt{2})^2 (a + \frac{1}{a} - \sqrt{2})^2$  کدام است؟

- ①  $9$       ②  $16$       ③  $25$       ④  $49$

۹۷ اگر حاصل عبارت  $\sqrt[3]{\sqrt{2}} \times (\sqrt{3})^{\frac{4}{3}} (\sqrt{3})^{\frac{3}{2}} (2 - \sqrt{3})^{\frac{3}{2}}$  به صورت  $\sqrt[3]{A}$  باشد،  $A$  کدام است؟

- ①  $\sqrt{3} - 1$       ②  $\sqrt{3}$       ③  $2$       ④  $\sqrt{3} + 1$



## پاسخنامه تشریحی

۱ اگر یک جامعه با اندازه  $n_1$  و واریانس  $\sigma_1^2$  و جامعه دیگری با اندازه  $n_2$  و واریانس  $\sigma_2^2$  وجود داشته باشد و میانگین دو جامعه با هم برابر باشد، واریانس جامعه حاصل از اجتماع این دو جامعه، از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\sigma^2 = \left(\frac{n_1}{n_1+n_2}\right)\sigma_1^2 + \left(\frac{n_2}{n_1+n_2}\right)\sigma_2^2 = \left(\frac{12}{36}\right)(12,6) + \left(\frac{24}{36}\right)(7,2) = \frac{1}{3}(12,6) + \frac{2}{3}(7,2) = 9 \rightarrow \sigma = 3$$

۲ می‌دانیم مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین برابر صفر است. بنابراین میانگین داده‌ها برابر  $\bar{x} = 12$  می‌باشد و داریم:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - 12)^2 + (x_2 - 12)^2 + \dots + (x_{50} - 12)^2}{50} = \frac{\text{مجموع مجزورات اختلاف داده‌ها از } 12}{50} = \frac{450}{50} = 9 \Rightarrow \sigma = 3$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0,25$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳

داده‌ها از کوچک به بزرگ مرتب‌شده داده شده‌اند.

۳, ۳, ۴, ۶, ۶, ۸, ۸, ۹, ۱۱, ۱۲, ۱۲, ۱۳  
نیمه اول داده‌ها      نیمه دوم داده‌ها

تعداد داده‌ها ۱۲ تا است. در هر سری شش داده داریم که میانه شش داده برابر با نصف مجموع دو داده وسط است. پس داریم:

$$\text{میانۀ نیمۀ اول داده‌ها} = \text{چارک اول} = Q_1 = \frac{4+6}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\text{میانۀ نیمۀ دوم داده‌ها} = \text{چارک سوم} = Q_3 = \frac{11+12}{2} = \frac{23}{2} = 11,5$$

طبق گفته مسأله از بین داده‌ها، اعداد کم‌تر از ۵ و بیش‌تر از ۱۱٫۵ را حذف می‌کنیم که اعداد باقی‌مانده عبارتند از:

۶, ۶, ۸, ۸, ۹, ۱۱

حالا ضریب تغییرات آن‌ها را می‌خواهیم. ابتدا میانگین را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{2(6) + 2(8) + 9 + 11}{6} = \frac{48}{6} = 8$$

حال، واریانس و سپس انحراف معیار را حساب می‌کنیم:

$$\sigma^2 = \frac{2(6-8)^2 + 2(8-8)^2 + (9-8)^2 + (11-8)^2}{6} = \frac{8+0+1+9}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

$$\Rightarrow \text{انحراف معیار} = \sigma = \sqrt{3}$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{3}}{8} \approx \frac{1,7}{8} \approx 0,21$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴  
وقتی می‌خواهیم تمام افراد جامعه را مورد مطالعه قرار دهیم عمل سرشماری انجام می‌دهیم، در این حالت نمونه دیگر زیرمجموعه‌ای از جامعه‌ی آماری نیست، بلکه برابر با خود جامعه است و در نتیجه اندازه‌ی نمونه و جامعه با هم برابر است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد داده‌ها}} \Rightarrow 13,1 = \frac{16+9+17+13+10+a+10+17+11+16}{10}$$

$$\Rightarrow 13,1 = \frac{119+a}{10} \rightarrow 119+a = 131 \Rightarrow a = 131 - 119 \Rightarrow a = 12$$

برای یافتن میانه، ابتدا باید داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم.

۹, ۱۰, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۶, ۱۶, ۱۷, ۱۷

$$\text{میانۀ ده داده‌ی آماری} = \frac{\text{داده‌ی ششم} + \text{داده‌ی پنجم}}{2} = \frac{12+13}{2} = \frac{25}{2} = 12,5$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶  
کافی است ضریب تغییرات هر دو گروه را به دست آوریم.

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \rightarrow \begin{cases} CV_1 = \frac{\sqrt{25}}{80} = \frac{5}{80} = \frac{1}{16} \\ CV_2 = \frac{\sqrt{16}}{72} = \frac{4}{72} = \frac{1}{18} \end{cases}$$

چون  $CV_1 > CV_2$  است پس گروه دوم از نظر مسئولیت‌پذیری یکدست‌تر است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۷  
ضریب تغییرات هر دو را محاسبه می‌کنیم و با هم مقایسه می‌کنیم.



$$CV_A = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۳,۶}{۱۵۰} = ۰,۰۲۴ \quad , \quad CV_B = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۳,۸۴}{۱۶۰} = ۰,۰۲۴$$

بنابراین دقت عمل آن‌ها یکسان است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۸

اگر هر یک از داده‌ها را دو برابر کنیم انحراف معیار و میانگین نیز دو برابر می‌شوند و وقتی ۳ واحد به آن‌ها اضافه کنیم، انحراف معیار تغییر نکرده و به میانگین ۳ واحد اضافه می‌شود.

$$CV_{\text{قدیم}} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \rightarrow \frac{CV_{\text{جدید}}}{\frac{2\sigma}{2\bar{x}+3}} = \frac{\frac{2\sigma}{2\bar{x}+3}}{\frac{\sigma}{2\bar{x}+3}} = \frac{2\bar{x}}{2\bar{x}+3} = \frac{24}{27} = \frac{8}{9}$$

$$CV_{\text{جدید}} = \frac{2\sigma}{2\bar{x}+3}$$

$$CV_{\text{قدیم}} = \frac{\sigma}{\bar{x}} = ۱,۳۵ \quad \text{طبق صورت سوال} \quad ۱ \quad ۲ \quad ۳ \quad ۴ \quad ۹$$

داده‌های قدیم:  $x_1, x_2, x_3, \dots$

داده‌های جدید:  $2x_1 + \frac{\bar{x}}{4}, 2x_2 + \frac{\bar{x}}{4}, 2x_3 + \frac{\bar{x}}{4}, \dots$

داده‌ها دو برابر شده‌اند بنابراین انحراف معیار و میانگین نیز دو برابر می‌شوند و چون به داده‌ها  $\frac{\bar{x}}{4}$  اضافه شده است به میانگین نیز  $\frac{\bar{x}}{4}$  اضافه می‌شود ولی انحراف معیار تغییری نمی‌کند.

$$CV_{\text{جدید}} = \frac{2\sigma}{2\bar{x} + \frac{\bar{x}}{4}} = \frac{2\sigma}{\frac{9}{4}\bar{x}} = \frac{8}{9} \left( \frac{\sigma}{\bar{x}} \right) = \frac{8}{9} (1,35) = \frac{10,8}{9} = 1,2$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2) - (\bar{x})^2 \quad \text{می‌دانیم که} \quad ۱ \quad ۲ \quad ۳ \quad ۴ \quad ۱۰$$

$$\begin{cases} \bar{x} = 12 \rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 6 \times 12 = 72 \\ \sigma_x^2 = 6 \rightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_6^2}{6} - 144 = 6 \rightarrow x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_6^2 = 900 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{y} = 14 \rightarrow y_1 + y_2 + \dots + y_9 = 9 \times 14 = 126 \\ \sigma_y^2 = 4 \rightarrow \frac{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_9^2}{9} - 196 = 4 \rightarrow y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_9^2 = 1800 \end{cases}$$

اکنون اگر دو دسته را با هم ترکیب کنیم داریم:

$$\bar{x}_{\text{جدید}} = \frac{72 + 126}{6 + 9} = \frac{198}{15} = 13,2$$

$$\sigma_{\text{جدید}}^2 = \frac{900 + 1800}{15} - (13,2)^2 = 180 - 174,24 = 5,76 \rightarrow \sigma_{\text{جدید}} = \sqrt{5,76} = 2,4$$

کافی است ضریب تغییرات را برای هر دو کارگر حساب کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱

$$\bar{x}_A = \frac{70}{5} = 14 \rightarrow \sigma_A^2 = \frac{1}{5} \left( (12-14)^2 + (13-14)^2 + (14-14)^2 + (15-14)^2 + (16-14)^2 \right)$$

$$\rightarrow \sigma_A^2 = \frac{1}{5} (4 + 1 + 0 + 1 + 4) = \frac{10}{5} = 2 \rightarrow \sigma_A = \sqrt{2} \xrightarrow{CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}} CV_A = \frac{\sqrt{2}}{14} \sim 0,101$$

$$\bar{x}_B = \frac{72,5}{5} = 14,5 \rightarrow \sigma_B^2 = \frac{1}{5} \left( (11,5-14,5)^2 + (13-14,5)^2 + (15,5-14,5)^2 + (16-14,5)^2 + (16,5-14,5)^2 \right)$$

$$\rightarrow \sigma_B^2 = \frac{1}{5} (9 + 2,25 + 1 + 2,25 + 4) = \frac{18,5}{5} = 3,7 \rightarrow \sigma_B = \sqrt{3,7} \xrightarrow{CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}} CV_B = \frac{\sqrt{3,7}}{14,5} \sim 0,132$$

چون  $CV_B > CV_A$  است پس کارگر A دقت عمل بیشتری دارد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲

در ابتدا مجموع اشتباهی داده‌ها را حساب می‌کنیم.

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد کل داده‌ها}} \rightarrow 1124 = \frac{\text{مجموع داده‌ها}}{45}$$

$$\rightarrow \text{مجموع اشتباهی داده‌ها} = 1124 \times 45 = 50580$$

حال چون به جای ۱۰۲۴ عدد ۱۲۰۴ محاسبه شده است، یعنی مجموع داده‌ها  $1204 - 1024 = 180$  واحد بیشتر محاسبه شده است، در نتیجه مجموع درست داده‌ها برابر

$$50580 - 180 = 50400 \text{ است.}$$

$$\text{میانگین} = \frac{50400}{45} = 1120$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳

$$CV_{\text{قد}} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \rightarrow 0,7 \cdot 8 = \frac{\sigma}{\bar{x}} \rightarrow \sigma = 0,7 \cdot 8 \bar{x}$$

اگر به تمام داده‌ها ۵ واحد اضافه شود انحراف معیار تغییر نمی‌کند ولی به میانگین، ۵ واحد اضافه می‌شود.

$$CV_{\text{جدید}} = \frac{\sigma}{\bar{x} + 5} \rightarrow 0,7 \cdot 75 = \frac{0,7 \cdot 8 \bar{x}}{\bar{x} + 5} \rightarrow \frac{75}{1000} = \frac{\frac{8}{100} \bar{x}}{\bar{x} + 5} \rightarrow 8 \cdot \bar{x} = 75 \bar{x} + 375$$

$$\rightarrow 5 \bar{x} = 375 \rightarrow \bar{x} = \frac{375}{5} = 75$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴

$$\frac{a + 7 + 10 + 14 + 11 + 16 + 18 + 9 + 20}{9} = 13$$

$$\rightarrow a + 105 = 117 \rightarrow a = 12$$

داده‌ها به صورت ۲۰ و ۱۸ و ۱۶ و ۱۴ و ۱۲ و ۱۱ و ۱۰ و ۹ و ۷ و ۶ درمی‌آیند که میانه برابر ۱۲ است.

۲۹ داده آماری را به صورت ۲۲، ۲۱، ۱۳، ۱۲،  $x_{p5}$ ،  $\dots$ ،  $x_p$ ،  $x_1$  نشان می‌دهیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \left( (x_1 - \bar{x})^2 + (x_p - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2 \right)$$

$$\rightarrow 5 = \frac{1}{29} \left( (x_1 - 17)^2 + (x_p - 17)^2 + \dots + (x_{p5} - 17)^2 + (12 - 17)^2 + (13 - 17)^2 + (21 - 17)^2 + (22 - 17)^2 \right)$$

$$\rightarrow 5 \times 29 = (x_1 - 17)^2 + (x_p - 17)^2 + \dots + (x_{p5} - 17)^2 + 25 + 16 + 16 + 25$$

$$\rightarrow (x_1 - 17)^2 + (x_p - 17)^2 + \dots + (x_{p5} - 17)^2 = 145 - 82$$

$$\rightarrow (x_1 - 17)^2 + (x_p - 17)^2 + \dots + (x_{p5} - 17)^2 = 63$$

چون چهار داده حذف شده، میانگین شان ۱۷ است  $\left( \frac{12 + 13 + 21 + 22}{4} = \frac{68}{4} = 17 \right)$  بنابراین پس از حذف شان دوباره میانگین همان ۱۷ است. اکنون واریانس ۲۵ داده باقی‌مانده را حساب می‌کنیم.

$$\sigma^2 = \frac{1}{25} \left( (x_1 - 17)^2 + (x_p - 17)^2 + \dots + (x_{p5} - 17)^2 \right) = \frac{1}{25} (63) = \frac{63}{25} = 2,52$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶

$$\bar{x} = 30 \rightarrow \frac{x_1 + x_p + \dots + x_{p1} + 10 + 15 + 45 + 50}{25} = 30$$

$$\rightarrow x_1 + x_p + \dots + x_{p1} + 120 = 750 \rightarrow x_1 + x_p + \dots + x_{p1} = 630$$

$$\rightarrow \bar{x}_{\text{جدید}} = \frac{630}{21} = 30$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \left( (x_1 - \bar{x})^2 + (x_p - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2 \right)$$

$$\rightarrow 64 = \frac{1}{25} \left( (x_1 - 30)^2 + (x_p - 30)^2 + \dots + (x_{p5} - 30)^2 \right)$$

$$\rightarrow (x_1 - 30)^2 + (x_p - 30)^2 + \dots + (x_{p5} - 30)^2 = 1600$$

اکنون باید مجموع مربعات انحراف از میانگین ۴ داده ناچور را به دست آوریم:

$$(10 - 30)^2 + (15 - 30)^2 + (45 - 30)^2 + (50 - 30)^2 = 1250$$

پس مجموع مربعات انحراف از میانگین ۲۱ داده باقی‌مانده برابر  $1600 - 1250 = 350$  است.

$$\text{پس: } \sigma^2 = \frac{1}{21} (350) = 16,66$$

۱۷ اگر اضلاع مربع‌ها را به صورت  $x_i$  نشان دهیم در این صورت  $x_1^2 + x_p^2 + \dots + x_N^2$  مجموع مساحت‌های این مربع‌ها و  $\frac{x_1^2 + x_p^2 + \dots + x_N^2}{N}$  میانگین مساحت این مربع‌ها می‌باشد. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \rightarrow \frac{6}{100} = \frac{\sigma}{25} \rightarrow \sigma = 1,5 \rightarrow \sigma^2 = 2,25$$



$$\sigma^2 = \frac{1}{N}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2) - (\bar{x})^2 \rightarrow 2,25 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}{N} - 625$$

$$\rightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}{N} = 627,25$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸

$$(A \text{ نفر}) \bar{x} = \frac{22 + 23 + 24 + 27 + 29}{5} = \frac{125}{5} = 25$$

$$(B \text{ نفر}) \bar{x} = \frac{21 + 24 + 25 + 27 + 28}{5} = \frac{125}{5} = 25$$

اکنون ضریب تغییرات هر دو را حساب می‌کنیم:

$$\sigma_A^2 : \frac{(22-25)^2 + (23-25)^2 + (24-25)^2 + (27-25)^2 + (29-25)^2}{5}$$

$$= \frac{9 + 4 + 1 + 4 + 16}{5} = \frac{34}{5} = 6,8 \rightarrow \sigma_A = \sqrt{6,8} \rightarrow CV_A = \frac{\sqrt{6,8}}{25}$$

$$\sigma_B^2 : \frac{(21-25)^2 + (24-25)^2 + (25-25)^2 + (27-25)^2 + (28-25)^2}{5}$$

$$= \frac{16 + 1 + 0 + 4 + 9}{5} = 6 \rightarrow \sigma_B = \sqrt{6} \rightarrow CV_B = \frac{\sqrt{6}}{25}$$

همانطور که مشاهده می‌کنید ضریب تغییرات فرد B کمتر از فرد A است یعنی پراکندگی دقت عمل او کمتر است پس دقت عمل بیش تری دارد.

$$\text{میانگین} \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}{N} \text{ اگر اضلاع مربع ها را به صورت } x_i \text{ نشان دهیم در این صورت } x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2 \text{ مجموع مساحت های این مربع ها و } \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 19$$

مساحت این مربع ها می باشد.

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \rightarrow 0,2 = \frac{\sigma}{15} \rightarrow \sigma = 3 \rightarrow \sigma^2 = 9$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2) - (\bar{x})^2 \rightarrow 9 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}{N} - (15)^2$$

$$\rightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}{N} = 234$$

طول اضلاع مربع را  $x_1, x_2, \dots, x_N$  در نظر می‌گیریم، میانگین محیط مربع‌ها برابر ۸۴ است (مجموع محیط مربع‌ها تقسیم بر تعدادشان) پس داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۰

$$\bar{x} = \frac{4x_1 + 4x_2 + \dots + 4x_N}{N} \rightarrow 84 = \frac{4(x_1 + x_2 + \dots + x_N)}{N}$$

$$\rightarrow \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = 21 \rightarrow \text{میانگین اضلاع} = \bar{x} = 21$$

میانگین مساحت مربع‌ها برابر ۴۹۰ است (مجموع مساحت مربع‌ها تقسیم بر تعدادشان) پس داریم:

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}{N} = 490$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2) - (\bar{x})^2 \Rightarrow \sigma^2 = 490 - 441 = 49 \Rightarrow \sigma = 7$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{7}{21} = 0,33$$

در ابتدا میانگین امتیازات دو نفر را به دست می‌آوریم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۱

$$\bar{x}_1 = \frac{7 + 9 + 8 + 9 + 7}{5} = 8, \quad \bar{x}_2 = \frac{10 + 8 + 6 + 7 + 9}{5} = 8$$

حال که میانگین‌ها برابر است دقت کاری نفری بیشتر است که ضریب تغییراتش کمتر باشد.

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{N}((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2)$$

$$= \frac{(7-8)^2 + (9-8)^2 + (8-8)^2 + (9-8)^2 + (7-8)^2}{5} = \frac{4}{5}$$



$$\sigma_v^2 = \frac{1}{N} \left( (x_1 - \bar{x})^2 + (x_v - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2 \right)$$

$$= \frac{(10 - 8)^2 + (8 - 8)^2 + (6 - 8)^2 + (7 - 8)^2 + (9 - 8)^2}{5} = \frac{10}{5}$$

چون میانگین‌ها برابر هستند بنابراین ضریب تغییرات نسبت مستقیم با واریانس دارد پس دقت نفر اول بیشتر است.

$$\sigma_1^2 < \sigma_v^2 \Rightarrow CV_1 < CV_v$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۲

$$\bar{x} = \frac{275}{25} = 11$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} (x_1^2 + x_v^2 + \dots + x_N^2) - (\bar{x})^2 = \frac{3250}{25} - (11)^2 = 130 - 121 = 9 \rightarrow \sigma = 3$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{3}{11} = 0,2727$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۳

$$\bar{x} = \frac{240}{30} = 8$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} (x_1^2 + x_v^2 + \dots + x_N^2) - (\bar{x})^2 \rightarrow \sigma^2 = \frac{2190}{30} - 8^2 = 73 - 64 = 9 \rightarrow \sigma = 3$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{3}{8} = 0,375$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۴

$$\bar{x} = \frac{72}{12} = 6$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} (x_1^2 + x_v^2 + \dots + x_N^2) - (\bar{x})^2 = \frac{480}{12} - (6)^2 = 40 - 36 = 4 \rightarrow \sigma = 2$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

۲۲ داده آماری را به صورت:  $x_1, x_2, \dots, x_{22}$  در نظر می‌گیریم که میانگین‌شان برابر ۱۶ و واریانس آنها برابر ۴ است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۵

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \left( (x_1 - \bar{x})^2 + (x_v - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2 \right)$$

$$\Rightarrow 4 = \frac{1}{22} \left( (x_1 - 16)^2 + (x_v - 16)^2 + \dots + (x_{22} - 16)^2 \right)$$

$$\Rightarrow (x_1 - 16)^2 + (x_v - 16)^2 + \dots + (x_{22} - 16)^2 = 4 \times 22 = 88$$

سه داده ۱۷ و ۲۰ و ۱۱ که به این ۲۲ داده اضافه می‌شوند میانگین‌شان برابر ۱۶ =  $\frac{48}{3}$  است. بنابراین میانگین ۲۵ داده جدید همان ۱۶ است. اکنون واریانس ۲۵ داده جدید را حساب می‌کنیم.

$$\sigma^2 = \frac{1}{25} \left( \underbrace{(x_1 - 16)^2 + (x_v - 16)^2 + \dots + (x_{22} - 16)^2}_{88} + (11 - 16)^2 + (20 - 16)^2 + (17 - 16)^2 \right)$$

$$= \frac{1}{25} (88 + 25 + 16 + 1) = \frac{130}{25} = 5,2$$

۲۶ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\bar{x} = \frac{5(10) + 4(11) + 7(14)}{16} = \frac{192}{16} = 12$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \left( (x_1 - \bar{x})^2 + (x_v - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2 \right) = \frac{1}{16} (5(10 - 12)^2 + 4(11 - 12)^2 + 7(14 - 12)^2) = \frac{1}{16} (20 + 4 + 28) = \frac{52}{16}$$





معین کرمی

$$= \frac{13}{4} \rightarrow \sigma = \frac{\sqrt{13}}{2} \sim 1,8$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1,8}{12} = 0,15$$

طول اضلاع مربع را  $x_1, x_2, \dots, x_N$  در نظر می‌گیریم، در این صورت میانگین مساحت مربع‌ها به صورت  $\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}{N}$  می‌باشد. (۱) (۲) (۳) (۴) (۲۷)

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2) - (\bar{x})^2 = 65,44 - 64 = 1,44 \rightarrow \sigma = \sqrt{1,44} = 1,2$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1,2}{8} = 0,15$$

می‌دانیم  $\sigma^2 = \frac{1}{N} ((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2)$  (۱) (۲) (۳) (۴) (۲۸)

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{15} ((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{15} - \bar{x})^2) = 12 \rightarrow (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{15} - \bar{x})^2 = 180$$

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{10} ((x'_1 - \bar{x})^2 + (x'_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x'_{10} - \bar{x})^2) = 7,6 \rightarrow (x'_1 - \bar{x})^2 + (x'_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x'_{10} - \bar{x})^2 = 76$$

با توجه به اینکه میانگین هر دو دسته یکسان است پس وقتی آن‌ها را باهم ترکیب می‌کنیم میانگین تغییر نمی‌کند و فقط تعداد داده‌ها ۲۵ می‌شود یعنی:

$$\sigma^2 = \frac{1}{25} (180 + 76) = \frac{256}{25} \rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{256}{25}} = \frac{16}{5} = 3,2$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۲۹)

$$\sigma^2 = 4 \rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{N} ((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2)$$

$$\rightarrow 4 = \frac{1}{26} ((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{26} - \bar{x})^2) \rightarrow (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{26} - \bar{x})^2 = 104$$

اگر یکی از داده‌ها را که با میانگین برابر است حذف کنیم تغییری در میانگین ۲۵ داده باقی مانده رخ نمی‌دهد و جمع مربعات تفاضل ۲۵ داده از میانگین همان ۱۰۴ است.

$$\sigma^2 = \frac{1}{25} ((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{25} - \bar{x})^2) = \frac{1}{25} (104) = \frac{104}{25} = 4,16$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۳۰)

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} ((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2)$$

$$\rightarrow 9 = \frac{1}{18} ((x_1 - 25)^2 + (x_2 - 25)^2 + \dots + (x_{18} - 25)^2)$$

$$\rightarrow (x_1 - 25)^2 + (x_2 - 25)^2 + \dots + (x_{18} - 25)^2 = 162$$

میانگین ۳ داده جدید اضافه شده ۲۵ است  $(\frac{28 + 27 + 20}{3} = \frac{75}{3} = 25)$  یعنی در ۲۱ داده جدید میانگین همان ۲۵ است و تغییر نمی‌کند.

$$\sigma^2 = \frac{1}{21} ((x_1 - 25)^2 + (x_2 - 25)^2 + \dots + (x_{18} - 25)^2 + (20 - 25)^2 + (27 - 25)^2 + (28 - 25)^2)$$

$$= \frac{1}{21} (162 + 25 + 4 + 9) = \frac{200}{21} = 9,52$$

چون واریانس این ۱۱ داده آماری برابر صفر است، در نتیجه تمام داده‌ها با هم برابرند. (۱) (۲) (۳) (۴) (۳۱)

میانگین سه داده اضافه شده ۲۲ است  $\frac{26 + 16 + 24}{3} = \frac{66}{3} = 22$  است و چون با اضافه شدن این سه داده، میانگین ۱۴ داده تغییر نکرده است پس میانگین ۱۴ داده نیز برابر ۲۲ است. چون می‌دانیم در بین ۱۴ داده، ۱۱ داده با هم برابرند می‌توانیم همه آن ۱۱ داده را ۲۲ در نظر بگیریم.

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} ((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2)$$

$$= \frac{1}{14} (11(22 - 22)^2 + (24 - 22)^2 + (16 - 22)^2 + (26 - 22)^2)$$



$$= \frac{1}{14}(0 + 4 + 36 + 16) = \frac{56}{14} = 4 \rightarrow \sigma = 2$$

اگر  $N$  مربع به ضلع  $x_i$  داشته باشیم در این صورت مجموع مساحت‌ها به صورت  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2$  و میانگین مساحت مربع‌ها به صورت  $\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}{N}$  است.

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2) - (\bar{x})^2 \rightarrow 5 = x - (12)^2 \rightarrow x = 5 + 144 = 149$$

در ابتدا میانگین دقت این دو کارگر را به دست می‌آوریم:

$$\bar{x}_A = \frac{15 + 14 + 15 + 16 + 17 + 19}{6} = \frac{96}{6} = 16, \quad \bar{x}_B = \frac{16 + 14 + 17 + 14 + 17 + 18}{6} = \frac{96}{6} = 16$$

$$\sigma_A^2 = \frac{1}{N}((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2) = \frac{1}{6}(1 + 4 + 1 + 0 + 1 + 9) = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \rightarrow \sigma_A = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}$$

$$\sigma_B^2 = \frac{1}{N}((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2) = \frac{1}{6}(0 + 4 + 1 + 4 + 1 + 4) = \frac{14}{6} = \frac{7}{3} \rightarrow \sigma_B = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$$

می‌دانیم  $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$  است و چون  $CV_A > CV_B$  است پس دقت کاری  $B$  از  $A$  بیشتر است.

ابتدا ضریب تغییرات داده‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ را حساب می‌کنیم.

$$\bar{x} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2)$$

$$= \frac{1}{5}((1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2) = \frac{1}{5}(4 + 1 + 0 + 1 + 4)$$

$$= \frac{10}{5} = 2 \rightarrow \sigma = \sqrt{2} \sim 1,4$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1,4}{3}$$

حال اگر داده‌ها را ۱۲ برابر کنیم میانگین و انحراف معیار نیز ۱۲ برابر می‌شوند و اگر ۶ واحد به داده‌ها اضافه کنیم، انحراف معیار تغییر نمی‌کند و به میانگین ۶ واحد اضافه می‌شود.

$$CV_{جدید} = \frac{12 \times 1,4}{(12 \times 3) + 6} = \frac{16,8}{42} = 0,4$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۵

$$\bar{x} = \frac{2(10) + 3(8) + 7 + 5}{7} = \frac{56}{7} = 8$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2) = \frac{1}{7}(2(10-8)^2 + 3(8-8)^2 + (7-8)^2 + (5-8)^2) = \frac{1}{7}(8 + 0 + 1 + 9) = \frac{18}{7}$$

$$\rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{18}{7}} = 3\sqrt{\frac{2}{7}}$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{3\sqrt{\frac{2}{7}}}{8} = \frac{3(0,524)}{8} \approx 0,2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۶

$$\text{میانگین } \bar{x} = \frac{9 + 2(11) + 2(12) + 13 + 2(14)}{8} = \frac{9 + 22 + 24 + 13 + 28}{8} = \frac{96}{8} = 12$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2)$$

$$= \frac{1}{8}((9-12)^2 + 2(11-12)^2 + 2(12-12)^2 + (13-12)^2 + 2(14-12)^2)$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{9 + 2 + 0 + 1 + 8}{8} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} = 2,5 \rightarrow \sigma = \sqrt{2,5} \sim 1,6$$



$$CV = \frac{1/6}{12} = \frac{16}{120} \sim 0.13$$

با توجه به این که مجموع ۸ داده آماری ۴۸ است، بنابراین میانگین آن‌ها برابر است با  $\bar{x} = \frac{48}{8} = 6$  (۱) (۲) (۳) (۴) (۳۷)

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1}{6} \Rightarrow \sigma = \frac{1}{6} \bar{x} \Rightarrow \sigma = \frac{1}{6} \times 6 = 1 \Rightarrow \sigma^2 = 1^2 = 1$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2) - (\bar{x})^2 \rightarrow 1 = \frac{1}{8} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_8^2) - 36$$

$$\rightarrow 45 = \frac{1}{8} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_8^2) \rightarrow x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_8^2 = 360$$

اگر اضلاع مربع‌ها را به صورت  $x_1, x_2, \dots, x_N$  نشان دهیم در این صورت  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2$  مجموع مساحت‌های این مربع‌ها و میانگین مساحت این مربع‌ها می‌باشد. (۱) (۲) (۳) (۴) (۳۸)

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1}{10} = \frac{\sigma}{10} \rightarrow \sigma = 1 \rightarrow \sigma^2 = 1$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2) - (\bar{x})^2 \rightarrow 1 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}{N} - 225$$

$$\rightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}{N} = 226$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۳۹)

در هر دنباله حسابی با جمله اول  $a_1$  و قدر نسبت  $d$ ، جمله  $m$ ام از رابطه  $a_n = a_1 + (n-1)d$  به دست می‌آید و اگر  $a, b, c$  سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند آن‌گاه  $b^2 = ac$  است.

$$a_7, a_9, a_{11} \Rightarrow a_1 + 6d, a_1 + 8d \xrightarrow{\text{دنباله هندسی}} (a_1 + 6d)(a_1 + 8d) = (a_1 + 7d)^2 \Rightarrow a_1^2 + 14a_1d + 48d^2 = a_1^2 + 14a_1d + 49d^2 \Rightarrow 48d^2 = 49d^2 \Rightarrow d = 0$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۴۰)

اگر  $a, b, c$  سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، آن‌گاه  $a + c = 2b$  است و در یک دنباله هندسی با جمله اول  $a_1$  و قدر نسبت  $q$ ، جمله  $m$ ام از رابطه  $a_n = a_1 q^{n-1}$  به دست می‌آید.

$$a_7, 2a_8, a_9 \Rightarrow a_1 q^6, 2a_1 q^7, a_1 q^8 \xrightarrow{\text{دنباله حسابی}} a_1 q^6 + a_1 q^8 = 4a_1 q^7 \xrightarrow{\div a_1 q^6} 1 + q^2 = 4q \Rightarrow q^2 - 4q + 1 = 0$$

$$q^2 - 4q + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 4 = 12 \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3} = q \\ A = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3} = q \end{cases}$$

اگر فرض کنیم دنباله صعودی است، جمله هشتم بزرگ‌ترین جمله است.

$$\frac{a_8}{a_7} = \frac{a_1 q^7}{a_1 q^6} = q = (q^2 - 4q + 1) = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow q = 2 + \sqrt{3}$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۴۱)

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 15 \\ a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 30 \end{cases} \xrightarrow{a_n = a_1 + (n-1)d} (-5) \times \begin{cases} 4a_1 + 6d = 15 \\ 5a_1 + 30d = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -20a_1 - 30d = -75 \\ 5a_1 + 30d = 30 \end{cases} \Rightarrow -15a_1 = -45 \Rightarrow a_1 = 3, d = \frac{1}{2}$$

$$a_{11} = a_1 + 10d = 3 + 10 \left(\frac{1}{2}\right) = 8$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۴۲)

۱ : شکل اول ، ۲ + ۳ : شکل دوم ، ۳ + ۴ + ۵ : شکل سوم ، ۴ + ۵ + ۶ + ۷ : شکل چهارم ، ...

پس تعداد نقطه‌ها در شکل نهم می‌شود:

$$9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 = 117$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۴۳)

دسته اول: {1}



دسته دوم: {۳, ۵}

دسته سوم: {۷, ۹, ۱۱}

دسته چهارم: {۱۳, ۱۵, ۱۷, ۱۹}

بنابراین دنباله جملات آخر دسته‌ها به صورت ۱, ۵, ۱۱, ۱۹, ... می‌توان به صورت

 $1, (1 \times 2) - 1, (2 \times 3) - 1, (3 \times 4) - 1, \dots$  نوشت یعنی جمله عمومی  $a_n = n(n+1) - 1$  است، پس:

$$a_{40} = 40(41) - 1 = 1640 - 1 = 1639$$

آخرین عدد دسته هشتم،  $8^2 = 64$  است بنابراین دسته نهم از ۶۵ شروع می‌شود. (۱) (۲) (۳) (۴) (۴۴)

$$\{65, \dots, 81\} \rightarrow b, a \text{ واسطه حسابی بین دو عدد } = \frac{a+b}{2} \rightarrow \text{واسطه حسابی} = \frac{65+81}{2} = \frac{146}{2} = 73$$

تعداد دایره‌ها با یکدیگر تشکیل یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۳ می‌دهند. (۱) (۲) (۳) (۴) (۴۵)

$$a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow a_{13} = 5 + 11(3) = 5 + 33 = 38$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۴۶)

روش اول: در هر دنباله حسابی با جمله اول  $a_1$  و قدرنسبت  $d$ ، جمله  $n$ ام از رابطه  $a_n = a_1 + (n-1)d$  بدست می‌آید و اگر  $a, b, c$  جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند  $ac = b^2$  است.

$$a_3, a_7, a_{16} \rightarrow a_1 + 2d, a_1 + 6d, a_1 + 15d \xrightarrow{\text{دنباله هندسی}} (a_1 + 2d)(a_1 + 15d) = (a_1 + 6d)^2$$

$$\rightarrow a_1^2 + 15a_1d + 2a_1d + 30d^2 = a_1^2 + 36d^2 + 12a_1d$$

$$\rightarrow 6d^2 - 5a_1d = 0 \rightarrow d(6d - 5a_1) = 0 \rightarrow 5a_1 = 6d \rightarrow a_1 = \frac{6}{5}d$$

$$\text{جملات هندسی } q = \frac{a_7}{a_3} = \frac{a_{16}}{a_7} = \frac{36}{16} = \frac{9}{4} \rightarrow \frac{6}{5}d + 2d, \frac{6}{5}d + 6d, \frac{6}{5}d + 15d \rightarrow \frac{16}{5}d, \frac{36}{5}d, \frac{81}{5}d$$

روش دوم: اگر  $a_m, a_n, a_p$  جملات یک دنباله حسابی باشند که با یکدیگر تشکیل دنباله هندسی می‌دهند آن‌گاه  $q = \frac{p-n}{n-m}$  هندسی است.

$$a_3, a_7, a_{16} \rightarrow q = \frac{16-7}{7-3} = \frac{9}{4}$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۴۷)

روش اول:

در هر دنباله حسابی با جمله اول  $a_1$  و قدرنسبت  $d$ ، جمله  $n$ ام از رابطه  $a_n = a_1 + (n-1)d$  بدست می‌آید و اگر  $a, b, c$  سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند آن‌گاه $ac = b^2$  است.

$$a_3, a_5, a_{12} \Rightarrow a_1 + d, a_1 + 4d, a_1 + 11d \xrightarrow{\text{دنباله هندسی}} (a_1 + 4d)^2 = (a_1 + d)(a_1 + 11d)$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 8a_1d + 16d^2 = a_1^2 + 12a_1d + 11d^2 \Rightarrow 4a_1d = 5d^2 \Rightarrow d = \frac{4}{5}a_1$$

$$a_1 + d, a_1 + 4d, a_1 + 11d \xrightarrow{d = \frac{4}{5}a_1} \frac{9}{5}a_1, \frac{21}{5}a_1, \frac{49}{5}a_1$$

$$q = \frac{\frac{21}{5}a_1}{\frac{9}{5}a_1} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$$

روش دوم: اگر  $a_m, a_n, a_p, \dots$  جملات یک دنباله حسابی باشند که با یکدیگر تشکیل دنباله هندسی می‌دهند قدرنسبت دنباله هندسی از رابطه  $q = \frac{p-n}{n-m}$  بدست می‌آید.

$$q = \frac{p-n}{n-m} \Rightarrow q = \frac{12-5}{5-2} = \frac{7}{3}$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۴۸)

$$n = 2 \rightarrow a_2 = 2a_1 - 2 = 2(3) - 2 = 4$$

$$n = 3 \rightarrow a_3 = 2a_2 - 2 = 2(4) - 2 = 6$$

$$n = 4 \rightarrow a_4 = 2a_3 - 2 = 2(6) - 2 = 10$$

$$n = 5 \rightarrow a_5 = 2a_4 - 2 = 2(10) - 2 = 18$$

$$n = 6 \rightarrow a_6 = 2a_5 - 2 = 2(18) - 2 = 34$$

$$n = 7 \rightarrow a_7 = 2a_6 - 2 = 2(34) - 2 = 66$$

$$n = 8 \rightarrow a_8 = 2a_7 - 2 = 2(66) - 2 = 130$$

$$\text{پس: } a_8 - a_7 = 130 - 66 = 64$$

از فاکتورگیری استفاده می‌کنیم. (۱) (۲) (۳) (۴) (۴۹)

$$\frac{3^x(1+3+9+27+81+243)}{3^x(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + 1 + 3 + 9 + 27)} = 52$$

$$3^x(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + 1 + 3 + 9 + 27) = 52$$



$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x \times \frac{364}{\frac{63}{4}} = 52 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{63 \times 52}{364 \times 4}$$

$$\xrightarrow{364=52 \times 7} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{9}{4} \Rightarrow x = 2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۰

$$x = 7 - 2\sqrt{6} \Rightarrow x^2 = (7 - 2\sqrt{6})^2 = 49 + 24 - 28\sqrt{6} = 73 - 28\sqrt{6}$$

$$\sqrt{\frac{x+2}{25} + \frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{x^2 + 2x + 25}{25x}} = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{73 - 28\sqrt{6} + 2(7 - 2\sqrt{6}) + 25}{7 - 2\sqrt{6}}}$$

$$= \frac{1}{5} \sqrt{\frac{73 - 28\sqrt{6} + 14 - 4\sqrt{6} + 25}{7 - 2\sqrt{6}}} = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{112 - 32\sqrt{6}}{7 - 2\sqrt{6}}}$$

$$= \frac{1}{5} \sqrt{\frac{16(7 - 2\sqrt{6})}{7 - 2\sqrt{6}}} = \frac{\sqrt{16}}{5} = \frac{4}{5} = 0,8$$

روش دوم:

$$\sqrt{\frac{x+2}{25} + \frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{9 - 2\sqrt{6}}{25} + \frac{1}{7 - 2\sqrt{6}}} = \sqrt{\frac{9 - 2\sqrt{6}}{25} + \frac{7 + 2\sqrt{6}}{25}} = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{9 - 2\sqrt{6} + 7 + 2\sqrt{6}}{25}} = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} = 0,8$$

می‌دانیم که  $a^x - b^x = (a - b)(a^x + ab + b^x)$  است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۵۱

$$(x - 2)(x^2 - 4x + 4) - 1 = (x - 2)(x - 2)^2 - 1 = (x - 2)^3 - 1$$

$$= ((x - 2) - 1)((x - 2)^2 + (x - 2) + 1) = (x - 3)(x^2 - 4x + 4 + x - 2 + 1) = (x - 3)(x^2 - 3x + 3)$$

حاصل هر یک از پرانتزها را جداگانه محاسبه می‌کنیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵۲

$$\left(\sqrt[3]{5 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3} + (-\sqrt{2})^2\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{5 + \frac{1}{9} + 2}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{\frac{64}{9}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= \left(\frac{\sqrt[3]{2^6}}{\sqrt[3]{3^2}}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2^2}{\sqrt[3]{3^2}}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{\sqrt[3]{2^4}}{2^2}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2^{\frac{4}{3}}}{2^2}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{2^{\frac{8}{9}}}{2^{\frac{4}{3}}} = \frac{2^{\frac{8}{9}}}{2^{\frac{12}{9}}} = \frac{2^{-\frac{4}{9}}}{2^{\frac{4}{9}}} = \frac{1}{2^{\frac{8}{9}}}$$

$$\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^3 = \left(\sqrt{\frac{9}{4}}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$$

$$\text{پس داریم: } = \frac{3}{8} + \frac{27}{8} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4} = 3,75$$

روش اول: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵۳

هر عبارت را جداگانه ساده می‌کنیم.

$$\frac{4x^2 + 4x + 1}{2x^2 + x} = \frac{(2x + 1)^2}{x(2x + 1)} = \frac{2x + 1}{x}$$

$$x - 2 - \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{x(x - 2) - (x^2 + 1)}{x} = \frac{x^2 - 2x - x^2 - 1}{x} = \frac{-2x - 1}{x} = \frac{-(2x + 1)}{x}$$

$$\text{پس: } \frac{4x^2 + 4x + 1}{2x^2 + x} \div \left(x - 2 - \frac{x^2 + 1}{x}\right) = \frac{2x + 1}{x} \div \left(\frac{-(2x + 1)}{x}\right) = \frac{2x + 1}{x} \times \frac{x}{-(2x + 1)} = -1$$

روش دوم: کافی است یک عدد دلخواه مثلاً  $x = 2$  را در عبارت قرار دهیم.

$$x = 2 \Rightarrow \frac{16 + 8 + 1}{8 + 2} \div \left(2 - 2 - \frac{4 + 1}{2}\right) = \frac{25}{10} \div \left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{10} \times \left(-\frac{2}{5}\right) = -1$$

بنابراین گزینه‌ی چهارم صحیح است.



۱ ۲ ۳ ۴ ۵۴

$$\underbrace{x^2 - 3x^2}_{\text{فاکتور از } x^2} + \underbrace{8x - 24}_{\text{فاکتور از 8}} = x^2(x-3) + 8(x-3) \xrightarrow{\text{فاکتور از } (x-3)} (x-3)(x^2+8) = (x-3)(x+2)(x^2-2x+4)$$

اتحاد چاق و لاغر

پس باتوجه به گزینه‌ها تنها، عامل  $(x+2)$  وجود دارد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۵

باتوجه به صورت مسئله  $a+b+c=11$  و  $ab+ac+bc=3$  است.

طبق اتحاد مربع سه جمله‌ای داریم:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \Rightarrow (a+b+c)^2 = \underbrace{a^2 + b^2 + c^2}_x + 2(ab+ac+bc)$$

$$\Rightarrow (11)^2 = x + 2(3) \Rightarrow 121 = x + 6 \Rightarrow 121 - 6 = x \Rightarrow x = 115 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 115$$

ابتدا حاصل تک تک عبارتها را به دست می‌آوریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵۶

$$\sqrt[3]{-\frac{3}{8}} = \sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = \sqrt[3]{-\frac{3^3}{2^3}} = \sqrt[3]{\left(-\frac{3}{2}\right)^3} = -\frac{3}{2}$$

$$\sqrt{(1+\sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2}} = \sqrt{1+2+2\sqrt{2}-4\sqrt{2}} = \sqrt{1+2-2\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = \sqrt{1-\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-0.25} = 4^{0.25} = 4^{\frac{1}{4}} = (2^2)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \text{حاصل نهایی} = -\frac{3}{2} + (\sqrt{2}-1) - \sqrt{2} = -\frac{3}{2} - 1 = -\frac{5}{2} = -2.5$$

توجه کنید که:  $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$ ,  $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ 

ابتدا هر دو عبارت را ساده می‌کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۵۷

$$\frac{\sqrt{27}-1}{4+\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}-1}{4+\sqrt{3}} \times \frac{4-\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}-9-4+\sqrt{3}}{16-3} = \frac{13\sqrt{3}-13}{13} = \frac{13(\sqrt{3}-1)}{13} = \sqrt{3}-1$$

$$(2-\sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2+\sqrt{3}$$

$$\text{پس: } \frac{\sqrt{27}-1}{4+\sqrt{3}} + (2-\sqrt{3})^{-1} = \sqrt{3}-1 + 2+\sqrt{3} = 1+2\sqrt{3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۸

$$\left. \begin{aligned} \sqrt[3]{24} &= \sqrt[3]{8 \times 3} = \sqrt[3]{2^3 \times 3} = 2\sqrt[3]{3} \\ \sqrt[3]{9} &= \sqrt[3]{3^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt[3]{24} \times \sqrt[3]{9} = 2\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3^2} = 2\sqrt[3]{3^3} = 2 \times 3 = 6$$

مخرج کسر را با استفاده از اتحاد مزدوج گویا می‌کنیم:

$$\frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} \times \frac{2-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}} = \frac{(2-\sqrt{5})^2}{2^2-5} = \frac{4+5-4\sqrt{5}}{-1} = 4\sqrt{5}-9$$

$$\sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = \sqrt{4^2 \times 5} = 4\sqrt{5}$$

$$\text{پس داریم: } = 6 + 4\sqrt{5} - 9 - 4\sqrt{5} = 6 - 9 = -3$$

روش اول: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵۹

ابتدا هر یک از پرانتزها را ساده می‌کنیم:

$$1 - \frac{6}{x+2} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{x+2-6}{x+2} = \frac{x-4}{x+2}$$

$$\frac{5x-2}{x-4} + x \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{5x-2+x(x-4)}{x-4} = \frac{5x-2+x^2-4x}{x-4} = \frac{x^2+x-2}{x-4}$$

$$\frac{(x+2)(x-1)}{x-4} \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}}$$



حال دو عبارت ساده شده را در هم ضرب می‌کنیم:

$$\frac{x-4}{x+2} \times \frac{(x+2)(x-1)}{x-4} = \frac{x-1}{1} = x-1$$

روش دوم:

یک عدد دلخواه، مثلاً  $x=1$  را در عبارت جایگزین می‌کنیم.

$$x=1 \rightarrow (1-\frac{6}{3})(\frac{3}{-3}+1) = (1-2)(-1+1) = (-1)(0) = 0$$

فقط گزینه دوم است که اگر به جای  $x$  آن یک قرار دهید حاصل برابر صفر می‌شود.ابتدا هر یک از کسرها را ساده می‌کنیم و مخرج آن‌ها را به صورت عددی گویا می‌نویسیم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۶۰**

$$\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \times \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{(1-\sqrt{2})^2}{1-2} = -(1-\sqrt{2})^2 = -(1+2-2\sqrt{2}) = -3+2\sqrt{2}$$

$$\frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{12}} = \frac{4\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \text{حاصل عبارت} = -3 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = -3$$

می‌دانیم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۶۱**  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 

$$5x - \frac{3}{2x} \xrightarrow{\text{دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم}} (5x - \frac{3}{2x})^2 = (4)^2 \rightarrow (5x)^2 - 2(5x)(\frac{3}{2x}) + (\frac{3}{2x})^2 = 16$$

$$\rightarrow 25x^2 - 15 + \frac{9}{4x^2} = 16 \rightarrow 25x^2 + \frac{9}{4x^2} = 16 + 15 = 31$$

ابتدا تک تک رادیکال‌ها را ساده می‌کنیم. **۱ ۲ ۳ ۴ ۶۲**

$$\sqrt{50} = \sqrt{5^2 \times 2} = 5\sqrt{2}, \quad \sqrt{75} = \sqrt{3 \times 5^2} = 5\sqrt{3}$$

$$\sqrt{48} = \sqrt{2^4 \times 3} = 2^2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}, \quad \sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2}$$

$$A = 2\sqrt{50} + 4\sqrt{75} - 5\sqrt{48} - 3\sqrt{8} \rightarrow A = 2(5\sqrt{2}) + 4(5\sqrt{3}) - 5(4\sqrt{3}) - 3(2\sqrt{2})$$

$$\rightarrow A = 10\sqrt{2} + 20\sqrt{3} - 20\sqrt{3} - 6\sqrt{2} \rightarrow A = 4\sqrt{2} \rightarrow A^2 = (4\sqrt{2})^2 = 16 \times 2 = 32$$

**۱ ۲ ۳ ۴ ۶۳**می‌دانیم:  $a^2 - b^2 = (a-b)(a^2 + b^2 + ab)$ 

روش اول:

$$\begin{aligned} (x^2 - 6x^2 + 12x - 8) \left( \frac{x}{(x-2)^2} - \frac{1}{x-2} \right) &= ((x^2 - 8) - 6x(x-2)) \frac{x - (x-2)}{(x-2)^2} \\ &= ((x-2)(x^2 + 2x + 4) - 6x(x-2)) \frac{x-x+2}{(x-2)^2} = \underbrace{(x-2)}_{\text{فاکتور}} (x^2 + 2x + 4 - 6x) \frac{2}{(x-2)^2} \\ &= \frac{2(x-2)(x^2 - 4x + 4)}{(x-2)^2} = \frac{2(x-2)(x-2)^2}{(x-2)^2} = 2(x-2) = 2x - 4 \end{aligned}$$

روش دوم: کافی است یک عدد دلخواه مثلاً  $x=1$  را در عبارت جایگزین کنیم.

$$x=1 \rightarrow (1-6+12-8) \left( \frac{1}{1-4+4} - \frac{1}{1-2} \right) = (-1) \left( \frac{1}{1} - 1 \right) = -2$$

تنها گزینه‌ی اول است که اگر به جای  $x$  آن عدد یک قرار دهید حاصل برابر ۲- می‌شود.**۱ ۲ ۳ ۴ ۶۴**

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^6 &= \frac{(\sqrt{2})^6}{2^6} = \frac{(\sqrt{2^2})^3}{2^6} = \frac{2^3}{2^6} = \frac{1}{2^3} \\ \frac{1}{4} &= \frac{9}{4} = \frac{3^2}{2^2} \\ (0.75)^{-3} &= \left( \frac{3}{4} \right)^{-3} = \left( \frac{4}{3} \right)^3 = \frac{(2^2)^3}{3^3} = \frac{2^6}{3^3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2^3} \times \frac{3^2}{2^2} \times \frac{2^6}{3^3} = \frac{3^2 \times 2^6}{2^5 \times 3^3} = \frac{2^{6-5}}{3^{3-2}} = \frac{2}{3}$$

می‌دانیم  $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$  است. **۱ ۲ ۳ ۴ ۶۵**



$$A = \sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{16}}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{2^2 \times \sqrt[3]{2^4}} \times 2^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{2^2 \times 2^{\frac{4}{3}}} \times 2^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{2^{\frac{10}{3}} \times 2^{\frac{4}{5}}} \times 2^{\frac{4}{5}}$$

$$= \left(2^{\frac{10}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} \times 2^{\frac{4}{5}} = 2^{\frac{10}{15}} \times 2^{\frac{4}{5}} = 2^2$$

$$\text{پس: } (2A)^{-\frac{1}{5}} = (2 \times 2^2)^{-\frac{1}{5}} = (2^3)^{-\frac{1}{5}} = 2^{-1} = \frac{1}{2} = 0.5$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۶

$$\sqrt{\frac{x-1}{16}} + \frac{1}{2x} = \sqrt{\frac{x(x-1)+8}{16x}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{x^2-x+8}{x}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{x^2}{x} - \frac{x}{x} + \frac{8}{x}} = \frac{1}{4}\sqrt{x-1+\frac{8}{x}}$$

از طرفی داریم:

$$x = 5 + \sqrt{17} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{5 + \sqrt{17}} \times \frac{5 - \sqrt{17}}{5 - \sqrt{17}} = \frac{5 - \sqrt{17}}{25 - 17} = \frac{5 - \sqrt{17}}{8}$$

$$\Rightarrow \text{حاصل عبارت} = \frac{1}{4}\sqrt{\left(5 + \sqrt{17}\right) - 1 + 8\left(\frac{5 - \sqrt{17}}{8}\right)} = \frac{1}{4}\sqrt{5 + \sqrt{17} - 1 + 5 - \sqrt{17}} = \frac{\sqrt{9}}{4} = \frac{3}{4} = 0.75$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۷

ابتدا هر دو عبارت را ساده می‌کنیم.

$$\frac{\sqrt{8} + \sqrt{27}}{5 - \sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{5 - \sqrt{6}} \times \frac{5 + \sqrt{6}}{5 + \sqrt{6}} = \frac{10\sqrt{2} + 2\sqrt{12} + 15\sqrt{3} + 3\sqrt{18}}{25 - 6} = \frac{10\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 15\sqrt{3} + 9\sqrt{2}}{19} = \frac{19\sqrt{2} + 19\sqrt{3}}{19}$$

$$= \frac{19(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{19} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$$2(\sqrt[4]{9} - 1)^{-1} = \frac{2}{\sqrt[4]{3^2} - 1} = \frac{2}{\sqrt{3} - 1} \times \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{3 - 1} = \sqrt{3} + 1$$

$$\text{پس: } \frac{\sqrt{8} + \sqrt{27}}{5 - \sqrt{6}} - 2(\sqrt[4]{9} - 1)^{-1} = \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} - 1 = \sqrt{2} - 1$$

روش دوم:

$$\frac{\sqrt{8} + \sqrt{27}}{5 - \sqrt{6}} - 2(\sqrt[4]{9} - 1)^{-1} = \frac{\sqrt{8} + \sqrt{27}}{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2} \times \sqrt{3})} \times \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{8} + \sqrt{27})(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{\sqrt{8} + \sqrt{27}} - \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{2}$$

$$= \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} - 1 = \sqrt{2} - 1$$

روش اول: ۱ ۲ ۳ ۴ ۶۸

ابتدا در هر یک از پرانتزها مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\left(x + \frac{2}{x-3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{x-2}\right) = \left(\frac{x(x-3)+2}{x-3}\right) \times \left(\frac{x-2-1}{x-2}\right)$$

اتحاد یک جمله‌ی مشترک

$$= \frac{x^2 - 3x + 2}{x-3} \times \frac{x-3}{x-2} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)} \times \frac{x-3}{x-2} = x-1$$

روش دوم: یک عدد دلخواه مثلا  $x = 1$  را در عبارت جایگزین می‌کنیم.

$$x = 1 \rightarrow \left(1 + \frac{2}{-2}\right)\left(1 - \frac{1}{-1}\right) = (1-1)(1+1) = 0$$

تنها در گزینه‌ی اول است که اگر به جای  $x$  عدد یک را قرار دهیم حاصل صفر می‌شود.

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۹

ابتدا در هر پرانتز، مخرج مشترک می‌گیریم.

روش اول:





### معین کر می

$$(2x + 1 - \frac{3}{x}) \div (2 + \frac{1}{x+1}) = (\frac{x(2x+1) - 3}{x}) \div (\frac{2(x+1) + 1}{x+1})$$

$$= \frac{2x^2 + x - 3}{x} \div \frac{2x + 3}{x+1} = \frac{2x^2 + x - 3}{x} \times \frac{x+1}{2x+3}$$

$$\Rightarrow A = 2x^2 + x - 3 \xrightarrow{\times 2} 2A = 4x^2 + (2x) - 6 \Rightarrow 2A = (2x+3)(2x-2)$$

$$\Rightarrow 2A = (2x+3)2(x-1) \Rightarrow A = (2x+3)(x-1)$$

$$= \frac{(x-1)\cancel{(2x+3)}}{x} \times \frac{x+1}{\cancel{2x+3}} = \frac{(x-1)(x+1)}{x} = \frac{x^2 - 1}{x} \stackrel{\text{تفکیک}}{=} \frac{x^2}{x} - \frac{1}{x} = x - \frac{1}{x}$$

روش دوم: کافی است یک عدد دلخواه مثلاً  $x = 2$  را در عبارت جایگزین کنیم.

$$x = 2 \rightarrow (4 + 1 - \frac{3}{2}) \div (2 + \frac{1}{3}) = \frac{5}{2} \div \frac{7}{3} = \frac{5}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{14}$$

فقط گزینه‌ی چهارم می‌باشد که اگر  $x = 2$  را جایگزین کنیم حاصل برابر  $\frac{15}{14}$  می‌شود.

1 2 3 4 70

روش اول:

حاصل هر پراتنز را جداگانه حساب می‌کنیم.

$$\text{پراتنز اول: } 1 + \frac{3x}{x^2 - 4} = \frac{x^2 - 4 + 3x}{x^2 - 4} = \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 4} = \frac{(x+4)(x-1)}{(x-2)(x+2)}$$

$$\text{پراتنز دوم: } 1 - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-1}{x-1} = \frac{x-2}{x-1}$$

$$\text{پس داریم: } \frac{(x+4)(x-1)}{(x-2)(x+2)} \times \frac{x-2}{x-1} = \frac{x+4}{x+2}$$

روش دوم:

یک عدد دلخواه مثلاً  $x = 3$  را در عبارت جایگزین می‌کنیم بنابراین داریم:

$$x = 3 \rightarrow (1 + \frac{9}{5}) \times (1 - \frac{1}{2}) = (\frac{14}{5}) \times (\frac{1}{2}) = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$$

فقط گزینه‌ی اول است که اگر به جای  $x$  آن 3 قرار دهید حاصلش برابر  $\frac{7}{5}$  می‌شود.

روش اول: 1 2 3 4 71

$$\frac{3x(2x^2 - 1)}{2x + 2} - \frac{x - 2}{2x + 2} + 2x = \frac{3x(2x^2 - 1) - (x - 2) + 2x(2x + 2)}{2x + 2}$$

$$= \frac{6x^3 - 3x - x + 2 + 4x^2 + 4x}{2x + 2} = \frac{6x^3 + 4x^2 + 2}{2x + 2} = \frac{2(3x^3 + 2x^2 + 1)}{2(x + 1)} = \frac{3x^3 + 2x^2 + 1}{x + 1}$$

حال با تقسیم صورت بر مخرج داریم:

$$\begin{array}{r} 3x^3 + 2x^2 + 1 \quad | \quad x + 1 \\ \underline{-(3x^3 + 3x^2)} \phantom{+ 1} \\ -x^2 + 1 \phantom{+ 1} \\ \underline{-(-x^2 - x)} \phantom{+ 1} \\ x + 1 \\ \underline{-(x + 1)} \\ 0 \end{array}$$

$$\frac{3x^3}{x} = 3x^2, \quad 3x^2(x+1) = 3x^3 + 3x^2$$

$$\frac{-x^2}{x} = -x, \quad -x(x+1) = -x^2 - x$$

$$\frac{x}{x} = 1, \quad 1(x+1) = x + 1$$

$$\Rightarrow \text{حاصل عبارت} = 3x^2 - x + 1$$

روش دوم: عدد دلخواهی مانند  $x = 2$  را در عبارت جایگزین می‌کنیم.

$$x = 2 \rightarrow \frac{6(8-1)}{4+2} - \frac{0}{6} + 4 = \frac{42}{6} - 0 + 4 = 7 + 4 = 11$$

فقط گزینه‌ی اول است که اگر  $x = 2$  را در آن قرار دهیم حاصل برابر 11 می‌شود.

1 2 3 4 72

$$(x^2 - 12)^2 - 16x^2 = (x^2 - 12)^2 - (4x)^2$$



ابتدا با اتحاد مزدوج عبارت را تجزیه می‌کنیم:

$$= (x^2 - 12 - 4x)(x^2 - 12 + 4x) = (x^2 - 4x - 12)(x^2 + 4x - 12)$$

حل هر یک از پرانتزها با اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌شوند.

$$= (x - 6)(x + 2)(x + 6)(x - 2)$$

بنابراین گزینه ۳ بین عوامل تجزیه وجود ندارد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۳

$$a(a - 3)(a - 4) - 12a + 36$$

فاکتور از ۱۲ -

$$= \underbrace{a(a - 3)(a - 4) - 12(a - 3)}_{\text{فاکتور از } a-3} = (a - 3)[a(a - 4) - 12] = (a - 3)\underbrace{[a^2 - 4a - 12]}_{\substack{\text{تجزیه از طریق} \\ \text{اتحاد جمله مشترک}}}$$

برای عبارت  $a^2 - 4a - 12$  که آن را از طریق اتحاد جمله‌ی مشترک تجزیه می‌کنیم باید دو عدد پیدا کنیم که ضرب آن‌ها  $-12$  و مجموع آن‌ها  $-4$  باشد که این دو عدد،  $-6$  و  $2$  می‌باشند پس داریم:

$$(a - 3)(a - 6)(a + 2) \rightarrow a - 2 \text{ جزو عوامل تجزیه نمی‌باشد.}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۴ حاصل هر یک از عبارات را جداگانه به دست می‌آوریم. مخرج کسر اول را با استفاده از اتحاد مزدوج گویا می‌کنیم:

$$\frac{6}{2 - \sqrt{7}} \times \frac{2 + \sqrt{7}}{2 + \sqrt{7}} = \frac{6(2 + \sqrt{7})}{(2)^2 - (\sqrt{7})^2} = \frac{6(2 + \sqrt{7})}{4 - 7} = \frac{6(2 + \sqrt{7})}{-3} = -2(2 + \sqrt{7}) = -4 - 2\sqrt{7}$$

حاصل عبارت دوم را با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای به دست می‌آوریم:

$$(1 + \sqrt{7})^2 = (1)^2 + 2(1)(\sqrt{7}) + (\sqrt{7})^2 = 1 + 2\sqrt{7} + 7 = 8 + 2\sqrt{7}$$

حال، این دو عبارت را با هم جمع می‌کنیم، در نتیجه داریم:

$$\text{عبارت نهایی حاصل} = -4 - 2\sqrt{7} + 8 + 2\sqrt{7} = 4$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۵ هر عبارت را جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$\sqrt[3]{\frac{3}{8}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \sqrt[3]{\frac{3^3}{2^3}} = \frac{3}{2}, \quad (18)^{-2} = (2 \times 3^2)^{-2} = 2^{-2} \times 3^{-4} = \frac{1}{2^2} \times \frac{1}{3^4}$$

$$(1,5)^4 = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3^4}{2^4}, \quad \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = 4^3 = (2^2)^3 = 2^6$$

$$\text{پس داریم: } \frac{3}{2} \times \frac{1}{2^2} \times \frac{1}{3^4} \times \frac{3^4}{2^4} \times 2^6 = \frac{3^5 \times 2^6}{2^7 \times 3^4} = \frac{3}{2} = 1,5$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۶ هر کدام از سه عبارت را جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$\text{عبارت اول: } \sqrt[3]{25} \times \sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{5^2} \times \sqrt[3]{2^3 \times 5} = \sqrt[3]{2^3 \times 5^3} = 2 \times 5 = 10$$

مخرج کسر را گویا می‌کنیم:

$$\text{عبارت دوم: } \frac{\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} \times \frac{3 - 2\sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(3 - 2\sqrt{2})}{(3)^2 - (2\sqrt{2})^2} = \frac{3\sqrt{2} - 4}{9 - 8} = \frac{3\sqrt{2} - 4}{1} = 3\sqrt{2} - 4$$

$$\text{عبارت سوم: } \frac{1}{2}\sqrt{12} = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 \times 3} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$$\text{عبارت نهایی حاصل} = 10 + 3\sqrt{2} - 4 - \sqrt{3} = 6$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۷ تک تک رادیکال‌ها را ساده می‌کنیم و کسر اول را نیز گویا می‌کنیم.

$$\frac{2}{2 + \sqrt{5}} \times \frac{2 - \sqrt{5}}{2 - \sqrt{5}} = \frac{2(2 - \sqrt{5})}{4 - 5} = \frac{4 - 2\sqrt{5}}{-1} = 2\sqrt{5} - 4$$

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$$

$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$$

$$\text{پس: } \frac{2}{2 + \sqrt{5}} - \sqrt{20} + \sqrt{48} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{5} - 4 - 2\sqrt{5} + 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= -4 + \frac{4 \times 3}{3} = -4 + 4 = 0$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۷۸

$$4x^3 - 6x^2 + 2x = \frac{\text{فاکتور از}}{2x} 2x(2x^2 - 3x + 1)$$

عبارت داخل پرانتز را از طریق روش  $A$  تجزیه می‌کنیم:

$$A = 2x^2 - 3x + 1 \xrightarrow{\times 2} 2A = 4x^2 - 3(2x) + 2 \Rightarrow 2A = (2x - 1)(2x - 2) \\ \Rightarrow 2A = (2x - 1)2(x - 1) \rightarrow A = (2x - 1)(x - 1)$$

پس عبارت تجزیه شده‌ی نهایی به صورت  $2x(2x - 1)(x - 1)$  است، که مشاهده می‌شود عامل  $2x - 1$  در تجزیه‌ی عبارت وجود دارد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۹

$$\left(1 - \frac{2}{x^2 + x^2}\right)\left(1 + \frac{2}{x^2 - 1}\right) - \frac{2}{x^2} = \left(\frac{x^2 + x^2 - 2}{x^2(x^2 + 1)}\right)\left(\frac{x^2 - 1 + 2}{x^2 - 1}\right) - \frac{2}{x^2} \\ = \left(\frac{(x^2 + 2)(x^2 - 1)}{x^2(x^2 + 1)}\right) \times \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 + 2 - 2}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1$$

ابتدا تک تک رادیکال‌ها را ساده می‌کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۸۰

$$\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \times 2} = 3\sqrt{2}, \quad \sqrt{27} = \sqrt{3^2 \times 3} = 3\sqrt{3}$$

$$\sqrt{108} = \sqrt{3^2 \times 3 \times 2^2} = 3 \times 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}, \quad \sqrt{200} = \sqrt{2 \times 10^2} = 10\sqrt{2}$$

$$A = \frac{2}{3}\sqrt{18} + 2\sqrt{27} - \sqrt{108} + 3\sqrt{200} \rightarrow A = \frac{2}{3}(3\sqrt{2}) + 2(3\sqrt{3}) - 6\sqrt{3} + \frac{3}{10}(10\sqrt{2})$$

$$\rightarrow A = 2\sqrt{2} + 6\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 3\sqrt{2} \rightarrow A = 5\sqrt{2} \rightarrow A^2 = (5\sqrt{2})^2 = 25 \times 2 = 50$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{می‌دانیم: } ۱ ۲ ۳ ۴ ۸۱$$

$$3x + \frac{1}{2x} = 5 \xrightarrow{\text{توان } 2} (3x + \frac{1}{2x})^2 = 5^2 \rightarrow (3x)^2 + 2(3x)\left(\frac{1}{2x}\right) + \left(\frac{1}{2x}\right)^2 = 25$$

$$\rightarrow 9x^2 + 3 + \frac{1}{4x^2} = 25 \rightarrow 9x^2 + \frac{1}{4x^2} = 25 - 3 \rightarrow 9x^2 + \frac{1}{4x^2} = 22$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۲

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$\left(\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^2 \sqrt{2}\sqrt{2} = A > 0$$

$$\Rightarrow A^2 = (2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{4-3}) \times \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 = 6 \times 2 = 12 \Rightarrow A = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

تک تک جملات را ساده کرده و حاصل عبارت را بدست می‌آوریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۸۳

$$\frac{2}{3 - \sqrt{7}} = \frac{2}{3 - \sqrt{7}} \times \frac{3 + \sqrt{7}}{3 + \sqrt{7}} = \frac{2(3 + \sqrt{7})}{9 - 7} = \frac{2(3 + \sqrt{7})}{2} = 3 + \sqrt{7}$$

$$\sqrt{(2 - \sqrt{7})^2} = \underbrace{|2 - \sqrt{7}|}_{\text{منفی}} = -(2 - \sqrt{7}) = -2 + \sqrt{7}$$

$$\sqrt{28} = \sqrt{4 \times 7} = 2\sqrt{7}, \quad \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{4 \times 2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = 2$$

$$\text{پس: } \frac{2}{3 - \sqrt{7}} + \sqrt{(2 - \sqrt{7})^2} - \sqrt{28} + \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = 3 + \sqrt{7} - 2 + \sqrt{7} - 2\sqrt{7} + 2 = 3$$

توجه کنید که  $\sqrt{u^2} = |u|$  است.

هر دو جمله‌ای که هر دو مربع کامل (مجذور کامل) باشند و بین آن‌ها علامت منفی وجود داشته باشد، را می‌توان از طریق اتحاد مزدوج؛ یعنی ۱ ۲ ۳ ۴ ۸۴

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \quad \text{تجزیه نمود.}$$

$$(x^2 - 6x - 4)^2 - 144 = (x^2 - 6x - 4)^2 - (12)^2 = (x^2 - 6x - 4 + 12)(x^2 - 6x - 4 - 12) \\ = (x^2 - 6x + 8)(x^2 - 6x - 16)$$

$$= (x - 4)(x - 2)(x + 2)(x - 8)$$

حال هر یک از عبارات را از طریق اتحاد جمله مشترک به دو عامل تجزیه می‌کنیم:

مشاهده می‌کنیم عامل  $x + 4$  بین عوامل تجزیه وجود ندارد.



ابتدا کسر  $\frac{2}{2 + \sqrt{6}}$  را گویا می‌کنیم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۸۵**

$$\frac{2}{2 + \sqrt{6}} \times \frac{2 - \sqrt{6}}{2 - \sqrt{6}} = \frac{2(2 - \sqrt{6})}{(2)^2 - (\sqrt{6})^2} = \frac{2(2 - \sqrt{6})}{-2} = \frac{2 - \sqrt{6}}{-1} = -2 + \sqrt{6}$$

$$(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = (2 \times 3) + 2\sqrt{6} - 3\sqrt{6} - (3 \times 2) = 6 - \sqrt{6} - 6 = -\sqrt{6}$$

پس:  $\frac{2}{2 + \sqrt{6}} + (2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = (-2 + \sqrt{6}) - \sqrt{6} = -2$

**۱ ۲ ۳ ۴ ۸۶**

$$(x + 3y^2)^2 - (x - 3y^2)^2$$

ابتدا با اتحاد مربع دو جمله‌ای دو پرانتز را ساده می‌کنیم:

$$(x^2 + 6xy^2 + 9y^4) - (x^2 - 6xy^2 + 9y^4) = 6xy^2 + 6xy^2 = 12xy^2$$

با توجه به متن سؤال  $\frac{4}{3}xy^2$  است، بنابراین داریم:

$$12xy^2 = 12\left(\frac{4}{3}\right) = 16$$

روش اول: مخرج کسر سوم یعنی  $x^2 - 1$  را طبق اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۸۷**

$$\frac{x}{x-1} + \frac{3}{x+1} - \frac{4x-2}{x^2-1} = \frac{x}{x-1} + \frac{3}{x+1} - \frac{4x-2}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{x(x+1) + 3(x-1) - (4x-2)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2 + x + 3x - 3 - 4x + 2}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{x^2 - 1}{(x+1)(x-1)} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = 1$$

بین این سه مخرج، مخرج مشترک (ک.م.م) می‌گیریم:

$$x = 2 \rightarrow \frac{2}{2-1} + \frac{3}{2+1} - \frac{6}{3} = 2 + 1 - 2 = 1$$

روش دوم: یک عدد دلخواه مثلاً  $x = 2$  را در عبارت جایگزین می‌کنیم.

روش اول: **۱ ۲ ۳ ۴ ۸۸**

$$\frac{x^3 + 4}{x + 4} + \frac{3x(x-1)}{x + 4} = \frac{x^3 + 4 + 3x^2 - 3x}{x + 4} = \frac{x^3 + 3x^2 - 3x + 4}{x + 4}$$

حال کافی است صورت را بر مخرج تقسیم کنیم:

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 - 3x + 4 \quad \left| \begin{array}{l} x + 4 \\ x^2 - x + 1 \end{array} \right. \\ \underline{-(x^3 + 4x^2)} \\ -x^2 - 3x + 4 \\ \underline{-(-x^2 - 4x)} \\ x + 4 \\ \underline{-(x + 4)} \\ 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$  حاصل عبارت  $= x^2 - x + 1$

$$\frac{x^3}{x} = x^2, \quad x^2(x + 4) = x^3 + 4x^2$$

$$\frac{-x^2}{x} = -x, \quad -x(x + 4) = -x^2 - 4x$$

$$\frac{x}{x} = 1, \quad 1(x + 4) = x + 4$$

روش دوم: یک عدد دلخواه مثلاً  $x = 2$  را در عبارت جایگزین می‌کنیم.

$$\frac{3x(x-1)}{x+4} + \frac{x^3+4}{x+4} \xrightarrow{x=2} \frac{6 \times 1}{2+4} + \frac{8+4}{2+4} = \frac{6}{6} + \frac{12}{6} = 1 + 2 = 3$$

فقط گزینه‌ی اول است که اگر در آن  $x = 2$  را قرار دهیم حاصل ۳ می‌شود.

برای پاسخ به سؤال ابتدا صورت عبارت خواسته شده را کمی ساده می‌کنیم در این سؤال اتحاد مربع دو جمله‌ای و مزدوج مورد استفاده قرار می‌گیرند. **۱ ۲ ۳ ۴ ۸۹**

$$(a^2 + b^2 - 2ab)^2 (a^2 + b^2 + 2ab)^2 \stackrel{\text{مربع دو جمله‌ای}}{=} ((a-b)^2)^2 ((a+b)^2)^2 = (a-b)^4 (a+b)^4 = ((a-b)(a+b))^4 = (a^2 - b^2)^4$$

و اما  $a^2 = \sqrt{\sqrt{6} - 2}$  و  $b^2 = \sqrt{\sqrt{6} + 2}$  می‌شوند پس داریم:

$$((\sqrt{\sqrt{6} - 2} - \sqrt{\sqrt{6} + 2})^2)^2 = (\sqrt{6} - 2 + \sqrt{6} + 2 - 2\sqrt{6 - 2})^2 = (2\sqrt{6} - 2\sqrt{2})^2 = 24 + 8 - 8\sqrt{12} = 32 - 16\sqrt{3} = 16(2 - \sqrt{3})$$

ابتدا حاصل تک تک عبارت‌ها را به دست آورده، سپس آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۹۰**



$$\frac{7-3\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}} \times \frac{3+\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}} = \frac{(7-3\sqrt{7})(3+\sqrt{7})}{3^2-(\sqrt{7})^2}$$

$$= \frac{21+7\sqrt{7}-9\sqrt{7}-3(\sqrt{7})^2}{9-7} = \frac{21-2\sqrt{7}-21}{2} = \frac{-2\sqrt{7}}{2} = -\sqrt{7}$$

از طرفی  $\sqrt{a^2} = |a|$  و در نتیجه داریم:

$$\sqrt{(2-\sqrt{7})^2} = |2-\sqrt{7}| \stackrel{\sqrt{7}=2.6 \Rightarrow 2-\sqrt{7} < 0}{=} -(2-\sqrt{7}) = \sqrt{7}-2$$

بنابراین حاصل نهایی عبارت برابر است با:

$$\frac{7-3\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}} + \sqrt{(2-\sqrt{7})^2} = -\sqrt{7} + \sqrt{7}-2 = -2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۹۱

$$\frac{4x^2 - 12x + 9}{4x - 6} = \frac{(2x-3)^2}{2(2x-3)} = \frac{2x-3}{2}$$

$$2 - \frac{4x-3}{x} = \frac{2x-4x+3}{x} = \frac{-2x+3}{x} = \frac{-(2x-3)}{x}$$

$$\text{پس: } \frac{4x^2 - 12x + 9}{4x - 6} \div \left(2 - \frac{4x-3}{x}\right) = \frac{2x-3}{2} \div \frac{-(2x-3)}{x} = \frac{2x-3}{2} \times \frac{-x}{2x-3} = \frac{-x}{2}$$

روش دوم: یک عدد دلخواه مثلاً  $x = 2$  را در عبارت قرار می‌دهیم:

$$x = 2 \Rightarrow \frac{16 - 24 + 9}{8 - 6} \div \left(2 - \frac{8-3}{2}\right) = \frac{1}{2} \div \left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times (-2) = -1$$

تنها گزینه‌ای که به ازای  $x = 2$  برابر  $-1$  می‌شود گزینه‌ی اول است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۹۲

روش اول:

ابتدا هریک از عبارات را جداگانه ساده می‌کنیم.

$$\frac{x}{1} - \frac{x+6}{x-4} \stackrel{\text{مخرج مشترک}}{=} \frac{x(x-4) - (x+6)}{x-4} = \frac{x^2 - 4x - x - 6}{x-4} = \frac{x^2 - 5x - 6}{x-4}$$

$$\frac{x^2+9}{x+1} - 5 \stackrel{\text{مخرج مشترک}}{=} \frac{x^2+9-5(x+1)}{x+1} = \frac{x^2+9-5x-5}{x+1} = \frac{x^2-5x+4}{x+1}$$

حالا عبارات ساده شده را جایگزین می‌کنیم:

$$\Rightarrow \left(x - \frac{x+6}{x-4}\right) \left(\frac{x^2+9}{x+1} - 5\right) = \frac{(x+1)(x-6)}{x-4} \times \frac{(x-1)(x-4)}{x+1} = (x-6)(x-1) = x^2 - 7x + 6$$

روش دوم:

یک عدد دلخواه مثلاً  $x = 2$  را در عبارت جایگزین می‌کنیم.

$$x = 2 \rightarrow \left(2 - \frac{8}{-2}\right) \left(\frac{13}{3} - 5\right) = (2+4) \left(\frac{13-15}{3}\right) = (6) \left(\frac{-2}{3}\right) = -4$$

فقط گزینه‌ی چهارم است که اگر به جای  $x$  آن عدد ۲ قرار دهید حاصل برابر  $-4$  می‌شود.

۱ ۲ ۳ ۴ ۹۳

$$\text{می‌دانیم: } 12 = 3 \times 4 = 3 \times 2^2, \quad 54 = 27 \times 2 = 3^3 \times 2$$

$$\sqrt[3]{2^2 \times 3} \times \sqrt[4]{3^2 \times 2} \times \sqrt[5]{2^5 \times 3} = \sqrt[20]{(2^2 \times 3)^4 \times (3^2 \times 2)^5 \times (2^5 \times 3)^2}$$

$$= \sqrt[20]{2^8 \times 3^4 \times 3^{10} \times 2^5 \times 2^{10} \times 3^2} = \sqrt[20]{2^{23} \times 3^{16}} = 6$$

در هر پرانتز مخرج مشترک می‌گیریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۹۴

روش اول:

$$\left(2 + \frac{x^2}{x-4}\right) + \left(1 + \frac{8}{x-4}\right) = \frac{2(x-4) + x^2}{x-4} \div \frac{x-4+8}{x-4} = \frac{x^2+2x-8}{x-4} \times \frac{x-4}{x+4}$$

$$= \frac{(x+4)(x-2)}{x-4} \times \frac{x-4}{x+4} = x-2$$

روش دوم: یک عدد دلخواه مثلاً  $x = 1$  را در عبارت جایگزین می‌کنیم.

$$x = 1 \rightarrow \left(2 - \frac{1}{3}\right) \div \left(1 - \frac{8}{3}\right) = \frac{5}{3} \div \left(-\frac{5}{3}\right) = -1$$

تنها گزینه‌ی دوم است که اگر به جای  $x$  آن یک قرار دهید حاصل برابر  $-1$  می‌شود.

داخل پرانتز اول مخرج مشترک می‌گیریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۹۵



$$(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1)(\sqrt[3]{x^2} - 1) = 2\sqrt[3]{x} = \frac{(\sqrt[3]{x^2} + 1 + \sqrt[3]{x^2})(\sqrt[3]{x^2} - 1)}{\sqrt[3]{x^2}} = 2\sqrt[3]{x} \xrightarrow{\text{اتحاد چاق و لاغر}} \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{x^2}} = 2\sqrt[3]{x} \Rightarrow x^2 - 1 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

می‌دانیم معادله درجه ۲ به صورت  $x^2 - sx + p$  است. در واقع مجموع ریشه‌ها ۲ خواهد بود.  
داریم:

$$x_1 + x_2 = s = 2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۹۶

$$a = \sqrt[4]{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt[4]{(2 - \sqrt{3})^2} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

اکنون با استفاده از اتحادهای  $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$  و  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$  به حل مسئله می‌پردازیم:

$$\begin{aligned} (a + \frac{1}{a} + \sqrt{2})^2 (a + \frac{1}{a} - \sqrt{2})^2 &= [(a + \frac{1}{a})^2 - (\sqrt{2})^2]^2 = (a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 - 2)^2 = (2 - \sqrt{3} + \underbrace{\frac{1}{2 - \sqrt{3}}}_{\text{گویا می‌کنیم}})^2 = (2 - \sqrt{3} + \underbrace{\frac{1}{2 - \sqrt{3}} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}}_{4-3})^2 \\ &= (2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3})^2 = 4^2 = 16 \end{aligned}$$

طبق فرض داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۹۷

$$\begin{aligned} (2 - \sqrt{3})^{\frac{2}{3}} \times (2 + \sqrt{3})^{\frac{2}{3}} \times \sqrt[3]{\sqrt{2}} &= \sqrt[3]{A} \xrightarrow{\text{به توان سه}} (2 - \sqrt{3})^{\frac{2}{3}} (2 + \sqrt{3})^{\frac{2}{3}} \times \sqrt{2} = A \\ \Rightarrow (2 - \sqrt{3})^{\frac{1}{3}} \times (2 - \sqrt{3})^{\frac{1}{3}} \cdot (2 + \sqrt{3})^{\frac{1}{3}} \times \sqrt{2} &= A \\ \Rightarrow A &= ((2 - \sqrt{3})^{\frac{1}{3}} \times \sqrt{2}) \times (2 - \sqrt{3})^{\frac{1}{3}} = \sqrt{2 - 2\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{2 + 1 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = |\sqrt{3} - 1| = \sqrt{3} - 1 \end{aligned}$$



# پاسخنامه کلیبی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴

۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴
۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴
۴۱	۱	۲	۳	۴
۴۲	۱	۲	۳	۴
۴۳	۱	۲	۳	۴
۴۴	۱	۲	۳	۴
۴۵	۱	۲	۳	۴
۴۶	۱	۲	۳	۴
۴۷	۱	۲	۳	۴
۴۸	۱	۲	۳	۴
۴۹	۱	۲	۳	۴
۵۰	۱	۲	۳	۴

۵۱	۱	۲	۳	۴
۵۲	۱	۲	۳	۴
۵۳	۱	۲	۳	۴
۵۴	۱	۲	۳	۴
۵۵	۱	۲	۳	۴
۵۶	۱	۲	۳	۴
۵۷	۱	۲	۳	۴
۵۸	۱	۲	۳	۴
۵۹	۱	۲	۳	۴
۶۰	۱	۲	۳	۴
۶۱	۱	۲	۳	۴
۶۲	۱	۲	۳	۴
۶۳	۱	۲	۳	۴
۶۴	۱	۲	۳	۴
۶۵	۱	۲	۳	۴
۶۶	۱	۲	۳	۴
۶۷	۱	۲	۳	۴
۶۸	۱	۲	۳	۴
۶۹	۱	۲	۳	۴
۷۰	۱	۲	۳	۴
۷۱	۱	۲	۳	۴
۷۲	۱	۲	۳	۴
۷۳	۱	۲	۳	۴
۷۴	۱	۲	۳	۴
۷۵	۱	۲	۳	۴

۷۶	۱	۲	۳	۴
۷۷	۱	۲	۳	۴
۷۸	۱	۲	۳	۴
۷۹	۱	۲	۳	۴
۸۰	۱	۲	۳	۴
۸۱	۱	۲	۳	۴
۸۲	۱	۲	۳	۴
۸۳	۱	۲	۳	۴
۸۴	۱	۲	۳	۴
۸۵	۱	۲	۳	۴
۸۶	۱	۲	۳	۴
۸۷	۱	۲	۳	۴
۸۸	۱	۲	۳	۴
۸۹	۱	۲	۳	۴
۹۰	۱	۲	۳	۴
۹۱	۱	۲	۳	۴
۹۲	۱	۲	۳	۴
۹۳	۱	۲	۳	۴
۹۴	۱	۲	۳	۴
۹۵	۱	۲	۳	۴
۹۶	۱	۲	۳	۴
۹۷	۱	۲	۳	۴